I тур XXVIII олімпіади з математики (ІСЗЗІ)

I курс

1. Обчислити визначник $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язок:

Від першого стовпчика віднімемо третій, винесемо спільний множник, маємо:

$$\Delta_n = (1-a^2)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ -1 & a & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a^{n-3} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1-a^2)\Delta_{n-1}, \text{ де } \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \text{ бо}$$

розкладаючи визначник за елементами першого стовпчика, маємо всі нулі, за винятком A_{11}, оскільки для всіх інших A_{1j}, $j \neq 1,\ j \neq 2$ два перших рядки – лінійно залежні.

Далі, використовуючи рекурентне співвідношення $\Delta_n = (1-a^2)\Delta_{n-1}$, маємо, по індукції $\Delta_n = (1-a^2)\Delta_{n-1} = (1-a^2)^2\Delta_{n-2} = \ldots = (1-a^2)^{n-1}\Delta_1 = (1-a^2)^{n-1}$.

Відповідь: $\Delta_n = (1-a^2)^{n-1}$.

2. Знайти рівняння кола найменшого радіуса, яке дотикається до параболи $y = x^2 + 2x + 2$ та прямої $y = 2x - 3$.

Розв'язок:

$$\begin{cases} L: y = x^2 + 2x + 2 \\ l: y = 2x - 3 \end{cases}$$

1) K - дотична до L, яка паралельна l, тоді $y'(x_0) = 2x_0 + 2 = 2 = k_l \Rightarrow x_0 = 0;\ y_0 = 2$, тобто $M_0(0;2)$.

2) Пряма $M_0A \perp l$, $k_{M_0A} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{2}$. Тоді $M_0A: x + 2y - 4 = 0$.

3) $A = l \cap M_0A$, тобто $A: \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2;1)$.

4) C - середина M_0A, центр кола: $C(1;\frac{3}{2})$.

5) $M_0A = 2R = dist(M_0, l) = \frac{|2\cdot 0 - 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$, тобто $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

6) Нарешті, рівняння кола $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$, тобто $(x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$.

3. Яка поверхня є геометричним місцем точок , модуль різниці відстаней від кожної точки якої до точок $F_1(0;-5;0)$ та $F_2(0;5;0)$ дорівнює 6? Знайти рівняння такої поверхні.

Розв'язок:

Нехай $M(x;y;z)\in\Pi$, де Π - шукана поверхня. Тоді $\left|r_1-r_2\right|=6$, де $r_1=\sqrt{x^2+(y+5)^2+z^2}$, $r_2=\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}$.

З одного боку: $\left|r_1^2-r_2^2\right|=6\left|r_1+r_2\right|=6(r_1+r_2)$, або

$$9r_1r_2=41y^2-9x^2-9z^2-225 \qquad (1),$$

з іншого боку: $r_1^2-2r_1r_2+r_2^2=36$, або

$$9r_1r_2=9x^2+9y^2+63 \qquad (2).$$

Тепер із (1) та (2) маємо: $18x^2-32y^2+18z^2+288=0$, або $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$.

Відповідь: $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$, двопорожнинний гіперболоїд.

4. Дослідити функцію $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ на неперервність. Побудувати схематичний графік в околі точок розриву.

Розв'язок:

Знайдемо D_f : $\begin{cases} x\neq 0 \\ \dfrac{1+x}{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(0;1)$. Функція парна.

