Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ – 2011

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання

Київ
НТУУ «КПІ»
2012

Математичні олімпіади – 2011 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання/ Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2012. - 33 с.

Навчальне видання

Математичні олімпіади – 2011

Методичні вказівки
до розв'язання задач
для студентів
усіх форм навчання

Укладачі: *Булдигін Валерій Володимирович*
Ільєнко Андрій Борисович
Орловський Ігор Володимирович

Відповідальний редактор *З.П. Ординська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *І.Ю. Каніовська,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Передмова

У березні 2011 року в НТУУ «КПІ» відбулася традиційна щорічна олімпіада з математики, яка проводиться в рамках I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики для студентів вищих навчальних закладів. Оргкомітет олімпіади очолював перший проректор НТУУ «КПІ» Ю.І. Якименко.

У ній взяли участь 300 студентів різних курсів 22-х факультетів та інститутів. Численні делегації представили факультети з високим рівнем математичної підготовки: ФММ, ФМФ, ІПСА, ФЕЛ, ФІОТ, ІТС.

Переможцями олімпіади в офіційному заліку стали: Є.Ю. Поліщук (ІПСА, гр. КА-02) — абсолютний переможець та I місце серед студентів першого курсу; Є.І. Недужий (ФМФ, гр. ОМ-01), В.О. Онищук (ІПСА, гр. КА-02) — II місце серед студентів першого курсу; Є.О. Лиховид (ІПСА, гр. КА-03), О.С. Резунов (ФІОТ, гр. ІК-01), Ю.І. Орлов (ФТІ, гр. ФБ-02), І.І. Кондратьєв (ІПСА, гр. КА-05)— III місце серед студентів першого курсу.

Переможцями та призерами олімпіади серед студентів старших курсів стали: К.В. Моравецька (III курс ІПСА, гр. КА-83) — I місце; О.О. Слюсаренко (IV курс ІПСА, гр. КА-71) — II місце, С.С. Могильний (III курс ІПСА, гр. КА-83), До Нгок Лам (II курс ФЕА, гр. ЕМ-91), К.В. Фуйор (II курс ФПМ, гр. КМ-91) — III місце.

Серед студентів технічних факультетів розподіл місць такий: До Нгок Лам (II курс ФЕА, гр. ЕМ-91) — I місце; О.С. Резунов (I курс ФІОТ, гр. ІК-01) — II місце; С.Б. Бойченко (I курс ІТС, гр. ТІ-01), Р.С. Казмірчук (I курс ФЕЛ, гр. ДК-02) — III місце.

З переможців I етапу було сформовано збірні університету для участі в II етапі Всеукраїнської олімпіади серед технічних ВНЗів в м. Севастополі. У фіналі взяли участь понад 140 студентів з різних вузів України, переможців та призерів I туру олімпіади. Наш університет представляли три команди.

Студенти КПІ гідно виступили в Севастополі, показавши такі результати. У категорії "М" (факультети та інститути з поглибленим вивченням математичних дисциплін) студенти НТУУ «КПІ» посіли всі призові місця: О.О. Слюсаренко (ІПСА, 4-й курс) — перше місце, К.В. Моравецька (ІПСА, 3-й курс) — друге місце та К.В. Фуйор (ФПМ, 2-й курс) — третє місце. У категорії "Т" (технічні факультети та інститути) третє місце посів До Нгок Лам (ФЕА, 4-й курс).

Оргкомітет Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (м. Севастополь) нагородив команду НТУУ «КПІ» грамотою за активну участь в олімпіаді та високий рівень підготовки серед команд провідних вищих навчальних закладів України.

Журі I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики в НТУУ «КПІ» вирішило видати навчальний посібник з задачами I етапу олімпіади та їх розв'язками. Наведені також умови задач II фінального етапу олімпіади, який проходив у м. Севастополі в травні 2011 р., а також розв'язки задач фінального етапу Всеукраїнської олімпіади 2010 р.

Це видання продовжує серію збірників олімпіадних задач з математики [1, 3–6]. Такі збірники будуть корисними при роботі математичних гуртків, для студентів і школярів, які цікавляться математикою.

1. Студентська олімпіада НТУУ "КПІ" з математики 2011 року

Умови задач

Перший курс

Задача 1.1. На координатній площині $X0Y$ зобразити множину розв'язків нерівності

$$(\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln \ln x}} + (\ln y)^{\frac{\ln y}{\ln \ln y}} < 6.$$

Задача 1.2. Велосипедна шина розрахована на 200 км пробігу, якщо використовується на передньому колесі, та на 100 км, якщо використовується на задньому. Якого максимального пробігу можна досягти, якщо обидві шини можна міняти місцями будь-яку кількість разів протягом шляху?

Задача 1.3. Дві прямі на площині перетинаються під кутом $60°$. Хорда одиничної довжини ковзає по прямим так, що один її кінець рухається по одній прямій, а інший – по другій. Показати, що середина хорди при цьому описує еліпс, та визначити положення його фокусів.

Задача 1.4. Числову послідовність $\{a_n, n \geq 0\}$ задано таким чином:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ 2a_{n-2}^2 a_{n-1} + a_{n-3} a_{n-1}^2 = a_{n-3} a_{n-2} a_n, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Знайти a_{100}.

Задача 1.5. Про диференційовні функції f, g, h відомо, що

$$\begin{cases} f(0) = g(0) = h(0), \\ f'(x) = g(x), g'(x) = h(x), h'(x) = f(x) \text{ для будь-якого } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Обчислити значення

$$f^3(1) + g^3(1) + h^3(1) - 3f(1)g(1)h(1).$$

Задача 1.6. Нехай $K : [0, 1] \to \mathbb{R}$ – двічі неперервно диференційовна функція двох змінних. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \det ||K(i/n, j/n)||_{i,j=1}^n = 0.$$

Задача 1.7. Знайти всі неперервні на $[0, +\infty)$ функції f, які для всіх $a, b > 0$ задовольняють умову

$$\int_0^a f(ax)dx = \int_0^b f(bx)dx.$$

Задача 1.8. Які значення може приймати інтеграл

$$\int_0^1 x f(x) f'(x)\, dx,$$

якщо f — деяка неперервно диференційовна функція, така що $f(1) = 0$?

Старші курси

Задача 1.9. Знайти найменший об'єм піраміди, утвореної площинами симетрії еліпсоїда об'єму V^* та його дотичною площиною.

Задача 1.10. Числову послідовність $\{a_n, n \geq 0\}$ задано таким чином:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ 2a_{n-2}^2 a_{n-1} + a_{n-3} a_{n-1}^2 = a_{n-3} a_{n-2} a_n, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Знайти a_{100}.

Задача 1.11. Див. **1.6.**

Задача 1.12. Обчислити інтеграл

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x} \ln \frac{2 - 2x^2 + x^4}{2x - 2x^2 + x^3}\, dx.$$

Задача 1.13. Які значення може приймати інтеграл

$$\int_0^1 x f(x) f'(x)\, dx,$$

якщо f — деяка неперервно диференційовна функція, така що $f(1) = 10$?

Задача 1.14. Для диференційовної на відрізку $[0, 1]$ функції f довести нерівність:

$$|f(1)| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\, dx + \int_0^1 (f'(x))^2\, dx}.$$

Коли в цій нерівності досягається рівність?

Задача 1.15. Див. **1.5.**

Задача 1.16. Знайти всі розв'язки диференціального рівняння

$$y'' + y' \sin x - y = 0,$$

які задовольняють крайовим умовам $y(0) = y(\pi) = 0$.

