МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ – 2009

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання
та школярів

Київ
НТУУ «КПІ»
2010

Математичні олімпіади – 2009 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2010. - 45 с.

Навчальне видання

Математичні олімпіади – 2009

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання
та школярів

Укладачі: *Булдигін Валерій Володимирович*
Ільєнко Андрій Борисович
Орловський Ігор Володимирович

Відповідальний редактор *З.П. Ординська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Ю.В. Богданський,* доктор фіз.-мат. наук, проф.

Передмова

У березні 2009 року в НТУУ «КПІ» відбулася традиційна щорічна олімпіада з математики, яка проводиться в рамках I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для студентів вищих навчальних закладів. Оргкомітет олімпіади очолював Перший проректор НТУУ «КПІ» Ю. І. Якименко.

Найбільші делегації представили факультети з високим рівнем математичної підготовки: ІПСА, ФТІ, ФМФ, ФПМ, ФЕЛ, ФІОТ.

Переможцями олімпіади стали:

абсолютний переможець: Слюсаренко Олексій Олександрович (ІПСА, 2 курс).

старші курси: Слюсаренко Олексій Олександрович, Карбачевський Олексій Ілліч (ФТІ, 5 курс) - перше місце, Голоднов Кирило Олександрович(ІПСА, 2 курс) та Огнєв Павло Ігорович (ФТІ, 2 курс) - друге місце, Мистецький Віктор Анатолійович (ФМФ, 4 курс) та Козленко Микола Вікторович (ФПМ, 3 курс) - третє місце.

перший курс: Моравецька Катерина Віталіївна (ІПСА) - перше місце, Могильний Сергій Сергійович (ІПСА) - друге місце, Новак Роман Ігорович (ІПСА) - третє місце.

технічні факультети: Уварова Наталія Володимирівна (ФІОТ, 1 курс) - перше місце, Дрозд Вадим Павлович (ФЕЛ, 1 курс) - друге місце, Лящун Ігор Богданович (ФІОТ, 1 курс) та Нго Ван Мао (ФЕЛ, 2 курс) - третє місце.

З переможців I етапу було сформовано збірні університету для участі в II етапі Всеукраїнської олімпіади серед технічних ВНЗів в м. Севастополі. У фіналі взяли участь понад 150 студентів з різних вузів України, переможців та призерів I туру олімпіади. Наш університет представляли три команди.

Студенти КПІ гідно виступили в Севастополі, показавши такі результати:

в абсолютному заліку: Слюсаренко Олексій Олександрович (ІПСА, 2 курс) - друге місце, Карбачевський Олексій Ілліч (ФТІ, 5 курс) - третє місце, Голоднов Кирило Олександрович (ІПСА, 2 курс) - четверте місце, Нго Ван Мао (ФЕЛ, 2 курс) - сьоме місце, Моравецька Катерина Віталіївна (ІПСА, 1 курс) - восьме місце, Козленко Микола Вікторович (ФПМ, 3 курс) - одинадцяте місце.

в категорії М (студенти спеціальностей, що потребують поглибленого вивчення математики): Слюсаренко Олексій Олександрович (ІПСА, 2 курс) - перше місце, Карбачевський Олексій Ілліч (ФТІ, 5 курс) - друге місце, Голоднов Кирило Олександрович (ІПСА, 2 курс) - третє місце, Моравецька Катерина Віталіївна (ІПСА, 1 курс) - четверте місце, Козленко Микола Вікторович (ФПМ, 3 курс) - п'яте місце.

в категорії Т (студенти технічних спеціальностей): Нго Ван Мао (ФЕЛ, 2 курс) - друге місце.

в групі політехнічних та індустріальних ВНЗ: Слюсаренко Олексій Олександрович (ІПСА, 2 курс) - друге місце, Карбачевський Олексій Ілліч (ФТІ, 5 курс) - третє місце, Голоднов Кирило Олександрович (ІПСА, 2 курс) - четверте місце, Нго Ван Мао (ФЕЛ, 2 курс) - п'яте місце, Моравецька Катерина Віталіївна (ІПСА, 1 курс) - шосте місце, Козленко Микола Вікторович (ФПМ, 3 курс) - сьоме місце.

Оргкомітет Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (м. Севастополь) нагородив команду НТУУ «КПІ» грамотою за активну участь в олімпіаді та високий рівень підготовки серед команд провідних вищих навчальних закладів України.

Журі І етапу Всеукраїнської олімпіади з математики в НТУУ «КПІ» вирішило видати навчальний посібник з задачами факультетських турів олімпіади з математики, І етапу олімпіади та їх розв'язками. Наведені також умови задач ІІ фінального етапу олімпіади, який проходив у м. Севастополі в травні 2009 р., а також розв'язки задач фінального етапу Всеукраїнської олімпіади 2008 р.

Крім того, у грудні 2008 року кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей було проведено факультетські тури олімпіади з математики. Метою цих олімпіад було активізувати здібних студентів для вивчення математики, виявити їх дійсний рейтинг, залучити до участі в математичних олімпіадах університетського та загальнодержавного рівня, які відбудуться весною 2009 року.

Всього в олімпіаді взяло участь понад чотириста студентів з 8 факультетів НТУУ «КПІ»: ІТС, ФІОТ, ФАКС, ФММ, ФЕЛ, ММІФ, ФМФ, РТФ. По кожному факультету виявлено переможців. Абсолютними переможцями по кожному з факультетів стали: ІТС - Лавріненко Олег (1 курс); ФІОТ - Городецький Олександр (1 курс); ФАКС - Бабенко Дмитро (1 курс); ФММ - Слободенюк Аліна (1 курс); ФЕЛ - Нго Ван Мао (2 курс); ММІФ - Огієнко Олексій (2 курс); ФМФ - Шумило Володимир (1 курс); РТФ - Во Зуй Фук (1 курс).

Цей збірник містить також задачі олімпіад для школярів, які проводились в технічному ліцеї НТУУ «КПІ» осінню 2008 р. та на фізико-математичному факультеті НТУУ «КПІ» в квітні 2009 р.

Це видання продовжує серію збірників олімпіадних задач з математики [1–6]. Такі збірники будуть корисними при роботі математичних гуртків, для студентів і школярів, які цікавляться математикою.

1. Студентська олімпіада НТУУ "КПІ" з математики 2009 року

Умови задач

Перший курс

Задача 1.1. Знайти всі натуральні числа від 1 до 10000, які мають рівно 6 дільників, серед яких є 7 та 41.

Задача 1.2. Троє студентів на парі грають в таку гру. Перший називає довільне натуральне число m, другий — натуральне число n, а третій записує якусь матрицю A з m рядками та n стовпцями. Після цього гравці обчислюють визначник $\det A^T A$. Якщо його значення виходить від'ємним, то виграє перший гравець, якщо нульовим — то другий, якщо ж додатним — то третій. Під яким номером грати краще за все? Чому?

Задача 1.3. У воронку в формі параболоїду $z = x^2 + y^2$ кинули кулю радіуса R. Знайти координати центру кулі після падіння та закінчення коливань.

Задача 1.4. Знайти область визначення і побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4x}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(x+5+\sqrt{5})^n (x+5-\sqrt{5})^n}{4^n}.$$

Задача 1.5. Позначимо через $\sigma(q)$ суму цифр натурального числа q.

а) Довести, що для кожного $q_0 \in \mathbb{N}$ існує границя

$$L(q_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sigma(\sigma(\ldots\sigma(}_{n \text{ разів}} q_0)\ldots));$$

б) Знайти $L(q_0)$ для $q_0 = 2009$!

Задача 1.6. Знайти всі такі неперервні функції $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+y) = g(x)h(y)$.

Задача 1.7. Довести, що для всіх $x > 0$, $p > 1$ справедлива нерівність

$$\ln(1+x^p) < \frac{(p-1)x}{\sqrt[p]{p-1}}.$$

Задача 1.8. Для фіксованого $p > 0$ покладемо

$$f_p(x,y) = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Визначити мінімальне значення функції $f_p(x,y)$, коли точка (x,y) пробігає *овал Ламе* $x^4 + y^4 = 1$.

Задача 1.9. Знайти інтеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{2009}\,dx}{x^{4021} + x^{4020} + x + 1}$.

Старші курси

<u>**Задача 1.10.**</u> Знайти середнє геометричне всіх дільників числа

$$1 \cdot (1+3) \cdot (1+3+5) \cdot \ldots \cdot (1+3+5+\ldots+2009).$$

<u>**Задача 1.11.**</u> Див. **1.3.**

<u>**Задача 1.12.**</u> Позначимо через $\sigma(q)$ суму цифр натурального числа q.

а) Див. **1.5.а)**;

б) Знайти $L(q_0)$ для $q_0 = 2009^{2009}$.

<u>**Задача 1.13.**</u> Знайти всі такі неперервні функції $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(\sin^2 x + \cos^2 y) = g(\cos^2 x)h(\sin^2 y).$$

<u>**Задача 1.14.**</u> Нагадаємо, що *подвійний факторіал* $n!!$ натурального числа n визначається формулою

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, & \text{якщо число } n \text{ — непарне,} \\ 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n, & \text{якщо число } n \text{ — парне,} \end{cases}$$

і за домовленістю $0!! = 1$. Покладемо

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Знайти $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} S(x)$.

<u>**Задача 1.15.**</u> Див. **1.8.**

<u>**Задача 1.16.**</u> Див. **1.9.**

<u>**Задача 1.17.**</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2 y'' - xy' + y = \ln x.$$

<u>**Задача 1.18.**</u> Випадкові величини $\{\xi_n, n = 1, \ldots, 2009\}$ — незалежні й однаково розподілені за законом

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 2\} = \mathbf{P}\{\xi_i = 3\} = \frac{1}{3}, \qquad i = 1, \ldots, 2009.$$

Знайти ймовірність події

$$A = \left\{ \frac{1}{2009}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{2009}\right) > \frac{2009}{\frac{1}{\xi_1} + \ldots + \frac{1}{\xi_{2009}}} \right\}.$$

Відповіді та розв'язки

1.1. Добре відомо, що кожне натуральне число $N > 1$ може бути зображено у вигляді
$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$
причому кількість його дільників дорівнює
$$\tau(N) = (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1).$$
З умови задачі випливає, що
$$n \geq 2, \qquad (\alpha_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1) = 6,$$
звідки $n = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $p_1 = 7$, $p_2 = 41$ або ж $n = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $p_1 = 41$, $p_2 = 7$. В першому випадку одержуємо $N = 7 \cdot 41^2 = 11767$ (що більше за 10000), в другому маємо $N = 41 \cdot 7^2 = 2009$.

Відповідь: таке число є лише одне — це 2009.

1.2. Ключовим для розв'язку є таке

Твердження. *Якщо* $m<n$, *то* $\det A^T A = 0$.

Доведемо його. Матриця $A^T A$ має розмірність $n \times n$. Однак
$$\operatorname{rang} A^T A \leq \operatorname{rang} A \leq m < n.$$
Тому $A^T A$ має неповний ранг, тобто $\det AA^T = 0$.

Тепер стає зрозумілою тактика.

Відповідь: краще за все грати під другим номером — він завжди може забезпечити собі виграш, обравши число n більше за m.

1.3. Розглянемо переріз параболоїда і кулі (в усталеному стані) якоюсь радіальною площиною (наприклад, XOZ). В залежності від радіуса кулі можливі два випадки, наведені на рис. 1а та 1б.

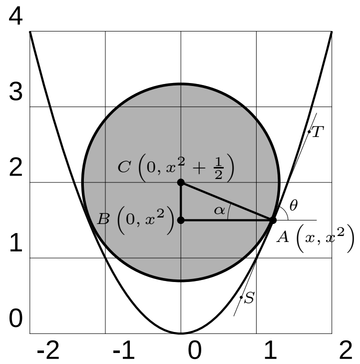


Рис. 1а. Взаємне розташування параболоїда та кулі, переріз площиною XOZ. Перший випадок.

