Методичні вказівки до вивчення розділу «Ряди».

Варіанти типових завдань для студентів фізико-математичних спеціальностей

Затверджено на засіданні

кафедри математичного аналізу

та теорії ймовірностей

Київ НТУУ «КПІ» 2011

Загальні положення

Методичні вказівки містять теоретичні питання до колоквіуму та завдання типової розрахункової роботи «Ряди» для студентів II курсу фізико-математичного факультету. Розрахункова робота виконується у третьому семестрі. Кожен студент готує і здає усно теоретичний матеріал на колоквіумі і в письмовій формі завдання типової розрахункової роботи.

Зошит з розв'язаними задачами необхідно здати на перевірку викладачеві, який проводить практичні заняття, до написання модульної контрольної роботи.

Студент, який не здав колоквіум і типову розрахункову роботу не допускається до екзамену, як такий, що не виконав навчальний графік.

§1. Числові ряди. Основні поняття.

Теоретичні питання

1. Поняття числового ряду. Означення збіжності та суми числового ряду.
2. Дослідження збіжності геометричного та гармонічного рядів.
3. Елементарні властивості збіжних рядів.
4. Необхідна умова збіжності ряду. Критерій Коші збіжності числового ряду.
5. Властивості лінійності суми збіжного числового ряду. Асоціативність суми збіжного числового ряду.

Розв'язання типових задач

Приклад 1. Довести безпосередньо збіжність числового ряду та знайти його суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}.$$

Розв'язання. Розглянемо допоміжну раціональну функцію $f(x)=\frac{3}{9x^2+3x-2}$ таку, що $f(n)=a_n$ для $\forall n\geq 1$, де a_n - загальний член даного ряду, і розкладемо її на елементарні дроби. Маємо

$$\frac{3}{9x^2+3x-2}=\frac{3}{(3x+2)(3x-1)}=\frac{A}{3x-1}+\frac{B}{3x+2}.$$

Звідки $A(3x+2)+B(3x-1)\equiv 3$. Знайдемо константи A і B відомими методами, отримаємо $A=1, B=-1$. Отже, загальний член даного ряду $a_n=\frac{3}{9n^2+3n-2}$ можна подати у вигляді

$$a_n=\frac{3}{9n^2+3n-2}=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}, n=1,2,\ldots$$

Тоді часткові суми $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ будуть

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}.$$

Тепер ясно, що існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n$, яка дорівнює сумі ряду:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Довести збіжність числового ряду та знайти його суму:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{15^n}.$$

Розв'язання. Загальний член ряду можна подати у вигляді $a_n = \frac{(-3)^n + 5^n}{15^n} = \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3^n}$, отже, даний ряд можна записати у вигляді суми двох збіжних геометричних рядів:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{15^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}.$$

Скориставшись формулою суми геометричного ряду маємо

$$S = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} = \frac{7}{3}.$$

Приклад 3. Довести безпосередньо збіжність числового ряду та знайти його суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$$

Розв'язання. Скористаємось формулою

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}, \quad \text{вірною при } x, y \in [0,1).$$

Дійсно при $x, y \in [0,1)$ маємо $0 \le \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{4}$, $0 \le \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{4}$, отже, сума

$0 \le \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$. Обчисливши тангенс цієї суми маємо

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{a\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = \frac{x+y}{1-xy}$, що і доводить формулу.

Складемо часткову суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}.$$

Послідовно знайдемо: $S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $S_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$,

$S_3 = S_2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Доведемо методом математичної індукції, що $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

Формула вірна для $n = 1,2,3$. Припустимо, що вона вірна для $n = m$ і доведемо її для $n = m + 1$. Маємо:

$$S_{m+1} = S_m + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{m}{m+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2} = \operatorname{arctg}\frac{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{2(m+1)^2}}{1-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2(m+1)^2}}$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{(m+1)(2m^2+2m+1)}{(m+2)(2m^2+2m+1)} = \operatorname{arctg}\frac{m+1}{m+2}.$$

В силу принципу математичної індукції формула $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ вірна при всіх натуральних n. Знайдемо суму ряду:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Індивідуальні завдання

Завдання 1. Довести безпосередньо збіжність рядів і знайти їх суми або встановити їх розбіжність.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$

   в) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+n}\right)$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$

   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2}{2^n}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$

   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{10}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right)$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-28n-45}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+(-2)^n}{3^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}$

7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-70n-24}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-4)^n}{12^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2+n+1}$

8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+(-3)^{n+1}}{4^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$

9. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-4^n}{12^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$

10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-14n-28}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5)^n+2^n}{10^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$

11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2-24n-5}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2^n}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n(n+1)}}$

12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2-84n-13}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

13\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-4)^n}{8^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

14\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n + 2^n}{8^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$

15\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n}{5^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$

16\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 42n - 40}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n}{5^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 4}{n(n+1)(n+4)}$

17\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 10(-3)^n}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[5]{n+2} - 2\sqrt[5]{n+1} + \sqrt[5]{n}\right)$

18\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 21n - 10}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 5 \cdot 4^n}{5^n}$

в) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n}$

19\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 + 5n - 6}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + (-1)^n \frac{2^n}{3^n}\right)$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

20\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5^n} + \frac{(-3)^n}{7^n}\right)$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2}{n^2}$

21\. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}$

22\. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 6}{n(n+2)(n+3)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}+\frac{10}{7^n}\right)$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+2)}$

23. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot 2^n+(-3)^n}{5^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$

25. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2n}}$

27. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n+1}+(-1)^n}{4^n}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+3n+3}$

29. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 3^{n-1}+2^{n+3}}{5^n}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n+10\cdot 5^n}{15^n}$

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{\ln\,(n+1)}{\ln\,n}\right)$

24. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-2)^n+3^n}{10^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[4]{n+2}-2\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n}\right)$

26. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-5}{n(n^2-1)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+2}+(-2)^{n-1}}{5^n}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)(2n+1)}$

28. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-4)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-2)^{n+1}+3^{n-1}}{4^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

30. а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7(-3)^{n+1}-2^{n-1}}{5^n}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)(2n+2)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}$

Завдання 2. Використавши необхідну ознаку збіжності ряду, встановити розбіжність рядів:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n+2}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-3n^2}{(10n+1)^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{tg}\frac{3}{2^n}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+3}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}\sin\frac{1}{n+2}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n+2}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\ln(n+2)-\ln(n+1)\right)$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-n^2+1}{n^5}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right)$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-n^2+1}{n^3}$
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}$
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln n}$
21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n-n^3+1}{n^{100}}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n}\sin\frac{1}{n+2}$
23. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left(\ln n-\ln(n+5)\right)$
24. $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n\left(1-\cos\frac{1}{n^2+1}\right)$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{1+n^2}-n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^3+1}-n\right)}{\sqrt{n^5+1}}$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} \operatorname{tg} \frac{3}{n+2}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2^{-n}}{n^5+n^2+1}$

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\ln^2 n}$

30. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{n+2}$

§2. Ряди з невід'ємних чисел.

Теоретичні питання

1. Критерій збіжності ряду з невід'ємних чисел.
2. Перша ознака порівняння.
3. Друга ознака порівняння.
4. Ознаки Д'Аламбера.
5. Радикальна ознака Коші. Порівняння її з ознакою Д'Аламбера.
6. Інтегральна ознака збіжності.
7. Ознака Раабе.
8. Ознака Гаусса.

Розв'язання типових задач

Приклад 1. Використавши ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)3^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}-n^2}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+n}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\,\mathrm{tg}\frac{1}{2n^2}$,

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$.

Розв'язання. а) Порівняємо загальний член даного ряду з загальним членом геометричного ряду: $\frac{n}{(2n+3)3^n}<\frac{1}{2\cdot 3^n}$. Отже, даний ряд мажорується збіжним геометричним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^n}$, тому він збігається за першою ознакою порівняння.

б) Скористаємось другою ознакою порівняння. Нехай $a_n=\frac{1}{2^{2n-1}-n^2}$, $b_n=\frac{1}{2^{2n-1}}$.

Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}-n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n^2}{2^{2n-1}}}=1\neq 0.$ **(ми скористались тим, що показникова функція зростає швидше степеневої, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^{2n-1}}=0$). Отже, ряди** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведуть себе однаково.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$ - гармонічний ряд зі знаменником $q = \frac{1}{4} < 1$, тому збігається, а значить збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

в) Неважко переконатися, що $\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+n} \sim \frac{1}{3n}$, при $n \to \infty$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний, тому розбіжний і заданий ряд.

г) Скористаємось еквівалентністю $\operatorname{tg}\frac{1}{2n^2} \sim \frac{1}{2n^2} \quad (n \to \infty)$. Тому

$$\sqrt[3]{n}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2n^2} \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{2n^2} = \frac{1}{2n^{5/3}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{5/3}}$ є узагальненим гармонічним рядом з показником $\alpha = \frac{5}{3} > 1$, тому збігається. Отже, даний ряд теж збігається.

д) Відомо, що $\ln n < n$, однак ця нерівність нічого не дає, оскільки з нерівності $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ ніякого висновку зробити не можна. Представимо загальний член ряду у вигляді

$$\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = \frac{\ln n}{n^{1/4}} \cdot \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Тоді $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$, оскільки степенева функція з додатним показником зростає швидше логарифмічної. Тому, починаючи з деякого n маємо $\frac{\ln n}{n^{1/4}} < 1$, отже, $\frac{\ln n}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{5/4}}$.

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$ збіжний (оскільки $\frac{5}{4} > 1$), тому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$ теж збіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(3n+1)!}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

Розв'язання. а) Застосуємо ознаку Д'Аламбера. Маємо $a_n = \frac{3^n}{(3n+1)!}$,

$a_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(3n+4)!}$. Границя відношення

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(3n+4)!}\frac{(3n+1)!}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} = 0 < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

б) Застосуємо радикальну ознаку Коші. Маємо $a_n = n\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)^n$, тоді

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right).$$

Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$, оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Тому $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right) = 1\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} < 1$.