Відповіді та розв'язки

1.1. Знайдемо область визначення змінних x та y. Має виконуватись наступна система нерівностей

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \ln x > 0, \\ \ln y > 0, \\ \ln\ln x \neq 0, \\ \ln\ln y \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ y > 1, \\ x \neq e, \\ y \neq e. \end{cases}$$

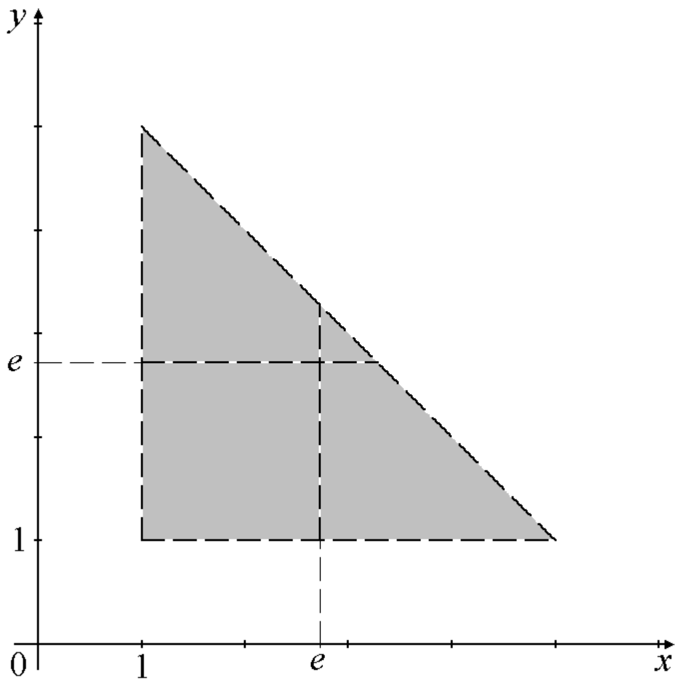

Рис. 1.

Розглянемо окремо один доданок в лівій частині нерівності

$$(\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln\ln x}} = \exp\left\{\ln((\ln x)^{\frac{\ln x}{\ln\ln x}})\right\} =$$

$$\exp\left\{\tfrac{\ln x}{\ln\ln x}\ln\ln x\right\} = \exp(\ln x) = x.$$

Таким чином, початкова нерівність насправді має наступний вигляд: $x+y < 6$. З урахуванням області визначення множина розв'язків нерівності буде мати вигляд, зображений на Рис. 1.

1.2. Умовно позначимо велосипедні шини як I та II. Всього можливо 2 варіанти розмістити шини:

1. Шина I стоїть на передньому колесі, шина II - на задньому.
2. Шина I стоїть на задньому колесі, шина II - на передньому.

Нехай в першому варіанті було подолано x км шляху, а в другому – y км шляху. Тоді шина I зносилася на $\frac{x}{200} + \frac{y}{100}$, шина II – на $\frac{x}{100} + \frac{y}{200}$. Очевидно, що повне зношення шини не може перевищувати 1. Тому справедлива система нерівностей

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ \frac{x}{200} + \frac{y}{100} \leq 1, \\ \frac{x}{100} + \frac{y}{200} \leq 1. \end{cases}$$

При цьому нас цікавлять такі розв'язки цієї системи, щоб $x + y$ було максимальним. Максимальне значення досягається в точці перетину прямих

$$\frac{x}{200} + \frac{y}{100} = 1 \text{ та } \frac{x}{100} + \frac{y}{200} = 1.$$

Таким чином, максимальне значення пробігу дорівнює $\frac{400}{3} = 133.3$ км.

Відповідь: $\frac{400}{3}$ км.

1.3. Розташуємо наші прямі в площині XOY так, щоб точка перетину співпадала з початком координат, а вісь $0X$ була бісектрисою кута 60° (тобто кут між прямими та віссю $0X$ складає 30°). Тоді рівняння цих прямих буде мати вигляд

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad \text{та} \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

Позначимо координати кінців одиничної хорди як $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки кінці хорди лежать на наших прямих, то $y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1$, $y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_2$. Оскільки довжина хорди дорівнює 1, то має виконуватись рівність

$$(x_1 - x_2)^2 + \frac{(x_1 + x_2)^2}{3} = 1.$$

Нехай середина хорди має координати $M(x, y)$. Тоді $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{x_1-x_2}{2\sqrt{3}}$. Звідси легко побачити, що середина хорди описує еліпс

$$\frac{x^2}{3/4} + \frac{y^2}{1/12} = 1.$$

В нашій площині XOY фокуси еліпса мають координати $F_{1,2}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.

Відповідь: $F_{1,2}(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.

1.4. Поділимо обидві частини останньої рівності на добуток $a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}$. Отримаємо

$$2\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} + \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Позначимо $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Тоді для послідовності $\{b_n, n \geq 1\}$ справедлива рівність

$$\begin{cases} b_1 = 1, \\ b_2 = 2, \\ b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}, \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння для такого рекурентного співвідношення має вигляд

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Його корені: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Запишемо загальний розв'язок співвідношення

$$b_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n.$$

З початкових умов складаємо систему для знаходження сталих c_1 та c_2:

$$\begin{cases} -c_1 + 2c_2 = 1, \\ c_1 + 4c_2 = 2. \end{cases}$$

Звідси маємо, що $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$. Тобто $b_n = 2^{n-1}$, а отже, $a_n = 2^{n-1}a_{n-1}$. З останньої рівності легко побачити, що загальний вигляд для a_n буде таким:

$$a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Тому $a_{100} = 2^{4950}$.

Відповідь: $a_{100} = 2^{4950}$.

1.5. Знайдемо похідну функції $a(x) = f^3(x) + g^3(x) + h^3(x) - 3f(x)g(x)h(x)$:

$$\begin{aligned} a'(x) =& 3f^2(x)f'(x) + 3g^2(x)g'(x) + 3h^2(x)h'(x) - \\ &- 3f'(x)g(x)h(x) - 3f(x)g'(x)h(x) - 3f(x)g(x)h'(x) = \\ =& 3f^2(x)g(x) + 3g^2(x)h(x) + 3h^2(x)f(x) - \\ &- 3g^2(x)h(x) - 3f(x)h^2(x) - 3f^2(x)g(x) = 0. \end{aligned}$$

Тобто функція $a(x)$ є сталою, а отже, $a(1) = a(0) = 0$.

Відповідь: 0.

1.6. Розглянемо

$$\det \left\| K\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \right\|_{i,j=1}^{n} = \begin{Vmatrix} K\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) & \dots & K\left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ K\left(\frac{n}{n}, \frac{1}{n}\right) & \dots & K\left(\frac{n}{n}, \frac{n}{n}\right) \end{Vmatrix}.$$

Зробимо в нашому визначнику наступні елементарні перетворення рядків (при цьому значення самого визначника не зміниться):

$$M - (M-1) \to M, \quad M = n, \dots, 2.$$

Тоді перший рядок залишиться без змін, а елементи в інших рядках будуть мати вигляд

$$K\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - K\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right), \quad i = 2, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Зробимо ще раз аналогічні елементарні перетворення рядків (тільки M буде змінюватись від n до 3). Тоді перший та другий рядки знову залишаються без змін, а елементи в інших рядках будуть мати вигляд

$$K\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - 2K\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) + K\left(\frac{i-2}{n}, \frac{j}{n}\right), \quad i = 3, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Оскільки функція K є двічі неперервно диференційовною, то можна вважати, що значення самої функції та її перших та других похідних обмежені однією константою C. Тому кожен елемент в першому рядку обмежений величиною C, кожен елемент в другому рядку – величиною $\frac{C}{n}$, а елементи в інших рядках – $\frac{C}{n^2}$.

