

Студентська математична олімпіада

ФАКС—2015

1-й курс

1. Для всіх значень параметра k розв'яжіть систему

$$\begin{cases} x + kz = 2, \\ 2x + ky + (2k + 1)z = 4, \\ x + ky + (2k + 2)z = k + 2. \end{cases}$$

2. У матричному рівнянні

$$A^{-1}X^T B - 2A^{-1} = E_3$$

матриці A, B — відомі оборотні матриці 3-го порядку, E_3 — одинична матриця 3-го порядку.

1. Виразіть матрицю X через матриці A та B .

2. З'ясуйте, чи існує матриця X^{-1} , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Обчисліть $z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}}$, якщо $z + \frac{1}{z} = 1$.

4. Знайдіть значення параметрів a та b , якщо відомо, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{ax + b}{2015x + 7} \right)^{5x} = e.$$

5. Нехай A — множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість різних цифр в запису числа n . Знайдіть $\sum_{n \in A} d(n)$.

6. Знайдіть усі неперервні функції, які для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ справджують співвідношення

$$f(x + y) = e^{xy} f(x) f(y).$$

Студентська математична олімпіада

ФАКС—2015

Старші курси

1. Розв'яжіть задачу Коші:

$$(y')^2 - (x^2 + y)y' + x^2y = 0, y(1) = 1.$$

2. Знайдіть суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

3. Обчисліть $z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}}$, якщо $z + \frac{1}{z} = 1$.

4. Обчисліть $\iint_D |y^2 - x^2| dx dy$, якщо область D — круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

5. Нехай A — множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість різних цифр в запису числа n . Знайдіть $\sum_{n \in A} \frac{1}{d(n)}$.

6. Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел $n_k, k \geq 1$, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k!} = \sqrt[2015]{2015}?$$