Отже, заданий ряд збіжний.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)\ln^2 n}$.

Розв'язання. а) Порівняємо даний ряд з рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Оскільки границя відношення $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{(2n+1)\ln(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)}{(2n+1)} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, то даний ряд поводить себе так само, як $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Дослідимо останній ряд за допомогою інтегральної ознаки, при $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$. Обчислимо

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{t\to\infty}\left(\ln\ln(n+1) - \ln\ln 2\right) = +\infty.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ – розбіжний, а тому, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$ теж розбіжний.

б) Аналогічно, даний ряд порівняємо з рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$, який поводить себе так само, як і початковий ряд. Оскільки

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{d\ln x}{\ln^2 x} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right) = \frac{1}{\ln 2} < +\infty ,$$

то звідси випливає збіжність вихідного ряду.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ при різних значеннях параметра p.

Розв'язання. За формулою Стірлінга $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \quad (n\to\infty)$. Отже, заданий ряд слід порівняти з рядом $b_n = \frac{n^{n+1/2}e^{-n}e^n}{n^{n+p}} = \frac{1}{n^{p-1/2}}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-1/2}}$ збігається при $p-\frac{1}{2} > 1$ і розбігається при $p-\frac{1}{2}\le 1$. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ збігається при $p>\frac{3}{2}$ і розбігається при $p\le\frac{3}{2}$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = \left(2-\sqrt{a}\right)\left(2-\sqrt[3]{a}\right)\cdots\left(2-\sqrt[n]{a}\right)$, $a>0$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2-\sqrt[n+1]{a} = 2 - e^{\frac{\ln a}{n+1}} = 2 - \left(1 + \frac{\ln a}{n+1} + \frac{\ln^2 a}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$= 1 - \frac{\ln a}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{\ln^2 a}{2n^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{\ln a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Згідно ознаки Гаусса, якщо $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, при деякому $\varepsilon>0$ ряд збіжний при $\mu<-1$ і розбіжний при $\mu\ge -1$.

Отже, при $-\ln a < -1$, тобто при $a>e$, ряд збігається, при $-\ln a \ge -1$, тобто при $a\le e$ ряд розбігається.

Індивідуальні завдання

Завдання 3. Використовуючи ознаки збіжності рядів із невід'ємних чисел, дослідити на збіжність ряди:

1.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{3n^2+1}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n+1)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$
2.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{(n+1)!}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln^2 n}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
3.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\arcsin\frac{1}{n^2+1}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(5n+2)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$
4.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n\pi}{2n^2-1}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2\frac{1}{2n+1}}{3n-2}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)\cdot 5^n}{(2n-1)!}$	г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(n+2)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^3$
5.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{(n+1)\sqrt{n}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{1}{n}}{2n+1}$

	в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot 3^n}{(3n+1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin^n\frac{1}{2n+1}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln^2(2n+1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{1}{2}}$
6.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\mathrm{tg}^2\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt{n^3+1}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{n}{2^n}$
	д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n\left(\ln^2 n+1\right)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{3}{2}}$
7.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^4+1}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+5}{n\cdot 2^{n+1}}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\ln^n(n+1)}$
	д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\left(\ln^2 n+1\right)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}$
8.	а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}\cdot\sqrt{n+1}}$	б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^2\sqrt{n^4+1}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$
	д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\left(\ln^2 n+1\right)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\frac{5}{2}}$
9.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n^2+1}}$	б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+3)}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n^2+1}}{2^n}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$

	д) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n!)^2}{4\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n^2+n+1)}$
10.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$	б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\ln n}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\ldots\cdot(5n-3)}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\arcsin^n\frac{1}{n+1}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(n+2)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n^7}$
11.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}{n^2}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^4+1}+\sin^2 n}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$	г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^5}{\ln^n n}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+2)}}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n}$
12.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n^2}$	б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2\sqrt{n+1}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{(2n-1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\,\mathrm{tg}^4\frac{1}{2n}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+2)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n^2}$
13.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}}{n+1}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos\pi n}{n\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 10^n}{(n+1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\,\mathrm{arctg}\frac{n}{n+1}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln(2n-1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n^3}$
14.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}}$

	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{(n^2-1)\ln(3n-1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{n^4}$
15.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n\sqrt{n^4+1}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot 5^n}{(2n-1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(n^2-2)\ln(n+1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{n}$
16.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2-\ln n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)\cdot\cos^2 n}{n\sqrt{n}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^n}{\sqrt{n!}}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{n^2+1}{2n^2+5}\right)^n$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n^3+1)\ln n}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{n^2}$
17.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ln n}{(n^2+2)\sqrt{n+1}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)\right)$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n^2+1)\ln n}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{n^3}$
18.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^5+5}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot 1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5\left(\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)^n$
	д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{\left(2n^2+5\right)\ln^2(3n+1)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{n}$
19.	а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{n+1}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$	б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos^2 n\cdot\ln n}{n\sqrt{n^2+1}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{2^n n!}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^n\cdot\dfrac{n}{2^n}$
	д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)\ln^2(2n+1)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
21.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln\sqrt{n^2+5}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt{n+1}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{1\cdot 8\cdot\ldots\cdot n^3}$	г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{5^n}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{-n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+5)\left(\ln^2 n+1\right)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{n}$
22.	а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3+n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^2+n+1}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3\cdot 3^n}{(5n+1)^n}$
	д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\left(n^2+3\right)\ln(2n+1)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

23.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^5+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{(2n-1)!}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{2n-1}{7n+2}\right)^n$
	д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-1\right)\left(\ln^2 n+1\right)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{n}$
24.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\left(\sqrt[3]{n^2}+1\right)\left(n\sqrt{n}+3\right)}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{n^n}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^{n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{\left(2n^2+3\right)\ln(n+1)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\sqrt{n+1}\right)}$
25.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(2n+1)}{n^2+n+1}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\,\mathrm{tg}\frac{1}{2n}}{\sqrt{n^3+1}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n+1}}{(n+1)!}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n+1}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2}$
	д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\left(\ln^2(n+1)+1\right)}$	е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}+n\right)\cdot n}$
26.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^3}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)$	б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n\ln n}{\sqrt{n^4+3}}$
	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n(2n-1)!}$	г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\left(\frac{2n-1}{2n+5}\right)^n$

	д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(n^2-3\right)\ln(n+1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{3}+n\right)}$
27.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2n+1}{n^2\sqrt{n+1}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ln(n+1)}{\left(n^2+1\right)\sqrt{n+1}}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^{n-1}}{(n+1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{\left(2n^2+1\right)^{n-1}}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\ln^2(n+2)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\sqrt{n}\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{5}+n\right)}$
28.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt[3]{n+1}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{n+1}{2n^2+1}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{\left(3n^2+1\right)^n 2^n}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)\ln^2(n+3)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}+n\right)}$
29.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n^4+5}-n^2\right)$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2n+1)}{\sqrt{n^4+1}+n}$
	в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\sqrt{n^2+2}}{(n+1)!}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^{2n}}{\left(10n^2+1\right)^n}$
	д) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{\left(n^2+1\right)\ln^2 n}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot 2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{n!(n+1)!9^n}$
30.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^2\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3}+1}$	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\ln n$

	в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(5n^2-1\right)^n}{(3n)^{2n-1}}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(3n^2-1\right)\ln^2(n+1)}$	е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ldots\cdot\ln(n+1)}{\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\ln\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\ldots\cdot\ln\left(n+1+\sqrt{2}\right)}$

§3. Знакозмінні числові ряди.

Теоретичні питання

1. Абсолютна та умовна збіжність числового ряду. Зв'язок між цими поняттями.
2. Основні властивості абсолютно збіжних рядів: лінійність, ас0ціативність суми, теорема про перестановку елементів абсолютно збіжного ряду.
3. Ознаки порівняння для абсолютно збіжних рядів.
4. Ознаки Даламбера та Коші абсолютної збіжності.
5. Теорема про множення абсолютно збіжних рядів.
6. Ознака Лейбніца. Наслідок: оцінка залишку знакозмінного ряду.
7. Ознака Діріхле збіжності загального числового ряду.
8. Ознака Абеля збіжності загального числового ряду.
9. Теорема Рімана про перестановку членів умовно збіжного числового ряду.

Розв'язання типових задач

Приклад 1. Дослідити на абсолютну чи умовну збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin 2n}{n\sqrt{n+2}}$	б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$

Розв'язання. а) Розглянемо ряд із модулів членів даного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2n|}{n\sqrt{n+2}}.$$

Маємо очевидну нерівність

$$\frac{|\sin 2n|}{n\sqrt{n+2}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ збігається , то даний рід збігається абсолютно за першою ознакою порівняння.

б) Розглянемо ряд із модулів: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Для $n \ge 2$ справедлива нерівність $\ln n < n$. При $n = 2$ $\ln 2 < 2$, тобто $e^2 > 2$ вірно. Припустимо вірно при $n = k$ $\ln k < k$ і доведемо при $n = k+1$. Маємо $\ln(k+1) = \ln k + \ln\frac{k+1}{k} = \ln k + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Оскільки $e > 2 > 1+\frac{1}{k}$ при $k \ge 2$, то $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < 1$. Отже $\ln(k+1) = \ln k + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < k+1$, і нерівність $\ln n < n$ доведена по індукції для $n \ge 2$. Звідки $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний, тому $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ - розбіжний ряд. Однак $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ і $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}$ при $n \ge 2$. Отже за ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ збігається. Оскільки ряд із модулів розбіжний, то даний ряд збігається умовно.

<u>Приклад 2.</u> Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ слід взяти, щоб обчислити його суму з точністю до $\varepsilon_1 = 0{,}01$.

<u>Розв'язання.</u> Даний ряд знакозмінний , тому для його залишку порядку n справедлива оцінка

$$|r_n| \le |a_{n+1}| = \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Щоб обчислити суму ряду з точністю до $\varepsilon_1 = 0{,}01$, знайдемо мінімальне n таке, що $\frac{1}{(2n+3)^2} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2n+3 > 10$, або $n > 3\frac{1}{2}$, тобто $n = 4$. Отже $S = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{81}\right) \pm 0{,}01$. Виконавши обчислення до трьох знаків після коми та округливши, маємо $S = 0{,}08 \pm 0{,}01$.

