МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ – 2008

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання
та школярів

Затверджено Методичною радою НТУУ "КПІ"

Київ
НТУУ "КПІ"
2008

Математичні олімпіади – 2008 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ "КПІ", 2008. - 40 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ "КПІ"
(Протокол № __ від ________ 2008 р.)

Навчальне видання

Математичні олімпіади – 2008

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання
та школярів

Укладачі: *Булдигін Валерій Володимирович*
Ільєнко Андрій Борисович
Орловський Ігор Володимирович

Відповідальний редактор *З.П. Ординська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *І.Я. Спекторський,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Передмова

Ювілейна олімпіада 2007/08 н.р., яка проводилася в рамках I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для студентів вищих навчальних закладів, привернула увагу студентів різних курсів 15-ти факультетів та інститутів НТУУ "КПІ", понад 300 з яких прийшли продемонструвати свої сили та знання з математики. Цю олімпіаду було присвячено 110-ій річниці від дня заснування Київського політехнічного інституту.

Найбільші делегації представили факультети з високим рівнем математичної підготовки: ФТІ, ФІОТ, ФМФ, ФПМ, ФЕЛ, ІПСА. Відзначимо вдалий виступ студентів ІПСА, ФТІ, ФПМ, ІТС, ФІОТ.

Переможцями олімпіади стали:

К.О. Голоднов (ІПСА, гр. КА-72) - I місце в абсолютному заліку серед усіх учасників та I місце серед студентів I курсу; О.О. Слюсаренко (ІПСА, гр. КА-71) - II місце в абсолютному заліку та II місце серед студентів I курсу; Р.А. Гібаєв (ІПСА, гр. КА-73) - III місце в абсолютному заліку та II місце серед студентів I курсу; А.С. Даниленко (ІПСА, гр. КА-73) - III місце в абсолютному заліку та II місце серед студентів I курсу; В.О. Лозовий (ІПСА, гр. КА-71), Я.М. Михайленко (ІПСА, гр. КА-72), П.І. Огнєв (ФТІ, гр. ФФ-71) - III місце серед студентів I курсу; М.В. Поляков (ІТС, гр. ТС-73) - III місце серед студентів I курсу та I місце серед студентів технічних факультетів; Ю.М. Дзюбан (ФІОТ, гр. ІО-71) - II місце серед студентів технічних факультетів; С.С. Д'яченко (ІТС, гр. ТС-73), Н.В. Семененко (ФІОТ, гр. ІС-72), К.В. Шалбанов (ІТС, гр. ТС-73) - III місце серед студентів технічних факультетів; А.В. Ковальова (IV курс ФТІ, гр. ФІ-42) - I місце серед студентів старших курсів; Ф.І. Зубач (III курс ФТІ, гр. ФІ-52) - II місце серед студентів старших курсів; Д.С. Батюк (II курс ФТІ, гр. ФІ-62), М.В. Козленко (II курс ФПМ, гр. КМ-61) - III місце серед студентів старших курсів.

Крім того, за успішний виступ в олімпіаді заохочувальними грамотами відзначені студенти I курсу: М.В. Александрова (ФПМ, гр. КМ-71), Є.В. Бережанський (ІПСА, гр. КА-71), Д.В. Меленевський (ФТІ, гр. ФІ-71), О.О. Ющенко (ФТІ, гр. ФФ-71) та студенти старших курсів: В.В. Ключніков (ФТІ, гр. ФІ-51), Д.І. Кутянський (ІПСА, гр. КА-51), Ю.В. Лукаш (ФПМ, гр. КВ-53), Д.В. Обламський (ІПСА, гр. КА-51), Є.Д. Печук (ФМФ, гр. ОМ-31м).

З переможців I етапу було сформовано збірні університету для участі в II етапі Всеукраїнської олімпіади серед технічних ВНЗів в м. Севастополі.

Студенти КПІ гідно виступили в Севастополі, показавши такі результати:

в абсолютному заліку: Д.І. Кутянський (ІПСА, 3 курс) - третє місце, К.О. Голоднов (ІПСА, 1 курс) - четверте місце, М.В. Козленко (ФПМ, 2 курс) - п'яте місце;

в категорії М (студенти спеціальностей, що потребують поглибленого вивчення математики): Д.І. Кутянський (ІПСА, 3 курс) - третє місце, К.О. Голоднов (ІПСА, 1 курс) - четверте місце, М.В. Козленко (ФПМ, 2 курс) - п'яте місце;

в групі політехнічних та індустріальних ВНЗ: Д.І. Кутянський (ІПСА, 3 курс) - друге місце, К.О. Голоднов (ІПСА, 1 курс) - третє місце, М.В. Козленко (ФПМ, 2 курс) - четверте місце, А.В. Ковальова (ФТІ, 4 курс) - п'яте місце.

Оргкомітет Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (м. Севастополь) нагородив команду НТУУ "КПІ" грамотою за активну участь в олімпіаді та високий рівень підготовки серед команд провідних вищих навчальних закладів України.

Журі I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики в НТУУ "КПІ" вирішило видати навчальний посібник з задачами I етапу олімпіади та їх розв'язками. Наведені також умови задач II фінального етапу олімпіади, який проходив у м. Севастополі в травні 2008 р., а також розв'язки задач фінального етапу Всеукраїнської олімпіади 2007 р. Крім того, цей збірник містить задачі олімпіади для школярів, яка проводилася на фізико-математичному факультеті НТУУ "КПІ" в квітні 2008 р.

Це видання продовжує серію збірників олімпіадних задач з математики [1–5]. Такі збірники будуть корисними при роботі математичних гуртків, для студентів і школярів, які цікавляться математикою.

1. Студентська олімпіада НТУУ "КПІ" з математики 2008 року

Умови задач

Перший курс

1.1. Вказати всі натуральні числа, які можуть бути зображені у вигляді суми декількох послідовних натуральних чисел (в кількості не менше двох).

1.2. Показати, що для будь-яких дійсних чисел α і β виконується нерівність

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \le \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

1.3. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{(x+1)}}{(x+1)^x} - \frac{x}{e}\right).$$

1.4. Позначимо через x_n, $n = 1, 2, \ldots$, додатні корені рівняння $\operatorname{tg} x = x^{2008}$, розташовані в порядку зростання. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$.

1.5. Опукле тіло в просторі $\mathbb{R}^3$ містить принаймні 9 точок з цілими координатами. Чи обов'язково воно містить 3 точки з цілими координатами, що лежать на спільній прямій?

1.6. Знайти всі неперервні функції $(f(x), x \in \mathbb{R})$ такі, що для раціональних значень $y - x$ значення $f(y) - f(x)$ також є раціональними.

1.7. Довести, що для будь-яких дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{110}$, серед яких є хоча б одне ненульове, має місце нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{110} \frac{x_i x_j}{i+j+1} > 0.$$

1.8. Знайти всі неперервно диференційовні функції y такі, що для всіх x з області визначення виконується рівність

$$\int_{\frac{dy}{dx}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\,dt}{25+4\cos^2 t} = \frac{1}{10}\operatorname{arctg} x.$$

1.9. Обчислити інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}\,dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

1.10. Еліпс з півосями a та b обертається в своїй площині так, що весь час торкається фіксованої прямої в фіксованій точці. Знайти площу фігури, обмеженої замкненою кривою, яку описують при цьому фокуси еліпсу.

Старші курси

1.11. Показати, що для будь-яких комплексних чисел α і β виконується нерівність

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \le \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

1.12. Див. **1.4**.

1.13. Див. **1.5**.

1.14. Див. **1.6**.

1.15. Див. **1.7**.

1.16. Для числа $x \in [0,1)$ з десятковим розкладом $x = 0,a_1a_2a_3\ldots$ покладемо $f(x) = 0,b_1b_2b_3\ldots$, де b_i – остання цифра числа a_i^{11}. Знайти $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

1.17. Див. **1.10**.

1.18. Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^n x^n e^{\frac{t^2}{n}}\,dt.$$

1.19. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – фіксовані додатні числа. Знайти мінімальне значення суми $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ в області $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k} = 1$, $x_1, \ldots, x_n > 0$.

1.20. Дана послідовність

$$u_1 = 2,\ u_2 = 8,\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2},\ n = 3, 4, \ldots. \tag{1.1}$$

Знайти $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} u_n^2$.

Розв'язки

1.1. Позначимо через A_k, $k \geq 0$, множину тих натуральних чисел m, в розклад яких на прості множники множник 2 входить в степені k. Наприклад, $A_3 = \{8, 24, 40, 56, \dots\}$. Множину A_k може бути задано як множину чисел вигляду $2^k d$, де d пробігає всі додатні непарні значення.

Можна вибрати, наприклад, таке зображення: для будь-якого $m \in A_k$ існує таке $n \in \{-2^k+1, -2^k+2, \dots\}$, що

$$m = 2^k(2n + 2^{k+1} - 1). \tag{1.2}$$

Зокрема, при $n = -2^k + 1$ одержуємо $m = 2^k$, при $n = -2^k + 2$ буде $m = 3 \cdot 2^k$ і т. д.