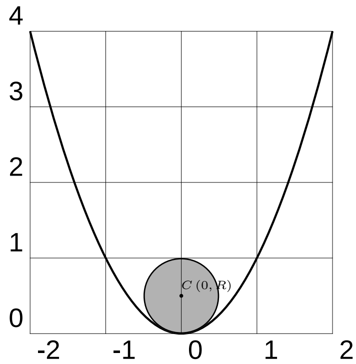


Рис. 1б. Взаємне розташування параболоїда та кулі, переріз площиною XOZ. Другий випадок.

Розглянемо перший випадок. В точці дотику $A\left(x, x^2\right)$ параболи $z = x^2$ та кола проведемо дотичну ST, кутовий коефіцієнт $\operatorname{tg}\theta$ якої, очевидно, дорівнює $2x$. Зважаючи на те, що $\angle CAT = 90^\circ$, одержимо $\operatorname{ctg}\alpha = 2x$ (див. рис. 1а). Тому $\frac{|AB|}{|BC|} = 2x$, і $|BC| = \frac{1}{2}$. Таким чином, центр кола точка C має координати $\left(0, x^2 + \frac{1}{2}\right)$. Для знаходження величини x залишилося застосувати до трикутника ABC теорему Піфагора: $x^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Тому точка C має координати $\left(0, R^2 + \frac{1}{4}\right)$.

При $R = \frac{1}{2}$ виходить $R^2 + \frac{1}{4} = R$. Це свідчить про те, що при $R < \frac{1}{2}$ ми маємо випадок, зображений на рис. 1б, і тому $C(0, R)$.

Відповідь: $x_C = 0,\ y_C = 0,\ z_C = \begin{cases} R, & R < 1/2, \\ R^2 + 1/4, & R \geq 1/2. \end{cases}$

1.4. Функцію f можна переписати в такому вигляді:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{4x}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{2}\right) + 5\right)^n.$$

Розв'язавши відповідні квадратні нерівності, легко перевірити, що

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{2}\right) + 5 \begin{cases} \in (-\infty, -1] & \text{при } x \in [-6, -4], \\ \in (-1, 1) & \text{при } x \in (-8, -6) \cup (-4, -2), \\ = 1 & \text{при } x = -8,\ x = -2, \\ \in (1, +\infty) & \text{при } x \in (-\infty, -8) \cup (-2, +\infty). \end{cases}$$

Тепер, враховуючи співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n \begin{cases} \text{не існує (послідовність осцилює)} & \text{при } \alpha \in (-\infty, -1], \\ = 0 & \text{при } \alpha \in (-1, 1), \\ = 1 & \text{при } \alpha = 1, \\ = +\infty & \text{при } \alpha \in (1, +\infty), \end{cases}$$

і поведінку функції arctg, остаточно маємо:

$$f(x) \begin{cases} \text{не існує} & \text{при } x \in [-6, -4], \\ = 0 & \text{при } x \in (-8, -6) \cup (-4, -2), \\ = x & \text{при } x = -8,\ x = -2, \\ = 2x & \text{при } x \in (-\infty, -8) \cup (-2, +\infty). \end{cases}$$

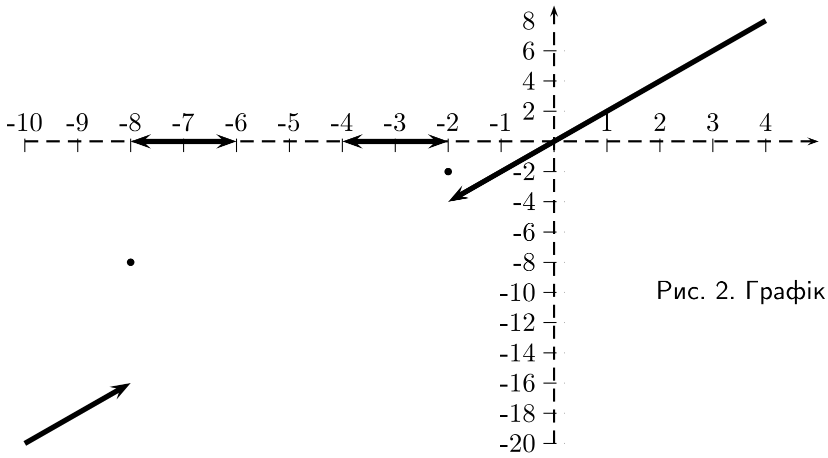


Рис. 2. Графік функції $f(x)$

<u>Відповідь:</u> $D_f = (-\infty, -6) \cup (-4, +\infty)$; графік функції зображено на рис.2.

<u>1.5.</u>

а) Нехай десятковий розклад числа q має вигляд $\overline{k_m k_{m-1} \ldots k_1}$, тобто

$$q = 10^m k_m + 10^{m-1} k_{m-1} + \ldots + 10k_2 + k_1. \qquad (*)$$

Тоді

$$\sigma(q) = k_m + k_{m-1} + \ldots + k_2 + k_1. \qquad (**)$$

Звідси видно, що $\sigma(q) < q$ при $q \geq 10$. Тому границя $L(q_0)$ існує та належить множині $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

б) Будемо позначати через $k \bmod l$ остачу від ділення натурального числа k на натуральне число l. Для відповіді на питання б) ключовим є таке

Твердження. $L(q_0) = \begin{cases} q_0 \bmod 9 & \textit{при } q_0 \bmod 9 \neq 0, \\ 9 & \textit{при } q_0 \bmod 9 = 0. \end{cases}$

Дійсно, з формул $(*)$ та $(**)$ маємо

$$q - \sigma(q) = \underbrace{99\ldots9}_{m-1 \text{ раз}} k_m + \underbrace{99\ldots9}_{m-2 \text{ рази}} k_{m-1} + \ldots + 9k_2 \,\vdots\, 9.$$

Тому $q_0 \equiv \sigma(q_0) \equiv \sigma(\sigma(q_0)) \equiv \ldots \equiv L(q_0) \mod 9$.

Тепер, враховуючи нерівність $1 \leq L(q_0) \leq 9$, одержуємо потрібне твердження.

Очевидно, $2009! \,\vdots\, 9$. Застосовуючи доведене твердження $L(2009!) = 9$.

<u>Відповідь:</u> б) 9.

<u>1.6.</u> Розглянемо спочатку найпростіший випадок: $f \equiv 0$. Оскільки функції g та h в правій частині рівняння мають незалежні між собою аргументи, то з необхідністю одна з них тотожно дорівнює нулеві, а інша є довільною неперервною функцією.

Нехай тепер $f \not\equiv 0$. Покладаючи в рівнянні $x = 0$, одержуємо

$$f(y) = g(0)h(y).$$

Якщо $g(0) = 0$, то ми приходимо до вже розглянутого випадку $f \equiv 0$. Тому, позначаючи $C_1 = g^{-1}(0)$, маємо

$$h(y) = C_1 f(y). \tag{$*$}$$

Аналогічно, покладаючи $y = 0$ та $C_2 = h^{-1}(0)$, одержуємо

$$g(x) = C_2 f(x). \tag{$**$}$$

Підставляючи тепер $(*)$ і $(**)$ в початкове рівняння, маємо

$$f(x+y) = C_1 C_2 f(x) f(y),$$

звідки, після заміни $w(\cdot) = C_1 C_2 f(\cdot)$, остаточно одержимо:

$$w(x+y) = w(x)w(y). \tag{$***$}$$

Добре відомо, що всі не тотожно нульові неперервні розв'язки рівняння $(***)$ мають вигляд $w(x) = e^{kx}$, де k — деяка дійсна константа[1]. Тому мають місце формули

$$\begin{gathered} f(x) = C_1^{-1} C_2^{-1} e^{kx}, \\ g(x) = C_2 f(x) = C_1^{-1} e^{kx}, \\ h(x) = C_1 f(x) = C_2^{-1} e^{kx}. \end{gathered}$$

Покладаючи для зручності $a = C_1^{-1}$, $b = C_2^{-1}$, одержуємо таку
Відповідь: є такі розв'язки рівняння:

а) $f \equiv g \equiv 0$, h — довільна неперервна функція;

б) $f \equiv h \equiv 0$, g — довільна неперервна функція;

в) $f(x) = abe^{kx}$, $g(x) = ae^{kx}$, $h(x) = be^{kx}$, де $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{R}$.

1.7. Покладемо $f(x) = \ln(1 + x^p)$, $x \geq 0$. Тоді

$$f'(x) = \frac{px^{p-1}}{1 + x^p},$$

$$f''(x) = \frac{px^{p-2}}{(1 + x^p)^2} \cdot (p - 1 - x^p).$$

1 За допомогою логарифмування рівняння $(***)$ зводиться до класичного функціонального рівняння Коші $p(x+y) = p(x) + p(y)$, яке у класі неперервних функцій має лише лінійні розв'язки.

Оскільки $f''(x) > 0$ при $x \in (0, \sqrt[p]{p-1})$ і $f''(x) < 0$ при $x \in (\sqrt[p]{p-1}, +\infty)$, то

$$f'_{\max} = f'\left(\sqrt[p]{p-1}\right) = (p-1)^{\frac{p-1}{p}} = \frac{p-1}{\sqrt[p]{p-1}}.$$

Тому

$$f(x) = \int\limits_0^x f'(t)\,dt < \int\limits_0^x f'_{\max}\,dt = \frac{(p-1)x}{\sqrt[p]{p-1}}, \qquad x > 0.$$

1.8. Вигляд овала Ламе 4-го степеня наведений на рис. 3.

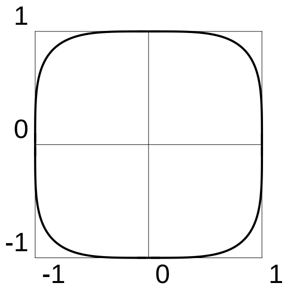


Рис. 3. Овал Ламе 4-го степеня

В силу симетрії достатньо розв'язати задачу для чверті овала, яка розташована в першому квадранті. Ця чверть, очевидно, допускає таку параметризацію:

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos t}, \\ y(t) = \sqrt{\sin t}, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Значення $f_p(x, y)$ на цій дузі приймає вигляд

$$f_p(t) = \sqrt[p]{\cos^{\frac{p}{2}} t + \sin^{\frac{p}{2}} t}. \tag{$*$}$$

В силу монотонності функції $\sqrt[p]{x}$ при $x \geq 0$, достатньо знайти мінімальне значення функції $\tilde{f}_p(t) = \cos^{\frac{p}{2}} t + \sin^{\frac{p}{2}} t$ на проміжку $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Безпосереднім диференціюванням знаходимо

$$\tilde{f}'_p(t) = \frac{p}{2} \sin t \cos t \left(\cos^{\frac{p-4}{2}} t - \sin^{\frac{p-4}{2}} t\right).$$

При $p \in (0, 4)$ похідна $\tilde{f}'_p(t)$ додатна при $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ і від'ємна при $t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.
При $p = 4$ похідна $\tilde{f}'_p(t)$ дорівнює 0 при всіх t.
При $p \in (4, \infty)$ похідна $\tilde{f}'_p(t)$ від'ємна при $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ і додатна при $t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Звідси (і зважаючи на симетричність функції $\tilde{f}_p(t)$ відносно $t_0 = \frac{\pi}{4}$) маємо

$$t_{\min} = \begin{cases} 0, & p \in (0, 4), \\ \text{будь-яка точка відрізку } \left[0, \frac{\pi}{2}\right), & p = 0, \\ \frac{\pi}{4}, & p \in (4, \infty). \end{cases}$$

Підставляючи такі значення $t_{\min}$ в формулу $(*)$, одержимо таку

Відповідь: 1 при $p \in (0,4]$ та $2^{1/p-1/4}$ при $p \in (4,\infty)$.