<u>Приклад 3.</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Діріхле збіжності, прийнявши $a_n = \sin n$, $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Часткову суму $A_n = \sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n$ обчислимо, помноживши обидві частини рівності на $\sin\dfrac{1}{2}$ і перетворивши добутки синусів на суму. Маємо:

$$A_n \sin\frac{1}{2} = \sin 1 \sin\frac{1}{2} + \sin 2 \sin\frac{1}{2} + \ldots + \sin n \sin\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2} + \cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2} + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Очевидно $\left|A_n \sin\frac{1}{2}\right| \le \left|\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$ Звідки $|A_n| \le \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ для довільного $n \ge 1$. Очевидно далі, що для $n \ge 1$ вірно $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.$ Отже, послідовність $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ монотонно прямує до нуля. Значить даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ збігається за ознакою Діріхле.

Приклад 4. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Розв'язання. Збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$ доведена в попередньому прикладі. Розглянемо ряд із модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$. Маємо $|\sin n| \ge \sin^2 n = \dfrac{1 - \cos 2n}{2}$, звідки $\dfrac{|\sin n|}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}}$. Зауважимо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 - \cos 2n}{2\sqrt{n}}$ розбіжний, оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^{1/2}}$ розбіжний, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ збіжний за ознакою Діріхле (що встановлюється аналогічно прикладу 3). За ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{\sqrt{n}}$ розбіжний,

значить $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ збігається умовно.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

Розв'язання. Скористаємось ознакою Абеля збіжності, прийнявши $a_n = \sqrt[n]{n}$,

$b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Доведемо, що послідовність a_n монотонна і обмежена. Маємо $a_n = e^{\frac{\ln n}{n}}$.

Розглянемо функцію $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Її похідна $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$.

Отже послідовність $a_n = \sqrt[n]{n}$ монотонно спадає при $n \geq 3$ і обмежена зверху, оскільки $\ln n < n$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ збіжний що доведено в прикладі 1. Отже за ознакою Абеля даний ряд збігається.

Індивідуальні завдання.

Завдання 4. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

1.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^4+1} - n^2\right)$
2.	а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{\ln n}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$
3.	а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+1}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$
4.	а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$

5.	а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n2^n}{(n+1)!}$
6.	а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{\ln^n n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
7.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{2n^2}$
8.	а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^2+1}$	б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n^2}$
9.	а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\ln^3 n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$
10.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\frac{n}{3^n}$	б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n^2+2}}$
11.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+3}{n2^n}$	б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln n$
12.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$	б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n\left(\ln^2 n+1\right)}$
13.	а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{(n+1)!}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$
14.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+1}+n}$
15.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n}+1}{n\sqrt{n}+2}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{n+2}{3n+1}\right)^n$

16.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{2n}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3)\ln(n+1)}$
17.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\operatorname{tg}\frac{2n}{n^2+1}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n^2+2}-n}{\sqrt[3]{n+1}}$
18.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln^2(n+1)}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$
19.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3 3^{n-1}}{(n+1)!}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1-\cos\frac{1}{2n}\right)$
20.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n!}{(2n-1)!}$
21.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n+2)\left(\ln^2 n+4\right)}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{3^{n-1}}$
22.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt[3]{2n+1}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin^2\frac{1}{3n}$
23.	а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}3^n}{(n+1)2^{3n}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}}$
24.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+\ln n)}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2+4}+n}$
25.	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n\sin^2\frac{1}{n}$	б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)\ln^2(n+2)}$
26.	а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\ln(2n+1)}{\sqrt{n^4+2}}$	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt[3]{2n+1}}$

27.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n\ln(n+1)}}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$
28.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n-1)!2^n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt[3]{n}\sin^2\frac{1}{3n}$
29.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n}\,\mathrm{arctg}^2\frac{1}{3n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n\ln(n+1)}{n^3+4}$
30.	а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n\ln n}$	б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$

Завдання 5. Обчислити суму ряду з точністю до ε:

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n^2},\quad \varepsilon=10^{-2}.$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{(2n+1)!},\quad \varepsilon=10^{-2}.$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^3},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{5^n},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^3(5n+1)},\quad \varepsilon=10^{-2}.$
6.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(2n)!},\quad \varepsilon=10^{-3}.$

7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^{n}},\quad \varepsilon=10^{-2}.$
8.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^{3}},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
9.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{(2n-1)^{2}(2n+2)},\quad \varepsilon=10^{-2}.$
10.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n}(2n-1)},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
11.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{(2n+3)^{4}},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
12.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{\left(n^{2}+4\right)!3^{n}},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
13.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
14.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n}}{n^{3}(n+1)!},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
15.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{n}}{(n+1)^{n}},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
16.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{4}},\quad \varepsilon=10^{-4}.$
17.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^{3}+1},\quad \varepsilon=10^{-2}.$

18.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\left(n^3+2\right)}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
19.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\left(n^2+2\right)}, \quad \varepsilon=10^{-2}.$
20.	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)}{\left(n^3+1\right)2^n}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
21.	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos\pi n}{n^3+4}, \quad \varepsilon=10^{-2}.$
22.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)n^3}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
23.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n!(2n+1)}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
24.	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)}{(2n+1)^3\,2^n}, \quad \varepsilon=10^{-4}.$
25.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{3^{2n-1}}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
26.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n+4)^2\,n^2}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
27.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\,n!}{(2n)!}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$
28.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^4}, \quad \varepsilon=10^{-3}.$

29.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\left(n^2+1\right)4^n},\quad \varepsilon=10^{-3}.$
30.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n\,(n+1)!},\quad \varepsilon=.$

Завдання 6. Дослідити на збіжність ряди за ознаками Абеля чи Діріхле. Чи збігаються ряди абсолютно?

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n+2}$	**2.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2n+1}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{3n+1}$	**4.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}$	**6.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$	**8.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n^2+1}}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{2n-1}$	**10.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{2n-1}$
11.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2n}{\sqrt{n^2+1}}$	**12.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2n}{\sqrt{n^2+1}}$
13.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\sin n}{n^2-n+1}$	**14.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)\cos n}{n^2-n+1}$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2+n+1}$	**16.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cos 2n}{n^2+n+1}$

17.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$	**18.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n+1}}$
19.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{n+2}}$	**20.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{n+2}}$
21.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt[3]{n+1}}$	**22.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{\sqrt[3]{n+1}}$
23.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(3n-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{2n+1}}$	**24.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(3n-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{2n+1}}$
25.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cos 2n}{n^2-\ln n}$	**26.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2-\ln n}$
27.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\cos 3n}{n^2-\ln n}$	**28.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin 3n}{n^2-\ln n}$
29.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^2+3}\cos n$	**30.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^2+3}\sin n$

§ 4. Нескінченні добутки.

Теоретичні питання.

1. Нескінченні добутки. Означення, зв'язок з рядами.
2. Умови збіжності нескінченних добутків.
3. Представлення функцій $\sin x$ та $\cos x$ у вигляді нескінченного добутку.

Приклад 1. Обчислити значення нескінченного добутка

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

Розв'язання. Як відомо, $n^3-1=(n-1)\left(n^2+n+1\right)$, $n^3+1=(n+1)\left(n^2-n+1\right)$.

Враховуючи те, що $n^2+n+1=(n+1)^2-(n+1)+1$, запишемо n-й частковий добуток у вигляді

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}=$$

$$=\frac{(2-1)\left(3^2-3+1\right)}{(2+1)\left(2^2-2+1\right)}\cdot\frac{(3-1)\left(4^2-4+1\right)}{(3+1)\left(3^2-3+1\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}.$$

Обчислимо границю цієї послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(n^2+n+1\right)}{3\left(n^2+n\right)}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Розв’язання. Обчислимо визначений інтеграл

$$\int_n^{n+1}\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_n^{n+1}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int_n^{n+1}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left(x-arc\,\mathrm{tg}\,x\right)\Big|_n^{n+1}=$$

$$=n+1-n-\operatorname{arctg}(n+1)+\operatorname{arctg}n=1+\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n+1).$$

Оскільки послідовність $\operatorname{arctg}n$ монотонно зростає і $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}n=\frac{\pi}{2}$, то послідовність $\left(\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n+1)\right)$ є нескінченно малою та такою, що не міняє знака. Таким чином, наш нескінченний добуток збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n+1)\right).$$

Це числовий ряд з додатними членами. Порівняємо його з числовим збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Для цього обчислимо границю $A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n\right):\frac{1}{n^2}$. Оскільки $\mathrm{tg}(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n)\sim\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n)$, то

$$A=\lim_{n\to\infty}n^2\,\mathrm{tg}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n\right)=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=$$

$$=A=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2+n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1.$$

Таким чином, за теоремою порівняння ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}(n+1)\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n\right)$$

збігається, а отже збігається і наш добуток.

Зауваження. Збіжність ряду можна довести безпосередньо, знайшовши суму ряду.

Відповідь : збігається.

Індивідуальні завдання

Завдання 7. Обчислити значення нескінченного добутку.

1.	$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$	**2.**	$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
3.	$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$	**4.**	$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n^2+n-2}$
5.	$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1+2^{-2^n}\right)$	**6.**	$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$
7.	$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch}\frac{1}{2^n}$	**8.**	$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$
9.	$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$	**10.**	$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$
11.	$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{6\cdot 2^n}$	**12.**	$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$
13.	$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}$	**14.**	$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n^2+n}\right)$
15.	$\prod_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]$	**16.**	$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}$
17.	$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1+5^{-2^n}\right)$	**18.**	$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$
19.	$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$	**20.**	$\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n(n+1)}}$

Завдання 8. Дослідити на збіжність нескінченний добуток

1.	$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$	**2.**	$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{8}{n}\right)e^{-\frac{8}{n}}$

3.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$	**4.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$
5.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$	**6.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$
7.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$	**8.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$
9.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$	**10.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$
11.	$\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$	**12.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+e^{-8n^2}\right)$
13.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{8}{n}}}{1+\frac{8}{n}}$	**14.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+5}{n^2+n+1}$
15.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2$	**16.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\sin\frac{1}{n}\right)^3$
17.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{2}$	**18.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)$
19.	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+5)-\ln n}$	**20.**	$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)^3$

§ 5. Функціональні ряди. Рівномірна збіжність.