З формули (1.2) маємо:

$$m = n + (n+1) + \dots + (n + 2^{k+1} - 1). \tag{1.3}$$

Цей вираз і був би шуканим зображенням числа m у вигляді суми послідовних натуральних чисел, якщо б всі доданки в (1.3) були додатними числами. Якщо $n \neq -2^k + 1$ (тобто $m \neq 2^k$), то додатних доданків в (1.3) буде як мінімум на три більше, ніж від'ємних. Скорочуючи доданки, що відрізняються лише знаком, одержимо суму *лише* додатних доданків, кількістю не менше трьох. Якщо ж $n = -2^k + 1$ (тобто $m = 2^k$), то після скорочення залишиться лише один доданок, що не задовольняє умову задачі. Таким чином, будь яке натуральне число, що не є степенем двійки ($m \neq 1, 2, 4, 8, \dots$), може бути зображено у вигляді вказаної суми.

Покажемо тепер, що степені двійки (включаючи і число 1) не можуть бути зображені в шуканому вигляді. Якщо $m = 2^r$, то з рівності

$$m = n + (n+1) + \dots + (n + s - 1) = sn + \frac{s(s-1)}{2} \tag{1.4}$$

випливає, що s (кількість доданків) не може мати жодних інших простих дільників, крім двійки. Тому $s = 2^{k+1}$, $k \geq 0$. Тоді сума (1.4) має той же вигляд, що і (1.3). Як було показано в першій частині доведення, ця сума не може приводити до зображення числа, що є степенем двійки.

Відповідь. Всі числа, крім чисел вигляду 2^n, $n = 0, 1, 2, \dots$.

1.2. Функція $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ є монотонно зростаючою для $x \in [0, \infty)$, оскільки

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0, \; x \in [0, \infty).$$

В силу цього, оскільки для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| + |\alpha\beta|,$$

маємо

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} &\leq \frac{|\alpha|+|\beta|+|\alpha\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\alpha\beta|} \leq \\ &\leq \frac{|\alpha|+|\beta|+2|\alpha\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\alpha\beta|} = \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.\end{aligned}$$

1.3.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{(x+1)}}{(x+1)^x} - \frac{x}{e}\right) = \\ &\qquad = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{x^x}{(x+1)^x} - \frac{1}{e}\right) = \boxed{\text{Заміна: } t = \frac{1}{x}} = \\ &\qquad = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}} - \frac{1}{e}\right) = \boxed{\text{Правило Лопіталя}} = \\ &\qquad = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}\frac{\ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}}{t^2} = \\ &\qquad = \frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}}{t^2} = \boxed{\text{Правило Лопіталя}} = \\ &\qquad = \frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)^2} = \frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{1}{2e}$.

1.4. Перш за все покажемо, що принаймні для великих значень n ($n \geq$ деякого натурального N) на періоді $(\frac{\pi}{2}+\pi(n-1); \frac{\pi}{2}+\pi n)$ є один і тільки один розв'язок рівняння. Дійсно, оскільки

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi(n-1)+0}(\operatorname{tg} x - x^{2008}) = -\infty$$

і

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+\pi n-0}(\operatorname{tg} x - x^{2008}) = +\infty,$$

то на періоді є *принаймні* один розв'язок. Він, очевидно, лежить у правій половині періоду – на інтервалі $(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n)$. Якщо ж на цьому інтервалі лежать хоча б два розв'язки ($x_n', x_n'' \in (\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n)$), то вони є нулями диференційовної на цьому проміжку функції $f(x) = x^{2008}\operatorname{ctg} x - 1$. Тому на цьому ж інтервалі є також нуль функції $f'(x)$, тобто розв'язок рівняння $1004 \sin 2x = x$. Це є неможливим при великих значеннях x.

Нехай x_n — єдиний розв'язок рівняння $\operatorname{tg} x = x^{2008}$, який належить інтервалу $(\frac{\pi}{2} + \pi(n-1); \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \geq N$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} x_n = +\infty$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - \frac{\pi}{2} - \pi n) = 0$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \pi$.

Відповідь. π.

1.5. Розділимо всі "цілі" точки простору на вісім класів. До першого віднесемо ті точки, в яких всі три координати є парними числами, до другого – ті, в яких перші дві парні, а третя непарна, до третього – ті, в яких перша і третя координата парні, а друга непарна і т. д. Тоді серед дев'яти точок знайдуться принаймні дві точки A та B з одного класу. Але з означення класів випливає, що тоді й середина відрізка AB точка C є "цілою" точкою. Крім того, точка C міститься всередині заданого тіла внаслідок його опуклості. Отже, "цілі" точки A, B та C належать спільній прямій.

1.6. Для кожного раціонального r функція $f_r(x) = f(x+r) - f(x)$ є неперервною і приймає лише раціональні значення. Тому вона є сталою: існує таке раціональне c_r, що для будь-якого дійсного x виконується $f_r(x) = c_r$. З означення функції f_r зрозуміло, що константи c_r задовольняють функціональне рівняння Коші: для раціональних r_1 та r_2 має місце $c_{r_1+r_2} = c_{r_1} + c_{r_2}$. Але тоді $c_r = c_1 r$, і $f(r) = f(0) + c_1 r$. Тому, знову використовуючи неперервність функції f, маємо $f(x) = f(0) + c_1 x$ для всіх дійсних x. Таким чином, умову задачі можуть задовольняти лише лінійні функції з раціональним кутовим коефіцієнтом. Безпосередньо впевнюємося, що всі такі функції дійсно задовольняють умову.

Відповідь. $f(x) = a + c_1 x,\ a \in \mathbb{R},\ c_1 \in \mathbb{Q}$.

1.7. Проводячи елементарні перетворення, маємо:

$$\sum_{i,j=1}^{110} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \sum_{i,j=1}^{110} x_i x_j \int\limits_0^1 t^i t^j\, dt = \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^{110} x_i t^i\right)^2 dt \geq 0.$$

Внаслідок лінійної незалежності функцій t^i, $i = 1, \ldots, 110$, рівність може досягатися лише при $x_1 = \cdots = x_{110} = 0$.

1.8. Знайдемо інтеграл, що стоїть в лівій частині початкового рівняння

$$\int\limits_{\frac{dy}{dx}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t dt}{25+4\cos^2 t} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{dy}{dx}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2\cos t)}{25+(2\cos t)^2} =$$

$$= -\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2\cos t}{5}\bigg|_{\frac{dy}{dx}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2\cos\frac{dy}{dx}}{5}.$$

Таким чином, отримаємо

$$\operatorname{arctg}\frac{2\cos\frac{dy}{dx}}{5} = \operatorname{arctg} x \;\Leftrightarrow\; \frac{2\cos\frac{dy}{dx}}{5} = x,\; |x| \le \frac{2}{5}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2\pi n \pm \arccos\frac{5x}{2},\; |x| \le \frac{2}{5},\; n\in\mathbb{Z}.$$

Проінтегруємо останнє рівняння

$$y = 2\pi n x \pm \int \arccos\frac{5x}{2}dx = \boxed{\begin{array}{l}\text{Інтегруємо частинами:}\\ u=\arccos\frac{5x}{2}, \qquad dv = dx,\\ du = -\frac{5dx}{\sqrt{4-25x^2}},\; v = x\end{array}} =$$

$$= 2\pi n x \pm \left(x\arccos\frac{5x}{2} + \int\frac{5xdx}{\sqrt{4-25x^2}}\right) =$$

$$= 2\pi n x \pm \left(x\arccos\frac{5x}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{4-25x^2}\right) + C.$$

Відповідь. $y = 2\pi n x \pm \left(x\arccos\frac{5x}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{4-25x^2}\right) + C,$
$|x| \le \frac{2}{5},\; n\in\mathbb{Z}.$

1.9. Розглянемо спочатку невизначений інтеграл

$$I = \int \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{\begin{array}{ll}\text{Інтегруємо частинами:} & \\ u = \dfrac{e^{-x^2}}{2x}, & dv = \dfrac{2xdx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}, \\ du = -\dfrac{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)e^{-x^2}dx}{x^2}, & v = -\dfrac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\end{array}} =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} - \int \frac{e^{-x^2}dx}{x^2} = \boxed{\begin{array}{ll}\text{Інтегруємо частинами:} & \\ u = e^{-x^2}, & dv = \dfrac{dx}{x^2}, \\ du = -2xe^{-x^2}dx, & v = -\dfrac{1}{x}\end{array}} =$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} + \frac{e^{-x^2}}{x} + 2\int e^{-x^2}dx = \frac{xe^{-x^2}}{x^2+\frac{1}{2}} + 2\int e^{-x^2}dx.$$

Оскільки, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, то

$$I = \sqrt{\pi}.$$

Відповідь. $\sqrt{\pi}$.

