



І курс ІТС
Розв'язання задач

1.

$$y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & x^2-a^2 & 0 \\ a & a^2 & 1 \\ b-a & b^2-a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\left((x-a)(b^2-a^2) - (x^2-a^2)(b-a)\right) = \\ = (b-a)(x-a)(x-b).$$

Графіком функції буде парабола:

$b > a$ , $b < a$ .

2. Нехай $\bar{x} = (x; y; z)$. Тоді $\bar{x}(\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) = 3 \Leftrightarrow x + 2y - z = 3$.

$$\bar{x} \times (\bar{j} - \bar{i} + 2\bar{k}) = \lambda \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2y-z)\bar{i} - (2x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k} = \lambda \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}.$$

Отже,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2y - z = \lambda \\ -2x - z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}, \lambda = 3, \bar{x} = (0; 1; -1)$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{\pi \sqrt{n}}{\sqrt{n+2013}} = \left| \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \pi \left(\frac{\sqrt{n+2013} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2013}} \right) = \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \pi \left(\frac{2013}{\sqrt{n+2013}(\sqrt{n+2013} + \sqrt{n})} \right) = \frac{2013^2 \pi^2}{4}$$

$$4. f\left(\frac{x}{x+2}\right) \equiv x \Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2.$$

Нехай $\frac{x}{x+2} = u$. Тоді, за формулою похідної складеної функції

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x = f'(u) \cdot \left(\frac{x}{x+2}\right)' = f'(u) \cdot \frac{2}{(x+2)^2} \equiv 1 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(x+2)^2}{2} \Big|_{x=2} = 8.$$