

ФМФ НТУУ "КПІ"
СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2015 р.
Перший курс

1. Нехай n — фіксоване натуральне число. Обчислити A^n , якщо

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

2. Точки A, B, C не лежать на одній прямій. З'ясувати, за яких значень параметра λ існує така точка M , що

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

3. Побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[x]{1 + \frac{[x]}{n}} - 1 \right), \quad x > 0.$$

Тут і в наступній задачі через $[x]$ позначено цілу частину числа $[x]$.

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{[x]}{x} \right)^x$ та $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{[x]}{x} \right)^x$.

5. Нехай A — множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість *різних* цифр в запису числа n . Знайти

$$\sum_{n \in A} d(n).$$

6. Знайти всі неперервні функції, які для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняють співвідношенню

$$f(x + y) = e^{xy} f(x) f(y).$$

ФМФ НТУУ "КПІ"
СТУДЕНТСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, 2015 р.
Старші курси

1. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

2. Знайти $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, де

$$f(x) = \int_0^1 |\sqrt{u} - x| du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 2e^x.$$

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{[x]}{x} \right)^x$ та $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{[x]}{x} \right)^x$. Тут через $[x]$ позначено цілу частину числа $[x]$.

5. Нехай A — множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість *різних* цифр в запису числа n . Знайти

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{d(n)}.$$

6. Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел $(n_k, k \geq 1)$, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_k)!} = \sqrt[2015]{2015}?$$