ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ "КПІ"

З МАТЕМАТИКИ 2015 р.

ФММ

Перший курс

1. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}$ неколінеарні, S— площа трикутника, побудованого на цих векторах. Нехай вектор $\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$. Довести, що
$$S = \frac{1}{2}\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|}(\vec{b}, \vec{c}).$$

2. Нехай числа a, b, c — корені многочлена $x^3 - 3x^2 + 1$. Обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

3. Знайти границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\sqrt{n+1} - \cos\sqrt{n})$.

4. Довести, що для всіх $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ справедлива нерівність
$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} > 1 + \frac{x^2}{3}.$$

5. Нехай A — множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість різних цифр в запису числа n. Знайти $\sum\limits_{n\in A} d(n)$.

6. Знайти всі неперервні функції, які для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняють співвідношенню
$$f(x+y) = e^{xy} f(x) f(y).$$

ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ "КПІ"
З МАТЕМАТИКИ 2015 р.
ФММ

Старші курси

1. Нехай $a > 1$. Знайти границю
$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}^n .$$

2. Зобразити множину точок площини, координати яких задовільняють співвідношення
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - y^{2n}}{x^{2n} + y^{2n}} < 0.$$

3. Розв'язати задачу Коші
$$\left(y + 2\left(\frac{x}{y}\right)\ln y\right)dx + \left(2x + \left(\frac{x}{y}\right)^2\right)dy = 0, \quad y(2) = 1.$$

4. На столі лежать дві однакові на вигляд монети. Монета M_1 — симетрична,а друга M_2 — не симетрична, а саме: ймовірність отримати орла дорівнює $\frac{1}{3}$. Хтось бере навмання одну монету і підкидає її. Припустимо, що випав орел. Чому дорівнює ймовірність того, що вибрана навмання монета є симетричною?

5. Нехай A — множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість різних цифр в запису числа n. Знайти $\sum\limits_{n\in A} \frac{1}{d(n)}$.

6. Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, що
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_k)!} = \sqrt[2015]{2015}?$$