1.10. Як відомо, якщо вісь Ox направити вздовж більшої осі еліпса, а вісь Oy – вздовж малої осі, то параметричне рівняння еліпса буде мати вигляд $x = a\cos t,\ y = b\sin t$. Нехай $(x'; y')$ – координати фокуса $(-c; 0)$ відносно іншої прямокутної системи координат, в якій вісь Ox' співпадає з дотичною до еліпсу в точці, яка відповідає значенню параметра t, а за початок координат обрана ця ж точка. Тоді y' означає відстань від фокуса $(-c; 0)$ до дотичної, а x' – відстань від того ж фокуса до нормалі до еліпсу. Рівняння дотичної та нормалі мають вигляд

$$xb\cos t + ya\sin t - ab = 0, \qquad xa\sin t - yb\cos t - c^2\sin t\cos t = 0,$$

де $c^2 = a^2 - b^2$. Таким чином,

$$y' = \frac{|-cb\cos t - ab|}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} = \frac{b(a + c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} = b\sqrt{\frac{a + c\cos t}{a - c\cos t}},$$

$$x' = \frac{|-ca\sin t - c^2\sin t\cos t|}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} = c\sin t\sqrt{\frac{a + c\cos t}{a - c\cos t}}.$$

Оскільки крива, що описується фокусом $(-c;0)$, симетрична відносно осі Oy', то площу S, яку вона обмежує, можна представити у вигляді інтегралу

$$S = 2\int\limits_{t=\pi}^{t=0} x'dy' = \int\limits_{\pi}^{0} c\sin t\sqrt{\frac{a+c\cos t}{a-c\cos t}}\left(\frac{-2abc\sin t}{\sqrt{(a+c\cos t)(a-c\cos t)^3}}\right)dt =$$

$$= 2abc^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^2 t dt}{(a-c\cos t)^2} = \boxed{\begin{array}{l}\text{Інтегруємо частинами:}\\ u=\sin t,\quad dv=\frac{\sin t dt}{(a-c\cos t)^2},\\ du=\cos t dt,\ v=-\frac{1}{c(a-c\cos t)}\end{array}} =$$

$$= -\frac{2abc\sin t}{a-c\cos t}\Bigg|_0^{\pi} + 2abc\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos t dt}{a-c\cos t} =$$

$$= -2ab\int\limits_0^{\pi} dt + 2a^2b\int\limits_0^{\pi}\frac{dt}{a-c\cos t} = \boxed{\text{Заміна: } u=\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline t & 0 & \pi\\ \hline u & 0 & \infty\\ \hline\end{array}} =$$

$$= -2\pi ab + 4a^2b\int\limits_0^{\infty}\frac{du}{a-c+(a+c)u^2} =$$

$$= -2\pi ab + \frac{4a^2b}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arctg}\left(u\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = 2\pi a(a-b).$$

Неважко побачити, що приведені вище співвідношення не зміняться, якщо зробити заміну $-c$ на c і t на $\pi+t$. Це означає, що обидва фокуси описують одну й ту саму криву.

Відповідь. $2\pi a(a-b)$.

1.11. Див. розв'язок **1.2**.

1.12. Див. розв'язок **1.4**.

1.13. Див. розв'язок **1.5**.

1.14. Див. розв'язок **1.6**.

1.15. Див. розв'язок **1.7**.

1.16. Для будь-якого $i=1,2,\dots$ перетворення $a_i\to b_i$, що фігурує в умові задачі, може бути явно задано таким переліком:

$$0\to 0,\ 1\to 1,\ 2\to 8,\ 3\to 7,\ 4\to 4,\ 5\to 5,\ 6\to 6,\ 7\to 3,\ 8\to 2,\ 9\to 9.$$

Тому ця операція є взаємно однозначним перетворенням множини $\{0, 1, \ldots, 9\}$ на себе. Тоді

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \geq \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} \inf_{x\in\left[\frac{k}{10},\frac{k+1}{10}\right)} f(x) = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} f\left(\frac{k}{10}\right) = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\frac{k}{10} = 0.45,$$

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} \sup_{x\in\left[\frac{k}{10},\frac{k+1}{10}\right)} f(x) = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\left(f\left(\frac{k}{10}\right)+\frac{1}{10}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{10} = 0.55.$$

Аналогічно, розглядаючи розбиття проміжку $[0, 1)$ на 100, 1000 і т. д. відрізків, одержимо, що $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \in [0.495, 0.505], [0.4995, 0.5005]$ і т. д. Переходячи до границі за діаметром розбиття, одержуємо, що

$$\int\limits_0^1 f(x) = 0.5.$$

Відповідь. 0.5.

1.17. Див. розв'язок **1.10**.

1.18. Коефіцієнти запропонованого степеневого ряду мають вигляд $a_n = \int\limits_0^n e^{\frac{t^2}{n}}\,dt$. З ознаки Д'Аламбера випливає, що

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \boxed{\begin{array}{l}\text{перейдемо до}\\ \text{неперервної}\\ \text{змінної } y\end{array}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\int\limits_0^y e^{\frac{t^2}{y}}\,dt}{\int\limits_0^{y+1} e^{\frac{t^2}{y+1}}\,dt} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{r}\text{Заміна: } s = \dfrac{t}{\sqrt{y}} \text{ в чисельнику,}\\ s = \dfrac{t}{\sqrt{y+1}} \text{ в знаменнику}\end{array}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}}\cdot\frac{\int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{s^2}\,ds}{\int\limits_0^{\sqrt{y+1}} e^{s^2}\,ds} =$$

$$= \lim_{y\to\infty}\frac{\int\limits_0^{\sqrt{y}} e^{s^2}\,ds}{\int\limits_0^{\sqrt{y+1}} e^{s^2}\,ds} = \boxed{\text{Правило Лопіталя}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{e^y}{2\sqrt{y}}}{\dfrac{e^{y+1}}{2\sqrt{y+1}}} = \frac{1}{e}.$$

Відповідь. $\frac{1}{e}$.

1.19. З нерівності Коші-Буняковського маємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тому

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \Big)^2.$$

Легко бачити, що при підстановці значень $x_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}}{\sqrt{a_i}}$, $i = 1, \ldots, n$, функція $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ приймає значення $\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \right)^2$. Тому

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \right)^2.$$

Відповідь. $\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \right)^2$.

1.20. Спочатку доведемо, що

$$u_n^2 - u_{n+1} u_{n-1} = 4. \tag{1.5}$$

Дійсно, при $n \ge 2$

$$\begin{aligned} u_n(4u_{n-1}) = u_{n-1}(4u_n), \ \Leftrightarrow \ u_n(u_n + u_{n-2}) = u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1}), \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2} = u_{n-2}^2 - u_{n-1}u_{n-3} = \ldots = \\ = u_2^2 - u_3 u_1 = 64 - 60 = 4. \end{aligned}$$

Як наслідок з (1.5) легко отримати нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_n}{u_{n-1}}. \tag{1.6}$$

Також, переписавши рекурентне співвідношення (1.1) у вигляді

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 4 - \frac{1}{\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}}\ , \tag{1.7}$$

неважко довести методом математичної індукції, що

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} > 3. \tag{1.8}$$

Перетворимо вигляд загального члена ряду наступним чином:

$$\operatorname{arcctg} u_n^2 = \operatorname{arcctg}\left[\frac{u_n(4u_n)}{4}\right] = \operatorname{arcctg}\left[\frac{u_n(u_{n+1}+u_{n-1})}{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}}\right] =$$
$$= \operatorname{arcctg}\frac{u_{n+1}}{u_n} - \operatorname{arcctg}\frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Для отримання останнього співвідношення ми скористалися формулою

$$\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\left[\frac{xy+1}{y-x}\right],$$

яка має місце при $x < y$ (в нашому випадку остання нерівність випливає з (1.6)).

Розглянемо часткову суму ряду

$$S_m = \operatorname{arcctg} u_1^2 + \sum_{n=2}^{m} \operatorname{arcctg} u_n^2 =$$
$$= \operatorname{arcctg} u_1^2 + \sum_{n=2}^{m}\left[\operatorname{arcctg}\frac{u_{n+1}}{u_n} - \operatorname{arcctg}\frac{u_n}{u_{n-1}}\right] = \operatorname{arcctg}\frac{u_{m+1}}{u_m}.$$

З (1.6)–(1.8) випливає, що при $m \to \infty$ відношення $\dfrac{u_{m+1}}{u_m}$ прямує до більшого кореня квадратного рівняння $x^2 = 4x - 1$, тобто до $2+\sqrt{3}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} u_n^2 = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \operatorname{arcctg}\frac{u_{m+1}}{u_m} = \operatorname{arcctg}(2+\sqrt{3}) =$$
$$= \operatorname{arcctg}\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12}.$$

Відповідь. $\dfrac{\pi}{12}$.

2. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2007 р.)

II етап Всеукраїнської студентської олімпіади у м. Севастополі проводився у трьох категоріях:

– *Категорія "М":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за спеціальностями, що потребують поглибленого вивчення математики;

– *Категорія "Т":* до цієї категорії відносили студентів технічних спеціальностей;

– *Категорія "С":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за економічними та аграрними спеціальностями.

В цьому розділі подано завдання всіх категорій олімпіади 2007 р. з розв'язками.

Умови задач

Категорія "М"

2.1. Обчислити визначник $\Delta = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = b$, якщо $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., n$.

2.2. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки $K,\ L,\ M,\ N$ такі, що $\overline{AK} = \alpha\overline{CA},\ \overline{CL} = \beta\overline{BC},\ \overline{DM} = \gamma\overline{AD},\ \overline{DN} = \delta\overline{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

2.3. На площині розташовано дві параболи так, що їхні осі взаємно перпендикулярні, а самі параболи перетинаються в чотирьох точках. Довести, що ці чотири точки лежать на одному колі.