1.9. Зробивши в інтегралі заміну змінної $y = \frac{1}{x}$, одержимо:

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^\infty \frac{x^{2009}\,dx}{x^{4021}+x^{4020}+x+1} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{dy}{y^{2011}\left(y^{-4021}+y^{-4020}+y^{-1}+1\right)} = \int\limits_0^\infty \frac{y^{2010}\,dy}{y^{4021}+y^{4020}+y+1}.$$

Тому

$$2\mathcal{I} = \int\limits_0^\infty \frac{\left(x^{2009}+x^{2010}\right)\,dx}{x^{4021}+x^{4020}+x+1} = \int\limits_0^\infty \frac{x^{2009}\,dx}{x^{4020}+1} = \frac{1}{2010}\operatorname{arctg} x^{2010}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4020}.$$

Звідси одержуємо

Відповідь: $\frac{\pi}{8040}$.

1.10. Ключовим для розв'язку є таке

Твердження. *Середнє геометричне всіх дільників натурального числа N дорівнює $\sqrt{N}$.*

Для його доведення позначимо через $d_1,\ldots,d_n$ всі дільники числа N, впорядковані за зростанням. Ясно, що для всіх $i=1,\ldots,n$ виконується співвідношення $d_i d_{n+1-i} = N$. Тому

$$(d_1\ldots d_n)^2 = (d_1 d_n)\cdot(d_2 d_{n-1})\cdot\ldots\cdot(d_1 d_n) = N^n,$$

звідки $\sqrt[n]{d_1\ldots d_n} = \sqrt{N}$.

Зокрема, в нашому випадку маємо:

$$\sqrt[n]{d_1\ldots d_n} = \sqrt{1\cdot(1+3)\cdot(1+3+5)\cdot\ldots\cdot(1+3+5+\ldots+2009)} =$$
$$= \sqrt{1^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 1005^2} = 1005!$$

Відповідь: 1005!

1.11. Див. розв'язок **1.3.**

1.12.

а) див. в розв'язку **1.5.**

б) Застосуємо твердження доведене в **1.5.** Знайдемо остачу від ділення числа 2009^{2009} на 9. Оскільки $2009 \equiv 2 \mod 9$, то $2009^{2009} \equiv 2^{2009} \mod 9$. Далі, оскільки $2^6 = 64 \equiv 1 \mod 9$, а $2004 \vdots 6$, то $2^{2009} \equiv 2^{2009-2004} \equiv 32 \mod 9$. Отже, шукана остача дорівнює 5, і $L\left(2009^{2009}\right) = 5$.

Відповідь: 5.

1.13. Одразу зауважимо, що умова задачі не накладає жодних обмежень на поведінку функцій f, g, h поза відрізком $[0,1]$. Тому достатньо знайти такі функції на цьому відрізку, а потім у будь-який спосіб неперервно продовжити їх на $\mathbb{R}$. Далі ми будемо завжди неявно припускати, що область визначення всіх функцій — відрізок $[0,1]$.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок: $f \equiv 0$. Оскільки функції g та h в правій частині рівняння мають незалежні між собою аргументи, то з необхідністю одна з них тотожно дорівнює нулеві, а інша є довільною неперервною функцією.

Нехай тепер $f \not\equiv 0$. Покладаючи в рівнянні $x = 0$, одержуємо

$$f(\cos^2 y) = g(1)h(\sin^2 y).$$

Якщо $g(1) = 0$, то ми приходимо до вже розглянутого випадку $f \equiv 0$. Тому, позначаючи $C_1 = g^{-1}(1)$, маємо

$$h(\sin^2 y) = C_1 f(\cos^2 y). \tag{$*$}$$

Аналогічно, покладаючи $y = \frac{\pi}{2}$ та $C_2 = h^{-1}(1)$, одержуємо

$$g(\cos^2 x) = C_2 f(\sin^2 x). \tag{$**$}$$

Підставляючи тепер $(*)$ і $(**)$ в початкове рівняння, маємо

$$f(\sin^2 x + \cos^2 y) = C_1 C_2 f(\sin^2 x) f(\cos^2 y),$$

звідки, після заміни $s = \sin^2 x$, $t = \cos^2 y$, $w(\cdot) = C_1 C_2 f(\cdot)$, остаточно одержимо:

$$w(s+t) = w(s)w(t). \tag{$***$}$$

Добре відомо, що всі не тотожно нульові неперервні розв'язки рівняння $(***)$ мають вигляд $w(t) = e^{kt}$, де k — деяка дійсна константа[2]. Тому мають місце формули

$$\begin{aligned} f(t) &= C_1^{-1} C_2^{-1} e^{kt}, \\ g(t) = C_2 f(1-t) &= C_1^{-1} e^{k-kt}, \\ h(t) = C_1 f(1-t) &= C_2^{-1} e^{k-kt}. \end{aligned}$$

Покладаючи для зручності $a = C_1^{-1}$, $b = C_2^{-1}$, одержуємо таку

2 За допомогою логарифмування рівняння $(***)$ зводиться до класичного функціонального рівняння Коші $p(x+y) = p(x) + p(y)$, яке у класі неперервних функцій має лише лінійні розв'язки.

<u>Відповідь:</u> на відрізку $[0,1]$ є такі розв'язки:

а) $f \equiv g \equiv 0$, h — довільна неперервна функція;

б) $f \equiv h \equiv 0$, g — довільна неперервна функція;

в) $f(t) = abe^{kt}$, $g(t) = ae^{k-kt}$, $h(t) = be^{k-kt}$, де $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Всі розв'язки на $\mathbb{R}$ можна одержати неперервним продовженням цих функцій на $(-\infty, 0)$ та $(1, +\infty)$.

<u>1.14.</u> В першу чергу покажемо, що областю збіжності ряду є вся дійсна вісь $\mathbb{R}$. Для цього запишемо цей ряд у вигляді суми двох — за парними та за непарними степенями x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Обидва ряди справа збігаються на $\mathbb{R}$ за ознакою Д'Аламбера, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}/(2n+2)!!}{x^{2n}/(2n)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+3}/(2n+3)!!}{x^{2n+1}/(2n+1)!!} = 0 \qquad \text{незалежно від значення } x.$$

Знайдемо тепер аналітичний вираз для суми $S(x)$ цього ряду. Оскільки степеневий ряд можна почленно диференціювати на всій області збіжності, маємо:

$$S'(x) = \left(1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!!}\right)' = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!!} = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m!!} = 1 + xS(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження суми $S(x)$ залишилося розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку $S' = Sx + 1$. Скористаємося методом варіації сталої. Відповідне однорідне лінійне рівняння $S' = Sx$ має загальний розв'язок $S = Ke^{x^2/2}$. Вважаючи K функцією від x, маємо $S' = K'e^{x^2/2} + Kxe^{x^2/2}$. Підставляючи тепер все це в початкове рівняння, одержимо

$$K'e^{x^2/2} = 1,$$

звідки

$$K = \int e^{-x^2/2}\,dx = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt + C.$$

Тому

$$S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt + Ce^{x^2/2}.$$

Враховуючи очевидну початкову умову $S(0) = 1$, маємо $C = 1$,

$$S(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt + e^{x^2/2}, \quad \text{і} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2/2} S(x) = \int_0^\infty e^{-t^2/2}\, dt + 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 1.$$

Відповідь: $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

1.15. Див. розв'язок **1.8.**
1.16. Див. розв'язок **1.9.**
1.17. Рівняння можна переписати у вигляді $(y' + xy)' = x^2$. Тому

$$y' + xy = \frac{x^3}{3} + C. \tag{$*$}$$

Для розв'язання цього лінійного диференціального рівняння першого порядку скористаємося методом варіації сталої. Відповідне однорідне лінійне рівняння $y' + xy = 0$ має загальний розв'язок $y = Ke^{-x^2/2}$. Вважаючи K функцією від x, маємо

$$y' = K'e^{-\frac{x^2}{2}} - Kxe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Підставляючи тепер все це в рівняння $(*)$, одержимо

$$K'e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^3}{3} + C,$$

звідки

$$K = \int \left(\frac{x^3}{3} + C\right) e^{\frac{x^2}{2}} dx = \frac{x^2 - 2}{3} e^{\frac{x^2}{2}} + C \int e^{\frac{x^2}{2}} dx = \frac{x^2 - 2}{3} e^{\frac{x^2}{2}} + C \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt + D.$$

Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = Ke^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2 - 2}{3} + Ce^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt + De^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{$**$}$$

Знайдемо, за яких значень C і D справджуються вказані початкові умови. З формули $(**)$ маємо

$$y'(x) = \frac{2x}{3} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt - Dxe^{-\frac{x^2}{2}} + C. \tag{$***$}$$

Тепер з $(**)$ і $(***)$ знаходимо

$$y(0) = -\frac{2}{3} + D = 0 \iff D = \frac{2}{3},$$
$$y'(0) = C = 0.$$

Підставляючи ці значення в формулу (**), одержуємо

Відповідь: $y(x) = \frac{x^2-2}{3} + \frac{2}{3}e^{-x^2/2}$.

1.18. Нагадаємо, що для будь яких $n \in \mathbb{N}$ та $x_1, \ldots, x_n > 0$ має місце *нерівність про середнє арифметичне та середнє гармонічне*

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

знак рівності в якій досягається лише при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Тому

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\frac{1}{2009}(\xi_1 + \ldots + \xi_{2009}) \geq \frac{2009}{\frac{1}{\xi_1} + \ldots + \frac{1}{\xi_{2009}}}\right\} -$$
$$- \mathbb{P}\left\{\frac{1}{2009}(\xi_1 + \ldots + \xi_{2009}) = \frac{2009}{\frac{1}{\xi_1} + \ldots + \frac{1}{\xi_{2009}}}\right\} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left\{\frac{1}{2009}(\xi_1 + \ldots + \xi_{2009}) = \frac{2009}{\frac{1}{\xi_1} + \ldots + \frac{1}{\xi_{2009}}}\right\} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{2009}\} = 1 - \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{2009} = i\} =$$
$$= 1 - \sum_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{2009} \mathbb{P}\{\xi_j = i\} = 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{2009} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2008}.$$

Відповідь: $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2008}$.

2. Деякі задачі факультетського туру студентської олімпіади НТУУ "КПІ"

Умови задач

Задача 2.1. Для яких тривимірних векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ виконується рівність $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$?

Задача 2.2. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{2008}}{2008!}\right) e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Задача 2.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь в залежності від параметра λ:

$$\begin{cases} x - \ \ y + \ \ z + t &= \ \ 2, \\ 2x - \ \ y + \ \ z - t &= \ \ 1, \\ 3x - 2y + 2z &= \ \ 3, \\ \lambda x - 2t &= -1. \end{cases}$$

Задача 2.4. Визначити, скільки дільників має число 10!.

Задача 2.5. Чи існують квадратні матриці A, B такі, що

$$AB - BA = E? \tag{$*$}$$

Задача 2.6. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, де $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$.

Задача 2.7. Довести, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $e^x + e^{-x} \le 2e^{\frac{x^2}{2}}$.

Задача 2.8. Яке диференціальне рівняння 1-го порядку справджує функція

$$f(x) = e^{x^2} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt, \qquad x \in \mathbb{R}?$$

З якою початковою умовою?

Задача 2.9. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

Задача 2.10. Розкласти функцію

$$f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q\cos x + q^2}, \qquad |q| > 1,$$

в ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

Задача 2.11. Довести нерівність $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1)$, при $x > 0$.