Визначник $\det\left\|K\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\right\|_{i,j=1}^{n}$ — це сума $n!$ доданків, кожен з яких можна оцінити величиною

$$C\cdot\frac{C}{n}\cdot\left(\frac{C}{n^2}\right)^{n-2}=\frac{C^n}{n^{2n-3}}.$$

Отже,

$$\det\left\|K\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\right\|_{i,j=1}^{n}\le n!\frac{C^n}{n^{2n-3}}\sim\sqrt{2\pi n^7}\left(\frac{C}{en}\right)^n,$$

але останній вираз прямує до 0 при $n\to\infty$.

(Вказівка: В останній оцінці ми використали формулу Стірлінга:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}.)$$

1.7. З умови випливає, що для всіх $a>0$ інтеграл $\int\limits_0^a f(ax)dx$ буде дорівнювати константі, нехай C. Зробимо заміну змінних в цьому інтегралі: $u=ax$. Тоді

$$\int\limits_0^{a^2} f(u)du=Ca.$$

Оскільки функція f є неперервною, то можемо скористатися теоремою Бароу (про диференціювання інтегралів зі змінними границями):

$$\left(\int\limits_0^{a^2} f(u)du\right)_a'=(Ca)_a'\quad\Rightarrow\quad 2af(a^2)=C.$$

Якщо замість a^2 підставити t, замість $C/2$ підставити $\tilde{C}$, то отримаємо, що

$$f(t)=\frac{\tilde{C}}{\sqrt{t}},\quad t\ge 0,\ \tilde{C}\in\mathbb{R}.$$

Але за умовою функція f має бути неперервною, тому $f(t)\equiv 0$ — єдиний розв'язок.

Відповідь: $f\equiv 0$.

1.8. Проінтегруємо частинами:

$$\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = xf(x) & du = (f(x) + xf'(x))\,dx \\ dv = f'(x)\,dx & v = f(x) \end{array} \right| =$$

$$= xf^2(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx - \int\limits_0^1 xf(x)f'(x)\,dx.$$

Враховуючи, що $f(1) = 0$, отримаємо

$$\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \leq 0,$$

оскільки функція f^2 невід'ємна.

Покажемо тепер, що наш інтеграл може приймати будь-яке значення з проміжку $(-\infty, 0]$. Для цього розглянемо функцію $f(x) = \alpha(x-1), \alpha \in \mathbb{R}$ (така функція задовольняє умову задачі, оскільки $f(1) = 0$).

$$\int\limits_0^1 xf(x)f'(x)\,dx = \int\limits_0^1 x\alpha(x-1)\alpha\,dx = \alpha^2\int\limits_0^1 (x^2 - x)\,dx = -\frac{1}{6}\,\alpha^2.$$

Обираючи потрібне $\alpha \in \mathbb{R}$, можемо досягти довільного від'ємного значення.

Відповідь: $(-\infty, 0]$.

1.9. Не втрачаючи загальності, ми можемо помістити центр еліпсоїда в початок декартової системи координат так, щоб площини xOy, xOz, yOz були площинами симетрії еліпсоїда, і розглядати дотичну площину до еліпсоїда в першому октанті. Рівняння еліпсоїда має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Дотична до еліпсоїду в точці $M(x, y, z)$ має рівняння

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Тоді об'єм піраміди, утвореної дотичною площиною і площинами XOY, XOZ, YOZ, дорівнює

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{x}\frac{b^2}{y}\right)\frac{c^2}{z}.$$

Маємо $\begin{cases} V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{a^2}{x}\frac{b^2}{y}\right)\frac{c^2}{z} \to min, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \end{cases}$ або $\begin{cases} u = \frac{xyz}{abc} \to max, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}\frac{y}{b}\frac{z}{c}} \leq \sqrt{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\frac{x}{a}\frac{y}{b}\frac{z}{c} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow xyz \leq \frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

$u_{max} = \frac{abc}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V_{min} = \frac{1}{6}(abc)^2\frac{1}{xyz} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc.$

Оскільки об'єм еліпсоїда $V^* = \frac{4}{3}\pi abc$, то $V_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}V^*$.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}V^*$.

1.10. Див. розв'язок **1.4.**

1.11. Див. розв'язок **1.6.**

1.12.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\log\frac{2-2x^2+x^4}{2x-2x^2+x^3}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\log\frac{\frac{2}{x^2}-2+x^2}{\frac{2}{x}-2+x}dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\log\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\log\left(\frac{2}{x}-2+x\right)dx = \left|x = t^2\right| =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\log\left(\frac{2}{x^2}-2+x^2\right)dx - 2\int_1^{2^{1/4}} \frac{1}{t}\log\left(\frac{2}{t^2}-2+t^2\right)dt = 0,$$

оскільки

$$\int_{2^{1/4}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}\log\left(\frac{2}{t^2}-2+t^2\right)dt = \left|t = \frac{\sqrt{2}}{u}\right| = -\int_{2^{1/4}}^{1} \frac{1}{u}\log\left(u^2-2+\frac{2}{u^2}\right)du =$$

$$= \int_1^{2^{1/4}} \frac{1}{u}\log\left(u^2-2+\frac{2}{u^2}\right)du.$$

Відповідь: 0.

1.13. Див. розв'язок **1.8.**

1.14. Вказана нерівність є наслідком наступної:

$$f^2(1) = \int\limits_0^1 (f^2(x))'dx = \int\limits_0^1 2f(x)f'(x)dx \le \int\limits_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 (f'(x))^2dx.$$

Рівність досягається коли $f'(x) = f(x) \Rightarrow f(x) = Ce^x, \forall x \in [0,1]$

1.15. Див. розв'язок **1.5.**

1.16. Очевидно, що $y = 0$ — тривіальний розв'язок.

Покажемо, що він єдиний. Розглянемо проміжок $[0,\pi]$. Нехай y — довільний інший розв'язок. Оскільки $y(0) = y(\pi) = 0$, то, якщо існує $x_0 \in (0,\pi)$ така, що y досягає максимуму в цій точці, то $y'(x_0) = 0$ і $y''(x) \le 0$. А з рівняння випливає, що $y''(x_0) = y(x_0) > 0$. Отримали протиріччя.

Аналогічні дії можна провести для x_0 — точки мінімуму функції y на $[0,\pi]$. Отже на $[0,\pi]$ наш нетривіальний розв'язок дорівнює нулю.

Покажемо, що $y = 0$ на всій осі. Візьмемо, наприклад, точку $x = \frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$. Тоді, як вже показано, $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$. Це є задачею Коші, для якої існує єдиний розв'язок. Отже, єдиним розв'язком є лише тривіальний.

Відповідь: $y \equiv 0$.

2. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2010 р.)

II етап Всеукраїнської студентської олімпіади у м. Севастополі проводився у трьох категоріях:

– *Категорія "М":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за спеціальностями, що потребують поглибленого вивчення математики;

– *Категорія "Т":* до цієї категорії відносили студентів технічних спеціальностей;

– *Категорія "С":* до цієї категорії відносили студентів, які навчаються за економічними та аграрними спеціальностями.

В цьому розділі подано завдання всіх категорій олімпіади 2010 р. з розв'язками.

