

Олімпіада 2013

ІТС

І курс

1. Побудувати графік функції $y = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix}$, ($a \neq b$).

2. Для якого $\lambda \in \mathbb{R}$ існує вектор \bar{x} , який задовольняє умовам:

$$\bar{x}(\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) = 3, \bar{x} \times (\bar{j} - \bar{i} + 2\bar{k}) = \lambda\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}. \text{ Знайти } \bar{x}.$$

3. Знайти границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin^2 \frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n+2013}}$.

4. Знайти $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, якщо $f\left(\frac{x}{x+2}\right) \equiv x$.

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Числову послідовність $\{a_n\}, n \geq 1$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n .

Олімпіада 2013

ІТС

Старші курси

1. На кривій $|z - 2i| = 1$ знайти точки, для яких вираз $|z - \sqrt{3} - i|$ набуває найбільшого та найменшого значень.

2. Знайти площу фігури, обмеженої кривою:

$$x^2y^2 + x^4y^4 = x^6 + y^6.$$

3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} \sin^{2012} x \cos(2014x) dx$.

4. Нехай $\frac{\ln(1+x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розклад в степеневий ряд. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?

6. Нехай $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ та $\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел a_1, \dots, a_n . Які значення може

набувати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)}{\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)}$, якщо числа послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?