Задача 2.12. Числова послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ містить лише додатні члени та задовольняє умову $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2008$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Задача 2.13. Не обчислюючи визначників, довести, що для будь-яких $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.14. Довести, що функція

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$$

неперервна і обчислити $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx$.

Задача 2.15. Знайти 2011 степінь матриці $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2.16. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n2^n}$.

Задача 2.17. Обчислити

$$D = \begin{vmatrix} x_1+1 & x_2+2 & x_3+3 & x_4+4 \\ x_2+2 & x_3+3 & x_4+4 & x_1+1 \\ x_3+3 & x_4+4 & x_1+1 & x_2+2 \\ x_4+4 & x_1+1 & x_2+2 & x_3+3 \end{vmatrix},$$

де x_i, $i = 1, \ldots, 4$, — розв'язки рівняння $x^4 + 10x^3 + 100x^2 + 1000x + 10000 = 0$.

Задача 2.18. Описати та намалювати геометричне місце таких точок (x, y) координатної площини $\mathbb{R}^2$, що $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{vmatrix} x - \cos\alpha & x + \sin\alpha \\ y - \sin\alpha & y - \cos\alpha \end{vmatrix} > 0$.

Задача 2.19. Знайдіть множину усіх точок площини, які задовольняють рівняння

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2} + \sqrt{x^2+(y-4)^2} = 15.$$

Задача 2.20. Знайти найменшу відстань між площиною $x + y + z + 3 = 0$ і поверхнею $z = x^2 + y^2$.

Задача 2.21. Знайти область визначення та побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x^n + 2^n + 1)}{n}.$$

Відповіді та розв'язки

2.1. З рівності

$$\langle\vec{a},\vec{a}\rangle+\langle\vec{b},\vec{b}\rangle+2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\rangle=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=$$
$$=\langle\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\rangle=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle+\langle\vec{b},\vec{b}\rangle-2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

маємо: $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$.

Відповідь: Для ортогональних векторів.

2.2. Безпосереднім диференціюванням легко впевнитися, що

$$f'(x)=-\frac{x^{2008}e^{-x}}{2008!},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що функція f монотонно спадає на всій дійсній осі.

Відповідь: Функція спадає на всій дійсній осі, а отже не має точок екстремуму.

2.3. Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастої форми:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&2\\2&-1&1&-1&1\\3&-2&2&0&3\\\lambda&0&0&-2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&2\\0&1&-1&-3&-3\\0&0&0&2\lambda-2&\lambda-1\end{array}\right).$$

Звідси видно, що $\operatorname{rank}A=2$ при $\lambda=1$ і $\operatorname{rank}A=3$ при $\lambda\neq1$. Опис розв'язків легко одержати за допомогою оберненого ходу методу Гаусса. При $\lambda=1$ маємо $(x,y,z,t)=(2c_2-1,c_1+3c_2-3,c_1,c_2)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, а при $\lambda\neq1$ — $(0,c_1-\frac{3}{2},c_1,\frac{1}{2})$, $c_1\in\mathbb{R}$.

Відповідь: $(x,y,z,t)=\begin{cases}(2c_2-1,c_1+3c_2-3,c_1,c_2), & c_1,c_2\in\mathbb{R},\ \ \lambda=1,\\ (0,c_1-\frac{3}{2},c_1,\frac{1}{2}), & c_1\in\mathbb{R},\ \ \lambda\neq1.\end{cases}$

2.4. Розкладемо число 10! на прості множники:

$$10!=2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot(2\cdot3)\cdot7\cdot2^3\cdot3^2\cdot(2\cdot5)=2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7.$$

Тоді будь-який дільник числа 10! має вигляд $2^{k_1}\cdot3^{k_2}\cdot5^{k_3}\cdot7^{k_4}$, де $k_1\subset\{0,1,...,8\}$, $k_2\subset\{0,1,...,4\}$, $k_3\subset\{0,1,2\}$, $k_4\subset\{0,1\}$. Тоді загальна кількість дільників визначається (за правилом множення), як $C_9^1\cdot C_5^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1=9\cdot5\cdot3\cdot2=270$.

Відповідь: 270.

2.5. Уведемо в розгляд слід матриці — суму її діагональних елементів: $\operatorname{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$. Безпосередньо перевіряються дві властивості сліду:

i) $\operatorname{tr}(A \pm B) = \operatorname{tr} A \pm \operatorname{tr} B$,

ii) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

Неможливість співвідношення $(*)$ випливає тепер з ланцюга рівностей

$$0 = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} BA = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr} E = n,$$

де n — порядок матриць A, B, E.

Відповідь: Ні.

2.6. Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності

$$y_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} \le x_n \le \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = z_n.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$, то за теоремою про три послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Відповідь: 1.

2.7. Розкладемо ліву та праву частини нерівності в степеневий ряд:

$$e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n)!}, \qquad 2e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{2^n n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи нерівність $(2n)! \ge (2n)!! = 2^n n!$, одержуємо потрібне.

2.8. Формула розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку $y' + p(x)y = q(x)$ має вигляд:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \left(C + \int q(x) e^{\int p(t) dt} dx \right).$$

Тому в якості $p(x)$ потрібно взяти $-2x$, в якості $q(x)$ — константу 1 і покласти $C = 0$. Тоді початковою умовою буде $y(0) = 0$.

Відповідь: $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 0$.

2.9. Можливі різні способи розв'язання задачі. Наведемо лише один з них.

Розглянемо функціональну послідовність $\{f_n, n \ge 1\}$, де $f_n(x) = 2^{-nx}$, $x \in \mathbb{R}$. Безпосереднім диференціюванням одержуємо, що для $n \ge 1$

$$f_n'(x) = -n \ln 2 \cdot 2^{-nx}, \qquad f_n''(x) = n^2 \ln^2 2 \cdot 2^{-nx}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

За ознакою Вейерштрасса ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n''(x)$ збігаються рівномірно в околі $x = 1$. Тому в цьому околі

$$\frac{\ln^2 2 \cdot 2^x (2^x + 1)}{(2^x - 1)^3} = \left(\frac{1}{2^x - 1} \right)'' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)'' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \ln^2 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-nx}.$$

Підставляючи сюди значення $x = 1$, одержуємо рівність $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 6$.

Відповідь: 6.

2.10. Використовуючи формули Ейлера, запишемо функцію f в такому вигляді:

$$f(x) = -\frac{iq}{2}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{q^2 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + 1} = \frac{i}{2}\left(\frac{q^{-1}e^{-ix}}{1 - q^{-1}e^{-ix}} - \frac{q^{-1}e^{ix}}{1 - q^{-1}e^{ix}}\right).$$

Тепер за формулою для суми нескінченно спадної геометричної прогресії, маємо далі:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{q^n}.$$

Відповідь: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{q^n}$.

2.11. Розглянемо функцію $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$.Помітимо, що

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0,\ x > 0.$$

Оскільки $f(0) = 0$ і функція при $x > 0$ є монотонно зростаючою, то нерівність виконано.

2.12. Умову задачі можна переписати таким чином:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m \geq M:\ 2008 - \varepsilon \leq \frac{x_{m+1}}{x_m} \leq 2008 + \varepsilon.$$

Тому при $n > m$

$$\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{\left(x_m \cdot \frac{x_{m+1}}{x_m} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}\right)} = \sqrt[n]{x_m} \cdot F_{m,n},$$

де $\sqrt[n]{x_m} \to 1$ при $n \to \infty$, а $F_{m,n}$ задовольняє нерівність

$$(2008 - \varepsilon)^{(n-m)/n} \leq F_{m,n} \leq (2008 + \varepsilon)^{(n-m)/n}.$$

Звідси

$$2008 - \varepsilon \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq 2008 + \varepsilon.$$

Покладаючи тут $\varepsilon \to 0$, одержуємо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 2008$.

Відповідь: 2008.

2.13. Нехай $x, y, z \neq 0$. Тоді

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{array}{l}\text{домножуємо 2-ий, 3-ій та}\\ \text{4-ий рядки відповідно на}\\ yz,\ xz \text{ та } xy\end{array}} = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ xyz & 0 & yz^2 & y^2z \\ xyz & xz^2 & 0 & x^2z \\ xyz & xy^2 & x^2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{array}{l}\text{виносимо з 1-го, 2-го, 3-}\\ \text{го та 4-го стовпців відпо-}\\ \text{відно } xyz,\ x,\ y \text{ та } z)\end{array}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.14. З ознаки Вейерштрасса випливає, що ряд збігається рівномірно. Тому функція f є неперервною на $\mathbb{R}$, а сам ряд можна інтегрувати почленно. Звідси одержуємо, що

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\,dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \pi.$$

Відповідь: π.

2.15. Розглянемо перші степені

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E,\ J^3 = -J,\ J^4 = E,\ J^5 = J.$$

Методом математичної індукції легко показати, що

$$J^{4k+1} = J,\ J^{4k+2} = -E,\ J^{4k+3} = -J,\ J^{4k+4} = E,\ k = 0, 1, 2, \dots\,.$$

Оскільки $2011 = 502 \cdot 4 + 3$, тоді $J^{2011} = -J$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.16.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + n2^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3$$

оскільки $1 \leq \sqrt[n]{1 + n\left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{1+n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Відповідь: 3.

2.17. Оскільки x_i, $i = 1, \dots, 4$, — розв'язки рівняння записаного вище, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -10$.

У визначнику додамо до першого стовпця другий, третій та четвертий, отримаємо

$$D = \begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4+10 & x_2+2 & x_3+3 & x_4+4 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+10 & x_3+3 & x_4+4 & x_1+1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+10 & x_4+4 & x_1+1 & x_2+2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+10 & x_1+1 & x_2+2 & x_3+3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x_2+2 & x_3+3 & x_4+4 \\ 0 & x_3+3 & x_4+4 & x_1+1 \\ 0 & x_4+4 & x_1+1 & x_2+2 \\ 0 & x_1+1 & x_2+2 & x_3+3 \end{vmatrix} = 0.$$

Відповідь: 0.

2.18. Наведемо лише один з різних можливих розв'язків задачі. Перепишемо умову таким чином:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{vmatrix} x-\cos\alpha & x-\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) & 0 \\ y-\sin\alpha & y-\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0. \qquad (*)$$

Разом з точкою $G(x;y)$ з шуканого ГМТ розглянемо дві точки одиничного кола — $A_\alpha(\cos\alpha;\sin\alpha)$ та $B_\alpha\big(\cos(\alpha+\frac{\pi}{2});\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})\big)$. З нерівності $(*)$ випливає, що вектори $\overrightarrow{GA_\alpha}$, $\overrightarrow{GB_\alpha}$, $\overrightarrow{k}$ утворюють ліву трійку векторів у просторі для будь якого $\alpha \in \mathbb{R}$, інакше кажучи, кут $\angle A_\alpha G B_\alpha$ завжди є додатним. Це означає, що точка $(x;y)$ лежить по той же (лівий!) бік від прямої $A_\alpha B_\alpha$, що й точка O — початок координат. Таким чином, шукане геометричне місце точок $\mathcal{G}$ є перетином вигляду

$$\mathcal{G} = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \mathcal{P}_\alpha,$$

де $\mathcal{P}_\alpha$ — напівплощина, що обмежується прямою $A_\alpha B_\alpha$ та містить початок координат. Легко бачити, що $\mathcal{G}$ є (відкритим) кругом, що дотикається до всіх прямих $A_\alpha B_\alpha$, тобто кругом $x^2+y^2<\frac{1}{2}$.

Відповідь: $x^2+y^2<\frac{1}{2}$ (відкритий круг з центром в точці $O(0;0)$ і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$).

