Олімпіада ФМФ, перший курс

1. Скористаємося тим фактом, що якщо число ділиться на 9, то і його сума цифр теж ділиться на 9. Оскільки 2013! ділиться на 9, то й числа, отримані після кожного підсумовування, теж діляться на 9, а оскільки єдине додатне число з однієї цифри, яке ділиться на 9 – це 9, то отримана цифра може бути тільки 9.

2. Нехай $f'(2013) = g'(2013) = \left(\frac{f}{g}\right)'(2013) = t \neq 0$, а $g(2013) = m$, тоді $t = \frac{tm - t\cdot f(2013)}{m^2}$, звідки $f(2013) = m - m^2 \leq \frac{1}{4}$ (оскільки $m^2 - m + \frac{1}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$). Кожне значення $d \in (-\infty; \frac{1}{4}]$ досягається: $f(x) = ax - 2013^2a^2$, $g = ax$, де $a \neq 0$ – розв'язок рівняння $2013a - (2013a)^2 = d$.

3. Оскільки за теоремою Вієта сума коренів рівняння $x^3 - 2013x - 2013 = 0$ дорівнює 0, то, додаючи до верхнього рядка два інших, отримаємо вироджену матрицю з верхнім рядком із нулів, а отже визначник дорівнює 0.

4. Оскільки кут є тупим тоді і тільки тоді, коли його косинус від'ємний, а косинус кута між векторами з координатами (x_i, y_i) і (x_k, y_k) дорівнює $\frac{x_i x_k + y_i y_k}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}$, то при $n \geq 4$ маємо щонайменше чотири прямі (які проходять через початок координат і точки з координатами (x_i, y_i)), кут між кожними двома сусідніми з яких більше $\frac{\pi}{2}$, що неможливо. Якщо $n = 3$, то прикладом будуть координати таких довільних трьох точок, що кути між прямими, які з'єднують ці точки з початком координат, дорівнюють $\frac{2\pi}{3}$.

Олімпіада ФМФ, старші курси

1. Див. перший курс №2.

2. Позначимо $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Тоді $F(x)$ – неспадна неперервно диференційовна функція, яка прямує до нескінченності, оскільки якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = a > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{a} > 0$, але тоді має бути $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \infty$. Тоді $\lim_{x\to+\infty}\left(F^2(x)\right)' = \lim_{x\to+\infty} 2F(x)F'(x) = 2$ і за правилом Лопіталя $\lim_{x\to+\infty}\frac{F^2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(F^2(x)\right)'}{1} = 2$; тому $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)\sqrt{x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)F(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Див. перший курс №4.

4. Запишемо умови Коші-Рімана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. За умовою $v \equiv 0$; звідси $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$; звідси $u(x+iy)$ не змінюється при зміні x та y, тобто є константою. Отже, ця функція обов'язково є константою. Будь-яка константа, очевидно, підходить.