Умови задач

Категорія "М"

Задача 2.1. Спростити матричний вираз

$$(3E - A)^{-1} + (2E + A)^{-1} - 5\left(6E + A - A^2\right)^{-1},$$

де A - квадратна матриця порядку n, E - одинична матриця того ж самого порядку; A^{-1} - матриця, обернена до матриці A.

Задача 2.2. Точки $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_{2n}$ розбивають коло діаметром 1 на $2n$ рівних дуг; B - довільна точка цього же кола. Знайти модуль суми векторів $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + ... + \overrightarrow{BA_{2n}}$.

Задача 2.3. Довести, що середини паралельних хорд гіперболи лежать на одній прямій, яка проходить через центр гіперболи. (Хордою гіперболи називається відрізок, що сполучає дві довільні точки гіперболи).

Задача 2.4. Довести, що при $a \in \left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$ послідовність

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = a + x_n^2,\ n \in \mathbb{N}$$

збігається, та знайти її границю.

Задача 2.5. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n} - \left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n} + \left(x^{n} + \frac{1}{x^{n}}\right)},\quad x > 0,\quad n \in \mathbb{N}.$$

Задача 2.6. Нехай функція $f(x)$ визначена та тричі неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$. Довести, що існує точка $x_0 \in \mathbb{R}$ така, що

$$f\left(x_0\right) f'\left(x_0\right) f''\left(x_0\right) f'''\left(x_0\right) \geq 0.$$

Задача 2.7. Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на відрізку $[0;\ 1]$. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N}$ існує точка $x_0 \in [0;\ 1]$ така, що

$$\int\limits_0^1 f(x) x^n dx = \frac{1}{n+1} f\left(x_0\right).$$

Задача 2.8. Знайти похідну розв'язку задачі Коші

$$y'' + y = \varepsilon y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

за параметром ε при $\varepsilon = 0$.

Задача 2.9. З трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок навмання складають дев'ятицифрове число. Знайти ймовірність того, що три однакові цифри не стоятимуть поряд.

Задача 2.10. Для всіх дійсних значень x дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \right)^x.$$

Категорія "Т"

Задача 2.11. Спростити матричний вираз

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3\left(2E + A - A^2\right)^{-1},$$

де A - квадратна матриця порядку n, E - одинична матриця того ж самого порядку; A^{-1} - матриця, обернена до матриці A.

Задача 2.12. Точки $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_8$ розбивають коло діаметром 1 на 8 рівних дуг; B - довільна точка цього же кола. Знайти модуль суми векторів $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + \ldots + \overline{BA_8}$.

Задача 2.13. Довести, що середини паралельних хорд еліпса лежать на одній прямій, яка проходить через центр еліпса. (Хордою еліпса називається відрізок, що сполучає дві довільні точки еліпса).

Задача 2.14. Див. **2.4**.

Задача 2.15. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 - \left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)}, \quad x > 0.$$

Задача 2.16. Див. **2.6**.

Задача 2.17. Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}dx}{\sqrt{\sin(3-x)}+\sqrt{\sin(x+1)}}.$$

Задача 2.18. Знайти похідну розв'язку задачі Коші

$$y'' = (y')^2 + y^3; \ \ y(0)=0, \ y'(0)=\varepsilon$$

по параметру ε при $\varepsilon = 0$.

Задача 2.19. З двох одиниць, двох двійок та двох трійок навмання складають шестицифрове число. Знайти ймовірність того, що дві однакові цифри не стоятимуть поряд.

Задача 2.20. Для всіх дійсних значень x дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)^x.$$

Категорія "С"

Задача 2.21. Знайти матрицю X, яка задовольняє рівняння

$$\left(2X^2\right)^{-1} = 2X^{-1}.$$

Задача 2.22. Точки $A_1, \ A_2, \ ..., \ A_6$ розбивають коло діаметром 1 на 6 рівних дуг; B - довільна точка цього же кола. Знайти модуль суми векторів $\overline{BA_1} + \overline{BA_2} + ... + \overline{BA_6}$.

Задача 2.23. Довести, що середини паралельних хорд параболи лежать на одній прямій, яка паралельна до вісі параболи. (Хордою параболи називається відрізок, що сполучає дві довільні точки параболи).

Задача 2.24. З'ясувати, при яких дійсних $a > 0$ послідовність

$$x_1 = a, \ \ x_{n+1} = a + x_n^2, \ n \in \mathbb{N}$$

збігається. У випадку збіжності послідовності знайти її границю.

Задача 2.25. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = \frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6+\frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}, \ \ x > 0.$$

Задача 2.26. Див. **2.6**.

Задача 2.27. Див. **2.17**.

Задача 2.28. З'ясувати, чи існують функції $f(x)$, яка не дорівнює тотожно 0, и $g(x)$, для яких в деякому проміжку виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Задача 2.29. Див. **2.19**.

Задача 2.30. Вантаж спочатку розмістили у вагони вантажністю 80 тон, але один вагон залишився завантаженим не повністю. Тоді весь вантаж переклали у вагони вантажністю 60 тон: знадобилося на 8 вагонів більше і при цьому один вагон також залишився завантаженим не повністю. Нарешті, вантаж переклали у вагони вантажністю 50 тон: знадобилося ще на 5 вагонів більше, при цьому всі вагони виявилися завантаженими повністю. Скільки тон вантажу було?

Відповіді та розв'язки

2.1. Оскільки $(6E + A - A^2) = (3E - A)(2E + A) = (2E + A)(3E - A)$, то

$$(6E + A - A^2)^{-1} = (2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} = (3E - A)^{-1}(2E + A)^{-1}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}(3E - A)^{-1} &+ (2E + A)^{-1} - 5(6E + A - A^2)^{-1} = \\ &= (2E + A)(2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} + \\ &\quad + (3E - A)(3E - A)^{-1}(2E + A)^{-1} - 5(3E - A)^{-1}(2E + A)^{-1} = \\ &= (2E + A + 3E - A - 5E)(2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} = \\ &= O(2E + A)^{-1}(3E - A)^{-1} = O,\end{aligned}$$

де O - нульова матриця порядку n.

Відповідь: O – нульова матриця.

2.2. Нехай O - центр даного кола. Тоді

$$\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_1},\ \overrightarrow{BA_2} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_2}, \dots,\ \overrightarrow{BA_{2n}} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_{2n}}.$$

Тому

$$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + ... + \overrightarrow{BA_{2n}} = 2n\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_{2n}}.$$

З умови задачі випливає, що $2n$ точок $A_1,\ A_2, ...,\ A_{2n}$ можна розбити на n пар діаметрально протилежних точок: A_1 и A_{n+1}, A_2 и A_{n+2}, ..., A_n и A_{2n}. Оскільки $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{n+i}} = \overrightarrow{O}$, $i = 1,\ 2, ...,\ n$, то

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_{2n}} = \overrightarrow{O}.$$

Отже,
$$\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + ... + \overrightarrow{BA_{2n}} = 2n\overrightarrow{BO}.$$
Тому,
$$\left|\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_2} + ... + \overrightarrow{BA_{2n}}\right| = 2n\left|\overrightarrow{BO}\right| = n,$$
оскільки з умови задачі випливає, що $2\left|\overrightarrow{BO}\right| = 1$.

Відповідь: n .

