МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ, 2007

ПОСІБНИК ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Київ
2007

Математичні олімпіади, 2007 : Посібник із розв'язання задач / Уклад.: В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський. - К., 2007. - 28 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ "КПІ"
(Протокол № __ від ________ 2007 р.)

Математичні олімпіади, 2007

ПОСІБНИК ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Укладачі: *Булдигін Валерій Володимирович*
Гайдей Віктор Олександрович
Жук Віктор Андрійович
Орловський Ігор Володимирович

Відповідальний редактор *З.П. Ординська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Ю.П. Буценко,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Передмова

Київський політехнічний інститут має славні традиції проведення математичних олімпіад, а його студенти і, в першу чергу, студенти ФТІ здобували найвищі місця в державних, міжнародних та світових олімпіадах.

Тому не дивно, що олімпіада 2006/2007 н.р., яка проводилась у березні, в рамках I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для студентів вищих навчальних закладів, привернула увагу студентів різних курсів та факультетів, і близько 300 з них прийшли перевірити свої сили та знання з математики.

Найбільші делегації представили факультети з високим рівнем математичної підготовки: ФМФ, ФІОТ, ІПСА, ФПМ, ФЕЛ, ФТІ.

Переможцями олімпіади стали:

О.В. Рибак (ФТІ, V курс) – I місце в абсолютному заліку (38 із 40 балів) та I місце серед студентів старших курсів; *Р.Р. Гамалія* (ФТІ, II курс) – II місце в абсолютному заліку та I місце серед студентів II курсу; *М.В. Козленко* (ФПМ, I курс) – III місце в абсолютному заліку та I місце серед студентів I курсу; *О.В. Чеховський* (ФІОТ, I курс) – II місце серед студентів I курсу; *В.В. Зусько* (ФЕЛ, I курс) – III місце серед студентів I курсу; *Ф.І. Зубач* (ФТІ, II курс) – II місце серед студентів II курсу; *Ю.В. Лукаш* (ФПМ, II курс), *Ю.В. Шут* (ІПСА, II курс) та *Д.І. Кутянський* (ІПСА, II курс) – III місце серед студентів II курсу; *Б.А. Нагірняк* (ФТІ, V курс) – II місце серед студентів старших курсів; *К.С. Веденський* (ФТІ, V курс) – III місце серед студентів старших курсів.

З переможців I етапу було сформовано збірні, які виступали на II етапі Всеукраїнської олімпіади в м. Львові та в м. Севастополі.

У м. Львові олімпіада проходила серед класичних університетів, а в м. Севастополі - серед технічних університетів.

Студенти КПІ гідно виступили як у Львові, так і в Севастополі. Результати виступів наших студентів такі:

У м. Львові:

О.В. Рибак (ФТІ, V курс) – I місце серед студентів старших курсів; *Д.С. Батюк* (ФТІ, I курс) – II місце серед студентів молодших курсів.

У м. Севастополі:

Р.Р. Гамалія (ФТІ, II курс) – перше місце в категорії "М"; *Ю.В. Шут* (ІПСА, II курс) – друге місцев в категорії "М"; *Д.І. Кутянський* (ІПСА, II курс) – третє місце в категорії "М"; *М.В. Козленко* (ФПМ, I курс) – третє місце в категорії "Т".

Оргкомітет Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (м. Севастополь) нагородив команду НТУУ "КПІ", яка посіла загальне II місце серед 57 вищих навчальних закладів України, грамотою за активну участь в олімпіаді та високий рівень підготовки серед команд провідних вищих навчальних закладів України.

Крім того, оргкомітет висловив офіційну подяку І.В. Орловському, асистенту кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, який супроводжував команду НТУУ "КПІ", за відмінну роботу в складі журі та апеляційній комісії.

Журі I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для студентів вищих навчальних закладів вирішило доцільним видати задачі I етапу олімпіади, яка проходила в НТУУ "КПІ", та їх розв'язки. Цей матеріал підготував І.В. Орловський. Крім того, наведені задачі II етапу олімпіади, яка проходила в м. Севастополі.

Щоб зробити це видання цікавим також для школярів, у нього включено задачі шкільних олімпіад, які проводив фізико-математичний факультет НТУУ "КПІ". Цей підрозділ підготували В.О. Гайдей та В.А. Жук.

Голова журі I етапу Всеукраїнської
олімпіади з математики
проф. В. В. Булдигін

1. Студентська олімпіада НТУУ "КПІ" з математики 2007 року

Умови задач

Перший курс

1.1. Нехай $B \subset \mathbb{R}$ - довільна множина. Позначимо

$$\rho(x, B) = \inf_{y \in B} |x - y|$$

відстань від точки x до множини B. Довести, що $f(x) = \rho(x, B),\ x \in \mathbb{R}$, є неперервною функцією.

1.2. Нехай $x_1 > 0$ та

$$x_{n+1} = \operatorname{arctg}\ x_n,\ n \geq 1.$$

Довести, що

(a) дана послідовність є збіжною;

(b) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$;

(c) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \sqrt{n} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

1.3. Обчислити інтеграл

$$\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx\right\}.$$

1.4. Дві параболи, осі яких перпендикулярні, мають чотири точки перетину. Довести, що ці точки лежать на одному колі.