Теоретичні питання.

1. Збіжна послідовність функцій: поточкова та рівномірна. Властивості рівномірно збіжних послідовностей.
2. Функціональні ряди. Поточкова і рівномірна збіжність функціонального ряду.
3. Необхідна умова рівномірної збіжності ряду. Критерій Коші.
4. Достатні ознаки рівномірної збіжності функціонального ряду Веєрштрасса, Харді-Діріхле та Харді-Абеля.
5. Властивості рівномірно збіжних рядів: неперервність суми, почленне інтегрування та диференціювання.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}.$$

Розв’язання. Для будь-якого фіксованого x існує номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $n + x > 0$. Оскільки збіжність ряду не залежить від скінченої кількості доданків, то будемо надалі вважати, що наш ряд – це ряд з додатними членами. Порівняємо його з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

який, як відомо, збігається при $x > 1$. Для цього розглянемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}} : \frac{1}{n^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+x)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \right)^x = e^x \neq 0.$$

Отже наш ряд також збігається при $x > 1$ і розбігається при інших значеннях x.

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$.

Приклад 2. Дослідити на рівномірну збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}.$$

Розв'язання. Оскільки $\left|\operatorname{arctg} t\right| = \operatorname{arctg}|t| \le |t|$, дослідимо на екстремум функцію $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^3}$ при кожному фіксованому n. Для цього знайдемо її похідну

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2n^3 - 4x^2}{\left(x^2 + n^3\right)^2} = \frac{2\left(n^3 - x^2\right)}{\left(x^2 + n^3\right)^2}.$$

Нас цікавлять тільки додатні значення аргументу x, отже знайдемо значення $f(x)$ в точці максимуму $x_{\max} = \sqrt{n^3}$:

$$f\left(\sqrt{n^3}\right) = \frac{2\sqrt{n^3}}{n^3 + n^3} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ збігається, то за ознакою Вейєрштрасса наш ряд збігається для всіх $x \in R$.

Відповідь: рівномірно збігається для всіх $x \in R$.

Приклад 3. Довести рівномірну збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^2 + x^4}}$$

на множині $[\varepsilon; 2\pi - \varepsilon]$, де $\varepsilon \in (0, \pi)$.

Розв'язання. Розглянемо суму

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx.$$

Помножимо та одночасно поділимо її на $2\sin\dfrac{x}{2}$, одержимо

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{2\sin x \sin\frac{x}{2} + 2\sin 2x \sin\frac{x}{2} + \ldots + 2\sin nx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\ldots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Таким чином, $\forall n\in N,\ \forall x\in[\varepsilon;2\pi-\varepsilon],\ \varepsilon\in(0,\pi)$ маємо

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Оскільки $\forall x\ \sqrt[3]{(n+1)^2+x^4}>\sqrt[3]{n^2+x^4}$, то послідовність $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^4}}$ є монотонною. Покажемо, що вона прямує до нуля при $n\to\infty$ рівномірно на множині $[\varepsilon;2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon\in(0,\pi)$. Дійсно $\forall x\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+n^2}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$. Отже $\forall\varepsilon>0$ та $\forall x\ \exists N=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^3}}$ такий, що для $n>N\ \left|\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+x^4}}-0\right|<\varepsilon$.

Оскільки виконуються всі умови теореми Харді-Діріхле, то наш ряд збігається рівномірно на вказаній множині.

Відповідь: доведено.

Індивідуальні завдання

Завдання 9. Знайти область збіжності ряду.

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{1-4x^n}$	**2.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$	**4.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{nx}+n^2}$

5.	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{nx}}{n^n}$	**6.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^5+x^{10}}}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{nx}$	**8.**	$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{x}{2^n}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\sin nx}{3^n-2^n}$	**10.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$
11.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cos nx}{n!}$	**12.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^5+x^2}}$
13.	$\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{nx}$	**14.**	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{2^n+3^n}$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\sin nx}{n!}$	**16.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{nx}{e^{nx}}$
17.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$	**18.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(nx)^n$

Завдання 10. Довести рівномірну збіжність ряду на вказаній множині

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n+x^2},\ x\in[\varepsilon;2\pi-\varepsilon],\ \varepsilon\in(0;\pi).$
2.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x},\ x\in(0;+\infty).$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}\operatorname{arctg}nx,\ x\in R.$
4.	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+x^2}},\ x\in[0;+\infty).$

5.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+x}+x},\ x \in [0;+\infty).$
6.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2\vert x\vert},\ x \in R.$
7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3},\ x \in [0;a],\ a>0.$
8.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx^n},\ x \in [2;+\infty).$
9.	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin\frac{x^2}{n\ln^2 n},\ x \in [-a;a],\ a>0.$
10.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x^2}},\ x \in [\varepsilon;2\pi-\varepsilon],\ \varepsilon \in (0;\pi).$
11.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\ x \in [0;+\infty).$
12.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right),\ x \in [-a;a],\ a>0.$
13.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}},\ x \in R.$
14.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)}{\sqrt[3]{n^4+x^4}},\ x \in R.$
15.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}},\ x \in [0;+\infty).$

16.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}},\ x\in[-10;10].$
17.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n^2x\right)\sin(nx)}{n+x^2},\ x\in R.$
18.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot e^{-n(x-n)^2},\ x\in[0;+\infty).$
19.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx)\operatorname{arctg}(nx),\ x\in[\varepsilon;2\pi-\varepsilon],\ 0<\varepsilon<\pi.$
20.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x\cos nx}{\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2x^4+1\right)}},\ x\in R.$

§ 6. Степеневі ряди. Ряд Тейлора.

Теоретичні питання.

1. Степеневі ряди: означення, область збіжності. Теорема Абеля про абсолютну збіжність. Радіус збіжності. Теорема Коші-Адамара.
2. Рівномірна збіжність степеневого ряду: друга теорема Абеля про неперервність суми, теорема Арцеля. Інтегрування та диференціювання степеневого ряду.
3. Ряди Тейлора і Маклорена. Достатня умова представлення функції рядом Тейлора. Ряд Маклорена функцій $e^x, \sin x, \cos x$. Біноміальний ряд.
4. Теорема про збіжність біноміального ряду. Степеневі ряди з комплексними членами. Показникова функція в комплексній площині. Формула Ейлера.

Приклад 1. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Розв'язання. Радіус збіжності знайдемо за формулою

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{\sqrt{n}}\left(n^2+1\right)^{1/2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то одержуємо, що $R = 1$. Отже, інтервал збіжності – це проміжок $(-1;1)$. Дослідимо на збіжність ряд в точках $x = \pm 1$. Підставимо в ряд $x = 1$, одержимо числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\left(n^2+1\right)^{1/2}}.$$

Порівняємо його з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}.$$

Оскільки для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}$. Застосуємо до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$ інтегральну ознаку Коші. Для цього розглянемо невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} dx = -2\int_{1}^{+\infty} 3^{-\sqrt{x}} d\left(-\sqrt{x}\right) = -2 \lim_{b \to \infty} \left. \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\ln 3} \right|_1^b =$$

$$= -\frac{2}{\ln 3} \lim_{b \to +\infty} \left(3^{-\sqrt{6}} - 3^{-1}\right) = \frac{2}{3 \ln 3}.$$

Отже, інтеграл збігається. А оскільки виконуються всі умови інтегральної ознаки, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n}}$.

Таким чином, за теоремою порівняння збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}\sqrt{n^2+1}}$.

Підставимо в наш степеневий ряд $x = -1$. Одержимо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{b}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Оскільки числовий ряд, складений з абсолютних величин цього ряду, збігається, то за означенням цей ряд збігається абсолютно.

Відповідь: $R = 1$, область збіжності $[-1;1]$ причому на всій області збіжності ряд збігається абсолютно.

Приклад 2. Знайти радіус та область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^n} \right)^n \cdot x^n .$$

Розв'язання. Знайдемо верхню границю $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)=\frac{3}{4}$, оскільки члени останньої послідовності з парними номерами дорівнюють $\frac{3}{4}$, а всі члени з непарними номерами дорівнюють $\frac{1}{6}$. Таким чином, за теоремою Коші-Адамара радіус збіжності $R=\frac{4}{3}$. Підставимо в ряд $x=\frac{4}{3}$, одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Оскільки при $n=2k$: $\left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^n}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n=1$, тобто $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ (ця границя не існує), то за необхідною ознакою збіжності наш числовий ряд розбігається. З цієї ж причини розбігається числовий ряд, який одержується, якщо в степеневий ряд підставити $x=-\frac{4}{3}$.

Відповідь: $R=\frac{4}{3}$, область збіжності $\left(-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Приклад 3. Розвинути функцію xe^{-x^2} в ряд Маклорена, вказати його область збіжності.

Розв'язання. Використавши відомий розклад функції e^t у степеневий ряд $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, одержимо розвинення функції e^{-x^2}, підставивши в останній ряд $t=-x^2$:

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!};\ xe^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}.$$

Оскільки ряд функції e^t збігається для $t\in R$, то очевидно, що наш ряд збігається для $x\in R$.

Відповідь: $xe^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!},\ x\in R$.

Приклад 4. Розвинути функцію $\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$ в ряд Маклорена, вказати область збіжності.

