ФІОТ НТУУ "КПІ"
СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.
Перший курс

1. Дослідити систему на сумісність та знайти загальний розв'язок

$$\begin{cases} (2\lambda - 3)x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \\ (\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y + z = 2 \\ x + y + (\lambda - 1)z = 2 \end{cases}$$

2. На площині задано дві точки $A(-2;2)$, $B(2;5)$ та точку C взято на кривій $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$. Яке найбільше значення може мати площа ΔABC? Знайти координати точки C.

3. Побудувати графік функції

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1 + x^{2n}}.$$

4. Про функції f, g та $\dfrac{f}{g}$ відомо, що значення їх похідних в точці $x = 2013$ однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число $f(2013)$?

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Числову послідовність $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}},\ n \geq 1. \end{cases}$$

   Знайти формулу загального члена a_n.

ФІОТ НТУУ "КПІ"
СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2013 р.
Старші курси

1. Дослідити систему на сумісність та знайти загальний розв'язок

$$\begin{cases} (2\lambda - 3)x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \\ (\lambda - 1)x + (\lambda - 1)y + z = 2 \\ x + y + (\lambda - 1)z = 2 \end{cases}$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xdy - \left(2y + x^2 \operatorname{tg} \frac{y}{x^2}\right) dx = 0.$$

3. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

4. Про функції f, g та $\dfrac{f}{g}$ відомо, що значення їх похідних в точці $x = 2013$ однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число $f(2013)$?

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Нехай $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ та $\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел $a_1, \dots, a_n$. Які значення може набувати

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)}{\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)},$$

якщо числова послідовність $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?