

# Факультетська олімпіада НТУУ «КПІ» 2014

## ФБМІ

1. Визначте найменшу відстань між точками графіків функцій  $y = x^2 + 2015$  та  $y = \sqrt{x - 2015}$ .

2. Визначте функцію  $f(x)$ , якщо  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 3f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$ .

3. Обчисліть суму  $\sum_{n=1}^{2015} \frac{n^n - (n+1)^n}{n!}$ .

4. У координатній площині  $Oxy$  побудуйте криву, задану параметрично рівняннями  $x = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{t}{1+t^2}$ .

5. (1 курс) Нехай  $A$  – множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для  $n \in A$  позначимо через  $d(n)$  кількість різних цифр в запису числа  $n$ . Знайти  $\sum_{n \in A} d(n)$ .

6. (1 курс) Знайти всі неперервні функції, які для всіх  $x, y \in \mathbf{R}$  задовольняють співвідношенню  $f(x+y) = e^{-xy} f(x) f(y)$ .

5. (Старші курси) Нехай  $A$  – множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для  $n \in A$  позначимо через  $d(n)$  кількість різних цифр в запису числа  $n$ . Знайти  $\sum_{n \in A} \frac{1}{d(n)}$ .

6. (Старші курси) Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел  $(n_k, k \geq 1)$ , що  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_k)!} = \sqrt[2015]{2015}$ ?