Розв’язання. Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\frac{1}{1+t^2}$. Оскільки вона є сумою геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ та знаменником $q = -t^2$, маємо

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n},\ |t| < 1.$$

Проінтегрувавши почленно цей степеневий ряд, маємо

$$C + \operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Область збіжності при цьому не зміниться. Підставимо в рівність значення $t = 0$. Оскільки $\operatorname{arctg} 0 = 0$, одержимо $C = 0$. Тому

$$\operatorname{arctg} t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1},\ |t| < 1.$$

Поклавши $t = \sqrt{x}$, дістанемо

$$\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{2n+1};$$

$$\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{2n+1}.$$

Враховуючи область визначення даної функції, остання рівність має місце при $x \in [0;1]$.

Відповідь: $\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1},\ x \in [0;1]$.

Зауваження. Підставивши в останню рівність $x = 1$, одержимо суму знакопочередного числового ряду, якщо врахувати, що $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 5. Розвинути в ряд за степенями $(x-2)$ функцію $\ln(1+3x)$, вказати область збіжності.

Розв'язання. Зробимо заміну $x-2=t$. Одержимо

$$\ln(1+3x)=\ln(1+3(t+2))=\ln(7+3t)=\ln 7\left(1+\frac{3}{7}t\right)=\ln 7+\ln\left(1+\frac{3}{7}t\right).$$

Використаємо відоме розвинення $\ln(1+u)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}$, $-1<u\le 1$.

Підставивши в цю рівність $u=\frac{3}{7}t=\frac{3}{7}(x-2)$, одержимо

$$\ln(1+3x)=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{7}\right)^n(x-2)^n.$$

Останній ряд збігається при умові

$$-1<\frac{3}{7}(x-2)\le 1,$$

$$-\frac{7}{3}<x-2\le\frac{7}{3},$$

$$2-\frac{7}{3}<x\le 2+\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $\ln(1+3x)=\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{3}{7}\right)^n(x-2)^n$, $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{13}{3}\right]$.

Зауваження. Підставивши в останню рівність $x=\frac{13}{3}$, одержимо суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2$.

Приклад 6. Обчислити $f^{(18)}(0)$, якщо $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Поклавши $x^2=z$ і використавши біноміальний ряд, дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+z)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}z^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}.$$

Оскільки область збіжності біноміального ряду $|t|<1$, то останній ряд збігається при $|x|<1$. Цей ряд є рядом Маклорена нашої функції, тобто

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Розглянувши член ряду, який містить x^{18}, одержимо

$$(-1)^9\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17}{2^9\cdot9!}=\frac{f^{(18)}(0)}{18!}.$$

Відповідь: $f^{(18)}(0)=-\frac{17!!\cdot18!}{2^9\cdot9!}$.

Приклад 7. Обчислити з точністю $\varepsilon=0,001$ інтеграл

$$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx.$$

Розв’язання. Розклад функції $\frac{\sin x}{x}$ в ряд Маклорена має вигляд

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\right)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\ldots.$$

Останній ряд збігається рівномірно при $x\in R$. Проінтегруємо його почленно на проміжку $[\varepsilon;2]$ $\varepsilon>0$ і перейдемо до границі при $\varepsilon\to0+0$. Дістанемо

$$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to0+0}\left.\left(x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}-\frac{x^7}{7\cdot7!}+\frac{x^9}{9\cdot9!}-\ldots\right)\right|_{\varepsilon}^{2}=$$

$$=2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\frac{2^9}{9\cdot 9!}-\dots .$$

Ми одержали знакопочередний ряд. За теоремою Лейбніца залишок цього ряду задовольняє нерівності

$$|R_n|<|a_{n+1}|.$$

При $n=4$ маємо $|R_5|<\frac{2^9}{9\cdot 9!}<0,001$. Отже, в останній сумі треба взяти чотири перших члени, тобто

$$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx\approx 2-\frac{2^3}{3\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}$$

із заданою точністю $\varepsilon=0,001$.

Відповідь: $\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx\approx 1,605$.

<u>Приклад 8.</u> Обчислити з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ число $\ln 2$.

<u>Розв'язання.</u> Звичайно, можна було б скористатись рядом, наведеним в зауваженні до прикладу 5, але це нераціонально, оскільки прийшлось би розглянути велику кількість членів ряду. Розглянемо інше відоме розвинення

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.$$

Знайдемо x зрівняння $\frac{x+1}{1-x}=2$. Одержимо $x=\frac{1}{3}$.

Отже,

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 3}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\frac{1}{3^7\cdot 7}+\dots\right).$$

Щоб оцінити похибку наближеного обчислення, розглянемо абсолютну величину залишку останнього ряду:

$$|R_n|=2\left|\frac{1}{3^{2n+1}(2n+1)}+\frac{1}{3^{2n+3}(2n+3)}+\dots\right|<\frac{2}{3^{2n+1}(2n+1)}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)=$$

$$=\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{3^{2n+1}(2n+1)}.$$

Щоб останнє число не перебільшувало ε, достатньо взяти чотири члени ряду, тому що $\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{3^9\cdot 9}<10^{-4}$.

Таким чином, із заданою точністю

$$\ln 2\approx\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{405}+\frac{1}{5103}\right).$$

Відповідь: $\ln 2\approx 0,6931$.

<u>Приклад 9.</u> Знайти формально перші чотири члени розвинення в ряд Тейлора розв'язку рівняння

$$y''=x\cos y',$$

що задовольняє початковим умовам $y(1)=2,\ y'(1)=0$.

<u>Розв'язання.</u> Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду

$$y(x)=y(1)+y'(1)(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{y^{IV}(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots$$

Значення $y(1)$ та $y'(1)$ відомі з умови. З рівняння одержимо $y''(1)=1$. Продиференціюємо обидві частини рівняння

$$y'''=\cos y'-x\sin y'\cdot y''.$$

Звідси $y'''(1)=1$.

Продиференціюємо обидві частини останнього рівняння

$$y^{IV}=-y''\sin y'-y''\sin y'-xy'''\sin y'-x(y'')^2\cos y'.$$

Звідси $y^{IV}(1)=-1$.

Залишилось підставити в ряд знайдені числа.

Відповідь: $y(x)=2+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4+\ldots$.

<u>Приклад 10.</u> Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за формулою

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Отже, цей ряд можна почленно інтегрувати або диференціювати на проміжку $(-1;1)$. Але з іншого боку можна двічі почленно продиференціювати відомий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

сума якого дорівнює $\frac{1}{1-x}$, $x \in (-1;1)$. Одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3}\cdot 2.$$

Запишемо наш ряд у вигляді суми двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n + n\right) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}.$$

Оскільки останні два ряди збігаються на тому ж проміжку $(-1;1)$, то сума нашого ряду дорівнює

$$S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Відповідь: $S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1;1)$.

Приклад 11. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} x^n.$$

Розв’язок. Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(n+1)(n+2)}{n(n+1)(2n+3)} = 1.$$

Доцільно коефіцієнти ряду записати у вигляді

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)+n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

Тоді наш ряд можна записати у вигляді суми двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Позначимо через $S_1(x)$ суму останнього ряду, тобто

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Він має ту ж область збіжності, що й даний ряд.

Продиференціюємо його почленно

$$S_1^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},\ |x| < 1.$$

$$S_1(x) - S_1(0) = \int_0^x S_1^{'}(t)\,dt = \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt = -x - \ln(1-x).$$

Оскільки $S_1(0) = 0$, маємо

$$S_1(x) = -x - \ln(1-x).$$

Разом з тим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

Таким чином, сума нашого ряду дорівнює

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(-x - \ln(1-x)\right).$$

Відповідь: $S\left(x\right)=-\ln\left(1-x\right)-1-\dfrac{\ln\left(1-x\right)}{x}$, $\left|x\right|<1$.

Зауваження. Підставивши в даний ряд $x=-1$, одержимо умовно збіжний знакопочередний ряд. Таким чином його сума дорівнює

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n\left(n+1\right)}\left(-1\right)^{n}=-1.$$

Хоча цей факт можна встановити безпосередньо, знайшовши границю часткової суми

$$S_n=-1+\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Індивідуальні завдання

Завдання 11. Знайти радіус та область збіжності ряду

1.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{\ln(n+1)}x^n$	**2.**	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n-1)2^{n-1}x^n$
3.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 10^{n-1}x^n$	**4.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$
5.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x+2)^n}{n(n+1)^2}$	**6.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-3)^n}{n(n+1)}$
7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-5)^n}{n^2(n+1)}$	**8.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^n}{\sqrt{1+n^2}}$
9.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2nx^{2n-1}$	**10.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}(x-3)^n$
11.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}\cdot 8^{n-1}}$	**12.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{1+n}x^n$
13.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}x^{n+1}.$	**14.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{4^n}\cdot x^n.$
15.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}.$	**16.**	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{4^n}\ .$

17.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot x^n.$	**18.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n-1}}{2n \cdot 4^n}$.
19.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$.	**20.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{6n^2-5n+1} \cdot x^{n+1}.$

Завдання 12. Користуючись розкладом в ряд Тейлора знайти

1.	$f^{(11)}(0)$, якщо $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 27}$
2.	$f^{(8)}(0)$, якщо $f(x) = x\cos^2 x$
3.	$f^{(13)}(0)$, якщо $f(x) = (1-x)\sin^2 x$
4.	$f^{(9)}(0)$, якщо $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{27-x}}$
5.	$y^{(5)}$ (0), якщо $y = \frac{x^2}{1+x}$
6.	(0), якщо
7.	(0), якщо y= $x\ln(1+x^2)$
8.	$f^{(8)}(0)$, якщо f(x)= $\frac{1}{1 \quad x \quad x^2}$
9.	$f^{(11)}(0)$, якщо f(x)= $x\sin x$
10.	$f^{(13)}(0)$, якщо f(x)= $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$
11.	$f^{(9)}(0)$, якщо f(x)= $(x-2)\ln(3-x)$
12.	$f^{(8)}(0)$, якщо f(x)= $\sqrt[5]{32-x^5}$
13.	$f^{(11)}(0)$, якщо f(x)= $x\arcsin x$

14.	$f^{(13)}(0)$, якщо f(x)= $(x+4)\ln(2+x)$
15.	$f^{(9)}(0)$, якщо f(x)= $x\ln(1+x^2)$
16.	, якщо f(x)= $(1+\cos x)\sin x$
17.	$f^{(11)}(0)$, якщо f(x)= $\sqrt[5]{1-x^3}$
18.	$f^{(13)}(0)$, якщо f(x)= $\dfrac{1}{(1-2x)(1+4x)}$
19.	$f^{(9)}(0)$, якщо $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$
20.	$f^{(8)}(0)$, якщо $f(x)=\sqrt[3]{16-x^2}$

Завдання 13.