2.19. Якщо точка належить цьому ГМТ, то, виходячи з рівняння, це означає, що сума відстаней від неї до точок $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(6;8)$, $D(0;4)$ дорівнює 15. Але можна помітити, що $AC=10$, $BD=5$. Це означає, що єдина точка цього ГМТ це точка перетину прямих, що містять відрізки AC, BD.

Рівняння цих прямих:

$$AC: \ y = \frac{4}{3}x, \quad BD: \ y = -\frac{4}{3}x + 4.$$

Їх точку перетину легко знайти: її координати $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

<u>**Відповідь:**</u> $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

<u>**2.20.**</u> Розглянемо точку на параболоїді з координати $M_0(x_0,\ y_0,\ x_0^2+y_0^2)$. Тоді відстань від цієї точки до площини

$$d(M_0) = \frac{|x_0 + y_0 + x_0^2 + y_0^2 + 3|}{\sqrt{3}} = \frac{(x_0 + \frac{1}{2})^2 + (y_0 + \frac{1}{2})^2 + 2.5}{\sqrt{3}}.$$

Тоді найкоротша відстань буде при $x_0 = -\frac{1}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{2}$. Таким чином найкоротша відстань буде $\frac{2.5}{\sqrt{3}}$

<u>**Відповідь:**</u> $\dfrac{2.5}{\sqrt{3}}$.

<u>**2.21.**</u> Для $x \in (-\infty, -2)$ при великих n під знаком логарифму стоїть від'ємне число, а при $x = -2$ границі не існує (підпослідовність з парними n прямує до $\ln 2$, а з непарними — до 0). При $x \in (-2, 2)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^n\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n + 1 + \frac{1}{2^n}\right]\right)}{n} = \ln 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n + 1 + \frac{1}{2^n}\right)}{n} = \ln 2.$$

Якщо ж $x \in [2, +\infty)$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(x^n\left[1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n + \frac{1}{x^n}\right]\right)}{n} = \ln x + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n + \frac{1}{x^n}\right)}{n} = \ln x.$$

<u>**Відповідь:**</u> $D_f = (-2, +\infty)$, $f(x) = \begin{cases} \ln 2, & x \in (-2, 2), \\ \ln x, & x \in [2, +\infty). \end{cases}$

3. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2008 р.)

II етап Всеукраїнської студентської олімпіади у м. Севастополі проводився у трьох категоріях:

– *Категорія "М":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за спеціальностями, що потребують поглибленого вивчення математики;

– *Категорія "Т":* до цієї категорії відносили студентів технічних спеціальностей;

– *Категорія "С":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за економічними та аграрними спеціальностями.

В цьому розділі подано завдання всіх категорій олімпіади 2008 р. з розв'язками.

Умови задач

Категорія "М"

Задача 3.1. Яким умовам мають задовольняти дійсні числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c$, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

була несумісною?

Задача 3.2. На всіх сторонах опуклого n-кутника $A_1A_2...A_n$ зовні побудовано правильні трикутники $A_1A_2B_n,\ A_2A_3B_1,\ A_3A_4B_2,\ ...,\ A_nA_1B_{n-1}$. Довести, що $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + ... + \vec{A_nB_n} = \vec{0}$.

Задача 3.3. Дано параболи $y = x^2$ й $y = x^2 + m$ $(m > 0)$. В якому відношенні хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику?

Задача 3.4. Послідовність $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$, задано за допомогою рекурентної формули: $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 3$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{4^n}$.

Задача 3.5. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних $x,\ y$ задовольняють рівняння $f(x) \cdot f(y) - f(xy) = xy + x + y - 1$.

Задача 3.6. Функція $f(x)$ задовольняє умови: $f(1) = 1,\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$, $\forall x \geq 1$. Довести, що існує $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ і що ця границя не більше, ніж $1 + \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 3.7. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0,1]$ і у кожній точці цього відрізка має першу та другу похідні. Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$ і $|f''(x)| \leq 1\ \forall x \in [0,1]$. Яке найбільше значення може набувати максимум функції $f(x)$ для всіх можливих функцій, що задовольняють ці умови?

Задача 3.8. Знайти невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+x^\beta}\right)\frac{1}{x}dx$$

, де $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha\beta > 0$.

Задача 3.9. Нехай многочлен $P_n(x)$ степеня n з дійсними коефіцієнтами при всіх дійсних значеннях x набуває лише додатніх значень. Довести, що многочлен $P_n(x)$ можна подати у вигляді суми квадратів двох многочленів.

Задача 3.10. Розв'язати диференціальне рівняння $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

Категорія "T"

Задача 3.11. Яким умовам мають задовольняти дійсні числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c$, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

мала безліч розв'язків?

Задача 3.12. На всіх сторонах опуклого шестикутника $A_1A_2...A_6$ зовні побудовано правильні трикутники $A_1A_2B_6,\ A_2A_3B_1,\ A_3A_4B_2,\ ...,\ A_6A_1B_5$. Довести, що $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + ... + \vec{A_6B_6} = \vec{0}$.

Задача 3.13. Дано параболи $y = x^2$ й $y = x^2 + 1$. Довести, що хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику навпіл?

Задача 3.14. Послідовність $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$, задано за допомогою рекурентної формули: $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2},\ n \geq 3$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Задача 3.15. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних $x,\ y,\ z$ задовольняють рівняння

$$f(x)\cdot f(y)\cdot f(z) - f(xyz) = xy + xz + yz + x + y + z.$$

Задача 3.16. Див. **3.6**.

Задача 3.17. Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[0,1]$ і у кожній точці цього відрізка має першу та другу похідні. Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$ і

$|f''(x)| \le 1 \ \forall x \in [0,1]$. Довести, що найбільше значення, яке може набути максимум функції $f(x)$ для всіх можливих функцій, що задовольняють ці умови, дорівнює $\dfrac{1}{8}$.

Задача 3.18. Знайти невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+x^\beta}\right)\frac{1}{x}dx$$

, де $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0$.

Задача 3.19. Див. **3.9**.

Задача 3.20. Два тіла нагріли до 100^oC, а потім помістили в середовище, температура якого підтримується постійною і дорівнює 0^oC. Через 10 хвилин після початку охолодження тіл температура першого знизилася до 80^oC, а температура другого – до 64^oC. Через скільки хвилин від початку охолодження тіл температура одного з них буде на 25^oC більше, ніж температура іншого, якщо швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла й навколишнього середовища?

Категорія "C"

Задача 3.21. Яким умовам мають задовольняти дійсні числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ c$, щоб система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

мала єдиний розв'язок?

Задача 3.22. На всіх сторонах опуклого трикутника ABC зовні побудовано правильні трикутники $ABC_1,\ BCA_1,\ CAB_1$. Довести, що $\vec{A_1A_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

Задача 3.23. Довести, що відрізок будь-якої дотичної до рівнобічної гіперболи, який лежить між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

Задача 3.24. Послідовність $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$, задано за допомогою рекурентної формули: $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},\ n \ge 3$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n}$.

Задача 3.25. Знайти всі функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які при будь-яких дійсних $x,\ y,\ z$ задовольняють рівняння $f\left(x - f(y)\right) = 1 - x - y$.

Задача 3.26. Які числові значення може набувати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a^2}{x+b^2}\right)^x$, якщо $4a^2 + b^2 + 2b \le 3,\ a, b \in \mathbb{R}$?

Задача 3.27. Відомо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[0,1]$, диференційовна в проміжку $(0,1)$, $f(0)=4$, $f(1)=2$, $f'(x) \geq -2\ \forall x \in [0,1]$. Знайти функцію $f(x)$ і довести, що інших функцій, які задовольняють умови задачі, не існує.

Задача 3.28. Довести, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^{\alpha}} - \frac{1}{1+x^{\beta}} \right) \frac{1}{x} dx = 0,$$

де $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0$.

Задача 3.29. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left| \sqrt[3]{u} - x \right| du,\ x \in \mathbb{R}$$

.

Задача 3.30. Двоє робітників виготовили понад 29 однакових деталей. Кількість деталей, виготовлених першим робітником, що зменшена на 2, буде більше ніж у 3 рази перевищувати кількість деталей, виготовлених другим робітником. Потроєна кількість деталей, виготовлених першим робітником, перевищує подвоєну кількість деталей, виготовлених другим робітником, але менше, ніж на 60. Скільки деталей виготовив кожен робітник?

Відповіді та розв'язки

3.1. Введемо позначення:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{pmatrix}.$$

Тут A і $\overline{A}$ - матриця й розширена матриця даної лінійної системи відповідно. Обчислимо всі мінори 3-го порядку матриці A:

$$\Delta_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right),$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a_2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right),$$

$$\Delta_4^{(3)} = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right).$$

Крім того визначник розширеної матриці даної лінійної системи:

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{vmatrix} = -\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right).$$

Розглянемо два випадки.

1). Нехай $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, тобто $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Тоді, якщо всі числа b_1 , b_2 , b_3 , c дорівнюють нулю, то дана система є сумісною і невизначеною (тобто має безліч розв'язків).

Якщо ж хоча б одне із чисел b_1 , b_2 , b_3 , c відмінно від нуля, тобто виконується умова $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$, то система є несумісною .

2). Нехай $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, тобто хоча б одне із чисел a_1 , a_2 , a_3 відмінно від нуля. Тоді хоча б один з мінорів $\Delta_2^{(3)}, \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}$ відмінний від нуля. Це означає, що ранг матриці A дорівнює 3. Якщо при цьому виконується умова

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$

то ранг розширеної матриці $\overline{A}$ також дорівнює 3, а тому згідно з теоремою Кронекера-Капелли дана система є сумісною. Оскільки число невідомих дорівнює рангу матриці A, то дана сумісна система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок.

Якщо ж $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \neq 0$, то ранг розширеної матриці $\overline{A}$ дорівнює 4, тобто не дорівнює рангу матриці A, а це означає, що дана система є несумісною.

Таким чином, якщо $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ й $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$ або $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ й $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \neq 0$, то вихідна система лінійних рівнянь є несумісною.

Відповідь: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ й $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$ або
$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ й $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \neq 0$.

3.2. Подамо вектори $\overline{A_1B_1},\ \overline{A_2B_2}, ..., \overline{A_nB_n}$ у вигляді суми двох векторів:

$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2B_1},\ \overline{A_2B_2} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_3B_2}, ...,\ \overline{A_nB_n} = \overline{A_nA_1} + \overline{A_1B_n}.$$

Тоді

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + ... + \overline{A_nB_n} = \left(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_nA_1}\right) + \\ + \left(\overline{A_1B_n} + \overline{A_2B_1} + ... + \overline{A_nB_{n-1}}\right) = \overline{A_1B_n} + \overline{A_2B_1} + ... + \overline{A_nB_{n-1}}.$$

Якщо кожний з векторів $\overline{A_1B_n}$, $\overline{A_2B_1}, ...,$ $\overline{A_nB_{n-1}}$ повернути на 60^o навколо його початку, то вони будуть збігатися відповідно з векторами $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, ...,$ $\overline{A_nA_1}$, сума яких дорівнює $\overline{O}$. При цьому вектор, який дорівнює сумі векторів $\overline{A_1B_n}$, $\overline{A_2B_1}, ...,$ $\overline{A_nB_{n-1}}$, також повернеться на 60^o, а його модуль не зміниться. Тому й

$$\overline{A_1B_n} + \overline{A_2B_1} + ... + \overline{A_nB_{n-1}} = \overline{O},$$

а це означає, що й $\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + ... + \overline{A_nB_n} = \overline{O}$, що й треба було довести.