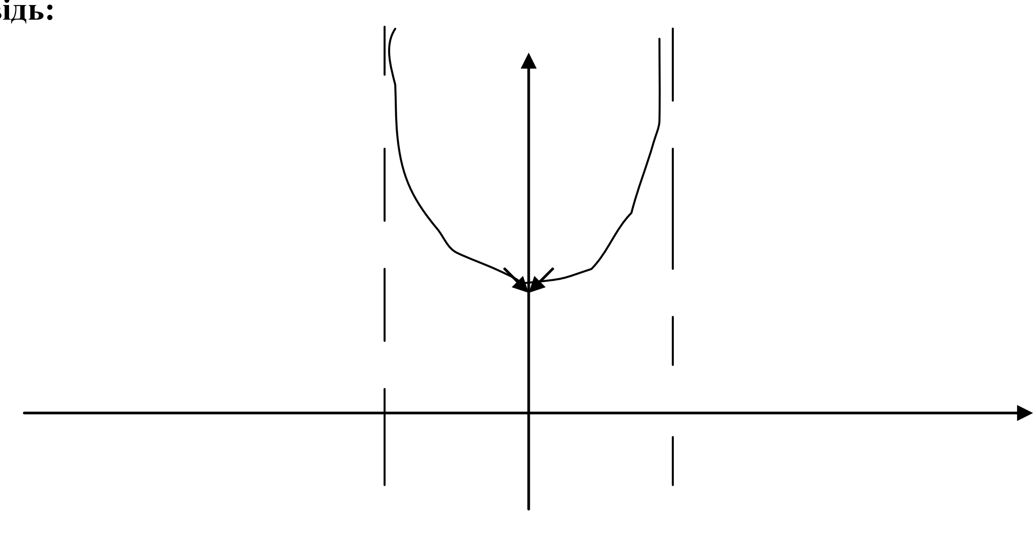
Розглянемо $x_1=-1;\ x_2=0;\ x_3=1$.

1) $x=-1;\quad \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\dfrac{1}{-1}\ln\dfrac{1+(-1+0)}{1-(-1+0)}=+\infty$ - односторонній розрив II роду;

2) $x=0;\quad \lim\limits_{x\to 0\pm 0}\ln\left[(1+\dfrac{2x}{1-x})^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2x}{x(1-x)}}=\ln e^2=2$ - усувний розрив I роду;

3) $x=1;\quad \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=+\infty$ - односторонній розрив II роду.

Відповідь:



Старші курси

1. Обчислити визначник: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \cdots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \cdots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$.

Розв'язок:

Винесемо із кожного стовпчика, починаючи з другого, відповідно 2, 3, …, n, тоді маємо: $\Delta_n = n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & \cdots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2n-2} & 3^{2n-2} & \cdots & n^{2n-2} \end{vmatrix}$, але це відомий визначник Вандермонда з $a_1 = 1^2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 3^2$, …, $a_n = n^2$, тобто $\Delta_n = n!V_n(1^2, 2^2, \cdots, n^2) = n!\prod\limits_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j) =$

$= n!\prod\limits_{1\le m<k\le n}(k^2 - m^2) = n!\prod\limits_{1\le m<k\le n}(k-m)(k+m) = n!(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\cdots((n-1)-(n-2))((n-1)+(n-2))\cdot$

$\cdot(n-(n-2))(n+(n-2))(n-(n-1))(n+(n-1)) = 1!3!5!\cdots(2n-1)!$.

Відповідь: $\Delta_n = n!\prod\limits_{1\le m<k\le n}(k^2 - m^2) = 1!3!5!\cdots(2n-1)!$.

2. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2n})\right]$ при $|x| < 1$.

Розв'язок:

І спосіб.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2n})\right] = \frac{1}{1-x}\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})\right] =$

$= \frac{1}{1-x}\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n}) = \frac{1}{1-x}\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{4n}) = \frac{1}{1-x}$, при $|x| < 1$.

ІІ спосіб.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\cdots\cdot(1+x^{2n})\right] = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1+2+4+\cdots+2n}) = \frac{1}{1-x}$, бо при $|x| < 1$ - це сума нескінченної спадної геометричної прогресії з $b_1 = 1$ та $q = x, |q| < 1$.

Відповідь: $\frac{1}{1-x}$, при $|x| < 1$.

3. Знайти $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}$, попередньо обчисливши інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx$.

Розв'язок:

Двічі інтегруючи частинами, маємо:

$$I = \left(-\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2+1)} + \frac{e^{-x^2}}{x}\right)\Bigg|_0^\infty + 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \left|\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right| = \frac{xe^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{2}}\Bigg|_0^\infty + 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0 + \sqrt{\pi}.$$

Відповідь: $I = \sqrt{\pi}$.

4. Використовуючи ознаки збіжності ряду, довести збіжність такого числового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots.$$

Розв'язок:

Маємо: $\sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4} = a_1$, $a_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2(1-\cos\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{8}$,

$a_3 = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2(1+\cos\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}} = 2\sin\frac{\pi}{16}$, …,

$a_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ (метод математичної індукції).

Тоді, за ознакою збіжності числового ряду (ознака Даламбера), отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2} < 1 \text{ - ряд збіжний.}$$

Відповідь: ряд збіжний.