2.4. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких $x,\ y \in \mathbb{R}$ виконується рівність:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos y.$$

2.5. Для всіх значень дійсного параметра $p > 1$ розв'язати рівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}} = p. \qquad (2.1)$$

2.6. Довести, що для довільних $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x}.$$

2.7. Нехай неперервна функція $f : [0;1] \to [0;1]$ диференційовна в проміжку $(0;1)$, причому $f(0) = 0$ і $f(1) = 1$. Довести, що існують такі числа $a,\ b \in (0;1)$, що $a \neq b$ і $f'(a) \cdot f'(b) = 1$.

2.8. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x + \sin^3 x}.$$

2.9. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y^2(ydx - 2xdy) = x^3(xdy - 2ydx). \qquad (2.2)$$

2.10. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$$

Категорія "T"

2.11. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = 1 + x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = 1$, якщо $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., n$.

2.12. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки $K,\ L,\ M,\ N$ такі, що $\overline{AK} = \overline{CA}$, $\overline{CL} = 2\overline{BC}$, $\overline{DM} = \overline{AD}$, $\overline{DN} = 2\overline{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

2.13. Див. **2.3**.

2.14. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких $x,\ y \in \mathbb{R}$ виконується рівність:

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos x.$$

2.15. Розв'язати рівняння

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}} = 4.$$

2.16. З'ясувати, чи існує дійсне число $x > 0$ таке, що $x^e > e^x$.

2.17. Див. **2.7**.

2.18. Див. **2.8**.

2.19. Див. **2.9**.

2.20. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right).$$

Категорія "C"

2.21. Обчислити визначник $\Delta = |a_{ij}|$, де $a_{ij} = 1 + x_i$, якщо $i = j$ і $a_{ij} = 1$, якщо $i \neq j$; $i, j = 1, 2, ..., 5$.

2.22. Об'єм тетраедра $DABC$ дорівнює V. Точки K, L, M, N такі, що $\overline{AK} = \overline{CA}$, $\overline{CL} = \overline{BC}$, $\overline{DM} = \overline{AD}$, $\overline{DN} = \overline{CD}$. Знайти об'єм тетраедра $LKNM$.

2.23. Див. **2.3**.

2.24. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких при будь-яких дійсних $x \neq 1$ виконується рівність

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x.$$

2.25. Розв'язати рівняння

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}} = 2.$$

2.26. Довести, що для довільного $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x \geq x^e.$$

2.27. Довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ многочлен

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

не може мати більш як один дійсний корінь.

2.28. Див. **2.8**.

2.29. Розв'язати диференціальне рівняння

$$(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0. \tag{2.3}$$

2.30. Треба перевезти залізницею 20 великих і 250 малих контейнерів. Один вагон вміщує 30 малих контейнерів, вага кожного з яких дорівнює 2 тони. Великий контейнер займає місце 9 малих і важить 30 тон. Вантажність вагона - 80 тон. Знайти мінімальне число вагонів, яке потрібне для перевезення всіх контейнерів.

Розв'язки та відповіді

2.1.

Перший спосіб.

Віднімемо перший рядок від кожного з решти рядків, після чого розкладемо отриманий визначник за елементами останнього стовпця

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \dots & b & b \\ b-x_1 & x_2-b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1}-b & 0 \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n-b \end{vmatrix} =$$

$$=(x_n-b)\begin{vmatrix} x_1 & b & b & \dots & b \\ b-x_1 & x_2-b & 0 & \dots & 0 \\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1}-b \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b-x_1 & x_2-b & 0 & \dots & 0 \\ b-x_1 & 0 & x_3-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1}-b \\ b-x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(x_n-b)\Delta_{n-1}+$$
$$+ (-1)^{n+1}b(-1)^{n-1+1}(b-x_1)(x_2-b)(x_3-b)\dots(x_{n-1}-b).$$

Таким чином, маємо рекурентну формулу

$$\Delta_n = (x_n-b)\Delta_{n-1} + b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b).$$

За допомогою цієї формули послідовно дістаємо

$$\begin{aligned}\Delta_n =&(x_n-b)\left((x_{n-1}-b)\Delta_{n-2}+b(x_{n-2}-b)(x_{n-3}-b)\dots(x_1-b)\right)+\\ &\qquad\qquad + b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)=\\ =&(x_n-b)(x_{n-1}-b)\Delta_{n-2}+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+\\ &\qquad\qquad + (x_n-b)b(x_{n-2}-b)(x_{n-3}-b)\dots(x_1-b)=\dots=\\ =&(x_n-b)(x_{n-1}-b)\dots(x_2-b)\Delta_1+\\ &\quad + b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+\\ &\quad\ + (x_n-b)b(x_{n-2}-b)(x_{n-3}-b)\dots(x_1-b)+\dots+\\ &\quad\ \ + (x_n-b)\dots(x_4-b)(x_3-b)b(x_1-b).\end{aligned}$$

Оскільки $\Delta_1 = x_1 = (x_1-b)+b$, остаточно маємо

$$\begin{aligned}\Delta_n =&(x_n-b)(x_{n-1}-b)\dots(x_1-b)+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+\\ &+ (x_n-b)b(x_{n-2}-b)(x_{n-3}-b)\dots(x_1-b)+\dots+\\ &\ + (x_n-b)\dots(x_4-b)(x_3-b)(x_2-b)b\end{aligned}$$

або

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^{n}(x_i-b)+b\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(x_i-b)$$

Другий спосіб.

$$\begin{aligned}\Delta_n =& \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \dots & b\\ b & x_2 & b & \dots & b\\ b & b & x_3 & \dots & b\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b & b & b & \dots & x_n\end{vmatrix} =\\ =& \begin{vmatrix} b+(x_1-b) & b+0 & b+0 & \dots & b+0\\ b+0 & b+(x_2-b) & b+0 & \dots & b+0\\ b+0 & b+0 & b+(x_3-b) & \dots & b+0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b+0 & b+0 & b+0 & \dots & b+(x_n-b)\end{vmatrix} =\\ =& \begin{vmatrix} x_1-b & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & x_2-b & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & x_3-b & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n-b\end{vmatrix} +\end{aligned}$$

$$+\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & x_2-b & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & x_3-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & 0 & 0 & \dots & x_n-b \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1-b & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & x_3-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & 0 & \dots & x_n-b \end{vmatrix}+\dots+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1-b & 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & x_2-b & 0 & \dots & b \\ 0 & 0 & x_3-b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{vmatrix}=$$

$$= (x_n-b)(x_{n-1}-b)\dots(x_1-b)+b(x_{n-1}-b)(x_{n-2}-b)\dots(x_1-b)+$$
$$+(x_n-b)b(x_{n-2}-b)(x_{n-3}-b)\dots(x_1-b)+\dots+$$
$$+(x_n-b)\dots(x_4-b)(x_3-b)(x_2-b)b.$$

Відповідь. $\Delta_n = \prod_{i=1}^{n}(x_i-b)+b\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(x_i-b).$

2.2. Розкладемо вектори $\vec{KL}$, $\vec{KM}$, $\vec{KN}$ за базисом $\left(\vec{AB},\ \vec{AC},\ \vec{AD}\right)$ (рис. 1):

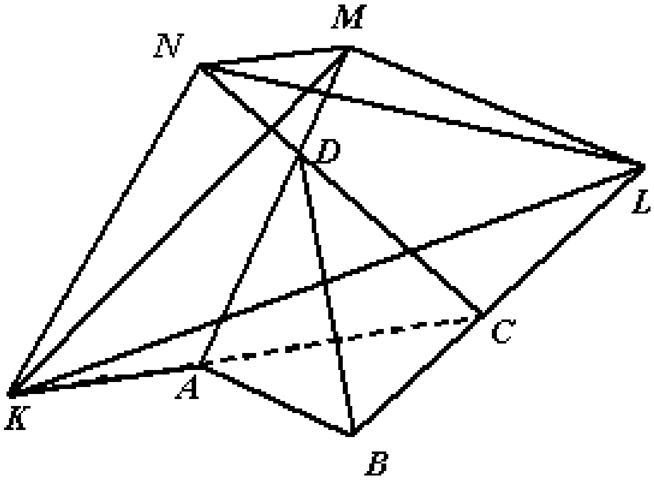

Рис. 1

$$\vec{KL} = \vec{KC} + \vec{CL} = (1+\alpha)\vec{AC} + \beta\vec{BC} = (1+\alpha+\beta)\vec{AC} - \beta\vec{AB},$$
$$\vec{KM} = \vec{KA} + \vec{AM} = \alpha\vec{AC} + (1+\gamma)\vec{AD},$$
$$\vec{KN} = \vec{KC} + \vec{CN} = (1+\alpha)\vec{AC} + (1+\delta)\vec{CD} = (\alpha-\delta)\vec{AC} + (1+\delta)\vec{AD}.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{KM}$ і $\vec{KN}$:

$$\vec{KM} \times \vec{KN} = \left(\alpha\vec{AC} + (1+\gamma)\vec{AD}\right) \times \left((\alpha-\delta)\vec{AC} + (1+\delta)\vec{AD}\right) =$$
$$= (\alpha\delta + \delta - \alpha\gamma + \gamma\delta)\vec{AC} \times \vec{AD}.$$

Обчислимо мішаний добуток трьох векторів $\vec{KL}$, $\vec{KM}$ і $\vec{KN}$

$$\vec{KL} \cdot \left(\vec{KM} \times \vec{KN}\right) =$$
$$= \left((1+\alpha+\beta)\vec{AC} - \beta\vec{AB}\right) \cdot \left((\alpha\delta + \delta - \alpha\gamma + \gamma\delta)\vec{AC} \times \vec{AD}\right) =$$
$$= -\beta(\alpha\delta + \delta - \alpha\gamma + \gamma\delta)\vec{AB} \cdot \left(\vec{AC} \times \vec{AD}\right).$$

Враховуючи геометричний зміст мішаного добутку, маємо

$$V_{LKNM} = \frac{1}{6}\left|\vec{KL} \cdot \left(\vec{KM} \times \vec{KN}\right)\right| = \left|\beta(\alpha\delta + \delta - \alpha\gamma + \gamma\delta)\right| V.$$

Відповідь. $V_{LKNM} = |\beta(a\delta + \delta - \alpha\gamma + \gamma\delta)|V.$

2.3.