1.	Розкласти функцію $\dfrac{1}{\sqrt{5+x}}$ в ряд Тейлора в околі точки $x=-1$. Вказати радіус і проміжок збіжності.
2.	Розкласти функцію $\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ в ряд Тейлора по степенях $(x-1)$. Вказати проміжок збіжності.
3.	Розкласти в степеневий ряд по степенях x функцію $y=\dfrac{1}{4-x^4}$. Вказати область збіжності.
4.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію $\sqrt[3]{16-x^2}$. Вказати проміжок збіжності.
5.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$. Вказати проміжок збіжності.

6.	Розкласти в степеневий ряд функцію $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ в околі точки $x=2$. Вказати проміжок збіжності.
7.	Розкласти в степеневий ряд по степенях x функцію: $y=\dfrac{x}{9+x^2}$. Вказати область збіжності.
8.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію $y=\dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$. Вказати проміжок збіжності.
9.	Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$ (в околі точки $x=0$). Вказати проміжок збіжності.
10.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію $\dfrac{1}{(1-2x)(1+4x)}$.
11.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію $\sqrt[5]{1-x^3}$. Вказати область збіжності.
12.	Розкласти в степеневий ряд по степенях $x-2$ функцію $(x-2)\ln(3-x)$ Вказати проміжок збіжності.
13.	Розкласти в ряд Маклорена функцію $(1+\cos x)\sin x$. Вказати область збіжності.
14.	Розкласти функцію $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ в ряд по степенях $(x+2)$. Вказати проміжок збіжності.
15.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію . Вказати проміжок збіжності.
16.	Розкласти в ряд Маклорена функцію $\sqrt[5]{32-x^5}$. Вказати проміжок збіжності.
17.	Функцію $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ розкласти в ряд Маклорена, використовуючи рівність:

	. Вказати проміжок збіжності ряду.
18.	Розкласти функцію $\frac{1}{1 \quad x \quad x^2}$ в ряд Маклорена. Вказати область збіжності.
19.	Розкласти функцію $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ в ряд по степенях $x+1$. Вказати проміжок збіжності.
20.	Розкласти в степеневий ряд функцію $x\sin x$ в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$. Вказати радіус збіжності.
21.	Розкласти функцію $(x+4)\ln(2+x)$ в степеневий ряд в околі точки $x_0=-1$. Вказати проміжок збіжності.
22.	Розкласти в степеневий ряд в околі точки $x=0$ функцію $y=\frac{1}{1-5x-6x^2}$. Вказати область збіжності.
23.	Функцію $x\arcsin x$ розкласти в ряд Маклорена, користуючись формулою $\arcsin x=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Вказати проміжок збіжності.

Завдання 14. Знайти перші п’ять членів розвинення в ряди розв’язків рівнянь, що задовольняють початковим умовам:

1.	$y'+2xy'-2y^2-e^x=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$	**2.**	$y''+3y'+2xy^2-xe^x=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$
3.	$y\ \ +2y-xy^2+e^x=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=1/2$	**4.**	
5.	$y'+2y\cos x-e^x y^2-\sin x=0$ $y(0)=1$	**6.**	$y'-\ln(x+y)-xy=0$ $y(0)=0$
7.	$y''+y^2+3xy^2-e^x=0$ $y(0)=2,\ y'(0)=1$	**8.**	$y'=y^2+e^x-2$ $y(0)=2$
9.	$y''+xy^2+y\sin x=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$	**10.**	$y''+y'-\frac{y}{x+1}=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=2$

11.		**12.**	
13.	$y''+x+y=y'e^x$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$	**14.**	$y''+x^2y-2y'+y=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$
15.	$y''=x^2+y^2$ $y(-1)=2,\ y'(-1)=0.5$	**16.**	$y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}$ $y(1)=1,\ y'(1)=1$
17.	$y'''=ye^x-xy'^2$ $y(0)=y'(0)=y'''(0)=1$	**18.**	$y'=2+y^2+x^2-e^x$ $y(0)=0$
19.	$y''+2xy'+\frac{y}{1-x}=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$	**20.**	" ' 2 1 0
21.		**22.**	$y'-y\cos^2 x+y^2\sin x-\ln(x+y)=0$ $y(0)=1$
23.	$y''-2x^2y-y'=0$ $y(0)=1,\ y'(0)=-1$	**24.**	$y'=x^2-y^2$ $y(0)=1$
25.		**26.**	$y''-y'^2-xy=0$ $y(0)=4,\ y'(0)=2$
27.	$y'=3x-2\cos y$ $y(0)=0$	**28.**	$y''=xyy'+1$ $y(0)=0.5,\ y'(0)=1$
29.	$y''=2e^y\sin y'$ $y(\pi)=1,\ y'(\pi)=\frac{\pi}{2}$	**30.**	

Завдання 15.

1.	Обчислити з точністю $\varepsilon=0,001$: $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$

2.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\sqrt[10]{1080}$
3.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
4.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $arctg\,\dfrac{\pi}{10}$
5.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\arcsin\dfrac{1}{3}$
6.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$
7.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\sqrt{1,3}$
8.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
9.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\sqrt[3]{250}$
10.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
11.	Обчислити з точністю $\int\limits_0^4 e^{\frac{1}{x}dx}$
12.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx$
13.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
14.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$

15.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
16.	Обчислити з точністю $\sqrt[3]{19}$
17.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{x} dx$
18.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
19.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^{1} \sqrt[3]{x} \cos x dx$
20.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
21.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^{1} \sqrt[9]{x} e^{x} dx$
22.	Обчислити з точністю $\cos 18^{\circ}$
23.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\sin 15^{\circ}$
24.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\sqrt[3]{7}$
25.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^{0/5} \frac{\sin x}{x^2} dx$
26.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int\limits_0^{0,1} e^{-x^3} dx$

27.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$:
28.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$: $\int_0 \ln(1+x^2)dx$
29.	Обчислити з точністю $\ln 2$
30.	Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,00001$: $e^{1/4}$

Завдання 16. Знайти суму ряду, користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду.

1.	$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot x^n$	**2.**	$\sum_1^\infty \frac{1+(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$
3.	$\sum_1^\infty \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$	**4.**	$\sum_1 \frac{i}{n(n+1)}$
5.		**6.**	$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$
7.	$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n}}{2^{2n}(2n-1)}$	**8.**	$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}$
9.	$\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}x^{n-1}$	**10.**	
11.	$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	**12.**	$\sum_1^\infty \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)(2n+4)}$
13.	$\sum_1^\infty \frac{x^n}{n\cdot 4^n}$	**14.**	$\sum_1^\infty \frac{1}{n(1+2x)^n}$
15.	$\sum_1^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$	**16.**	
17.	$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1} x}{n(n+1)}$	**18.**	$\sum_1^\infty \frac{2^n}{(n+1)x^{n+1}}$

19.	$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)x^{n+2}$	**20.**	$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{(n+1)(n+2)}$
21.	$\sum_{1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}$	**22.**	$\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin^{n}x}{n(n-1)}$
23.	$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln^{2n-1}x}{2n+1}$	**24.**	$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n}$

Завдання 17. Обчислити суму ряду. Визначити область збіжності. Знайти суму числового ряду, якщо він збіжний, який одержується з даного ряду при $x = x_0 + R$, $x = x_0 - R$, де x_0 - середина інтервалу збіжності, R - радіус збіжності.

1.	$\sum_{1}^{\infty}(n^{2}+2n)x^{n-1}$	**2.**	$\sum_{1}^{\infty}(n+1)(x^{2}-1)^{n}$
3.	$\sum_{1}^{\infty}\frac{(n^{2}+n)\cdot x^{n-1}}{2^{n-1}}$	**4.**	$\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{(1+x^{2})^{n+1}}$
5.	$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)x^{n}}{2^{n}}$	**6.**	$\sum_{1}^{\infty}(n+1)x^{n+3}$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{4^{n}}\cdot x^{n}.$	**8.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}(x-1)^{n}.$	**10.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^{n}.$
11.	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2nx^{2n-1}$	**12.**	$\sum_{n=1}^{\infty}2nx^{2n-1}$
13.	$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}10^{n-1}x^{n}$	**14.**	$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)2^{n-1}x^{n}$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{2}+7n\right)x^{n}$	**16.**	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(n+8)x^{n+1}$
17.	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n^{2}+1\right)x^{n}$	**18.**	$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+3)x^{n}$

19.	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n+2}$	**20.**	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(n^2+n\right)x^{n+2}$

Завдання 18. Обчислити $\lim_{x\to 0}\frac{d^n}{dx^n}f\left(x\right)$, якщо

1.	$f\left(x\right)=\frac{\sin x}{x}$	**2.**	$f\left(x\right)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$
3.	$f\left(x\right)=\frac{1-\cos x}{x^2}$	**4.**	$f\left(x\right)=\frac{\sin x^2}{x^2}$
5.	$f\left(x\right)=\frac{e^x-1-x}{x^2}$	**6.**	$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$
7.	$f\left(x\right)=\frac{1-\operatorname{ch} x}{x^2}$	**8.**	$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{sh} x^2}{x^2}$
9.	$f\left(x\right)=\frac{x+\ln\left(1-x\right)}{x^2}$	**10.**	$f\left(x\right)=\frac{x-\ln\left(1+x\right)}{x^2}$
11.	$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{ch} x^2-1}{x^4}$	**12.**	$f\left(x\right)=\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}$
13.	$f\left(x\right)=\frac{\cos 3x-1}{x^2}$	**14.**	$f\left(x\right)=\frac{e^{3x}-1-3x}{x}$
15.	$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{sh} 9x^2}{x}$	**16.**	$f\left(x\right)=\frac{\cos^2 3x-1}{x}$
17.	$f\left(x\right)=\frac{\sqrt{1+2x}-1-x}{x^2}$	**18.**	$f\left(x\right)=\frac{1+x-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$
19.	$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{sh} x-\sin x}{x^3}$	**20.**	$f\left(x\right)=\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$

Завдання 19. Радіус збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ дорівнює R. Знайти радіус збіжності ряду.