1.5. Довести, що ціла частина числа $(3+\sqrt{5})^n$ непарна для довільного натурального n.

1.6. Довести нерівність

$$\int\limits_0^1 x^n(1-x)^n dx \geq \frac{1}{k_n},$$

де k_n є найменшим спільним кратним чисел $\{n+1; n+2; ...; 2n+1\}$.

1.7. В інституті, в якому навчаються 2007 студентів, серед довільних чотирьох осіб можна обрати принаймні одного, хто знайомий з іншими трьома. Якою є мінімальна можлива кількість студентів, які знайомі з усіма іншими?

1.8. Довести, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не дорівнює тотожньо нулю, задовольняє тотожності

$$f(x)f(y) \equiv f(x+y), \; x, y \in \mathbb{R},$$

і диференційована в точці $x = 0$, є нескінченно разів диференційованою в довільній точці $x \in \mathbb{R}$.

Другий курс/Старші курси

1.9. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \{e \cdot n!\}$, де $\{\cdot\}$ - дробова частина числа, e - основа натурального логарифма.

1.10. Нехай $a > 0$. Для довільного $x_0 > 0$ розглянемо послідовність $\{a_n \; : n \geq 0\}$, яка задається наступними рівностями:

$$a_0 = x_0, \; a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right), \; n \geq 1.$$

(a) Довести, що дана послідовність є збіжною;
(b) Знайти границю послідовності.

1.11. Якщо поліном $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами справджує нерівність $f(x) \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x, то $f(x) = [\varphi_1(x)]^2 + [\varphi_2(x)]^2$, де $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ - поліноми з дійсними коефіцієнтами.

1.12. Нехай $f \in C([a, b])$ та $\int\limits_a^b x^n f(x)dx = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Довести, що $f(x) = 0, \; x \in [a, b]$.

1.13. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}(x_1 + x_2 + ... + x_m)\right)\right] dx_1 dx_2 ... dx_m.$$

1.14. Див. **1.8**.

1.15. Нехай $X = (x_1; ...; x_m)$ є набором з $m = 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ чисел $x_i \in \{1; -1\}$, $i = 1, ..., m$. Операція F задається наступною формулою

$$F(X) = (x_1 x_2; x_2 x_3; ...; x_m x_1).$$

Довести, що для довільного набору X у послідовності X, $F(X)$, $F(F(X))$, ... міститься набір з m одиниць.

1.16. Є три скриньки : дві порожні, а одна містить 100 євро (позначимо ці скриньки A, B, C). Гравець, який не знає, де містяться гроші, обирає одну з них (нехай це буде C). Перш ніж відкрити скриньку C, ведучий (котрий знає, що міститься в кожній скриньці) відкриває порожню скриньку з тих, що залишилися (одну з $\{A, B\}$), показує гравцеві і пропонує йому ще раз прийняти рішення: або гравець відмовляється від C, і обирає іншу, або наполягає на C. Як має вчинити гравець?

Розв'язки

1.1. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та довільні $x, y \in \mathbb{R}$: $|x - y| < \varepsilon$. Нехай $f(x) \leq f(y)$, тоді

$$\begin{aligned} 0 \leq & f(y) - f(x) = \inf_{t \in B} |y - t| - \inf_{t \in B} |x - t| = \inf_{t \in B} |y - x + x - t| - \inf_{t \in B} |x - t| \leq \\ \leq & \inf_{t \in B} (|y - x| + |x - t|) - \inf_{t \in B} |x - t| = |y - x| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо $f(x) \geq f(y)$, тоді

$$0 \leq f(x) - f(y) \leq |x - y| < \varepsilon.$$

Тобто, функція неперервна.

1.2.

(a) Оскільки $x_1 > 0$, то з рекурентного рівняння випливає, що $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо $x_{n+1} - x_n = \operatorname{arctg} x_n - x_n < 0$, оскільки $\operatorname{arctg} x < x$, коли $x > 0$. Тобто послідовність x_n, $n \in \mathbb{N}$ є монотонно спадною і, крім того, обмеженою знизу 0. Отже, послідовність є збіжною.

(b) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geq 0$. Перейдемо у рекурентному рівнянні до границі за n, отримаємо

$$x = \operatorname{arctg} x.$$

Але дане рівняння має єдиний розв'язок при $x = 0$.

(c) В силу того, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2 - \operatorname{arctg}^2 x_n}{x_n^2 \operatorname{arctg}^2 x_n} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\sim} x \end{array} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} \cdot \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} =$$

$$= |\text{правило Лопіталя}| = 2\lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{2}{3},$$

за теоремою Теплиця

$$\frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{x_k^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{nx_n^2} - \frac{1}{nx_1^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{nx_n^2}.$$

З останнього рівняння випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

1.3. Нехай

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = -2\int_0^{\pi/2} \ln\, \cos t dt = -2\int_0^{\pi/2} \ln\, \sin t dt =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2t}{2} dt = -\int_0^{\pi/2} \ln\, \sin 2t dt + \frac{\pi}{2}\ln 2 = \left| \begin{array}{c} 2t = u \\ dt = \frac{1}{2}du \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\, \sin u du + \frac{\pi}{2}\ln 2 = -\int_0^{\pi/2} \ln\, \sin u du + \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}I + \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Тобто, $I = \pi \ln 2$. Отже, $\exp\left\{\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx\right\} = 2$.