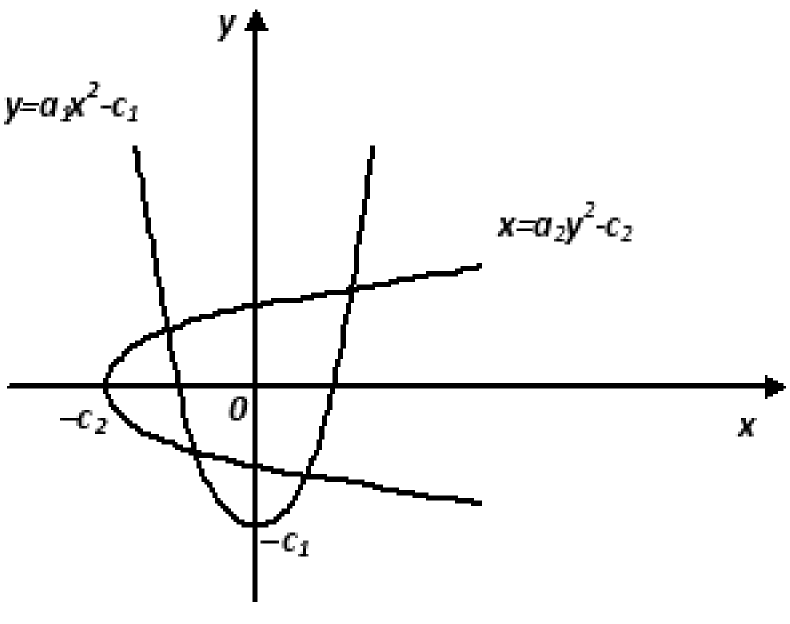

Рис.2

Оберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox і Oy співпали з осями парабол, а гілки парабол було спрямовано в додатніх напрямах координатних осей (рис. 2). Тоді рівняння парабол матимуть вигляд: $y = a_1x^2 - c_1$ і $x = a_2y^2 - c_2$, де $a_1 > 0,\ a_2 > 0$.

Оскільки за умовою параболи перетинаються в чотирьох точках, то $c_1 > 0,\ c_2 > 0$.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – будь-яка з чотирьох точок перетину парабол. Тоді координати цієї точки задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = a_1x_0^2 - c_1, \\ x_0 = a_2y_0^2 - c_2. \end{cases}$$

Поділимо обидві частини першого рівняння системи на $a_1 \neq 0$, а обидві частини другого рівняння на $a_2 \neq 0$, після чого додамо перше рівняння до другого:

$$x_0^2 + y_0^2 - \frac{y_0}{a_1} - \frac{x_0}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} - \frac{a_2}{c_2} = 0.$$

Виділяючи повні квадрати, дістаємо

$$\left(x_0 - \frac{1}{2a_2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2a_1}\right)^2 = \frac{c_1}{a_1} + \frac{a_2}{c_2} + \frac{1}{4a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2}.$$

Таким чином, точка M_0 лежить на колі з центром у точці $O\left(\frac{1}{2a_2}; \frac{1}{2a_1}\right)$ і радіусом $R = \sqrt{\frac{c_1}{a_1} + \frac{a_2}{c_2} + \frac{1}{4a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2}}$, що і треба було довести.

2.4. Виконаємо послідовно заміни: $x = 0,\ y = t;\ x = t + \frac{\pi}{2},\ y = \frac{\pi}{2};$ $x = \frac{\pi}{2},\ y = t + \frac{\pi}{2}$. Тоді отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t) + f(-t) = 2a\cos t \\ f(\pi + t) + f(t) = 0 \\ f(\pi + t) + f(-t) = -2b\sin t \end{cases}, \quad \text{де } a = f(0),\ b = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $f(t) = a\cos t + b\sin t$ або $f(x) = a\cos x + b\sin x$, де $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Перевірка показує, що знайдена функція є розв'язком даної задачі при будь-яких дійсних $a,\ b$.

Відповідь. $f(x) = a\cos x + b\sin x,\ a, b \in \mathbb{R}$.

2.5. Розглянемо послідовність $a_n(x) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}}$. Тоді

$$a_{n+1}(x) = x^{a_n(x)}. \qquad (2.4)$$

Припустимо, що рівняння (2.1) має розв'язок. Переходячи в рівності (2.4) до границі при $n \to \infty$ дістаємо: $p = x^p$, звідки $x = p^{\frac{1}{p}}$.

Таким чином, якщо рівняння (2.1) має розв'язок, то $x = p^{\frac{1}{p}}$.

З'ясуємо, при яких $p \in (1, +\infty)$ послідовність $\left\{a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$ збігається до p.

Оскільки $x = p^{\frac{1}{p}} > 1$, то $x^x > x$, $x^{x^x} > x^x$, $\ldots$, $\underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n+1 \text{ раз}} > \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{n \text{ разів}}$ і, отже, $a_{n+1}(x) > a_n(x)$, тобто послідовність $\left\{a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$ є монотонно зростаючою.

Також неважко довести, за допомогою метода математичної індукції, що $a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right) < p,\ n \in \mathbb{N}$.

Дійсно, $a_1\left(p^{\frac{1}{p}}\right) = p^{\frac{1}{p}} < p$, оскільки $p > 1$. Якщо припустити, що $a_k\left(p^{\frac{1}{p}}\right) < p$, тоді $a_{k+1}\left(p^{\frac{1}{p}}\right) = \left(p^{\frac{1}{p}}\right)^{a_k\left(p^{\frac{1}{p}}\right)} < \left(p^{\frac{1}{p}}\right)^p = p$.

Таким чином, послідовність $\left\{a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$ обмежена зверху. Тому, за теоремою Вейерштраса, послідовність $\left\{a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right)\right\}$ має скінчену границю A. Підставляючи $x = p^{\frac{1}{p}}$ в рівність (2.4) і переходячи до границі при $n \to \infty$, дістанемо, що A є коренем рівняння

$$A = f(A) \tag{2.5}$$

де $f(A) = \left(p^{\frac{1}{p}}\right)^A$.

Рівняння (2.5) для довільного $p \in (1, +\infty)$ має корінь $A = p$, причому $f'(p) = \ln p$.

Розглянемо три випадки.

1) Якщо $p = e$, тоді $f'(p) = f'(e) = \ln e = 1$ і, отже, рівняння (2.5) має єдиний розв'язок $A = p$ (пряма $y = A$ є дотичною до графіку показникової функції $y = f(A)$ в точці (e, e)) (рис. 3,а).

2) Якщо $1 < p < e$, тоді $f'(p) = \ln p < 1$ і рівняння (2.5) має два корені: $A = p$ і $A = q > p$. Оскільки $\left\{a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right)\right\} < p$, то $A = p$ (рис. 3,б).

3) Якщо $p > e$, тоді $f'(p) = \ln p > 1$ і рівняння (2.5) має два корені: $A = p$ і $A = q$, $1 < q < p$ (рис. 3,в). При цьому $q = \left(p^{\frac{1}{p}}\right)^q$, звідки $q^{\frac{1}{q}} = p^{\frac{1}{p}}$. Тому $a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right) = a_n\left(q^{\frac{1}{q}}\right) < q$. Отже, в цьому випадку $A = q$.

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right) = p$, якщо $p \in (1, e]$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\left(p^{\frac{1}{p}}\right) \neq p$, якщо

$p \in (e, \infty)$.

Отже, якщо $p \in (1, e]$ тоді рівняння має єдиний розв'язок $x = p^{\frac{1}{p}}$; а якщо $p \in (e, \infty)$, тоді рівняння не має розв'язків.