1.	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$	**2.**	$\sum_{n=1}^{\infty} n^n a_n x^n$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} n! a_n x^n$	**4.**	$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n x^n$
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n x^n$	**6.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2+n} x^n$
7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^n} x^n$	**8.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$
9.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} x^n$	**10.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3+1\right) a_n x^n$
11.	$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$	**12.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(3^n+10\right) a_n x^n$
13.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(2n)!+5} x^n$	**14.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} a_n x^n$
15.	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} a_n x^n$	**16.**	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 x^n$
17.	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n} x^n$	**18.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n+3^n\right) a_n x^n$
19.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n+3^n} x^n$	**20.**	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3+2\right) a_n x^n$

Завдання 20. Знайти радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, якщо

1.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n\sqrt{n}\right\|=2$	**2.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n 2^n\right\|=3$
3.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n 3^{\sqrt{n}}\right\|=4$	**4.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n n!\right\|=5$
5.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n n^2\right\|=6$	**6.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{n!}\right\|=1$
7.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n\left(n^3+2n\right)\right\|=3$	**8.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{\sqrt{n^3+2n}}\right\|=7$
9.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n n^n\right\|=6$	**10.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{n^n}\right\|=4$
11.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n 2^{\sqrt{n}}\right\|=3$	**12.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|a_n n^{\sqrt{n}}\right\|=5$
13.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{4^{\sqrt{n}}}\right\|=6$	**14.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{n^{\sqrt{n}}}\right\|=1$
15.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{2^n}{n}a_n\right\|=3$	**16.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{n^2}{3^n}a_n\right\|=5$
17.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{2^n}{3^n+2^n}a_n\right\|=6$	**18.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\left(2^n+3^n\right)a_n\right\|=4$
19.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|2^{n^2}a_n\right\|=3$	**20.**	$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{3^{n^2}}\right\|=1$

Завдання 21. Нехай ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ має радіус збіжності $R > 0$. Розвинути в степеневий ряд функцію

1.	$\int_0^{2x} f(t)dt$	**2.**	$\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} f(t)dt$
3.	$\int_0^{x} f\left(t^2\right)dt$	**4.**	$(1+x)f(x)$
5.	$\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$	**6.**	$\frac{f(x)}{1-x}$
7.	$f'''(x)$	**8.**	$\int_0^{x} \frac{f(t)}{t}dt$, $a_0 = 0$
9.	$\frac{1}{2}\left(f(-x)-f(x)\right)$	**10.**	$\int_0^{-x} f(2t)dt$
11.	$\frac{f(x)}{1+2x}$	**12.**	$\int_{3x}^{0} f(t)dt$
13.	$(1-x)f(x)$	**14.**	$\int_{-x}^{x} f\left(t^2\right)dt$
15.	$x \cdot f'\left(x^2\right)$	**16.**	$\int_0^{x} t \cdot f(t)dt$
17.	$(1+x)f'(x)$	**18.**	$\frac{f'(x)}{1-x}$
19.	$\int_{-x}^{0} \frac{f(t)}{t}dt$, $a_0 = 0$	**20.**	$\int_{-x}^{x} t \cdot f'(t)dt$

§ 7. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є.

Теоретичні питання

1. Означення лінійного евклідового простору. Приклад: простір $R[a,b]$ з означеною операцією скалярного добутку функцій. Означення евклідового нормованого простору. Норма функції в $R[a,b]$. Ортонормовані системи елементів в евклідовому нормованому просторі, означення ряду Фур'є елемента простору за цією системою. Приклад ряду Фур'є в $R[a,b]$.

2 . Приклади ортонормованих систем функцій (тригонометричні системи, системи комплекснозначних функцій). Знаходження норми цих функцій. Приклади рядів Фур'є кусково-неперервних функцій на $[-\pi,\pi]$ (тригонометричний ряд, комплексна форма ряду Фур'є). Теорема про зв'язок між дійсною і комплексною формами ряду Фур'є.

3 . Приклади рядів Фур'є кусково-неперервних функцій (на і на $[0,l]$ $(l \neq \pi)$). Частинні випадки. Означення многочлена степеня n за ортонормованою системою функцій. Задача про найкраще середньоквадратичне відхилення.

4 . Мінімальна властивість коефіцієнтів Фур'є. Нерівність Бесселя. Замкнені системи функцій. Рівність Парсеваля. Збіжність у середньому квадратичному в $R[a,b]$. Повна система функцій. Лема Рімана.

5 . Інтегральне представлення часткової суми ряду Фур'є. Збіжність ряду Фур'є в точці. Ознаки Діні і Ліпшіца, наслідки з них.

6 . Рівномірна збіжність тригонометричного ряду Фур'є. Диференціювання та інтегрування ряду Фур'є.

7 . Інтегральна формула Фур'є, інтеграл Фур'є. Збіжність інтеграла Фур'є в точці (ознаки Діні та Ліпшіца).

<u>Приклад 1.</u> Для функції $f(x)=\left\{\dfrac{x}{2\pi}\right\}$

a) обгрунтувати збіжність її ряду Фур'є;

b) намалювати графік;

c) обчислити коефіцієнти ряду Фур'є;

d) записати ряд Фур'є у тригонометричній формі;

e) записати ряд Фур'є у комплексній формі;

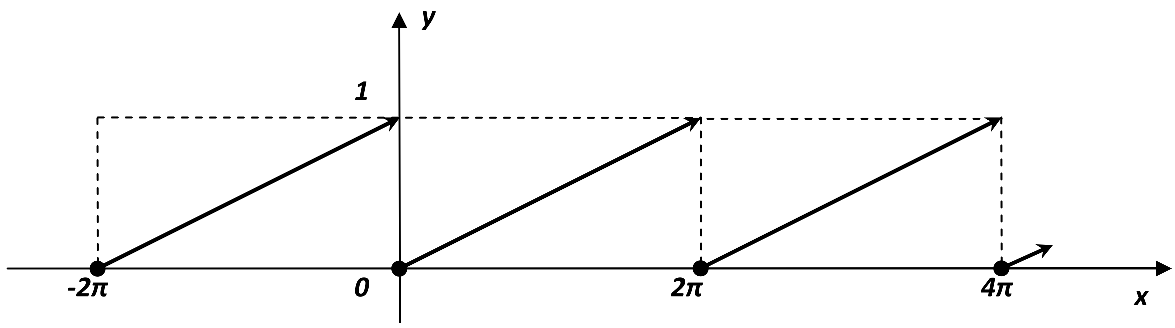
f) записати рівність Парсеваля;

g) знайти суми числових рядів, підставивши в ряд Фур'є значення $x=\frac{1}{4}T$, $x=\frac{1}{2}T$, $x=T$, де T - період;

h) намалювати графік суми $S(x)$ ряду Фур'є.

<u>Розв'язання.</u> a) Функція $f(x)$ має період 2π. На проміжку $[0;2\pi]$ вона є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою. Отже за теоремою Діріхле її ряд Фур'є збігається у кожній точці.

b) Графік функції $f(x)=\left\{\dfrac{x}{2\pi}\right\}$ має вигляд



c) Коефіцієнти Фур'є обчислюємо аз формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x}{2\pi}dx=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi^2}\cdot 4\pi^2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x}{2\pi}\cos nxdx=\left|\begin{matrix} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos nxdx;\ v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}-\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right)=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x}{2\pi}\sin nxdx=\left|\begin{matrix} u=x;\ du=dx \\ dv=\sin nxdx;\ v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}+\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx\right)=-\frac{1}{\pi n}.$$

d) Ряд Фур'є у тригонометричній формі має вигляд

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

e) Ряд Фур'є в комплексній формі має вигляд

$$S(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{nxi},$$

де $c_0=\frac{1}{2}a_0=\frac{1}{2}$, $c_k=\frac{1}{2}(a_k-b_k i)=\frac{i}{2\pi n}$, $c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+b_k i)=-\frac{i}{2\pi n}$, $k\in\mathbb{N}$.

f) Знайдемо інтеграл

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{x^2}{(2\pi)^2}\,dx=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{2\pi}{3}.$$

Отже, рівність Парсеваля має вигляд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2 n^2}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3},$$

звідки одержуємо суму числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

g) Підставимо в наш ряд Фур'є значення $x=\frac{\pi}{2}$. Оскільки $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}$, маємо

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Послідовність $\sin\frac{\pi n}{2}$ має вигляд

$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0\,, & \text{при } n=2k,\\ (-1)^k\,, & \text{при } n=2k+1.\end{cases}$$

Звідси одержуємо

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Таким чином, одержуємо суму числового ряду

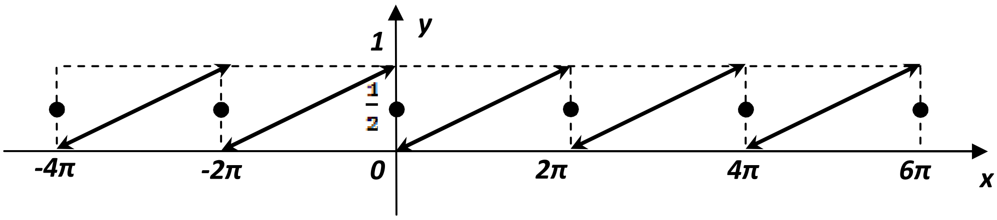
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Підставимо в наш ряд Фур'є значення $x = \pi$. Оскільки $S(\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}$, маємо