Відповідь. 2.

1.4. Нехай рівняння парабол мають вигляд

$$y = A(x-a)^2, \qquad x = B(y-b)^2.$$

Всі криві другого порядку, які проходять через точки перетину парабол, мають вигляд

$$\lambda\left(y - A(x-a)^2\right) + \mu\left(x - B(y-b)^2\right) = 0.$$

Поклавши $\lambda = 1,\ \mu = \dfrac{A}{B}$, отримаємо рівняння кола

$$y - A(x-a)^2 + \frac{A}{B}x - A(y-b)^2 = 0.$$

Зводячи до канонічного рівняння, отримаємо

$$\left[x - \left(a + \frac{1}{2B}\right)\right]^2 + \left[y - \left(b + \frac{1}{2A}\right)\right]^2 = \frac{1}{4A^2} + \frac{1}{4B^2} + \frac{b}{A} + \frac{a}{B}.$$

1.5. Розглянемо

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sqrt{5})^k 3^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (\sqrt{5})^k 3^{n-k} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{Нехай} & \\ n = 2m, & \text{якщо } n \text{ парне} \\ n = 2m+1, & \text{якщо } n \text{ непарне} \end{array} \right| = 2\sum_{k=0}^{m} C_n^{2k} 5^k 3^{n-2k} = 2N.$$

З останньої рівності видно, що дана сума є натуральним, парним числом. Окрім того, оскільки $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, то $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$, і, відповідно, отримуємо

$$2N - 1 < (3+\sqrt{5})^n < 2N.$$

З останнього рівняння випливає, що ціла частина $(3+\sqrt{5})^n$ є непарним числом.

1.6.

$$0 < \int_0^1 x^n(1-x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{n+k} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k(-1)^k}{n+k+1} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k d_k}{k_n},$$

де $k_n = \text{НСК}\{n+1; ...; 2n+1\}$, $d_k = \dfrac{k_n}{n+k+1}$, $k = 0, ..., n$.

Оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k d_k \in \mathbb{Z}$ (це випливає з того, що $d_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, ..., n$), і, крім того, $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k d_k > 0$ (оскільки значення інтеграла є додатнім). Тому

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k d_k \geq 1,$$

і потрібна нерівність випливає з останньої нерівності.

1.7. Якщо незнайомих між собою студентів немає, то загальна кількість людей, що знайомі з усіма, є 2007 чоловік.

Нехай A та B незнайомі один з одним. Тоді всі інші між собою знайомі. Справді, якщо C не знайомий з D, тоді в групі $\{A, B, C, D\}$ жоден не знайомий з іншими трьома, що суперечить умові. Якщо A та B знайомі з усіма іншими, тоді знайомих з усіма буде 2005.

Якщо ж A, окрім B, ще не знайомий також з C ($C \neq B$), тоді A, B, C знайомі з усіма іншими 2004 студентами (оскільки довільний студент D в групі $\{A, B, C, D\}$ повинен бути знайомим з іншими трьома), і, окрім того, всі інші знайомі між собою. Отже, мінімальне число знайомих з усіма буде 2004 студента.

Відповідь. 2004 студента.

1.8. Розглянемо, як поводить себе функція f в нулі. Підставимо в

$$f(x)f(y) \equiv f(x+y), \; x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$x = y = 0$:

$$f(0) = f^2(0).$$

З рівняння випливає, що $f(0) = 0$ або $f(0) = 1$. Але, якщо $f(0) = 0$, то з (1) випливає, що для довільного $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)f(0) = 0$, що суперечить умові задачі. Тобто, $f(0) = 1$.

Далі розглянемо два способи розв'язання даної задачі.

Перший спосіб. Доведемо за індукцією, що

$$f^{(n)}(x) = [f'(0)]^n f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Для $n = 1$

$$\begin{aligned} f(x)f'(0) = f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{f(x)f(y)-f(x)}{y} = \\ = \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = f'(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Припустимо, що формула (2) є вірною, для $n-1$. Доведемо, що (2) буде правильною для n

$$[f'(0)]^n f(x) = [f'(0)]^{n-1} f(x)\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-1}{y} =$$
$$= \lim_{y\to 0}\frac{[f'(0)]^{n-1}f(x+y)-[f'(0)]^{n-1}f(x)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+y)-f^{(n-1)}(x)}{y} =$$
$$= f^{(n)}(x).$$

Другий спосіб. З (3) отримуємо диференційне рівняння

$$f' = af,$$

де $a = f'(0)$. Розв'язком цього рівняння є функція $f(x) = Ce^{ax}$, яка є нескінченно разів диференційовною.

