

1 ТУР СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ»

3 МАТЕМАТИКИ 2013 р.

1 курс

1. Обчислити $\Delta_n = |a_{ij}| = |a^{|i-j|}|$, де $1 \leq i, j \leq n$, тобто

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \dots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & a & 1 \end{vmatrix}$$

2. Знайти рівняння кола найменшого радіуса, яке дотикається до параболи $y = x^2 + 2x + 2$ та прямої $y = 2x - 3$.

3. Яка поверхня є геометричним місцем точок, модуль різниці відстаней від кожної точки якої до точок $F_1(0; -5; 0)$ та $F_2(0; 5; 0)$ дорівнює 6? Знайти рівняння такої поверхні.

4. Дослідити функцію $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$ на неперервність. Побудувати схематичний графік в околі точок розриву.

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Числову послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n .

1 ТУР СТУДЕНТСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ»

З МАТЕМАТИКИ 2013 р.

старші курси

1. Обчислити визначник: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}$

2. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) \right]$ при $|x| < 1$

3. Знайти $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}$, попередньо обчисливши інтеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.

4. Використовуючи ознаки збіжності ряду, довести збіжність такого числового ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Нехай $A(a_1, \dots, a_n)$ та $H(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел a_1, \dots, a_n . Які значення може набувати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_1, \dots, a_n)}{H(a_1, \dots, a_n)}$, якщо числа послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?