Олімпіада з математики 2015

ІТС

І курс

1. Нехай послідовність $\left\{a_n, n \geq 1\right\}$ задана співвідношенням:

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4}, n \geq 1.$$

Довести, що існує $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ і знайти цю границю.

2. Мішаний добуток векторів $\overline{a}, \overline{b}$ та $\overline{c}$:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = 2015.$$

Для якого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left(\left[\overline{a}, \overline{b} + \lambda \overline{c}\right], \overline{a} + \overline{b}\right) = 2015?$$

3. Нехай для матриць $A_{n \times n}$ та $B_{n \times n}$ виконується рівність

$$AB = A + B.$$

Знайти

$$\det\left(A - E\right) \cdot \det\left(B - E\right),$$

де E - одинична матриця розміром $n \times n$.

4. Знайти $f'\left(\dfrac{1}{2015}\right)$, якщо $f\left(\dfrac{x}{x + 2014}\right) \equiv x$.

5. Нехай A – множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість *різних* цифр в запису числа n. Знайти $\sum\limits_{n \in A} d(n)$.

6. Знайти всі неперервні функції, які для всіх $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняють співвідношенню $f\left(x + y\right) = e^{xy} f\left(x\right) f\left(y\right)$.

Математична олімпіада 2015

ІТС

Старші курси

1. Відомо, що число $z \in \mathbb{C}$ задовольняє співвідношення

$$z+\frac{1}{z}=1\,.$$

Знайти

$$z^{2015}+\frac{1}{z^{2015}}\,.$$

2. Знайти x розв‘язавши рівняння

$$3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^n}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\left(\arcsin x\right)^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\,.$$

3. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1+\operatorname{arctg}^3 x+\sqrt{1+\operatorname{arctg}^6 x}}\,.$$

4. Для яких $\alpha \in \mathbb{R}$ розв‘язок рівняння

$$y''+y=x,\, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\alpha$$

буде неспадною функцією $\forall x \in \mathbb{R}$?

5. Нехай A– множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для $n \in A$ позначимо через $d(n)$ кількість *різних* цифр в запису числа n. Знайти $\sum\limits_{n\in A}\frac{1}{d(n)}$.

6. Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел $\left(n_k, k \geq 1\right)$, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n_k\right)!}=\sqrt[2015]{2015}$?