1.9. Для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{(n+1)!},$$

де $\theta_n \in (0,1)$. Тому

$$e \cdot n! = n! + n! + A_n^{n-2} + A_n^{n-3} + ... + A_n^1 + 1 + \frac{\theta_n}{n+1} = a_n + \frac{\theta_n}{n+1}.$$

Оскільки $a_n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\theta_n}{n+1} < 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, то

$$\{e \cdot n!\} = \frac{\theta_n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Відповідь. 0.

1.10.
(a) З рекурентного рівняння випливає, що

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) > 0.$$

Тоді рекурентне рівняння можна переписати наступним чином

$$2a_n a_{n-1} = a_{n-1}^2 + a$$

або, додавши і віднявши a_n

$$0 \le (a_{n-1} - a_n)^2 = a_n^2 - a.$$

Отже,

$$a_n \ge \sqrt{a},\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

З іншого боку, використовуючи рекурентне рівняння та (4),

$$a_n - a_{n-1} = \frac{a - a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \le 0.$$

Тобто, $a_n \le a_{n-1}$. Отже, послідовність $a_n,\ n \ge 1$ монотонно не зростає і обмежена знизу числом $\sqrt{a}$, тому вона є збіжною.

(b) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Перейдемо в рекурентному рівнянні до границі при $n \to \infty$:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Звідси $x = \sqrt{a}$.

Відповідь. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

1.11. Поліном f можна записати як

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

де $f_1(x) = \prod\limits_{j=1}^{N}(x - x_j)^{n_j}$ - поліном, що містить всі дійсні корені f, $f_2(x) = \prod\limits_{j=1}^{M}(x - (a_j + ib_j))^{m_j}(x - (a_j - ib_j))^{m_j} > 0$ - поліном, що містить всі комплексні корені f.

Оскільки $f(x) \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x, то кратність всіх дійсних коренів повинна бути парною, $n_j = 2p_j,\ j = 1, ..., n$. Тобто,

$$f_1(x) = \prod_{j=1}^{N} (x - x_j)^{2p_j} = \left(\prod_{j=1}^{N} (x - x_j)^{p_j} \right)^2 = [\phi(x)]^2.$$

З іншого боку,

$$f_2(x) = \prod_{j=1}^{M} (x - (a_j + ib_j))^{m_j} \cdot \prod_{j=1}^{M} (x - (a_j - ib_j))^{m_j} = g_1(x) \cdot g_2(x),$$

де $\overline{g_1(x)} = g_2(x)$. Функцію $g_1(x)$ можна представити у вигляді $g_1(x) = \psi_1(x) + i\psi_2(x)$, де $\psi_1(x),\ \psi_2(x)$ поліноми з дійсними коефіцієнтами. Отже,

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = \phi^2(x)(\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)) = [\psi_1(x)\phi(x)]^2 + [\psi_2(x)\phi(x)]^2.$$

1.12. З умови задачі випливає, що для довільного многочлена $p(\cdot)$ буде виконуватися

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = 0.$$

Оскільки функція $f \in C[a, b]$, то її можна наблизити за допомогою многочленів (наприклад, многочлени Бернштейна). Тобто для довільного $\varepsilon > 0$, можна знайти многочлен $P_f^{(\varepsilon)}(\cdot)$ такий, що

$$\left| f(x) - P_f^{(\varepsilon)}(x) \right| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)},\ x \in [a, b],$$

де $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Тоді

$$\left| f^2(x) - P_f^{(\varepsilon)}(x)f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a},\ x \in [a, b],$$

і

$$-\varepsilon = -\varepsilon + \int_a^b P_f^{(\varepsilon)}(x)f(x)dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \leq \int_a^b P_f^{(\varepsilon)}(x)f(x)dx + \varepsilon = \varepsilon$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Тому

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$$

і оскільки функція f - неперервна, то $f \equiv 0$.

1.13.

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}(x_1 + x_2 + ... + x_m)\right)\right] dx_1 dx_2 ... dx_m =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}(x_1 + x_2 + ... + x_m)\right) dx_1 dx_2 ... dx_m =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Виконаємо заміну} \\ y_i = 1 - x_i,\ i = 1, ...m \end{array} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(y_1 + y_2 + ... + y_m)\right) dy_1 dy_2 ... dy_m =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(x_1 + ... + x_m)\right) + \right.$$

$$\left. + \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}(x_1 + ... + x_m)\right)\right) dx_1 dx_2 ... dx_m =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 ... \int\limits_0^1 dx_1 dx_2 ... dx_m = 1.$$

Відповідь. 1.

1.14. Див. розв'язок **2.8**.

1.15. Методом математичної індукції, за $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, доведемо, що після послідовного застосування 2^n операцій F до довільного набору X буде отримано набір з $m = 2^n$ одиниць.

Для $n = 0$ маємо $2^0 = 1$. $F(X) = x_1x_1 = 1$. Тобто, твердження має місце.

Нехай твердження виконується для $n-1$ (для довільного набору X з 2^{n-1} чисел $\{-1, 1\}$, застосування 2^{n-1} операції F до X приведе до набору з 2^{n-1} одиниці). Доведемо твердження для n.