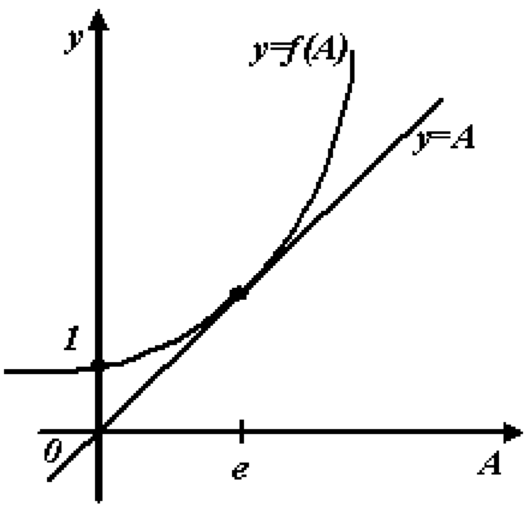

Рис. 3,*а*

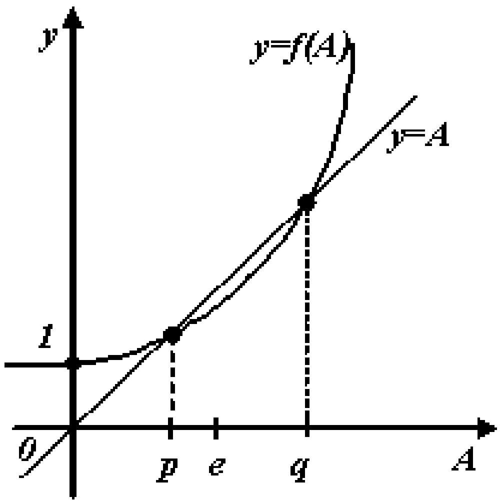

Рис. 3,*б*

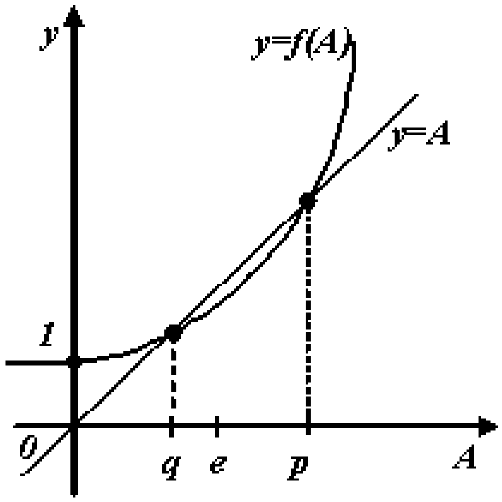

Рис. 3,*в*

Відповідь. Якщо $p \in (1, e]$, то $x = p^{\frac{1}{p}}$; якщо $p \in (e, +\infty)$, то $x \in \varnothing$.

2.6. Для всіх $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x} \;\Leftrightarrow\; 2x\cos x < \sin x + \cos x \sin x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg} x + \sin x - 2x > 0.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. При

$x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 > \frac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x - 2 > 0,$$

оскільки $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos^2 x > 2$.

Таким чином, функція $f(x)$ є неперервною і монотонно зростаючою на проміжку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, тобто

$$f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x - 2x > 0 = f(0), \text{ або } \frac{2\cos x}{1+\cos x} < \frac{\sin x}{x}$$

для всіх $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, що й треба було довести.

2.7. Розглянемо функцію $\varphi(x) = f(x)+x-1$. Ця функція неперервна на $[0,1]$ і на його кінцях набуває значень різних знаків: $\varphi(0) = -1 < 0$, $\varphi(1) = 1 > 0$. Отже, згідно з першою теоремою Больцано-Коші, існує таке $c \in (0,1)$, що $\varphi(c) = 0$, тобто $f(c) = 1 - c$.

Функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[0,c]$ і диференційовна на інтервалі $(0,c)$, тобто задовольняє умовам теореми Лагранжа. Отже існує таке $a \in (0,c)$, що

$$f'(a) = \frac{f(c)}{c} = \frac{1-c}{c}.$$

Аналогічно, існує таке $b \in (c,1)$, що

$$f'(b) = \frac{1-f(c)}{1-c} = \frac{c}{1-c}.$$

Таким чином, маємо $a \neq b$ для яких $f'(a) \cdot f'(b) = 1$, що й треба було довести.

2.8. Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x} &= \frac{(\cos x + \sin x)^2 - 2\cos x \sin x}{(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x)} = \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)^2 + 2(1 - \cos x \sin x)}{3(\cos x + \sin x)(1 - \cos x \sin x)} = \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \sin x} + \frac{2}{\cos x + \sin x}\right).\end{aligned}$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}=\frac{1}{3}\int\frac{(\cos x+\sin x)dx}{1-\cos x\sin x}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\cos x+\sin x}=$$
$$=\frac{2}{3}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)^2}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(2\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right)+C.$$

Відповідь. $\frac{1}{3}\left(2\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|\right)+C.$

2.9. Легко бачити, що $x=0$, $y=0$ є розв'язками рівняння (2.2).

Нехай $x\neq 0,\ y\neq 0$. Поділимо обидві частини рівняння (2.2) на xy:

$$y^2\left(\frac{dx}{x}-\frac{2dy}{y}\right)=x^3\left(\frac{dy}{y}-\frac{2dx}{x}\right).$$

Перепишемо отримане рівняння у вигляді:

$$y^2 d\ln\frac{|x|}{y^2}=x^3 d\ln\frac{|y|}{x^2}. \tag{2.6}$$

Зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases}\dfrac{|x|}{y^2}=e^u\\ \dfrac{|y|}{x^2}=e^v\end{cases},\quad \begin{cases}x^3=\pm e^{-u}\cdot e^{-2v}\\ y^2=e^{-\frac{2v}{3}}\cdot e^{-\frac{4u}{3}}\end{cases}.$$

При такій заміні рівняння (2.6) перетворюється в рівняння з відокремлюваними змінними

$$e^{-\frac{u}{3}}du=\pm e^{-\frac{4v}{3}}dv,$$

розв'язком якого є $4(e^u)^{-\frac{1}{3}}=\pm(e^v)^{-\frac{4}{3}}+C$, де C – довільна стала.

Повертаючись до змінних x і y, остаточно маємо $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy}$.

Відповідь. $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy};\ x=0;\ y=0.$

2.10. Перетворимо загальний член ряду

$$a_n=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=(-1)^n\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n\right)=$$
$$=(-1)^n\cos\left(\pi\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right).$$

Оскільки послідовність додатних чисел $\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\right)$ є монотонно зростаючою і прямує до $\dfrac{\pi}{2}$, тоді послідовність додатніх чисел $\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}\right)$ монотонно спадає і прямує до нуля. Отже, за теоремою Лейбніца, заданий ряд збігається.

Оскільки $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{8n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, то

$$\begin{aligned}|a_n| &= \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n\right) = \cos\left(\pi n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{\pi}{8n}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким чином, за граничною ознакою порівняння, ряд, утворений з абсолютних величин членів заданого ряду, є розбіжним.

Отже , заданий числовий ряд є умовно збіжним.

Відповідь. Збігається умовно.

2.11. В розв'язку задачі **2.1** замінити x_i на $x_i+1,\ i=1,\ldots,n$ і покласти $b=1$.

Відповідь. $\Delta_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} x_i$.

2.12. В розв'язку задачі **2.2** покласти $\alpha=\gamma=1,\ \beta=\delta=2$.

Відповідь. $V_{LKNM}=10V$.

2.13. Див. розв'язок задачі **2.3**.

2.14. Виконаємо послідовно заміни: $x=0,\ y=t$; $x=\dfrac{\pi}{2},\ y=t+\dfrac{\pi}{2}$; $x=t+\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{2}$. Тоді отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} f(t)-f(-t)=2f(t) \\ f(t+\pi)-f(-t)=0 \\ f(t+\pi)-f(t)=-2a\sin t \end{cases}, \quad \text{де } a=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо $f(t) = a\sin t$, тобто $f(x) = a\sin x$, де $a \in \mathbb{R}$.

Перевірка показує, що знайдена функція є розв'язком даної задачі для будь-якого дійсного a.

Відповідь. $f(x) = a\sin x,\ a \in \mathbb{R}$.

2.15. Див. розв'язок задачі **2.5**.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

2.16. Доведемо, що для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x > x^e,$$

причому рівність має місце лише при $x = e$.

Задана нерівність рівносильна нерівності $x \geq e \cdot \ln x$, або нерівності $x - e \cdot \ln x \geq 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = x - e \cdot \ln x,\ x > 0$. Для неї

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x}$$

і, отже, $f'(x) = 0$ при $x = e$. Легко бачити, що точка $x = e$ є точкою мінімуму функції $f(x)$, а це означає, що при $x = e$ функція набуває найменше значення $f(e) = 0$, а при $x \neq e$ $f(x) > 0$. Таким чином, для всіх $x > 0$ $x - e \cdot \ln x \geq 0$ або $e^x \geq x^e$ і, відповідно, не існує такого $x > 0$, що $x^e > e^x$.

Відповідь. Не існує.

2.17. Див. **2.7**.

2.18. Див. **2.8**.

2.19. Див. **2.9**.

2.20. Аналогічно до (2.7), загальний член данного ряду можна звести до вигляду

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Оскільки $|a_n| \sim \dfrac{\pi}{8n^{\frac{3}{2}}}$, тоді даний ряд є абсолютно збіжним.

Відповідь. Збігається абсолютно.

2.21. В розв'язку задачі **2.11** покласти $n = 5$.

Відповідь. $\Delta = \prod\limits_{i=1}^{5} x_i + \sum\limits_{k=1}^{5} \prod\limits_{i=1, i\neq k}^{5} x_i$.