3.3. Нехай хорда першої параболи дотикається до другої параболи в точці $(x_0,\ y_0)$, де $y_0 = x_0^2+m$. Рівняння цієї дотичної має вигляд $y = x_0^2+m+2x_0(x-x_0)$ або після перетворення: $y = 2x_0x - x_0^2 + m$. Точки перетину дотичної з першою параболою (тобто кінці хорди) визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x_0x - x_0^2 + m \\ y = x^2 \end{cases}.$$

Виключивши із цієї системи y, дістанемо квадратне рівняння $x^2-2x_0x+x_0^2-m = 0$, яке задовольняють абсциси x_1 і x_2 кінців хорди першої параболи. Розв'язуючи квадратне рівняння, знаходимо: $x_1 = x_0-\sqrt{m}$, $x_2 = x_0+\sqrt{m}$. Звідси $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, а це й означає, що хорда першої параболи, що дотикається до другої параболи, поділяється точкою дотику навпіл.

Відповідь: у відношенні 1:1.

3.4.

Перший спосіб. З умови задачі випливає, що

$$\begin{aligned} &a_3 = 5a_2 - 4a_1 = 5b - 4a, \\ &a_4 = 5a_3 - 4a_2 = 5(5b - 4a) - 4b = 21b - 20a, \\ &a_5 = 5a_4 - 4a_3 = 5(21b - 20a) - 4(5b - 4a) = 85b - 84a\ \dots \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} &a_3 = (1 + 4)\, b - 4a, \\ &a_4 = \left(1 + 4 + 4^2\right) b - \left(4 + 4^2\right) a, \\ &a_5 = \left(1 + 4 + 4^2 + 4^3\right) b - \left(4 + 4^2 + 4^3\right) a\ \dots \end{aligned}$$

Припустимо, що $a_n = (1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{n-2})b - (4 + 4^2 + ... + 4^{n-2})a$. Використовуючи формулу для суми n перших членів геометричної прогресії, дістаємо формулу $a_n = 4^n\frac{b-a}{12} + \frac{4a-b}{3}$, яку неважко довести за допомогою метода математичної індукції.

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{4^n} = \frac{b-a}{12}$.

Другий спосіб. Рекурентну формулу $a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}$, тобто $a_n = (4+1)\,a_{n-1} - (4\cdot 1)\,a_{n-2}$, можна записати у вигляді $a_n - 4a_{n-1} = a_{n-1} - 4a_{n-2}$ або у вигляді $a_n - a_{n-1} = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$. Звідси випливає, що

$$\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} = b - 4a, \\ a_n - a_{n-1} = 4^{n-2}(b-a) \end{cases}.$$

Виключаючи із цієї системи a_{n-1}, дістаємо: $a_n = 4^n\frac{b-a}{12} + \frac{4a-b}{3}$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n} = \frac{b-a}{12}$.

Відповідь: $\dfrac{b-a}{12}$.

3.5. Підставляючи $x = y = 1$ в дане функціональне рівняння, дістаємо

$$(f\,(1))^2 - f\,(1) = 2.$$

Це рівняння має два дійсних корені $f\,(1) = 2$ або $f\,(1) = -1$. Покладаючи $y = 1$ у функціональному рівнянні, маємо $f\,(x)\cdot f\,(1) - f\,(x) = x + x + 1 - 1$ або $f\,(x)\cdot(f\,(1) - 1) = 2x$.

Якщо $f\,(1) = 2$, то $f\,(x) = 2x$.

Якщо $f\,(1) = -1$, то $f\,(x) = -x$.

Перевірка показує, що жодна знайдена функція не задовольняє вихідне функціональне рівняння, отже це рівняння не має розв'язків.

Відповідь: таких функцій не існує.

3.6. З умови задачі випливає , що $f'\,(x) > 0\ \forall x > 1$, а це означає, що функція $f\,(x)$ зростає на проміжку $(1;\ +\infty)$. Крім того, з умови задачі також випливає, що $f\,(x) = \int\limits_1^x \dfrac{dx}{x^2 + f^2\,(x)} + 1 \quad \forall x \geq 1$. А це означає, що $f\,(x) < \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+1} + 1 = \frac{\pi}{4} + 1$, оскільки $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in R$.

Таким чином, функція $f\,(x)$ є зростаючою і обмеженою зверху числом $1+\frac{\pi}{4}$, а це означає, що згідно з теоремою Вейєрштраса $f\,(x)$ має при $x \to +\infty$ скінчену границю і ця границя не більше, ніж $1 + \frac{\pi}{4}$, що й треба було довести.

3.7.

Перший спосіб. Неважко перевірити, що функція $g\,(x) = 0,5x\,(1-x)$ задовольняє всі умови задачі. Ця функція набуває найбільше значення, яке дорівнює $\frac{1}{8}$, у точці $x = \frac{1}{2}$. Припустимо, що знайдеться інша функція $f\,(x)$, що задовольняє всі умови задачі й така, що $f\,(a) > \frac{1}{8}$, де $a \in (0;\ 1)$.

Розглянемо функцію $h\,(x) = f\,(x) - \frac{f(a)}{g(a)}g\,(x)$. Очевидно, що $h\,(0) = 0,\ h\,(1) = 0,\ h\,(a) = 0$. Крім того, $h''\,(x) = f''\,(x) + \frac{f(a)}{g(a)} > 0$, тому що $|f''\,(x)| \leq 1$, а $\frac{f(a)}{g(a)} > 1$.

Це означає, що функція $h'(x)$ є строго зростаючою. Однак згідно з теоремою Ролля $\exists x_1 \in (0;\ a)$ і $\exists x_2 \in (a;\ 1)$ такі, що $h'(x_1) = h'(x_2) = 0$. Прийшли до протиріччя. Отже не існує функції, що задовольняє всі умови задачі і такий, що її найбільше значення перевищує $\frac{1}{8}$.

Таким чином, найбільше значення, що може набувати максимум функції $f(x)$ для всіх можливих функцій, які задовольняють умови задачі, дорівнює $\frac{1}{8}$.

<u>Другий спосіб.</u> Нехай найбільше значення функція $f(x)$ набуває в точці $x = a \in (0;1)$, тоді $f'(a) = 0$.

Використовуючи формулу Тейлора другого порядку, дістаємо

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$, де $\xi \in [a;x]$ $(\xi \in [x;a])$, $x \in [0;\ 1]$.

Оскільки $f'(a) = 0$, то

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2. \tag{$*$}$$

Розглянемо 2 випадки.

1) Нехай $0 < a < \frac{1}{2}$.

Підставляючи $x = 0$ у формулу $(*)$, дістаємо $0 = f(a) + \frac{f''(\xi_0)}{2}a^2$, звідки $f(a) = -\frac{f''(\xi_0)}{2}a^2$, $\xi_0 \in [0;a]$. Таким чином, $|f(a)| = \frac{|f''(\xi_0)|}{2}\,a^2 \le \frac{1}{8}$.

2) Нехай $\frac{1}{2} \le a < 1$.

Підставляючи $x = 1$ у формулу $(*)$, дістаємо $0 = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(1-a)^2$, звідки $f(a) = -\frac{f''(\xi_1)}{2}(1-a)^2$, $\xi_1 \in [a;1]$. Таким чином, $|f(a)| = \frac{|f''(\xi_1)|}{2}\,|1-a|^2 \le \frac{1}{8}$.

Отримуємо, що в обох випадках $f(a) \le \frac{1}{8}$, а це означає, що $\max\limits_{x\in[0;1]} f(x) \le \frac{1}{8}$.

Неважко перевірити, що функція $f(x) = 0,5x(1-x)$ задовольняє всі умови задачі і набуває найбільше значення, яке дорівнює $\frac{1}{8}$, у точці $x = \frac{1}{2}$.

Отже, найбільше значення, що може набувати максимум функції $f(x)$ для всіх функцій, які задовольняють умови задачі, дорівнює $\frac{1}{8}$.

<u>**Відповідь:**</u> $\frac{1}{8}$.

<u>**3.8.**</u>

<u>Перший спосіб.</u> Перетворимо підінтегральну функцію даного інтеграла:

$$\left(\frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+x^\beta}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{(1+x^\alpha)\,x} - \frac{1}{(1+x^\beta)\,x} =$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x^{\beta-1}}{1+x^\beta}\right) = \frac{x^{\beta-1}}{1+x^\beta} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}.$$

Тому для довільного $x > 0$

$$\int \left(\frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+x^\beta}\right)\frac{1}{x}dx = \int \left(\frac{x^{\beta-1}}{1+x^\beta} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + x^{\beta}\right) - \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + x^{\alpha}\right) + C = \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} + C.$$

Отже,

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^{\alpha}} - \frac{1}{1 + x^{\beta}}\right) \frac{1}{x} dx = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lim_{x \to +0} \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Якщо $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, то

$$\lim_{x \to +0} \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{x \left(1 + x^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{x \left(1 + x^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = 0.$$

Аналогічно, якщо $\alpha < 0$ і $\beta < 0$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to +0} \ln \frac{\left(1 + x^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{\left(1 + x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{x \to +0} \ln \frac{x \left(1 + x^{-\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}{x \left(1 + x^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} = 0.$$

Таким чином, якщо $\alpha\beta > 0$, то $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^{\alpha}} - \frac{1}{1+x^{\beta}}\right) \frac{1}{x} dx = 0$.

Другий спосіб.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^{\alpha}} - \frac{1}{1 + x^{\beta}}\right) \frac{1}{x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\left(x^{\beta} - x^{\alpha}\right) dx}{\left(1 + x^{\alpha}\right)\left(1 + x^{\beta}\right) x}$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \frac{\left(x^{\beta} - x^{\alpha}\right) dx}{\left(1 + x^{\alpha}\right)\left(1 + x^{\beta}\right) x} + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(x^{\beta} - x^{\alpha}\right) dx}{\left(1 + x^{\alpha}\right)\left(1 + x^{\beta}\right) x}.$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\left(x^{\beta} - x^{\alpha}\right) dx}{\left(1 + x^{\alpha}\right)\left(1 + x^{\beta}\right) x} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}, \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{t^{\beta}} - \frac{1}{t^{\alpha}}\right) \frac{1}{t^2} dt}{\left(1 + \frac{1}{t^{\alpha}}\right)\left(1 + \frac{1}{t^{\beta}}\right) \frac{1}{t}}$$

$$= \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(t^{\alpha} - t^{\beta}\right) dt}{\left(1 + t^{\alpha}\right)\left(1 + t^{\beta}\right) t} - \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\left(t^{\beta} - t^{\alpha}\right) dt}{\left(1 + t^{\alpha}\right)\left(1 + t^{\beta}\right) t}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^{\alpha}} - \frac{1}{1 + x^{\beta}}\right) \frac{1}{x} dx = 0.$$

Зауважимо, що невласний інтеграл $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{\left(x^{\beta} - x^{\alpha}\right) dx}{(1+x^{\alpha})(1+x^{\beta}) x}$ є збіжним.

Дійсно, якщо $\alpha = \beta$, то $I = 0$.

Якщо $\alpha \neq \beta$, то при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ маємо $\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)}{(1+x^{\alpha})(1+x^{\beta})x} = O\left(\frac{1}{x^{1-\gamma}}\right)$ при $x \to +0$, де $\gamma = \min(\alpha, \beta)$.

Аналогічно, при $\alpha < 0$, $\beta < 0$ маємо $\frac{\left(x^{\beta}-x^{\alpha}\right)}{(1+x^{\alpha})(1+x^{\beta})x} = O\left(\frac{1}{x^{1-\gamma}}\right)$при $x \to +0$, де $\gamma = \min(-\alpha, -\beta)$.

Відповідь: 0.