Помітимо, що в наборі

$$T(X) = F(F(X)) = F(x_1x_2, x_2x_3, ..., x_mx_1) = (x_1x_3, x_2x_4, ..., x_{m-1}x_1, x_mx_2).$$

числа, що стоять на парних місцях, дорівнюють числам, які отримуються з набору $(x_2, x_4, .., x_m)$ під дією операції F. Аналогічно, числа, що стоять в наборі $F(X)$ на непарних місцях, утворюють набір

$$F(x_1, x_3, ..., x_{m-1}).$$

За припущенням індукції після $\dfrac{m}{2} = 2^{n-1}$ операцій T, до X, як на парних, так і на непарних місцях, будуть стояти одні одиниці. Тобто, після $m = 2^n$ операцій F весь набір буде складатися з одиниць.

1.16. Позначимо події $E_1 = \{$ Гравець виграє, якщо буде наполягати на скринці $C\}$, $E_2 = \{$ Гравець виграє, якщо відмовиться від скриньки $C\}$. Позначимо також $H_1 = \{$ гравець обрав скриньку з грошами $\}$, $H_2 = \{$ гравець обрав порожню скриньку $\}$. Ці події є гіпотезами

Порахуємо ймовірності подій E_1, E_2

$$P(E_1) = P(E_1|H_1)P(H_1) + P(E_1|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$
$$P(E_2) = P(E_2|H_1)P(H_1) + P(E_2|H_2)P(H_2) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Тобто, гравець повинен відмовлятися від скриньки C.

Відповідь. Гравець повинен відмовлятися від скриньки C.

2. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2007 р.)

II етап Всеукраїнської студентської олімпіади у м. Севастополі проводився у трьох категоріях:

– *Категорія "C":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за економічними та аграрними спеціальностями;

– *Категорія "T":* до цієї категорії відносили студентів технічних спеціальностей;

– *Категорія "M":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за спеціальностями, що потребують поглибленого вивчення математики.

В цьому пункті подано завдання кожної з категорій.

Умови задач

Категорія "C"

2.1. Обчислити визначник $\Delta = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = 1 + x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = 1$, якщо $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., 5$.

2.2. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки $K,\ L,\ M,\ N$ такі, що $\overline{AK} = \overline{CA},\ \overline{CL} = \overline{BC},\ \overline{DM} = \overline{AD},\ \overline{DN} = \overline{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

2.3. На площині розташовано дві параболи так, що їхні осі взаємно перпендикулярні, а самі параболи перетинаються в чотирьох точках. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

2.4. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних $x \neq 1$ виконується рівність

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x.$$

2.5. Розв'язати рівняння

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n\text{ разів}} = 2.$$

2.6. Довести, що для довільного $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x \geq x^e.$$

2.7. Довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ многочлен

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

не може мати більш як один дійсний корінь.

2.8. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}.$$

2.9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0.$$

2.10. Треба перевезти залізницею 20 великих і 250 малих контейнерів. Один вагон вміщує 30 малих контейнерів, вага кожного з яких дорівнює 2 тони. Великий контейнер займає місце 9 малих і важить 30 тон. Вантажність вагона - 80 тон. Знайти мінімальне число вагонів, яке потрібне для перевезення всіх контейнерів.

Категорія "Т"

2.11. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = 1 + x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = 1$, якщо $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., n$.

2.12. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки $K,\ L,\ M,\ N$ такі, що $\overline{AK} = \overline{CA}$, $\overline{CL} = 2\overline{BC}$, $\overline{DM} = \overline{AD}$, $\overline{DN} = 2\overline{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

2.13. Див. **2.3**.

2.14. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких $x,\ y \in \mathbb{R}$ виконується рівність:

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos x.$$

2.15. Розв'язати рівняння

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}} = 4.$$

2.16. З'ясувати, чи існує дійсне число $x > 0$ таке, що $x^e > e^x$.

2.17. Нехай неперервна функція $f : [0;1] \to [0;1]$ диференційовна в проміжку $(0;1)$, причому $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$. Довести, що існують такі числа $a,\ b \in (0;1)$, що $a \neq b$ і $f'(a) \cdot f'b = 1$.

2.18. Див. **2.8**.

2.19. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx).$$

2.20. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$$

Категорія "M"

2.21. Обчислити визначник $\Delta = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = b$, якщо $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., n$.

2.22. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки $K,\ L,\ M,\ N$ такі, що $\overline{AK} = \alpha\overline{CA}$, $\overline{CL} = \beta\overline{BC}$, $\overline{DM} = \gamma\overline{AD}$, $\overline{DN} = \delta\overline{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

2.23. Див. **2.3**.

2.24. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких $x,\ y \in \mathbb{R}$ виконується рівність:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y.$$

2.25. Для всіх значень дійсного параметра $p > 1$ розв'язати рівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}} = p.$$

2.26. Довести, що для довільних $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x}.$$

2.27. Див. **2.17**.

2.28. Див. **2.8**.

2.29. Див. **2.19**.

