ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ

2015

ІСЗЗІ, РТФ, ФЕЛ (1 курс)

1. У еліпса та гіперболи спільні фокуси. Показати, що дотичні в точках перетину – перпендикулярні.

2. Знайти: $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

3. Довести нерівність: $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$, якщо $a+b+c=1$.

4. Довести, що рівняння $2^{x^2-x}=3\sin x$ має корені.

5. Нехай A – множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість *різних* цифр в запису числа n. Знайти $\sum\limits_{n\in A} d(n)$.

6. Знайти всі неперервні функції, які для всіх $x, y \in \mathbf{R}$ задовольняють співвідношенню $f(x+y)=e^{xy}f(x)f(y)$.

ФАКУЛЬТЕТСЬКА ОЛІМПІАДА НТУУ «КПІ» З МАТЕМАТИКИ

2015

ІСЗЗІ, РТФ, ФЕЛ (старші курси)

1. Знайти найкоротшу відстань між точками еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ та площини $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1$, якщо відомо, що точка $M(1,1,1)$ належить еліпсоїду.

2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$.

3. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos inx}{n!}$.

4. Знайти границю $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\sqrt{n}$.

5. Нехай A – множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n\in A$ позначимо через $d(n)$ кількість *різних* цифр в запису числа *n*. Знайти $\sum_{n\in A}\frac{1}{d(n)}$.

6. Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел $(n_k, k\ge 1)$, що $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n_k)!}=\sqrt[2015]{2015}$?