Задача 1. Розв’язати рівняння $\sum_{1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{2}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{4} = \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix}$$

…………………

$$\sum_{1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ x^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} & x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} \\ x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} & x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} \\ x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} & \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \left(x\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{3} \Rightarrow x > 0 \right)$$

Отже, $x = \frac{1}{2}$.

Задача 2. Задано, що $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$. Знайти $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}dx$.

Нехай $I_k = \int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-x^k\right)}{x}dx = \frac{1}{k}\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-y\right)}{y}dy$.

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}I_1\text{, а } I_3=\frac{1}{3}I_1=-\frac{2}{3}I=-\frac{\pi^2}{18}$$

Задача 3. Знайти всі тричі диференційовні на $(0;+\infty)$ функції, що задовольняють одночасно диференціальні рівняння $y''=2y^3$ і $y'''=-3xy^2y''$.

$$y''=2y^3 \;\Rightarrow\; y'''=6y^2y'$$
$$y'''=-3xy^2y''$$
$$6y^2y'=-3xy^2y''\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2y'=-3xy''\\ y=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{C_1}{x}+C_2\\ y\equiv 0\end{array}\right.$$

Задача 4. Нехай $p(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами. Довести, що многочлен $xp(x)-p'(x)$ має хоча б один дійсний корінь.

Нехай многочлен $p(x)$ є многочленом парного степеня, тоді $xp(x)$ і $p'(x)$ - многочлени непарного степеня. Рівняння $xp(x)-p'(x)=0$ є рівнянням непарного степеня – завжди має дійсний корінь.

Розглянемо випадок, коли многочлен $p(x)$ непарного степеня. Нехай $a_0=1$. Тоді існує такий його корінь x_0, що $p'(x_0)>0$. $P(x)=xp(x)-p'(x)$.
$P(x_0)=(x_0)\,p(x_0)-p'(x_0)<0$, тому має місце зміна знаку.