2.30. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$$

Відповіді

2.1. $\Delta = \prod\limits_{i=1}^{5} x_i + \sum\limits_{k=1}^{5} \prod\limits_{i=1, i\neq k}^{5} x_i.$

2.2. $V = 2.$

2.4. $f(x) = 2x + 1.$

2.5. $\sqrt{2}.$

2.8. $\dfrac{1}{3}\left(2\operatorname{arctg}(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)\right|\right) + C.$

2.9. $y^4 - x^2 = Cy^6;\ y = 0.$

2.10. 15 вагонів.

2.11. $\Delta_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} x_i.$

2.12. $V = 10.$

2.14. $f(x) = a \sin x,\ a \in \mathbb{R}$.

2.15. Рівняння коренів не має.

2.16. Не існує.

2.18. Див. **2.8**.

2.19. $x^3 - 4y^2 = Cy\sqrt[3]{xy};\ x = 0;\ y = 0$.

2.20. Збігається абсолютно.

2.21. $\Delta_n = \prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - b) + b\sum\limits_{k=1}^{n}\ \prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n}(x_i - b)$.

2.22. $V = |\beta(a\delta + \delta - \alpha\gamma + \gamma\delta)|$.

2.24. $f(x) = a\cos x + b\sin x,\ a, b \in \mathbb{R}$.

2.25. Якщо $p \in (1, e]$, то $x = p^{\frac{1}{p}}$; якщо $p \in (e, +\infty)$, то $x \in \varnothing$.

2.28. Див. **2.8**.

2.29. Див. **2.19**.

2.30. Збігається умовно.

3. Шкільні олімпіади

Задачі цього пункту пропонувались абітурієнтам на олімпіадах, які проводив фізико-математичний факультет.

Умови задач

Задачі олімпіади 2007 року

3.1. Розв'яжіть рівняння (для будь-якого $n \in \mathbb{N}$):

$$\sin^{2n} x \cos^2 x = \frac{(n-1)^n}{n^n}.$$

3.2. Розв'яжіть нерівність

$$2006^{2007 \log_x (x^2-2x)} < 2007^{2006 \log_x (x^2-2x)}.$$

3.3. Медіани трикутника мають довжини $3, 12, 15$. Знайдіть площу трикутника.

3.4. Задано 2007-значне число. Кожне двозначне число, утворене двома сусідніми цифрами заданого числа, ділиться або на 17 або на 23. Остання цифра числа є 1. Знайдіть першу цифру.

3.5. Малюк з'їдає торт за 10 хвилин, банку варення - за 13 хвилин, випиває каструлю молока за 14 хвилин. Карлсон може це зробити відповідно за $6, 6$ та 7 хвилин. Протягом якого найменшого часу вони разом можуть з'їсти сніданок, що складається з торта, банки варення та каструлі молока.

3.6. Чи можна замкнену ламану завдовжки 1 включити в круг радіусом $\frac{1}{4}$. (Відповідь обґрунтуйте).

3.7. Задано послідовність $\{a_n\}$:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}.$$

Чи обмежена послідовність $\{a_n\}$?(Відповідь обґрунтуйте). Доведіть, що $a_{9000} > 30$.

Деякі задачі олімпіад попередніх років

Наступні задачі зустрічались на олімпіадах попередніх років і подані тут як корисні вправи.

3.8. Число 3 можна представити чотирма способами як суму одного чи більше натуральних чисел, тобто як $3, 1+2, 2+1, 1+1+1$. Скількома способами це можна зробити для числа 11? Для довільного натурального числа n?

3.9. Усередині кола вибрано 2000 довільних точок. Чи існує пряма, по кожну сторону від якої розташується рівно по 1000 точок?

3.10. Знайти перші 2001 цифр після коми числа $(5+\sqrt{26})^{2001}$.

3.11. В яких межах може змінюватись гострий кут між діагоналями паралелограма зі сторонами a і b? Чи існує паралелограм, в якому одна із сторін вдвічі довша за іншу, з гострим кутом між діагоналями $60°$?

3.12. У просторі задано 2003 точок загального положення так, що кожна трикутна піраміда з вершинами в цих точках, має об'єм, який не перевищує 1. Чи можна всі ці точки включити в трикутну піраміду об'єму 27?

Відповіді та розв'язки

3.1. Зауважмо, що

$$\sin^{2n} x\cos^2 x \le \sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \le \frac{1}{4}.$$

Однак права частина рівняння зростає відносно n. Справді, якщо $a_n = \frac{(n-1)^n}{n^n}$, то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{n^n}{(n-1)^n} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n} > \frac{n^{2n}}{n^{2n}} = 1.$$

Отже, $a_{n+1} > a_n$ при $n \le 2$. Оскільки $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4}$, то $a_n > \frac{1}{4}$ при $n \ge 3$ і рівняння не матиме розв'язків. Отже, всі розв'язки заданого рівняння вичерпуються випадками:

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x\cos^2 x = 0 \text{ (при } n=1);\\ \sin^4 x\cos^2 x = \frac{1}{4} \text{ (при } n=2). \end{array}\right.$$

Розв'яжімо перше рівняння:

$$\frac{1}{4}\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Розв'яжімо друге рівняння:

$$\sin^4 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x 4 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \sin^2 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 0, \\ 4\sin^2 x \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Відповідь. При $n = 1$ рівняння має розв'язки $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. При $n > 1$ рівняння розв'язків не має.

