1. Нехай $O(x,y)$ -- центр шуканого кола. Коло дотикається одночасно до трьох прямих коли відстань від центру О до кожної прямої є величина стала і дорівнює радіусу кола. Тому:

$$|y| = |y-4| = \frac{|3x+4y+5|}{5} = R.$$

Звідки $R=2$ та $O_1(-1,2)$, $O_2(-\frac{23}{3},2)$. Отримаємо два кола:

$$\left[\begin{array}{l} (\mathrm{x}+1)^2+(y-2)^2=4, \\ (x+\frac{23}{3})^2+(y-2)^2=4. \end{array}\right.$$

2. Пусть $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ — искомая матрица.

Тогда $A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$.

Получим систему уравнений $\begin{cases} a^2+bc=0, \\ ab+bd=0, \\ ca+dc=0, \\ cb+d^2=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=0, \\ b(a+d)=0, \\ c(a+d)=0, \\ cb+d^2=0. \end{cases}$

Так как $b \neq 0$ и $c \neq 0$, из второго и третьего уравнения получаем $d=-a$, а из первого находим $b=-\dfrac{a^2}{c}$. Подставив в последнее уравнение, получим тождество $c\cdot\left(-\dfrac{a^2}{c}\right)+(-a)^2 \equiv 0$, т.е. c может быть любым ненулевым числом. Таким образом, все искомые матрицы имеют вид $\begin{bmatrix} \mathrm{a} & -\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{c}} \\ \mathrm{c} & -\mathrm{a} \end{bmatrix}$, $a, c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3. $$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{1/2} \arcsin x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)d(\arcsin x) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\arcsin^2 x - \frac{\arcsin^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{7\pi^3}{6^4}.$$

4. Точки кола $|z-2i| = 1$ можна подати у вигляді $z = 2i + e^{i\varphi}$. Для таких точок квадрат модуля $\left|z-\sqrt{3}-i\right|$ приймає вигляд

$$\left|z-\sqrt{3}-i\right|^2 = \left|2i + \cos\varphi + i\sin\varphi - \sqrt{3} - i\right|^2 =$$

$$= 5 + 4\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right).$$

Він буде максимальним при $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ та мінімальним при $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Тому $z_{\max} = 2i + e^{\frac{5\pi}{6}i} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} + 5i\right)$ та $z_{\min} = 2i + e^{-\frac{\pi}{6}i} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 3i\right)$.

При цьому $\left|z-\sqrt{3}-i\right|_{\max} = 3$, $\left|z-\sqrt{3}-i\right|_{\min} = 1$.

Розв'язки задач 5 та 6 дивись у додатковому файлі.