3.9. З умови задачі випливає, що $P_n(x)$ - многочлен парного степеня ($n = 2k$), коефіцієнт при старшому степені більше за 0 (можна вважати, що він дорівнює 1) і що всі корені многочлена $P_n(x)$ комплексно спряжені: x_1 і $\overline{x_1}$, x_2 і $\overline{x_2}$, ..., x_k и. $\overline{x_k}$. Отже, многочлен $P_n(x)$ можна подати у вигляді:

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)(x - \overline{x_1})(x - \overline{x_2})...(x - \overline{x_k}).$$

Добуток перших k множників є многочлен степеня k. Цей многочлен є комплексно спряженим до многочлена степеня k, що дорівнює добутку останніх k множників, тобто $P_n(x) = (Q(x) + iR(x))(Q(x) - iR(x))$ або $P_n(x) = Q^2(x)+R^2(x)$, що й треба було довести.

3.10. Нехай $x > 0$. Зробимо заміну змінних $y = ux^{\frac{3}{2}}$, де $u = u(x)$. Отримаємо рівняння

$$\frac{2}{3}xuu' = \sqrt{1-u^4},$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Тоді легко отримати, що розв'язок має вигляд $\arcsin\frac{y^2}{x^3} = \ln Cx^3$, де $C > 0$. Окрім того, рівняння буде мати особливий розв'язок $u^2 = 1$, якому відповідає розв'язок $y^2 = x^3$ вихідного рівняння.

Оскільки при заміні x на $(-x)$ дане диференціальне рівняння не змінюється, то його загальний розв'язок буде мати наступний вигляд.

Відповідь: $\arcsin\frac{y^2}{|x|^3} = \ln C|x|^3$, $y^2 = |x|^3$, де $C > 0$.

3.11. Див. розв'язок **3.1**.

Відповідь: $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c = 0$..

3.12. Див. розв'язок **3.2**.

3.13. Див. розв'язок **3.3**.

3.14. Аналогічно до розв'язку **3.4**.

Відповідь: $\dfrac{b-a}{6}$.

3.15. Підставляючи $x = y = z = 1$ в дане функціональне рівняння, дістаємо

$$(f(1))^3 - f(1) = 6.$$

Це рівняння має єдиний дійсний корінь $f(1) = 2$. Покладаючи $y = z = 1$ у функціональному рівнянні, маємо $f(x) \cdot f(1) \cdot f(1) - f(x) = x + x + 1 + x + 1 + 1$, звідки, з урахуванням рівності $f(1) = 2$, дістаємо $f(x) = x + 1$.

Перевірка показує, що функція $f(x) = x + 1$ задовольняє вихідне функціональне рівняння, а тому є єдиним його розв'язком.

Відповідь: $f(x) = x + 1$.

3.16. Див. розв'язок **3.6**.

3.17. Див. розв'язок **3.7**.

3.18. Див. розв'язок **3.8**.

Відповідь: 0.

3.19. Див. розв'язок **3.9**.

3.20. Нехай $T(t)\ {}^0C$– температура тіла, що охолоджується, яка залежіть від часу t. Тоді згідно з умовою задачі функція $T(t)$ задовольняє диференціальне рівняння $T'(t) = -kT(t)$, де коефіцієнт пропорційності $k > 0$. Інтегруючи це рівняння при початковій умові $T(0) = 100$, дістаємо , що температура першого тіла змінюється за законом $T_1(t) = 100e^{-k_1 t}$, а температура другого тіла за аналогічним законом $T_2(t) = 100e^{-k_2 t}$. При $t = 10$ відповідно маємо: $80 = 100e^{-10k_1}$ і $64 = 100e^{-10k_2}$, звідки $T_1(t) = 100\,(0,8)^{\frac{t}{10}}$ і $T_2(t) = 100\,(0,64)^{\frac{t}{10}}$. Тепер складаємо рівняння: $T_1(t) - T_2(t) = 25$, яке відносно $(0,8)^{\frac{t}{10}}$ зводиться до квадратного: $\left((0,8)^{\frac{t}{10}}\right)^2 - (0,8)^{\frac{t}{10}} + 0,25 = 0$. Розв'язуючи це рівняння, знаходимо $t = 10\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$.

Відповідь: через $10\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$ хвилин.

3.21. Див. розв'язок **3.1**.

Відповідь: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ й $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$..

3.22. Див. розв'язок **3.2**.

3.23. Виберемо прямокутну декартову систему координат Oxy так, щоб осі Ox й Oy були асимптотами рівнобічної гіперболи, а вітки гіперболи розташовувалися в першому і третьому квадрантах. Тоді рівняння рівнобічної гіперболи буде мати вигляд $y = \frac{1}{x}$. Складемо рівняння дотичної до гіперболи в довільній точці $C\left(x_0,\ \frac{1}{x_0}\right)$, що належить гіперболі: $y = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$ або $y = \frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}x$. Нехай x_1 і x_2- абсциси точок перетину дотичної з осями координат Oy і Ox (асимптотами гіперболи) відповідно. Тоді $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_0$. Тому $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, а це означає, що відрізок будь-якої дотичної до рівнобічної гіперболи, який лежить між її асимптотами, поділяється точкою дотику навпіл, що й треба було довести.

3.24. Аналогічно до розв'язку **3.4**.

Відповідь: $\dfrac{b-a}{2}$.

3.25. Якщо у функціональне рівняння підставити $x = f(y)$, то дістанемо рівняння $f(0) = 1 - f(y) - y$ або $f(y) = 1 - f(0) - y$. Покладаючи в цьому рівнянні $y = 0$, дістаємо $f(0) = 1 - f(0)$, тобто $f(0) = \frac{1}{2}$. Отже, $f(y) = \frac{1}{2} - y$, тобто $f(x) = \frac{1}{2} - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Перевірка показує, що функція $f(x) = \frac{1}{2} - x$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = \frac{1}{2} - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a^2}{x+b^2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+b^2+(a^2-b^2)}{x+b^2}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + \frac{a^2-b^2}{x+b^2}\right)^{\frac{x+b^2}{a^2-b^2}}\right)^{\frac{x\left(a^2-b^2\right)}{x+b^2}} = e^{a^2-b^2}.$$

З нерівності $4a^2 + b^2 + 2b \le 3, \quad a, b \in R$ випливає, що $a^2 + \frac{(b+1)^2}{4} \le 1$. Знайдемо найбільше й найменше значення функції $f(a,\, b) = a^2 - b^2$ в області $G = \left\{(a,b) : a^2 + \frac{(b+1)^2}{4} \le 1\right\}$. Усередині області G існує єдина стаціонарна точка $a = 0,\ b = 0$, причому $f(0,\, 0) = 0$. На границі Γ області G маємо $a^2 = 1 - \frac{(b+1)^2}{4}$, отже $f(a,b)\left.\right|_{(a,b)\in\Gamma} = \varphi(b) = 1 - \frac{(b+1)^2}{4} - b^2$, де $b \in [-3,\, 1]$. Функція $\varphi(b)$ на відрізку $[-3,\, 1]$ набуває найменше значення в точці $b = -3$: $\varphi(-3) = -9$, а найбільше значення - у єдиній стаціонарній точці $b = -\frac{1}{5}$: $\varphi\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$. Отже найбільше значення функції $f(a,\, b) = a^2 - b^2$ в області G дорівнює $\frac{4}{5}$, а найменше значення дорівнює -9. Оскільки функція $f(a,b)$ неперервна в області G, то вона набуває всі значення від -9 до $\frac{4}{5}$ включно. Тому величина $e^{a^2-b^2}$ (тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a^2}{x+b^2}\right)^x$) може набувати будь-яке значення із відрізку $\left[e^{-9},\ e^{\frac{4}{5}}\right]$.

Відповідь: будь-яке значення з відрізку $\left[e^{-9},\ e^{\frac{4}{5}}\right]$

3.27. Неважко перевірити, що лінійна функція $f(x) = -2x + 4$ задовольняє всі умови задачі. Нехай $g(x)$- будь-яка інша функція, що задовольняє всі умови задачі. Розглянемо функцію $h(x) = g(x) - f(x)$. Функція $h(x)$ задовольняє умови $h(0) = 0,\ h(1) = 0$. Крім того, $h'(x) = g'(x) + 2 \ge 0$, тому що $g'(x) \ge -2$. Отже, функція $h(x)$ є неспадною на відрізку $[0;\ 1]$, а на кінцях цього відрізка набуває однакові значення :$h(0) = \ h(1) = 0$. Тому $h(x) = 0 \quad \forall x \in [0;\ 1]$, тобто $g(x) = f(x)\ \forall x \in [0;\ 1]$.

Таким чином, всі умови задачі задовольняє тільки лінійна функція $f(x) = -2x + 4$.

Відповідь: $f(x) = -2x + 4$.

3.28. Див. розв'язок **3.8**.

3.29. Знайдемо функцію $f(x)$.

1). Якщо $x \le -1$, то $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (\sqrt[3]{u} - x)\, du = -2x$.

2). Якщо $x \ge 1$, то $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} (x - \sqrt[3]{u})\, du = 2x$.

3). Якщо $-1 \le x \le 1$, то $f(x) = \int\limits_{-1}^{x^3} (x - \sqrt[3]{u})\, du \ + \int\limits_{-x^3}^{1} (\sqrt[3]{u} - x)\, du = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}$.

Таким чином, найменше значення функції $f(x)$ дорівнює $\frac{3}{2}$: $f(0) = \frac{3}{2}$ $\left(f(x) > \frac{3}{2} \quad \forall x \ne 0\right)$.

Відповідь: $\frac{3}{2}$.

3.30. Нехай x і y - кількість деталей, яка виготовлена першим і другим робітниками відповідно. Тоді цілі невід'ємні невідомі x і y задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x > 2y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

З цієї системи послідовно маємо:

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ x > \frac{2}{3}y, \\ x < 20 + \frac{2}{3}y, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 29 - y < 20 + \frac{2}{3}y, \\ 3y + 2 < 20 + \frac{2}{3}y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{3}y > 9, \\ \frac{7}{3}y < 18, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 6, \\ y = 7, \end{array} \right.$$ оскільки y-ціла змінна.

Якщо $y = 6$, то вихідна система нерівностей не має цілих розв'язків .

Якщо $y = 7$, то вихідна система нерівностей має єдине цілий розв'язок: $x = 24$.

Відповідь: 24 і 7.

4. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2009 р.)

В цьому пункті подано завдання олімпіади 2009 р.

Умови задач

Категорія "М"

Задача 4.1. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = n+1-i, \\ b & \text{при } j < n+1-i, \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n. \\ a & \text{при } j > n+1-i, \end{cases}$$

Задача 4.2. Вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$ n- вимірного лінійного простору лінійно незалежні. Довести, що вектори $\vec{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)\ \vec{a}_j,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, також лінійно незалежні.

Задача 4.3. Довести, що крива $\vec{r} = \left\{ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t,\ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t,\ e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \right\}$ лежить на конусі $x^2 + y^2 = z^2$. Під яким кутом вона перетинає його прямолінійні твірні?

Задача 4.4. Не використовуючи таблиць і калькулятора, порівняти числа

$$2010^{2009} \cdot 2008^{2008} \text{ і } 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}.$$

Задача 4.5. Знайти кількість упорядкованих наборів $(A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m)$ множин, що задовольняють умови:

1) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$;

2) $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m = \emptyset$, де $m,\ n \in \mathbb{N},\ m \ge 2$.

Задача 4.6. Нехай $f(x)$ – многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами, який має n дійсних коренів (не обов'язково різних). Довести, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$f(x) \cdot f''(x) \le (f'(x))^2 .$$

Задача 4.7. Знайти суму числового ряда

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n}{(n+1)!} + ...$$

Задача 4.8. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx.$$

Задача 4.9. Розв'язати систему диференціальних рівнянь :

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz}.$$

Задача 4.10. Знайти всі диференційовні функції $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, які задовольняють рівняння

$$f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}, \text{ де } a > 0.$$

Категорія "Т"

Задача 4.11. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = i, \\ a & \text{при } j < i, \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n. \\ b & \text{при } j > i, \end{cases}$$

Задача 4.12. Вектори $\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3$ не компланарні. Довести, що вектори $\vec{b}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) \, \vec{a}_j, \ i = 1, \ 2, \ 3$, також не компланарні.