3.2. Доведімо що для натурального $n \geq 3$ правдива нерівність

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} &= \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \\
&= \frac{1}{n}\left(1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + ... + C_n^k\frac{1}{n^k} + ... + C_n^n\frac{1}{n^n}\right) < \\
&< \frac{1}{n}\left(1 + 1 + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + ... + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} + ...\right) < \\
&< \frac{1}{n}\left(2 + \frac{1}{2!} + .. + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!}\right) < \\
&< \frac{1}{n}\left(2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(3 - \frac{1}{n}\right) < \frac{3}{n} \leq 1 \quad \forall n \geq 3.
\end{aligned}$$

Отже

$$2006^{2007} \geq 2007^{2006}.$$

Тому задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_x(x^2 - 2x) < 0.$$

ОДЗ нерівності:

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Звідки

$$\begin{cases} x^2 - 2x < 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Відповідь. $x \in (2; 1 + \sqrt{2})$.

3.3. Нехай M - точка перетину медіан AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC (рис. 1).

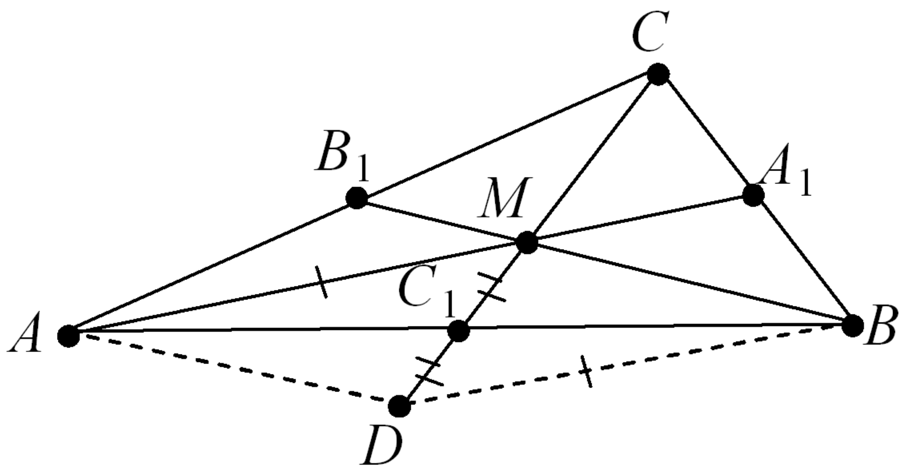

Рис. 1

Відкладімо на медіані CC_1 відрізок $C_1D = C_1M$. Тоді, оскільки чотирикутник $AMBD$ паралелограм, то

$$BD = AM = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6;$$
$$BM = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8;$$
$$DM = \frac{2}{3}CC_1 = 10.$$

Оскільки $6^2 + 8^2 = 10^2$, то трикутник BDM прямокутний і

$$S_{\Delta BDM} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Медіани поділяють довільний трикутник на 6 рівних за площею частин. Тому

$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta BDM} = 3 \cdot 24 = 72.$$

Відповідь. $S = 72$ (кв. од.).

3.4. Зобразімо цифри $0, 1, ..., 9$ точками на площині. Якщо число AB ділиться на 17 або на 23 зобразімо його стрілкою з кінцем в A. Одержимо схему (граф) (рис. 2).

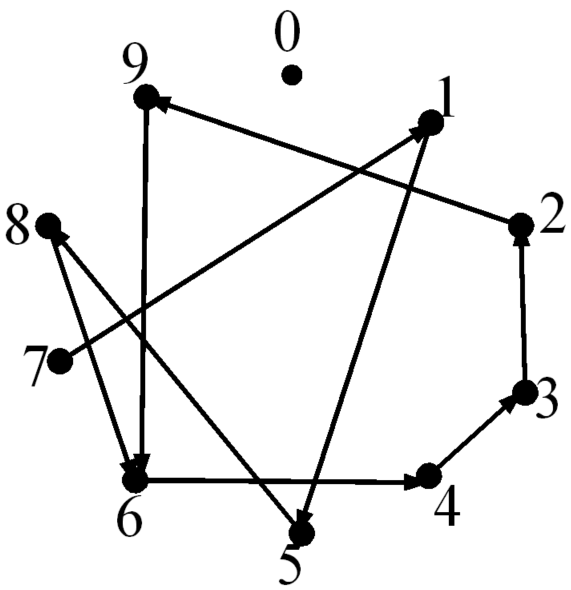

Рис. 2

Зі схеми видно, що число, яке справджує умову задачі, повинно включати набір з 5 повторюваних цифр 92346. Число має вигляд

$$\ldots \underbrace{92346}_{5\text{ цифр}}\underbrace{92346}_{5\text{ цифр}}\underbrace{851}_{3\text{ цифри}}.$$

Відкинувши три останніх цифри дістанемо число

$$\ldots \underbrace{92346}\underbrace{92346}$$

з 2004 цифр. У повторюваному фрагменті цифр 92346 маємо цифру "2"на четвертому місці з кінця періоду.