2.3. Нехай пряма $y = kx + d$ перетинає гіперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в двох точках: A і B. Тоді координати цих точок задовольняють систему рівнянь:
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + d. \end{cases}$$
Виключаючи з цієї системі y, дістаємо квадратне рівняння
$$\left(b^2 - a^2k^2\right)x^2 - 2a^2kdx - a^2b^2 - a^2d^2 = 0.$$
Оскільки корні цього рівняння x_1 і x_2 є абсцисами точок A і B, то абсциса x_C середини хорди AB дорівнює
$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2kd}{b^2 - a^2k^2}.$$
Тоді ордината y_C цієї ж точки
$$y_C = kx_C + d = \frac{db^2}{b^2 - a^2k^2}.$$

Нехай A_1B_1, A_2B_2 – дві довільні хорди гіперболи, які розташовані на паралельних прямих $y = kx + d_1$ та $y = kx + d_2$. C_1 і C_2 – середини хорд A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Тоді
$$x_{C_1} = \frac{a^2kd_1}{b^2 - a^2k^2},\ y_{C_1} = \frac{d_1b^2}{b^2 - a^2k^2};\ x_{C_2} = \frac{a^2kd_2}{b^2 - a^2k^2},\ y_{C_2} = \frac{d_2b^2}{b^2 - a^2k^2}$$
і рівняння прямої C_1C_2, як прямої, що проходить через дві точки прийме вигляд:
$$a^2ky - b^2x = 0.$$

Оскільки координати центра гіперболи $O(0;\ 0)$ задовольняють цьому рівнянню та в силу довільності d_1 та d_2 випливає необхідний результат.

2.4. З умови задачі випливає, що $\{x_n\}$ є обмеженою, а всі її члени належать до проміжку $(a;\ 0)$. Справді, оскільки $-1 < a < 0$, то й $a < x_2 = a + a^2 < 0$. Якщо припустити, що $a < x_n < 0$, то дістаємо, що $a < x_{n+1} = a + x_n^2 < 0$.

Оскільки $x_1 < x_2$, $x_n + x_{n-1} < 0$ та

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2 = (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1})$$

легко отримати, що

$$\begin{cases} x_{2k-1} < x_{2k}, \\ x_{2k} > x_{2k+1}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Покажемо, що підпослідовності $\{x_{2n-1}\}$ і $\{x_{2n}\}$ є монотонними. З рекурентного співвідношення можна отримати

$$x_{n+1} = a + \left(a + x_{n-1}^2\right)^2, \; n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Монотонність підпослідовностей $\{x_{2n-1}\}$ і $\{x_{2n}\}$ випливає з

$$x_{n+1} - x_{n-1} = (x_{n-1} - x_{n-3})(x_{n-1} + x_{n-3})(x_n + x_{n-2}),$$

якщо взяти до уваги, що $x_{n-1} + x_{n-3} < 0$, $x_n + x_{n-2} < 0$ та (1).

За теоремою Вейєрштрасса ці дві підпослідовності мають скінчені границі. Перейдемо у рівності (2) до границі при $n \to +\infty$. Отримаємо рівняння

$$x^4 + 2ax^2 - x + a + a^2 = 0,$$

серед коренів якого містяться границі підпослідовностей $\{x_{2n-1}\}$ і $\{x_{2n}\}$.

Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$\left(x^2 - x + a\right)\left(x^2 + x + a + 1\right) = 0. \tag{3}$$

Оскільки $a \in \left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$, то (3) має на відрізку $[-1;\ 0]$ єдиний корінь: $x = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$, який і є спільною границею підпослідовностей $\{x_{2n-1}\}$ и $\{x_{2n}\}$, а значить, й вихідної послідовності. Таким чином, при $a \in \left(-\frac{3}{4};\ 0\right)$ дана послідовність є збіжною і має границю

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

2.5. Оскільки

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n} - \left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right) - 2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n} + \left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n}\right)^2 - \left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)^2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n} + \left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^{n} - \left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right),$$

то
$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right),\ x>0,$$
або
$$f(x)=C_n^1x^{n-2}+C_n^2x^{n-4}+...+C_n^{n-1}x^{2-n}.$$
Оскільки $C_n^k=C_n^{n-k}$, $n,\ k\in\mathbb{N}$, $\ 0\le k\le n$, то $f(x)=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+C_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+...+C_n^{\frac{n-1}{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, якщо n – непарне, $f(x)=C_n^1\left(x^{n-2}+\frac{1}{x^{n-2}}\right)+C_n^2\left(x^{n-4}+\frac{1}{x^{n-4}}\right)+...+C_n^{\frac{n}{2}-1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+C_n^{\frac{n}{2}}$, якщо n – парне.

Функція $g(x)=x^k+\frac{1}{x^k},\ x>0,k\in\mathbb{N}$ набуває найменше значення 2 при $x=1$. Тому й функція $f(x)$ набуває найменше значення при $x=1$, яке дорівнює
$$\min_{x>0}f(x)=\left(1+\frac{1}{1}\right)^n-\left(1^n+\frac{1}{1^n}\right)=2^n-2.$$

Відповідь: 2^n-2.

2.6. Якщо існує точка x_0, в якій хоча б одна з функцій $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ або $f'''(x)$ дорівнює 0, то очевидно, що рівність (4) виконується.

Нехай тепер $f(x)\neq0$, $f'(x)\neq0$, $f''(x)\neq0$ и $f'''(x)\neq0$, $x\in\mathbb{R}$. Тоді $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ завдяки своїй неперервності залишають знак на всій числовій осі.

Будемо вважати, що $f(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$. Доведемо, що й $f''(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$.

Нехай $x_1<x_2$. За теоремою Лагранжа існує точка $x_3\in(x_1,\ x_2)$ така, що
$$f'(x_3)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

Якщо $f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$, то функція $f(x)$ є строго зростаючою на всій числовій осі, тому $f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$ а це означає, що, $0<f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$, оскільки $f\left(x_1\right)>0$. Переходячи у (4) до границі при $x_1\to-\infty$, дістаємо
$$\lim_{x_1\to-\infty}f'\left(x_3\right)=\lim_{x_1\to-\infty}\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=0.$$

Це означає, що існує точка $x_3^*<x_2$ така, що $f'\left(x_3^*\right)<f'\left(x_2\right)$.

Знов за теоремою Лагранжа існує точка $x_4\in(x_3^*,\ x_2)$ така, що
$$f''\left(x_4\right)=\frac{f'\left(x_2\right)-f'\left(x_3^*\right)}{x_2-x_3^*}.$$

Тому, що $x_2>x_3^*$ і $f'\left(x_2\right)>f'\left(x_3^*\right)$, то $f''\left(x_4\right)>0$. Отже, $f''(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$.

Аналогічно розглядається випадок $f(x)>0,\ f'(x)<0,\ x\in\mathbb{R}$.

Таким чином, якщо $f(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$, то й $f''(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$.

Використовуючи заміну $g(x) = -f(x)$, неважко довести, що, якщо $f(x) < 0,\ x \in \mathbb{R}$, то й $f''(x) < 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Отже, якщо функції $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ є неперервними та не дорівнюють 0 в жодній з точок числової осі, то $f(x)f''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Аналогічно, якщо $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ є неперервними та не дорівнюють 0 в жодній з точок числової осі, то $f'(x)f'''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Таким чином, якщо функції $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ є неперервними та не дорівнюють 0 в жодної з точок числової осі, то $f(x)f'(x)f''(x)f'''(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ і за точку x_0 можна взяти будь-яку точку числової осі.

2.7.