Задача 4.13. Пряма перетинає рівнобічну гіперболу в точках A и B, а її асимптоти – в точках C і D. Знайти відношення $\frac{AC}{BD}$.

Задача 4.14. Не використовуючи таблиць і калькулятора, довести, що

$$2010^{2009} \cdot 2008^{2008} > 2009^{2009} \cdot 2009^{2008}.$$

Задача 4.15. Знайти кількість упорядкованих наборів $(A_1, \ A_2, \ A_3, \ A_4)$ множин, що задовольняють умови:

1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9, \ 10\}$;

2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$.

Задача 4.16. Див. **4.6**.

Задача 4.17. Знайти суму числового ряда

$$\frac{2}{1!} - \frac{3}{2!} + \frac{4}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n!} + \ldots .$$

Задача 4.18. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\,e^x dx}{(x+1)^3}.$$

Задача 4.19. Див. **4.9**.

Задача 4.20. Знайти всі диференційовні функції $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$, які задовольняють рівняння

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}.$$

Категорія "C"

Задача 4.21. Обчислити визначник $\Delta_n = |a_{ij}|$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = i, \\ i & \text{при } j \neq i, \end{cases} \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n.$$

Задача 4.22. Див. **4.12**.

Задача 4.23. Пряма перетинає рівнобічну гіперболу в точках A и B, а її асимптоти – в точках C і D. Довести, що $AC = BD$.

Задача 4.24. Не використовуючи таблиць і калькулятора, порівняти числа

$$\log_{2008} 2009 \text{ і } \log_{2009} 2010.$$

Задача 4.25. Знайти число упорядкованих наборів (A_1, A_2, A_3) множин, що задовольняють умови:

1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Задача 4.26. Див. **4.6**.

Задача 4.27. Знайти суму числового ряда

$$\frac{2}{3!} - \frac{4}{5!} + \frac{6}{7!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n+1)!} + ... \,.$$

Задача 4.28. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$.

Задача 4.29. Знайти інтегральну криву рівняння

$$\left(2x^3y^2 - y\right)dx + \left(2x^2y^3 - x\right)dy = 0,$$

що проходить через точку (1; 1).

Задача 4.30. Чи існують функції $f(x)$ и $g(x)$, які не дорівнюють константі і задовольняють в деякому проміжку умові

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x).$$

5. Шкільна олімпіада 2009 р. (ФМФ НТУУ "КПІ")

Задачі цього пункту пропонувалися абітурієнтам на олімпіаді, які проводив фізико-математичний факультет у 2009 р.

Умови задач

Задача 5.1. Знайти всі натуральні числа від 1 до 10000, які мають рівно 6 дільників, серед яких є числа 7 та 41.

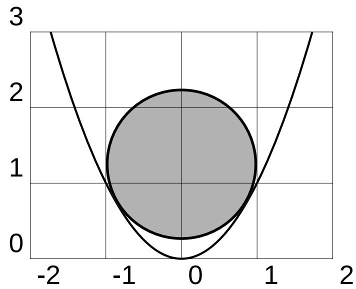
Задача 5.2. Чи існує многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що числова послідовність

$$\left\{(-1)^{P(1)}, (-1)^{P(2)}, (-1)^{P(3)}, (-1)^{P(4)}, \ldots\right\}$$

співпадає с послідовністю

$$\left\{\underbrace{1,\ldots,1}_{2009\text{ разів}}, -1, \underbrace{1,\ldots,1}_{2009\text{ разів}}, -1, \underbrace{1,\ldots,1}_{2009\text{ разів}}, \ldots\right\}.$$

Задача 5.3. В параболу $y = x^2$ вписано коло радіуса 1 так, як показано на рисунку. Знайти рівняння цього кола.



Задача 5.4. В числі 2009! знайшли суму цифр, потім – суму цифр від неї і т.д., поки не отримали число з однієї цифри. Визначити це число.

Задача 5.5. У сферу радіуса R вписано два куби. Обчислити суму квадратів усіх відрізків, які сполучають вершини одного куба з вершинами іншого куба.

Задача 5.6. Нехай $ABCDE$ є правильним п'ятикутником таким, що площа зірки $ACEBD$ дорівнює 1. Нехай AC та BE перетинаються в точці P, а BD та CE – в Q. Визначити площу $APQD$.

Задача 5.7. Розв'язати рівняння $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$ в цілих числах.

Задача 5.8. Функція f задовольняє умови

а) $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$, для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$;

б) $f(f(f(0))) = 0$.

Довести, що $f(0) = 0$.

Відповіді та розв'язки

<u>5.1.</u> Див. розв'язок **1.1.**

<u>5.2.</u> Легко бачити, що для будь-яких $n \in \mathbb{Z}$ та $k \in \mathbb{N}$ числа n^k та $(n+2)^k$ мають однакову парність. Тому однакову парність будуть мати й числа $P(n)$ та $P(n+2)$, де P — многочлен з цілими коефіцієнтами. Це суперечить умові задачі, оскільки $(-1)^{P(2008)} = 1$, $(-1)^{P(2010)} = -1$.

<u>Відповідь:</u> Ні.

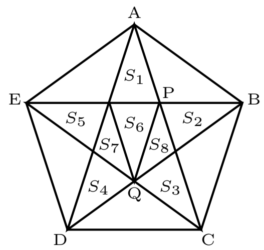
<u>5.3.</u> Див. розв'язок **1.3.**

<u>5.4.</u> Див. розв'язок **1.5.**

<u>5.5.</u> Розглянемо довільну вершину одного куба та відрізки, які з'єднують її з вершинами другого куба. Розіб'ємо 8 вершин другого куба на пари, так, щоб в кожній парі були протилежні вершини. Тоді відрізки, що з'єднують такі вершини будуть проходити, через центр сфери і, відповідно довжини таких відрізків будуть дорівнювати $2R$. Тепер залишилось помітити, що трикутник утворений обраною вершиною першого куба та двома протилежними вершинами другого куба є прямокутний (як вписаний трикутник, якій опирається на діаметр) і відповідна сума квадратів відстаней від вершини першого куба до таких двох вершин другого куба є квадратом гіпотенузи, тобто дорівнює $4R^2$. Оскільки таких пар всього 4, то сума відстаней від однієї довільної точки першого куба, до всіх вершин другого куба дорівнює $16R^2$. Тоді остаточна відповідь $8 \times 16R^2 = 128R^2$

<u>Відповідь:</u> $128R^2$.

<u>5.6.</u> На малюнку через S з нижнім індексом позначено площі відповідних трикутників зірки.



В силу того, що п'ятикутник $ABCDE$ є правильним, легко показати, що $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S$ та $S_7 = S_8 = S'$, і площа зірки виражається

$$S_{ACEBD} = 6S + 2S' = 1.$$

Тоді, $S_{APQD} = 3S + S' = \dfrac{1}{2} S_{ACEBD} = \dfrac{1}{2}$.

<u>Відповідь:</u> $\dfrac{1}{2}$.

5.7. Розв'язки рівняння $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$, очевидно, мають задовольняти умову $x > y$. Оскільки $x, y \in \mathbb{Z}$, маємо $x \geq y + 1$. Підставляючи цю нерівність в початкове рівняння, одержимо $y^3 + 2y^2 + 1 \geq y^3 + 3y^2 + 3y + 1$, тобто $y^2 + 3y \leq 0$, звідки $y \in \{-3, -2, -1, 0\}$. Підставляючи ці значення y в початкове рівняння, одержуємо такі пари розв'язків: $(-2, -3)$, $(1, -2)$, $(1, 0)$.

Відповідь: $(-2, -3)$, $(1, -2)$ та $(1, 0)$.

5.8. З умов а) та б) випливає система нерівностей:

$$\begin{cases} |f(f(0)) - f(0)| \leq |f(0) - 0| = |f(0)|, \\ |f(f(0))| = |0 - f(f(0))| = |f(f(f(0))) - f(f(0))| \leq |f(f(0)) - f(0)|, \\ |f(0)| = |0 - f(0)| = |f(f(f(0))) - f(0)| \leq |f(f(0)) - 0| = |f(f(0))|. \end{cases} \qquad (*)$$

Зокрема, з другої та першої нерівностей системи $(*)$ одержуємо, що $|f(f(0))| \leq |f(0)|$, а з третьої — що $|f(0)| \leq |f(f(0))|$. Одночасне виконання цих нерівностей можливе лише за умови, що $f(f(0)) = \pm f(0)$. У випадку "$+$" з другої нерівності в системі $(*)$ маємо $f(f(0)) = 0$, і тому $f(0) = 0$. У випадку "$-$" з першої нерівності в $(*)$ маємо $2|f(0)| \leq f(0)$, звідки знову $f(0) = 0$.

6. Шкільна олімпіада 2008 р. (ТЛ НТУУ "КПІ")

В цьому пункті запропоновано умови задач, які давалися ліцеїстам на олімпіаді, яка проводилась у технічному ліцеї НТУУ "КПІ" у 2008 р. Дана олімпіада проводилась для 10-11 класів.

Умови задач

10 клас

Задача 6.1. Побудувати графік функції

$$|x|(1 - |x|) + |y|(1 - |y|) = 2|xy|.$$

Задача 6.2. Розв'язати в цілих числах систему

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 10 \end{cases}.$$

Задача 6.3. В трьох комірках є три цілих числа $a_0,\ b_0,\ c_0$. З ними робиться наступна операція:

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\ b_1 = \frac{b_0 + c_0}{2},\ c_1 = \frac{c_0 + a_0}{2}.$$

Далі ця операція повторюється з числами $a_1,\ b_1,\ c_1$ і т.д. Чи може на якомусь кроці з'явитись такі три числа, що якісь два з них є цілими, а третє не цілим.

Задача 6.4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

Задача 6.5. Чи можна число $8\underbrace{0\ldots0}_{2008}7$ представити у вигляді суми квадратів трьох цілих чисел.

Задача 6.6. В рівнобедренному трикутнику сторона поділяє навпіл кут між висотою і бісектрисою внунрішнього кута, проведених з однієї вершини. Знайти величини кутів даного трикутника.

11 клас

Задача 6.7. Обчислити

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin 2007x,$$

якщо відомо, що $\cos 2008x + 2\sin x = 1$.

Задача 6.8. Див. **6.2**.

Задача 6.9. Див. **6.3**.

Задача 6.10. Див. **6.4**.

Задача 6.11. Знайти цілу частину числа

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \cdots - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}},$$

де знак кореня зустрічається 2008 разів.

Задача 6.12. У прямокутному трикутнику бісектриса одного з гострих кутів дорівнює $\dfrac{c\sqrt{3}}{3}$, де c – гіпотенуза. Знайти катети цього трикутника.

Література

[1] Булдигін В.В., Кушніревич В.А., Шкабара О.С., Ясінський В.В. *Студентські математичні олімпіади. Збірник задач.* - К.: НТУУ «КПІ». - 2002. - 175 с.

[2] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу* - Невский Диалект, БХВ-Петербург. - 2004. - 624 с.

[3] Математичні олімпіади - 2007 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2007. - 28 с.

[4] Математичні олімпіади - 2008 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2008. - 40 с.

[5] Садовничий В.А., Григорьян А. А., Конягин С.В. *Задачи студенческих математических олимпиад* - Издательство Московского университета. - 1987. - 624 с.

[6] Садовничий В.А., Подколзин А.С. *Задачи студенческих олимпиад по математике: Пособие для студентов вузов* - М.: Дрофа - 2003. - 208 с.