СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
НТУУ “КПІ”, ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОНІКИ, 2013
ПЕРШИЙ КУРС

Задача 1. Нехай $x^2+y^2=1$ - нескінченний круговий циліндр. Яку множину заповнюють фокуси еліпсів, утворених перетином циліндра площинами?

Задача 2. Довести, що об'єм опуклого многогранника, всі вершини якого мають раціональні координати, є раціональним числом.

Задача 3. Довести, що при $x^2+y^2+z^2=1$ справедлива нерівність

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} < 1.$$

Задача 4. Нехай $p(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами. Довести, що многочлен $xp(x)-p'(x)$ має хоча б один дійсний корінь.

Задача 5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідні вершини не були білими?

Задача 6. Числову послідовність $(a_n, n\ge 1)$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \qquad n \ge 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n.

СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ
НТУУ "КПІ", ФАКУЛЬТЕТ ЕЛЕКТРОНІКИ, 2013

СТАРШІ КУРСИ

Задача 1. Розв'язати рівняння $\sum_{1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Задано, що $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$. Знайти $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx$.

Задача 3. Знайти всі тричі диференційовні на $(0;+\infty)$ функції, що задовольняють одночасно диференціальні рівняння $y'' = 2y^3$ і $y''' = -3xy^2 y''$.

Задача 4. Нехай $p(x)$ - многочлен з дійсними коефіцієнтами. Довести, що многочлен $xp(x) - p'(x)$ має хоча б один дійсний корінь.

Задача 5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідні вершини не були білими?

Задача 6. Нехай $\mathcal{A}(a_1,\ldots,a_n)$ та $\mathcal{H}(a_1,\ldots,a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел $a_1,\ldots,a_n$. Які значення може набувати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}(a_1,\ldots,a_n)}{\mathcal{H}(a_1,\ldots,a_n)}$, якщо числова послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?