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)dx^{n+1} =$$

Зробимо заміну змінних:
$x^{n+1} = t$, $x = \sqrt[n+1]{t}$,

x	0	1
t	0	1

$$= \frac{1}{n+1}\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right) dt.$$

Оскільки $f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)$ неперервна на $[0;\ 1]$, то за теоремою про середнє для визначеного інтегралу існує точка $t_0 \in (0;\ 1)$ така, що

$$\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right) dt = f\left(\sqrt[n+1]{t_0}\right).$$

Звідси $\int_0^1 f(x)x^n dx = \dfrac{1}{n+1} f(x_0)$, де $x_0 = \sqrt[n+1]{t_0} \in (0;\ 1)$, що й потрібно було довести.

2.8. Розв'язок даної задачі Коші будемо шукати у вигляді степеневого ряду за цілими додатними степенями ε, коефіцієнти якого залежать від x:

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + ... \tag{5}$$

Тоді $y'_{\varepsilon|\varepsilon=0} = y_1(x)$.

Підставимо (5) у вихідне диференціальне рівняння та початкові умови і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε у лівої та правої частинах отриманих рівнянь. Тоді для визначення функції $y_1(x)$ дістанемо задачу Коші

$$y_1'' + y_1 = y_0'^2; \tag{6}$$

$$y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 0, \tag{7}$$

де y_0 є ,в свою чергу, розв'язком задачі Коші

$$y_0'' + y_0 = 0; \quad y_0(0) = 1,\ y_0'(0) = 0. \tag{8}$$

Оскільки функція $y_0 = \cos x$ є розв'язком задачі (8), то диференціальне рівняння (6) набуває вигляду

$$y_1'' + y_1 = \sin^2 x,$$

звідки $y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2x.$

Константи інтегрування C_1 і C_2 можна знайти, використовуючи початкові умови (7):

$$\begin{cases} C_1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{2}{3}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $y_1(x) = -\dfrac{2}{3}\cos x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2x.$ Тому

$$y_\varepsilon' \,|_{\varepsilon=0} = -\frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos 2x.$$

Відповідь: $-\dfrac{2}{3}\cos x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}\cos 2x.$

2.9. Елементарною подією є дев'ятицифрове число, складене з трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок. Усі елементарні події рівноможливі, а їх загальна кількість дорівнює

$$n = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1680.$$

Нехай $A = \{$у навмання складеному з трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок дев'ятицифровому числі три однакові цифри не стоятимуть поруч$\}$. Кількість елементарних подій, що сприяють події A, обчислимо за формулою $n_A = n - n_{\overline{A}}$. Згідно з формулою включень та виключень

$$n_{\overline{A}} = n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123},$$

де n_i – кількість дев'ятицифрових чисел, складених з трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок, у яких три цифри i розташовані поряд, $i = 1,\ 2,\ 3$; n_ij – кількість дев'ятицифрових чисел, складених з трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок, в яких три цифри i та три цифри j розташовані поряд, $i = 1,\ 2,\ 3,\ j = 2, 3,\ i < j$; n_{123} – кількість дев'ятицифрових чисел, складених з трьох одиниць, трьох двійок та трьох трійок, в яких три одиниці, три двійки та три трійки розташовані поряд. Очевидно, що

$$n_1 = n_2 = n_3 = 7 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 140;$$
$$n_{12} = n_{13} = n_{23} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 20;\ n_{123} = 6.$$

Тому $n_{\overline{A}} = 3 \cdot 140 - 3 \cdot 20 + 6 = 366$, $n_A = 1680 - 366 = 1314$. Отже,

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{1314}{1680} = \frac{219}{280}.$$

Відповідь: $\frac{219}{280}$.

2.10.

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)^x = \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^x.$$

Якщо $x \leq 0$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Якщо $x > 0$, то $a_n \sim \dfrac{1}{2^x \cdot n^{\frac{x}{2}}}$. Отже, при $x > 2$ ряд є збіжним; при $x \leq 2$ ряд є розбіжним.

Відповідь: збігається, якщо $x > 2$; розбігається, якщо $x \leq 2$.

2.11. Оскільки $(2E + A - A^2) = (2E - A)(E + A) = (E + A)(2E - A)$, то

$$(2E + A - A^2)^{-1} = (E + A)^{-1}(2E - A)^{-1} = (2E - A)^{-1}(E + A)^{-1}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3(2E + A - A^2)^{-1} &= \\ &= (E + A)(E + A)^{-1}(2E - A)^{-1} + \\ &\quad + (2E - A)(2E - A)^{-1}(E + A)^{-1} - 3(E + A)^{-1}(2E - A)^{-1} = \\ &= (E + A + 2E - A - 3E)(E + A)^{-1}(2E - A)^{-1} = \\ &= O(E + A)^{-1}(2E - A)^{-1} = O,\end{aligned}$$

де O – нульова матриця порядку n.

Відповідь: O – нульова матриця.

2.12. У розв'язку задачі **2.2** покласти $n = 4$.

Відповідь: 4.

2.13. Нехай пряма $y = kx + d$ перетинає еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в двох точках A і B. Тоді координати цих точок задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + d. \end{cases}$$

Виключаючи з цієї системі y, дістаємо квадратне рівняння

$$\left(b^2 + a^2k^2\right)x^2 + 2a^2kdx - a^2b^2 + a^2d^2 = 0.$$

Оскільки корні цього рівняння x_1 і x_2 є абсцисами точок A і B, то абсциса x_C середини хорди AB дорівнює

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2kd}{b^2 + a^2k^2}.$$

Тоді ордината y_C цієї ж точки

$$y_C = kx_C + d = \frac{db^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

Нехай A_1B_1, A_2B_2 – дві довільні хорди еліпса, які розташовані на паралельних прямих $y = kx + d_1$ та $y = kx + d_2$. C_1 і C_2 – середини хорд A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Тоді

$$x_{C_1} = -\frac{a^2kd_1}{b^2 + a^2k^2},\ y_{C_1} = \frac{d_1b^2}{b^2 + a^2k^2};\ x_{C_2} = -\frac{a^2kd_2}{b^2 + a^2k^2},\ y_{C_2} = \frac{d_2b^2}{b^2 + a^2k^2}.$$

і рівняння прямої C_1C_2, як прямої, що проходить через дві точки прийме вигляд:

$$a^2ky + b^2x = 0.$$

Оскільки координати центра еліпса $O(0;\ 0)$ задовольняють цьому рівнянню та в силу довільності d_1 та d_2 випливає необхідний результат.

2.14. Див. розв'язок **2.4**.

2.15. У розв'язку задачі **2.5** покласти $n = 4$.

Відповідь: 14.

2.16. Див. розв'язок **2.6**.

2.17.

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{\sin(3-x)}dx}{\sqrt{\sin(3-x)} + \sqrt{\sin(x+1)}} =$$

Зробимо заміну змінних:
$x = 1 - t$, $dx = -dt$,

x	0	2
t	1	-1

$=$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)} + \sqrt{\sin(2-t)}} =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\sin(2-t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\sin(2+t)}dt}{\sqrt{\sin(2+t)}+\sqrt{\sin(2-t)}} = 1.$$

Відповідь: 1.

2.18. Розв'язок даної задачі Коші будемо шукати у вигляді степеневого ряду за цілими додатними степенями ε, коефіцієнти якого залежать від x:

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots \tag{9}$$

Тоді $y'_{\varepsilon|\varepsilon=0} = y_1(x)$.