2.22. В розв'язку задачі **2.2** покласти $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.
Відповідь. $V_{LKNM} = 2V$.

2.23. Див. розв'язок задачі **2.3**.

2.24. Нехай $\dfrac{x+1}{x-1} = y$, тоді $x = \dfrac{y+1}{y-1}$, і рівняння набуває вигляду

$$\frac{2}{y-1} f(y) - f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = \frac{y+1}{y-1}.$$

Таким чином, для знаходження функції $f(x)$ маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} (x-1) f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x \\ \dfrac{2}{x-1} f(x) - f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}.$$

Помноживши обидві частини другого рівняння на $(x-1) \neq 0$ і додавши до першого рівняння, отримаємо: $f(x) = 2x+1, \ x \neq 1$. Оскільки шукана функція повинна бути неперервною, остаточно отримуємо: $f(x) = 2x + 1, \ x \in \mathbb{R}$.

Відповідь. $f(x) = 2x + 1$.

2.25. Див. розв'язок задачі **2.5**.
Відповідь. $\sqrt{2}$.

2.26. Див. розв'язок задачі **2.16**.

2.27. Нехай многочлен $P_n(x)$ має більше ніж один дійсний корінь (таких коренів може бути не більше ніж n), і нехай x_1 і x_2 – корені многочлена ($x_1 < x_2$) такі, що інтервал (x_1, x_2) не містить інших дійсних коренів заданого многочлена. Зауважимо, що $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$, оскільки многочлен $P_n(x)$ може мати лише від'ємні корені.

Оскільки $P_n'(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, тоді $P_n(x) = P_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!}$ і, отже, $P_n'(x_1) = -\dfrac{x_1^n}{n!}$, $P_n'(x_2) = -\dfrac{x_2^n}{n!}$. Отримуємо, що в точках x_1 і x_2 похідна $P_n'(x)$ має однакові знаки. Тоді в деякому правому півоколі точки x_1 і в деякому лівому півоколі точки x_2 многочлен $P_n(x)$ буде мати різні знаки. Отже, маємо, що існує така точка $x_3 \in (x_1, x_2)$, для якої $P_n(x_3) = 0$. Отримуємо протиріччя.

Таким чином, многочлен $P_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ має не більше ніж один дійсний корінь, що й треба було довести.

2.28. Див. **2.8**.

2.29. Очевидно, $y = 0$ є розв'язком рівняння (2.3).

Нехай $y > 0$. Зробимо заміну змінних: $y = \sqrt{z}$ $(z = y^2)$, $z > 0$. При такій заміні рівняння (2.3) перетворюється в однорідне рівняння

$$(z^2 - 3x^2)dz + 2xzdx = 0. \tag{2.8}$$

Рівняння (2.8) за допомогою заміни $z = ux$ $(u \neq 0,\ x \neq 0)$ зводиться до рівняння з відокремлюванними змінними

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 3}{u^3 - u}du = 0,$$

розв'язком якого є $Cxu^3 = u^2 - 1$, де C – довільна стала. Повертаючись до змінної y, остаточно дістаємо $y^4 - x^2 = Cy^6$.

Отриманий розв'язок також має місце при $y < 0$.

Відповідь. $y^4 - x^2 = Cy^6$; $y = 0$.

2.30. З'ясуємо, як можна завантажити вагон. Вже три великих контейнери не ввійдуть у вагон, оскільки разом важать 90 тон. Звідси випливає, що є три способи завантаження вагогну: нуль великих і не більш ніж 30 малих, один великий і не більш ніж 21 малий (в вагоні всього 30 місць і 9 з них вже зайнято великим контейнером), два великих контейнери і не більш ніж 10 малих.

Нехай завантажено x вагонів у перший спосіб, y вагонів – у другий, z вагонів – у третій. Той факт, що перевезено 20 великих і 250 малих контейнерів, означає, що

$$\begin{cases} y + 2z \geq 20, \\ 30x + 21y + 10z \geq 250 \end{cases}.$$

Помноживши першу нерівність на 9 і додавши до другої, дістаємо

$$30x + 30y + 28z \geq 430 \ \Leftrightarrow\ 30(x + y + z) \geq 430 + 2z \ \Rightarrow\ x + y + z \geq 14\frac{1}{3}.$$

Оскільки $x + y + z$ – ціле, тоді $x + y + z \geq 15$.

Легко перевірити, що $x = 2$, $y = 6$, $z = 7$ задовольняють систему нерівностей, а їх сума дорівнює 15. Це означає, що мінімальне число вагонів, потрібне для перевезення всіх контейнерів, дорівнює 15.

Відповідь. 15 вагонів.

3. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2008 р.)

В цьому пункті подано завдання олімпіади 2008 р.

Умови задач

Категорія "М"

3.1. Яким умовам мають задовольняти дійсні числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c$, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

була несумісною?

3.2. На всіх сторонах опуклого n-кутника $A_1A_2...A_n$ зовні побудовано правильні трикутники $A_1A_2B_n,\ A_2A_3B_1,\ A_3A_4B_2,\ ...,\ A_nA_1B_{n-1}$. Довести, що $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + ... + \vec{A_nB_n} = \vec{0}$.

3.3. Дано параболи $y = x^2$ й $y = x^2 + m$ $(m > 0)$. В якому відношенні хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику?

3.4. Послідовність $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$, задано за допомогою рекурентної формули:

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 3.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{4^n}$.

3.5. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних $x,\ y$ задовольняють рівняння

$$f(x) \cdot f(y) - f(xy) = xy + x + y - 1.$$

3.6. Функція $f(x)$ задовольняє умови: $f(1) = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$, $\forall x \geq 1$. Довести, що існує $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ і що ця границя не більше, ніж $1 + \dfrac{\pi}{4}$.

3.7. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0, 1]$ і у кожній точці цього відрізка має першу та другу похідні. Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$ і $|f''(x)| \leq 1 \; \forall x \in [0, 1]$. Яке найбільше значення може набувати максимум функції $f(x)$ для всіх можливих функцій, що задовольняють ці умови?

3.8. Знайти невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^\alpha} - \frac{1}{1 + x^\beta} \right) \frac{1}{x} dx,$$

де α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta > 0$.

3.9. Нехай многочлен $P_n(x)$ степеня n з дійсними коефіцієнтами при всіх дійсних значеннях x набуває лише додатніх значень. Довести, що многочлен $P_n(x)$ можна подати у вигляді суми квадратів двох многочленів.

3.10. Розв'язати диференціальне рівняння

$$\frac{2}{3} xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$$

Категорія "Т"

3.11. Яким умовам мають задовольняти дійсні числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3 x_2 + a_2 x_3 = b_1, \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 = b_2, \\ -a_2 x_1 + a_1 x_2 = b_3, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c \end{cases}$$

мала безліч розв'язків?

3.12. На всіх сторонах опуклого шестикутника $A_1 A_2 ... A_6$ зовні побудовано правильні трикутники $A_1 A_2 B_6$, $A_2 A_3 B_1$, $A_3 A_4 B_2$, ..., $A_6 A_1 B_5$. Довести, що $\vec{A_1 B_1} + \vec{A_2 B_2} + ... + \vec{A_6 B_6} = \vec{0}$.

3.13. Дано параболи $y = x^2$ й $y = x^2 + 1$. Довести, що хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику навпіл?

3.14. Послідовність $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$, задано за допомогою рекурентної формули:

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2},\ n \geq 3.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{3^n}$.

3.15. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних $x,\ y,\ z$ задовольняють рівняння

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) - f(xyz) = xy + xz + yz + x + y + z.$$

3.16. Див. **3.6**.

3.17. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0, 1]$ і у кожній точці цього відрізка має першу та другу похідні. Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$ і $|f''(x)| \leq 1\ \forall x \in [0, 1]$. Довести, що найбільше значення, яке може набути максимум функції $f(x)$ для всіх можливих функцій, що задовольняють ці умови, дорівнює $\dfrac{1}{8}$.

3.18. Знайти невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^\alpha} - \frac{1}{1 + x^\beta} \right) \frac{1}{x} dx,$$

де $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0$.

3.19. Див. **3.9**.

3.20. Два тіла нагріли до 100^oC, а потім помістили в середовище, температура якого підтримується постійною і дорівнює 0^oC. Через 10 хвилин після початку охолодження тіл температура першого знизилася до 80^oC, а температура другого – до 64^oC. Через скільки хвилин від початку охолодження тіл температура одного з них буде на 25^oC більше, ніж температура іншого, якщо швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла й навколишнього середовища?

Категорія "С"

3.21. Яким умовам мають задовольняти дійсні числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c$, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

мала єдиний розв'язок?

3.22. На всіх сторонах опуклого трикутника ABC зовні побудовано правильні трикутники $ABC_1,\ BCA_1,\ CAB_1$. Довести, що $\vec{A_1A_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

3.23. Довести, що відрізок будь-якої дотичної до рівнобічної гіперболи, який лежить між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

3.24. Послідовність $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$, задано за допомогою рекурентної формули:

$$a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},\ n \geq 3.$$

Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n}$.

