<u>*Олімпіада ФМФ, перший курс.*</u>

1. В десятковому запису числа 2013! порахували суму цифр, у одержаної суми знову порахували суму цифр і так далі, поки не одержали число з однієї цифри. Що це за цифра?

2. Про функції f, g *та* $\frac{f}{g}$ *відомо, що значення їх похідних в точці* $x = 2013$ *однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число* $f(2013)$*?*

3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, *де* α, β, γ *– корені рівняння* $x^3 = 2013(x+1)$.

4. Для яких $n \in \mathbb{N}$ *існують такі* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *що* $x_i x_k + y_i y_k < 0$ *для будь-яких* $1 \le i < k \le n$*?*

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Числову послідовність $(a_n, n \ge 1)$ *задано умовами*

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}, \qquad n \ge 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n.

Олімпіада ФМФ, старші курси.

1. Про функції f, g *та* $\frac{f}{g}$ *відомо, що значення їх похідних в точці* $x = 2013$ *однакові і не дорівнюють нулеві. Які значення може набувати число* $f(2013)$ *?*

2. Нехай $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *– неперервна функція, для якої*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\int_0^x f(t)\,dt = 1.$$

Довести, що існує границя $\lim_{x\to+\infty} f(x)\sqrt{x}$ *і знайти її.*

3. Для яких $n \in \mathbb{N}$ *існують такі* $x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}$, *що* $x_i x_k + y_i y_k < 0$ *для будь-яких* $1 \le i < k \le n$ *?*

4. Знайти всі диференційовні функції комплексного змінного, які набувають лише дійсних значень.

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Нехай $\mathcal{A}(a_1,\ldots,a_n)$ *та* $\mathcal{G}(a_1,\ldots,a_n)$ *означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел* $a_1,\ldots,a_n$. *Які значення може набувати* $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathcal{A}(a_1,\ldots,a_n)}{\mathcal{G}(a_1,\ldots,a_n)}$, *якщо числова послідовність* $(a_n, n \ge 1)$ *є арифметичною прогресією?*