Старші курси ІТС

Розв‘язання задач

1. Запишемо параметричне рівняння кола $\left|z-2i\right|=1 \;\Rightarrow\; z=2i+e^{i\varphi}$.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції

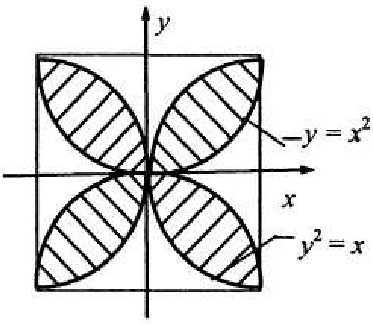
$$f\left(z\right)=\left|z-\sqrt{3}-i\right|=\left|2i+e^{i\varphi}-\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{5-4\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)} \;\Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&\min_{\left|z-2i\right|=1} f\left(z\right)=1;\ \varphi=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,\\ &\max_{\left|z-2i\right|=1} f\left(z\right)=3;\ \varphi=\frac{5\pi}{6}\Rightarrow z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i.\end{aligned}\right.$$

2.

$$x^2y^2+x^4y^4=x^6+y^6 \quad\Leftrightarrow\quad \left(y^2-x^4\right)\left(x^2-y^4\right)=0\Rightarrow\left[\begin{aligned}&y=\pm x^2\\ &x=\pm y^2\end{aligned}\right.\Rightarrow$$

$$S=4\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{4}{3}.$$



3. $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos\left(n+1\right)xdx=\int_0^\pi \sin^{n-1}x\cos x\cos nxdx-\int_0^\pi \sin^n x\sin nxdx=$$

$$=\int_0^\pi \cos nxd\left(\sin^n x\right)-\int_0^\pi \sin^n x\sin nxdx=\left(\frac{\sin^n x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi+\int_0^\pi \sin^n x\sin nxdx\right)-$$

$$-\int_0^\pi \sin^n x\sin nxdx=\frac{\sin^n x}{n}\cos nx\Big|_0^\pi=0.$$

4. Домножимо праву і ліву частину на $\left(1-x\right)$

$$\ln\left(1+x\right)=\left(1-x\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Розкладемо в рад Маклорена $\ln\left(1+x\right)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-a_{n-1}\right)x^n+a_0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n} \;\Rightarrow\; a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k}\to\ln 2, n\to\infty.$$