Підставимо (9) у вихідне диференціальне рівняння та початкові умови і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε у лівої та правої частинах отриманих рівнянь. Тоді для визначення функції $y_1(x)$ дістанемо задачу Коші

$$y_1'' = 2y_0' y_1' + 3y_0^2 y_1, \tag{10}$$

$$y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1, \tag{11}$$

де y_0 є, в свою чергу, розв'язком задачі Коші

$$y_0'' = y_0'^2 + y_0^3; \quad y_0(0) = 0,\ y_0'(0) = 0. \tag{12}$$

Оскільки функція $y_0 = 0$ є розв'язком задачі (12), то диференціальне рівняння (10) набуває вигляду

$$y_1'' = 0,$$

звідки $y_1(x) = C_1 x + C_2$.

Константи інтегрування C_1 і C_2 можна знайти, використовуючи початкові умови (11): $C_1 = 1,\ C_2 = 0$. Таким чином, $y_1(x) = x$. Отже, $y'_\varepsilon|_{\varepsilon=0} = x$.

Відповідь: x.

2.19. Елементарною подією є шестицифрове число, складене з двох одиниць, двох двійок та двох трійок. Усі елементарні події рівноможливі, а їх загальна кількість дорівнює

$$n = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 90.$$

Нехай $A = \{$у навмання складеному з двох одиниць, двох двійок та двох трійок шестицифровому числі ніякі дві однакові цифри не стоятимуть поряд$\}$.

Кількість елементарних подій, що сприяють події A, обчислимо за формулою $n_A = n - n_{\overline{A}}$. Згідно з формулою включень та виключень

$$n_{\overline{A}} = n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123},$$

де n_i – кількість шестицифрових чисел, складених з двох одиниць, двох двійок та двох трійок, у яких дві цифри i розташовані поряд, $i = 1,\ 2,\ 3$; n_{ij} – кількість шестицифрових чисел, складених з двох одиниць, двох двійок та двох трійок, у яких дві цифри i та дві цифри j розташовані поряд, $i = 1,\ 2,\ 3,\ j = 2, 3,\ i < j$; n_{123} – кількість шестицифрових чисел, складених з двох одиниць, двох двійок та двох трійок, у яких дві одиниці, дві двійки та дві трійки розташовані поряд.

Очевидно, що

$$n_1 = n_2 = n_3 = 5 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = 30;$$
$$n_{12} = n_{13} = n_{23} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 12;\ n_{123} = 6.$$

Тому $n_{\overline{A}} = 3 \cdot 30 - 3 \cdot 12 + 6 = 60$, $n_A = 90 - 60 = 30$. Отже,

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2.20.

$$a_n = \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}\right)^x} =$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} + 1\right)^x n^{\frac{2x}{3}}}.$$

Якщо $x \leq 0$, то не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Якщо $x > 0$, то $a_n \sim \frac{1}{3^x n^{\frac{2x}{3}}}$. Отже, при $x > \frac{3}{2}$ ряд є збіжним; при $x \leq \frac{3}{2}$ ряд є розбіжним.

Відповідь: збігається, якщо $x > \frac{3}{2}$, розбігається, якщо $x \leq \frac{3}{2}$.

2.21. З умови задачі та визначення оберненої матриці випливає, що

$$\left(2X^{-1}\right)\left(X^2\right) = E,$$

де E – одинична матриця того ж самого порядку, що й матриця X. Користуючись законами матричної алгебри, перетворимо ліву частину отриманої рівності:

$$4\left(X^{-1}X^2\right) = E \ \Leftrightarrow\ \left(X^{-1}X\right)X = \frac{1}{4}E \ \Leftrightarrow\ X = \frac{1}{4}E.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}E$.

2.22. У розв'язку задачі **2.2** покласти $n = 3$.

Відповідь: 3.

2.23. Нехай пряма $y = kx + d$ перетинає параболу $y = ax^2$ в двох точках: A і B. Тоді координати цих точок задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} y = ax^2, \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Виключаючи з цієї системі y, дістаємо квадратне рівняння

$$ax^2 - kx - b = 0.$$

Оскільки корні цього рівняння x_1 і x_2 є абсцисами точок A і B, то абсциса x_C середини хорди AB дорівнює

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2a}.$$

Оскільки x_C не залежить від b, то середини всіх паралельних хорд параболи, тобто хорд, що мають той же самий кутовий коефіцієнт k, лежать на прямий $x = \dfrac{k}{2a}$, тобто на прямий, яка паралельна до вісі параболи.

2.24. Припустимо, що дана послідовність є збіжною і має границю A. Тоді, переходячи в рівнянні

$$x_{n+1} = a + x_n^2 \tag{13}$$

до границі, при $n \to \infty$, отримаємо, що число A має задовольняти рівнянню

$$A = a + A^2. \tag{14}$$

Це квадратне рівняння має дійсні корені, якщо його дискримінант невід'ємний, тобто якщо a задовольняє нерівність $a \leq \frac{1}{4}$. Таким чином, при $a > \frac{1}{4}$ дана послідовність є розбіжною.

Нехай тепер $a \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right]$. З (13) випливає що всі члени послідовності додатні. Крім того, оскільки $x_1 < x_2$, то

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2 = (x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1}) > 0,$$

тобто послідовність $\{x_n\}$ є зростаючою.

Доведемо, що $x_n < c,\ n \in \mathbb{N}$, де $c = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ – менший корінь рівняння (14). Очевидно, що $x_1 = a < c$. Нехай $x_n < c$. Тоді

$$x_{n+1} = a + x_n^2 < a + c^2 = c,$$

і твердження є вірним згідно з методом математичної індукції. Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою зверху.

За теоремою Вейєрштрасса послідовність $\{x_n\}$ має скінчену границю. Згідно отриманого вище, вона дорівнює меншому кореню рівняння (14), тобто

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Відповідь: якщо $a \in \left(0;\ \frac{1}{4}\right]$, то послідовність є збіжною і $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$; якщо $a \in \left(\frac{1}{4};\ \infty\right)$, то послідовність є розбіжною.

2.25. У розв'язку задачі **2.5** покласти $n = 3$.

Відповідь: 6.

2.26. Див. розв'язок **2.6**.

2.27. Див. розв'язок **2.17**.

2.28. Перепишемо рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

у вигляді

$$\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)}{g'(x)},\ g(x) \neq 0,\ g'(x) \neq 0,$$

або

$$g(x)\left(g'(x) - g(x)\right) f'(x) - \left(g'(x)\right)^2 f(x) = 0. \tag{15}$$

Будемо вважати, що $g'(x) - g(x) \neq 0$ для довільного x із деякого проміжку. Тоді рівняння (15) можна перетворити до рівняння

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \frac{\left(g'(x)\right)^2 dx}{g(x)\left(g'(x) - g(x)\right)},$$

звідки маємо

$$f(x) = C \exp\left\{\int \frac{\left(g'(x)\right)^2}{g(x)\left(g'(x) - g(x)\right)} dx\right\}, \tag{16}$$

де C – довільна дійсна стала, яку вважатимемо не рівною 0.

Якщо, наприклад, покласти $g(x) = x$, то з формули (16) випливає, що $f(x) = \dfrac{Cx}{x-1}$. на проміжку $(1;\ +\infty)$.

Таким чином, функції $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ і $g(x) = x$ на проміжку $(1;\ +\infty)$ задовольняють рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Відповідь:</u> так, існують, наприклад, $g(x) = x,\ f(x) = \dfrac{x}{x-1},\ x \in (1,\ +\infty)$.

<u>2.29.</u> Див. розв'язок **2.19**.

