Розв’язки 1 курс

1. Нехай ABC – це заданий трикутник та BD – його висота. Вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ колінеарні, тому знайдеться таке число α, що $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AC}$. За правилом додавання векторів по схемі трикутника маємо:

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.$$

Оскільки BD – висота, то вектори $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$ ортогональні, звідки $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. Тому $\alpha=\frac{1}{2}$, $\overrightarrow{BD}=(-3,\,-3,\,1)$ та $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{19}$.

2. Пусть $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — искомая матрица.

Тогда $A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} a^2+bc=0, \\ ab+bd=0, \\ ca+dc=0, \\ cb+d^2=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0, \\ b(a+d)=0, \\ c(a+d)=0, \\ cb+d^2=0. \end{cases}$

Так как $b\neq 0$ и $c\neq 0$, из второго и третьего уравнения получаем $d=-a$, а из первого находим $b=-\frac{a^2}{c}$. Подставив в последнее уравнение, получим тождество $c\cdot\left(-\frac{a^2}{c}\right)+(-a)^2\equiv 0$, т.е. c может быть любым ненулевым числом. Таким образом, все искомые матрицы имеют вид $\begin{bmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix}$, $a,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^{\cos x}-1}{\cos x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{c} \alpha\sim\ln(1+\alpha),\ \alpha\to 0 \\ (\cos x)^{\cos x}-1\sim\ln(1+(\cos x)^{\cos x}-1) \\ \cos x-1\sim\ln(1+\cos x-1) \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln((\cos x)^{\cos x})}{\ln(\cos x)}=1$$

4. Прирівняємо рівняння кривої та прямої:

$$x^4 + 3x^2 + 2x = 2x - 1.$$

Отримане рівняння не має розв'язків в множині дійсних чисел, тому крива та пряма не перетинаються.

Відстань між кривою та прямою буде найменшою коли дотична до кривої паралельна заданій прямій, тобто коли кутовий коефіцієнт дотичної до графіку кривої дорівнює 2.

$$k_{дот} = y'(x_0) = 3x^3 - 6x + 2\Big|_{x=x_0} = 2.$$

Тому точка дотику, в якій дотична паралельна прямій -- $(0,0)$, а відстань від цієї точки до прямої $d_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Розв'язки задач 5 та 6 див. у додатковому файлі.