

ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ»
З МАТЕМАТИКИ 2013 р.
ФММ

Перший курс

1. Дано три попарно неколінеарних вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, таких, що вектор $\vec{a} + \vec{b}$ буде колінеарним вектору \vec{c} , а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ - колінеарний вектору \vec{a} . Знайти довжину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Знайти всі такі матриці A другого порядку, для яких виконується рівність: $A^2 = O$, де O - нульова матриця.

3. Знайти границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n + b}.$$

4. Довести, що дотична до графіку функції $xy = a^2$, утворює з осями координат трикутник зі сталою площею.

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Числову послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n .

ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ»
З МАТЕМАТИКИ 2013 р.
ФММ

Старші курси

1. Дано три попарно неколінеарних вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, таких, що вектор $\vec{a} + \vec{b}$ буде колінеарним вектору \vec{c} , а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ - колінеарний вектору \vec{a} . Знайти довжину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Знайти всі такі матриці A другого порядку, для яких виконується рівність: $A^2 = O$, де O - нульова матриця.

3. Є 10000000 монет. Серед них є лише одна монета, в якій герб з обох сторін, а інші - звичайні. Вибрану навмання монету підкидають 10 разів, причому при всіх підкиданнях вона падає гербом доверху. Яка ймовірність того, що вибрали монету з двома гербами?

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \int_0^x (te^t + \cos t) dt.$$

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Нехай $A(a_1, \dots, a_n)$ та $H(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел a_1, \dots, a_n . Які значення може набувати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_1, \dots, a_n)}{H(a_1, \dots, a_n)}$, якщо числова послідовність $(a_n, n \geq 1)$ є арифметичною прогресією?