<u>2.30.</u> Нехай вантажу було x тон, а вагонів вантажністю 80 тонн було m.
Тоді з умови задачі випливає, що дійсне додатне число x та натуральне число m задовольняють наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases} 80\,(m-1) < x < 80m, \\ 60\,(m+8-1) < x < 60\,(m+8)\,, \\ x = 50\,(m+13)\,, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 80m - 80 < 50m + 650 < 80m, \\ 60m + 420 < 50m + 650 < 60m + 480, \\ x = 50m + 650, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21\tfrac{2}{3} < m < 24\tfrac{1}{3}, \\ 17 < m < 23, \\ x = 50m + 650, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 22 \\ x = 1750. \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> 1750 т.

3. II етап Всеукраїнської студентської олімпіади з математики серед студентів вищих навчальних закладів технічного, економічного та аграрного профілів (Севастополь, 2011 р.)

В цьому пункті подано завдання олімпіади 2011 р.

Умови задач

Категорія "M"

Задача 3.1. Для всіх дійсних значень параметрів a і b розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + \ \ldots + x_n = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \ \ldots + x_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + ... + x_{n-2} + ax_{n-1} + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 + \ \ldots + x_{n-1} + ax_n = b, \end{cases}$$

де $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$.

Задача 3.2. Точки K, L, M, N не лежать в одній площині. З'ясувати, при яких дійсних значеннях параметра α існує точка O така, що

$$2\overrightarrow{OK} + 3\overrightarrow{OL} + 5\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{ON}.$$

Задача 3.3. Точки $K(-6,6,6)$, $L(5,5,2)$, $M(0,8,-5)$, $N(-7,0,2)$ лежать відповідно на сторонах AB, BC, CD і DA квадрата $ABCD$. Знайти площу квадрата $ABCD$. (Точки $K, \ L, \ M, \ N$ задано відносно прямокутної декартової системи координат Oxy).

Задача 3.4. Для всіх $a \in \mathbb{R}$ дослідити збіжність послідовності $\{x_n\}$:

$$x_1 = \sin a, \ x_2 = \cos(\sin a), \ x_3 = \sin(\cos(\sin a)), \ x_4 = \cos(\sin(\cos(\sin a))), ...$$

У разі збіжності знайти границю цієї послідовності.

Задача 3.5. Знайти суму довжин проміжків, об'єднання яких є розв'язком системи нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + ... + \dfrac{1}{x-n} < 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Задача 3.6. Знайти найменше дійсне число A таке, що для кожного квадратного тричлена $f(x)$, який задовольняє умову $|f(x)| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$, виконується нерівність $|f'(0)| \leq A$.

Задача 3.7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{x^2}{1-\cos x} dx$.

Задача 3.8. Знайти інтегральні криві рівняння $xdy - y(2+3xy)dx = 0$, дотичні до яких у точці з абсцисою $x = 1$ утворюють з додатним напрямом осі Ox кут 45^{O}.

Задача 3.9. Скількома способами з множини $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ можна вибрати дві непорожні підмножини B та C за умови, що $\forall b \in B$, $\forall c \in C$ виконується нерівність $b < c$?

Задача 3.10. Студент має право складати іспит лише після того, як він склав залік. В кожній спробі ймовірність скласти залік дорівнює p_1; в кожній спробі ймовірність скласти іспит дорівнює p_2 ($0 < p_1, p_2 < 1$, $p_1 \neq p_2$). Усі спроби скласти залік, іспит є незалежними. Знайти ймовірність того, що студент не складе залік за n спроб за умови, що він не складе залік та іспит за n спроб.

Категорія "T"

Задача 3.11. Див. **3.1**.

Задача 3.12. Див. **3.2**.

Задача 3.13. Див. **3.3**.

Задача 3.14. Нехай функція $f(x)$ має в точці $x = a$ похідну $f'(a)$ і $f(a) \neq 0$. Знайти

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f\left(a + \frac{2}{n}\right)}{f(a)} \right)^n.$$

Задача 3.15. Довести, що рівняння

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + ... + \frac{1}{x-n} = 0$$

має рівно $n-1$ різних дійсних коренів. Знайти суму цих коренів.

Задача 3.16. Довести, що для кожного квадратного тричлена $f(x)$, який задовольняє умову $|f(x)| \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$, виконується нерівність $|f'(0)| \leq 8$.

Задача 3.17. Див. **3.7**.

Задача 3.18. Знайти інтегральні криві рівняння $xdy - y(2+3xy)dx = 0$, які перетинають пряму $x = 1$ під прямим кутом.

Задача 3.19. Скількома способами з множини $A = \{1, 2, 3, ..., 8\}$ можна вибрати дві непорожні підмножини B та C за умови, що $\forall b \in B$, $\forall c \in C$ виконується нерівність $b < c$?

Задача 3.20. Студент має право складати іспит лише після того, як він склав залік. В кожній спробі ймовірність скласти залік дорівнює p; в кожній спробі ймовірність скласти іспит також дорівнює p ($0 < p < 1$). Усі спроби скласти залік, іспит є незалежними. Знайти ймовірність того, що студент не складе залік за n спроб за умови, що він не складе залік та іспит за n спроб.

Категорія "C"

<u>**Задача 3.21.**</u> Див. **3.1**.

<u>**Задача 3.22.**</u> Точки K, L і M не лежать на одній прямій. З'ясувати, при яких дійсних значеннях параметра α існує точка O така, що $5\overrightarrow{OK}+6\overrightarrow{OL}=\alpha\overrightarrow{OM}$.

<u>**Задача 3.23.**</u> Задано рівняння двох сторін ромба $x-5y+37=0$, $5x-y-31=0$ і одна з його вершин $(2;\,3)$. Знайти площу ромба.

<u>**Задача 3.24.**</u> Див. **3.14**.

<u>**Задача 3.25.**</u> Довести, що рівняння

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$$

має рівно 3 різних дійсних корені. Знайти суму цих коренів.

<u>**Задача 3.26.**</u> Знайти найменшу відстань між точками парабол $y=x^2-2x+2$ і $x=y^2+2$.

<u>**Задача 3.27.**</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\operatorname{ctg}^{2011}x}$.

<u>**Задача 3.28.**</u> Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'+y''+y'''+...=x+x^2,$$

який задовольняє умову: $y=0$ при $x=0$.

<u>**Задача 3.29.**</u> Скількома способами з множини $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ можна вибрати дві непорожні підмножини B та C за умови, що $\forall b\in B$, $\forall c\in C$ виконується нерівність $b<c$?

<u>**Задача 3.30.**</u> Див. **3.20**.

Література

[1] Булдигін В.В., Кушніревич В.А., Шкабара О.С., Ясінський В.В. *Студентські математичні олімпіади. Збірник задач.* - К.: НТУУ «КПІ». - 2002. - 175 с.

[2] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу* - Невский Диалект, БХВ-Петербург. - 2004. - ISBN: 5-7940-0104-6, 5-94157-463-0. - 624 с.

[3] Математичні олімпіади - 2007 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2007. - 28 с.

[4] Математичні олімпіади - 2008 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2008. - 40 с.

[5] Математичні олімпіади - 2009 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2010. - 45 с.

[6] Математичні олімпіади - 2010 : Метод.вказівки до розв'яз. задач для студ. усіх форм навчання та школярів / Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський. - К.: НТУУ «КПІ». - 2011. - 36 с.

[7] Садовничий В.А., Григорьян А. А., Конягин С.В. *Задачи студенческих математических олимпиад* - Издательство Московского университета. - 1987. - 624 с.

[8] Садовничий В.А., Подколзин А.С. *Задачи студенческих олимпиад по математике: Пособие для студентов вузов* - М.: Дрофа - 2003. - ISBN: 5-7107-6958-4. - 208 с.