Відповідь. Перша цифра числа 2.

3.5. Зауважмо, що для того щоб з'їсти сніданок за найменший час, Малюк і Карлсон повинні почати і закінчити снідати одночасно. Нехай x, y, z відповідно частки торта, варення і молока, які з'їв Малюк, тоді $(1-x), (1-y), (1-z)$ - частки тих продуктів, які з'їв Карлсон. Час, який витрачено на сніданок

$$T = 10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Ми прийшли до задачі мінімізації функції

$$T = 10x + 13y + 14z$$

за обмежень

$$\begin{gathered} 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, \\ 10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z). \end{gathered}$$

Розв'язавши останню рівняння відносно z дістанемо

$$z = \frac{1}{21}(19 - 16x - 19y).$$

Підставляючи це співвідношення у функцію T, одержимо

$$T = 10x + 13y + 14 \cdot \frac{1}{21}(19 - 16x - 19y) = \frac{38 - 2x + y}{3}.$$

Величина $T = \frac{38-2x+y}{3}$ буде мінімальною, якщо $x = 1, y = 0$. Отже,

$$T_{\min} = \frac{38 - 2 + 0}{3} = 12 \text{ хв.}$$

При цьому

$$z = \frac{1}{21}(19 - 16) = \frac{1}{7}$$

у допустимих межах.

Відповідь. 12 хвилин. Малюк з'їдає весь торт і випиває $\frac{1}{7}$ каструлі молока, а Карлсон з'їдає все варення і випиває $\frac{6}{7}$ каструлі молока.

3.6. Виберімо на ламаній дві точки A і B, які поділяють довжину ламаної навпіл (рис. 3). Тоді довжина $AB \le \frac{1}{2}$. Нехай точка O - середина відрізка AB. Тоді круг із центром у точці O радіусом $\frac{1}{4}$ - шуканий. Справді, очевидно точки A і B належать цьому кругу. Нехай M - довільна інша точка ламаної, M_1 - точка, яка симетрична точці M відносно точки O. Тоді

$$OM = \frac{1}{2}MM_1 \le (MA + AM_1) = \frac{1}{2}(MA + MB) \le \frac{1}{2}AB \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Отже, для довільної точки M ламаної $OM \le \frac{1}{4}$. Тому її можна включити в круг радіусом $\frac{1}{4}$.

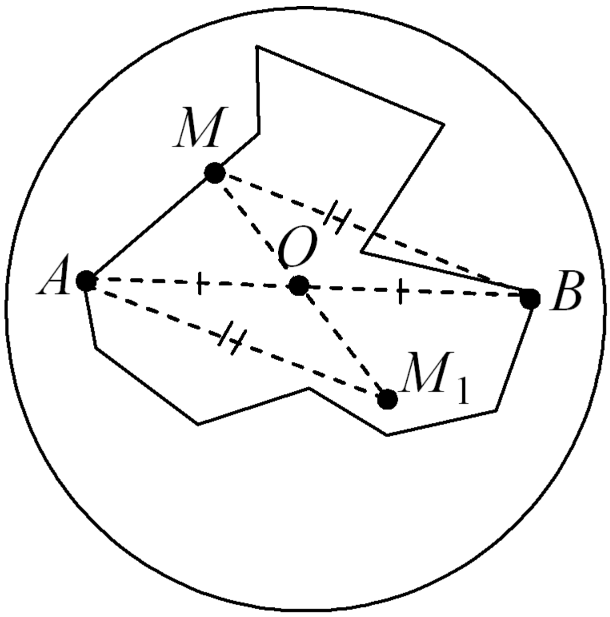

Рис. 3

Відповідь. Так, можна.

3.7. Доведімо нерівність $a_n^3 > 3n$ для довільного $n \ge 2$ методом математичної індукції.

При $n = 2 : a_2 = 1 + 1 = 2; 2^3 > 3 \cdot 2$.

Припускаючи, що нерівність справджена для $n = k : a_k^3 > 3k$, доведімо, що вона справджується і для $n = k + 1$.

$$a_{k+1}^3 = \left(a_k + \frac{1}{a_k^2}\right)^3 = a_k^3 + 3a_k^2 \cdot \frac{1}{a_k^2} + ... + > a_k^3 > 3k + 3 = 3(k+1).$$

Отже, маємо при $n \geq 2 : a_n > \sqrt[3]{3n}$. Звідки випливає необмеженість послідовності $\{a_n\}$. Зокрема,

$$a_{9000} > \sqrt[3]{3 \cdot 9000} = 30.$$

Відповідь. Ні, необмежена.

3.8. Число 11 можна представити $2^{10} = 1024$ способами. Число n - 2^{n-1} способами.

3.9. Так, існує.

3.10. Перші 2001 цифр після коми числа N є нулями.

3.11. $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \leq \cos\alpha < 1$. Такого паралелограму не існує.

3.12. Так, можна.