

Факультетська олімпіада НТУУ «КПІ» 2013

РТФ

Перший курс

1. У трикутнику ABC $\overline{AB} = (4, 2, -1)$ та $\overline{AC} = (2, -2, 0)$. Знайти координати та довжину висоти \overline{BD} .
2. Знайти всі матриці A розміру 2×2 для яких $A^2 = O$ (тут O – це нульова матриця).
3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\cos x} - 1}{\cos x - 1}$.
4. Довести, що крива $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не перетинається з прямою $y = 2x - 1$ і знайти відстань між їх найближчими точками.
5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?
6. Числову послідовність $(a_n, n \geq 1)$ задано умовами

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена a_n .

Факультетська олімпіада НТУУ «КПІ» 2013

РТФ

Старші курси

1. У трикутнику ABC $\overline{AB} = (4, 2, -1)$ та $\overline{AC} = (2, -2, 0)$. Знайти координати та довжину висоти \overline{BD} .
2. Скласти рівняння кола, що дотикається до прямих $y = 0$, $y = 4$ та $3x + 4y + 5 = 0$.
3. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.
4. На колі $|z - 2i| = 1$ знайти точки, для яких модуль $|z - \sqrt{3} - i|$ а) найбільший, б) найменший.
5. Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідніх вершини не були білими?
6. Нехай $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ та $\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)$ означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел a_1, \dots, a_n . Які значення може набувати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)}{\mathcal{H}(a_1, \dots, a_n)}$, якщо числова послідовність $(a_n, n \in \mathbb{N})$ є арифметичною прогресією?