3.25. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних $x,\ y,\ z$ задовольняють рівняння

$$f\left(x - f(y)\right) = 1 - x - y.$$

3.26. Які числові значення може набувати

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x + a^2}{x + b^2}\right)^x,$$

якщо $4a^2 + b^2 + 2b \leq 3,\ a, b \in \mathbb{R}$?

3.27. Відомо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[0, 1]$, диференційовна в проміжку $(0, 1)$, $f(0) = 4,\ f(1) = 2,\ f'(x) \geq -2\ \forall x \in [0, 1]$. Знайти функцію $f(x)$ і довести, що інших функцій, які задовольняють умови задачі, не існує.

3.28. Довести, що

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+x^\beta} \right) \frac{1}{x} dx = 0,$$

де $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

3.29. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sqrt[3]{u} - x \right| du,\ x \in \mathbb{R}.$$

3.30. Двоє робітників виготовили понад 29 однакових деталей. Кількість деталей, виготовлених першим робітником, що зменшена на 2, буде більше ніж у 3 рази перевищувати кількість деталей, виготовлених другим робітником. Потроєна кількість деталей, виготовлених першим робітником, перевищує подвоєну кількість деталей, виготовлених другим робітником, але менше, ніж на 60. Скільки деталей виготовив кожен робітник?

4. Шкільна олімпіада 2008 р. (ФМФ НТУУ "КПІ")

Задачі цього пункту пропонувались абітурієнтам на олімпіаді, які проводив фізико-математичний факультет у 2008 р.

Умови задач

4.1. Чи існують такі натуральні числа n і m, щоб виконувалась рівність

$$2^n - 2^m = 2008.$$

4.2. Розв'язати рівняння

$$x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2006} + x^{2008} = 1004x.$$

4.3. Розв'язати рівняння для додатніх чисел x

$$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}},$$

де через $[x]$ і $\{x\}$ позначено відповідно цілу і дробову частини числа x.

4.4. Розшукати геометричне місце точок перетину медіан усіх трикутників, вписаних у дане коло.

4.5. Три комбайни різної продуктивності зібрали врожай з ділянки за 1 годину 12 хвилин. За скільки годин зібрав би врожай кожний з них окремо, якщо відомо, що це число ціле (для кожного комбайна)?

4.6. У шаховому турнирі брало участь n шахістів. Кожний зустрічався з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилася внічию. Довести, що за результатами турніру всіх шахістів можна перенумерувати таким чином, щоб для кожного $k = 1, ..., n-1$ гравець під номером k був переможцем гравця під номером $k+1$.

Відповіді та розв'язки

4.1. З умови задачі ясно, що в разі існування таких n і m з необхідністю виконується нерівність $n > m$. Тому вихідне рівняння може бути переписано у вигляді $2^m\left(2^{n-m} - 1\right) = 8 \cdot 251$, де перші множники зліва та справа є степенями двійки, а другі — непарними числами. Звідси, зокрема, випливає, що $2^{n-m} - 1 = 251$. Але число 251 не може бути записано у вигляді $2^k - 1$. Це доводить, що шуканих чисел n і m не існує.

4.2. Ясно, що множина розв'язків наведеного рівняння складається з розв'язків рівняння

$$x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2005} + x^{2007} = 1004 \qquad (4.1)$$

і числа 0. В рівнянні (4.1) ліва частина монотонно зростає за x від $-\infty$ до ∞, а права є сталою. Тому рівняння (4.1) має рівно один розв'язок, яким, як легко перевірити, є $x = 1$. Таким чином, множиною розв'язків вихідного рівняння є $\{0, 1\}$.

4.3. З рівняння ясно, що

$$x \notin [0, 1] \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \dots \qquad (4.2)$$

Домножуючи обидві частини рівняння на $\{x\}$, розглянемо його як квадратне відносно $\{x\}$:

$$\{x\}^2 - \big([x] + 1/[x]\big)\{x\} + 1 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, маємо: $\{x\} = [x]$ або $\{x\} = 1/[x]$. Перший випадок можливий лише при $x = 0$, що суперечить умові (4.2), другий дає множину розв'язків $\mathcal{M} = \{2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, \dots\} = \{n + \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots\}$. Таким чином, наведена множина $\mathcal{M}$ є множиною розв'язків вихідного рівняння.

4.4.

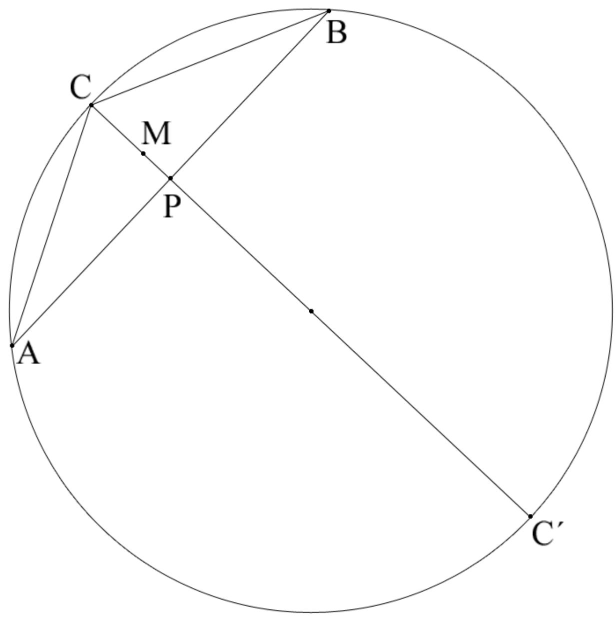

Рис. 4

Покажемо, що шуканим геометричним місцем є вся область $\mathcal{D}$, обмежена даним колом $\mathcal{O}$. Для цього побудуємо трикутник з вершинами

$A, B, C \in \mathcal{O}$, точкою перетину медіан якого є довільно обрана точка $M \in \mathcal{D}$. Нехай CC' – діаметр круга, який проходить через точку M (див. Рис. 4), $CM \leq MC'$. Відмітимо на відрізку MC' таку точку P, що $MP = \frac{1}{2}CM$, і проведемо через неї до діаметру CC' перпендикуляр AB, $A, B \in \mathcal{O}$. В трикутнику ABC відрізок CP є медіаною, а точка M — точкою перетину медіан.

З іншого боку ясно, що жодна точка $X \notin \mathcal{D}$ не може бути точкою перетину медіан трикутнику з вершинами на колі.

4.5. Нехай перший комбайн зібрав би врожай за l_1 годин, другий — за l_2, третій — за l_3. Тоді за одну годину три комбайни разом зібрали б $1/l_1 + 1/l_2 + 1/l_3$ врожаю, що за умовою має дорівнювати $5/6$ (одна година є $5/6$ від години і 12 хвилин). Таким чином, задача зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = \frac{5}{6} \tag{4.3}$$

в *різних* натуральних числах.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $l_1 < l_2 < l_3$. Покажемо, що $l_1 = 2$. Дійсно, припущення $l_1 = 1$ призводить до $1/l_1 + 1/l_2 + 1/l_3 > 1 > \frac{5}{6}$, а припущення $l_1 \geq 3$ — до $1/l_1 + 1/l_2 + 1/l_3 \leq 1/3 + 1/4 + 1/5 = 47/60 < 5/6$. Таким чином, з необхідністю виконується умова $l_1 = 2$.

Подібним чином встановлюємо, що $l_2 = 4$. Дійсно, при $l_2 \leq 3$ маємо $1/l_1 + 1/l_2 + 1/l_3 > 1/2 + 1/3 = 5/6$, при $l_2 \geq 6$ — $1/l_1 + 1/l_2 + 1/l_3 < 1/2 + 1/6 + 1/7 < 5/6$, а при $l_2 = 5$ — $1/2 + 1/5 + 1/l_3 = 5/6$, звідки $l_3 = 7\frac{1}{2}$ — неціле число.

Тому розв'язками рівняння (4.3) в різних натуральних числах є різні перестановки набору $2, 4, 12$, що і є відповіддю до задачі.

4.6. Доведемо твердження методом математичної індукції за числом шахістів. При $n = 2$ твердження є очевидним. Припустимо, що твердження вірне для n шахістів і за результатами турніру вони впорядковані так: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Якщо тепер b є $n + 1$-им шахістом, який з кожним із шахістів a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, зіграв по одній партії, то він в наведеній послідовності займе місце безпосередньо перед тим шахістом a_j з найменшим можливим номером, в якого b виграв. Якщо ж b програв всім іншим гравцям, він стає останнім. Таким чином, дістаємо потрібне впорядкування $n + 1$ шахістів.

Література

[1] Булдигін В.В., Кушніревич В.А., Шкабара О.С., Ясінський В.В. *Студентські математичні олімпіади. Збірник задач.* - К.: НТУУ "КПІ" - 2002. - 175 с.

[2] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу* - Невский Диалект, БХВ-Петербург. - 2004. - 624 с.

[3] Математичні олімпіади - 2007 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський. - К.: НТУУ "КПІ", 2007. - 28 с.

[4] Садовничий В.А., Григорьян А. А., Конягин С.В. *Задачи студенческих математических олимпиад* - Издательство Московского университета. - 1987. - 624 с.

[5] Садовничий В.А., Подколзин А.С. *Задачи студенческих олимпиад по математике: Пособие для студентов вузов* - М.: Дрофа - 2003. - 208 с.