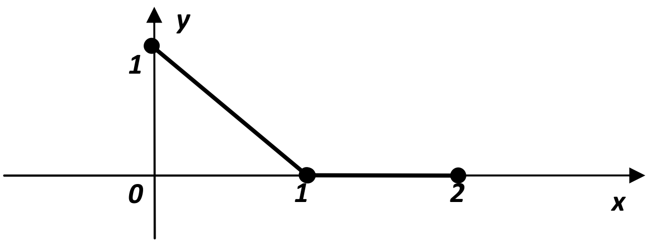
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \pi n \text{, тобто } 0 = 0.$$

Підставимо в наш ряд Фур'є значення $x = 2\pi$ і знову одержимо тотожність $0 = 0$.

h) Графік суми ряду Фур'є $S(x)$ має вигляд

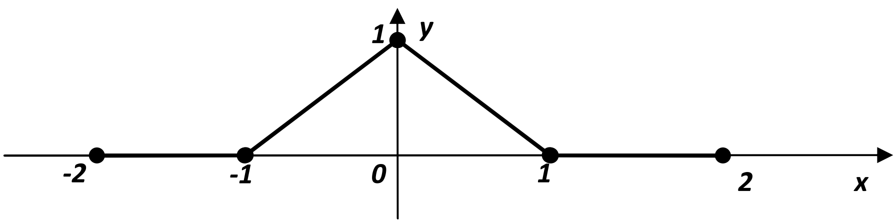


<u>Приклад 2.</u> Функцію $f(x)$, графік якої зображено на малюнку



розвинути в ряд Фур'є: а) за косинусами; б) за синусами; в) з періодом $T = 2$. В кожному випадку обгрунтувати збіжність ряду та побудувати графік суми ряду Фур'є.

<u>Розв'язання.</u> а) Продовжимо $f(x)$ на проміжок $(-2;0)$ парним чином



Розвинемо цю функцію в ряд Фур'є з періодом $T = 4$. Оскільки вона є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою, то за теоремою Діріхле її ряд Фур'є збігається у кожній точці. Обчислимо її коефіцієнти Фур'є. За умовою $b_n = 0$, $n \in N$.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{2}{2}\int_0^1(1-x)\,dx+\frac{2}{2}\int_1^2 0\,dx=\frac{1}{2};$$

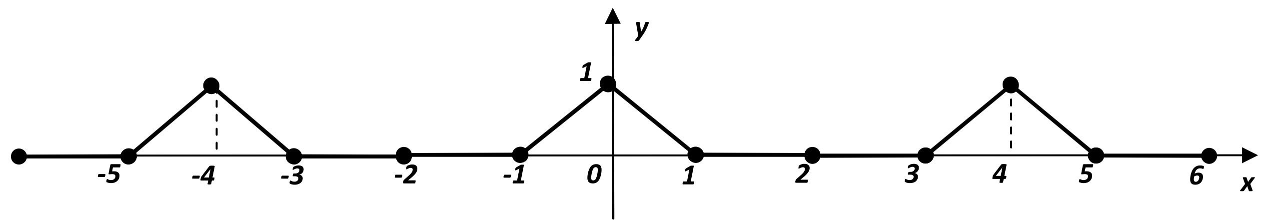
$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\int_0^1(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{c} u=1-x;\ du=-dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx;\ v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(1-x)\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1+\frac{2}{\pi n}\int_0^1\sin\frac{\pi nx}{2}dx=-\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1=\frac{4}{\pi^2n^2}\left(1-\cos\frac{\pi n}{2}\right).$$

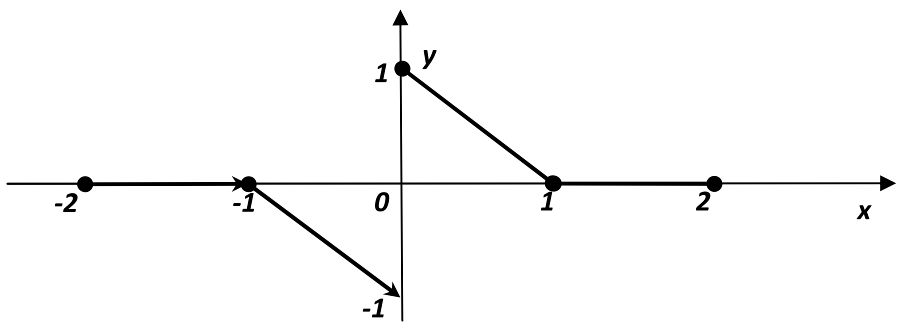
Ряд Фур'є має вигляд

$$S(x)=\frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

Графік суми ряду Фур'є має вигляд



б) Продовжимо графік $f(x)$ непарним чином на проміжок $(-2;0)$



Розвинемо цю функцію в ряд Фур'є з періодом $T=4$. Оскільки вона є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою, то за теоремою Діріхле її ряд Фур'є збігається у кожній точці. Обчислимо її коефіцієнти Фур'є. За умовою $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$.

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^1 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left| \begin{matrix} u = 1-x;\ du = -dx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx;\ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix} \right| =$$

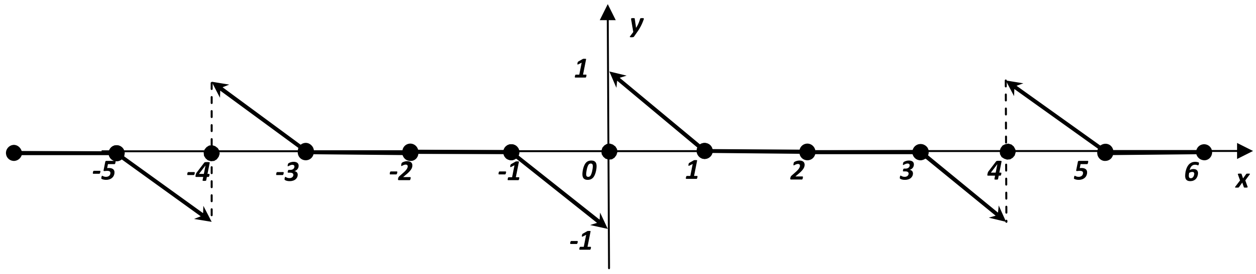
$$= -\frac{2}{\pi n}(1-x)\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{2}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi n} - \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Ряд Фур'є має вигляд

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

Графік суми ряду Фур'є має вигляд



в) Оскільки дана функція є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою, то за теоремою Діріхле її ряд Фур'є збігається у кожній точці. Обчислимо її коефіцієнти Фур'є.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^1 (1-x)\cos n\pi x dx = \frac{1}{\pi n}(1-x)\sin\pi nx\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \sin\pi nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2 n^2}\cos\pi nx\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right);$$

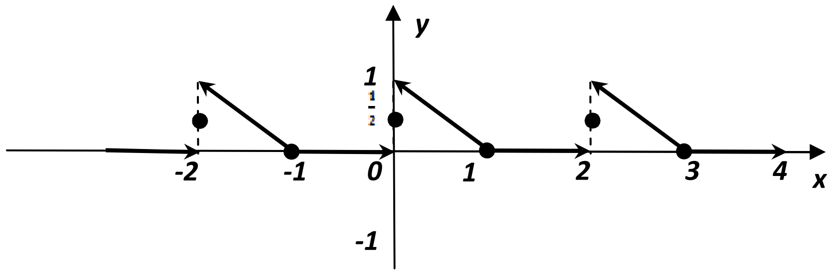
$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^1 (1-x)\sin n\pi x dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(1-x)\cos\pi nx\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos\pi nx dx = \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{\pi^2 n^2}\sin\pi nx\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi n}.$$

Ряд Фур’є має вигляд

$$S(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi^2n^2}\cos\pi nx+\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\,.$$

Графік ряду Фур’є має вигляд



Приклад 3. Представити у вигляді інтегралу Фур’є функцію

$$f(x)=\begin{cases}5,\ x\in(0;2),\\0;\ x\notin(0;2).\end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ абсолютно інтегрована на R, є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою, то її можна представити інтегралом Фур’є

$$f^*(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega x}dx,$$

де $F(\omega)=\int_0^2 5e^{-i\omega t}dt=\frac{5}{i\omega}\left(1-e^{-2i\omega}\right).$

Відповідь: $f^*(x)=\frac{5}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}\left(1-e^{-2i\omega}\right)e^{i\omega x}dx$, де

$f^*(\omega)=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right).$

Приклад 4. Представити у вигляді інтеграла Фур’є функцію

$$f(x)=\begin{cases}\sin 3x,\ \text{при } |x|\le\frac{\pi}{3},\\[2mm] 0,\ \text{при } |x|>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ абсолютно інтегрована на R, є кусково-монотонною, кусково-неперервною та обмеженою, то її можна представити інтегралом Фур’є

$$f(x)=\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x d\omega,$$

де $b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt$, враховуючи парність функції $f(x)$.

Таким чином,

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\sin\omega x dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos(\omega-3)x-\cos(\omega+3)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(\omega-3)x}{\omega-3}-\frac{\sin(\omega+3)x}{\omega+3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega-3)\frac{\pi}{3}}{\omega-3}-\frac{\sin(\omega+3)\frac{\pi}{3}}{\omega+3}\right).$$

Отже,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(\omega-3)\frac{\pi}{3}}{\omega-3}-\frac{\sin(\omega+3)\frac{\pi}{3}}{\omega+3}\right)\sin\omega x d\omega.$$

Враховуючи, що $\sin(\omega-3)\frac{\pi}{3}=\sin(\omega+3)\frac{\pi}{3}=-\sin\frac{\omega\pi}{3}$, маємо

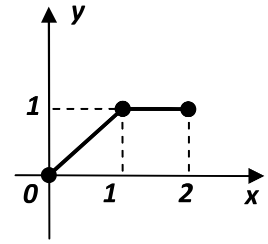
$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\frac{\omega\pi}{3}\left(\frac{1}{\omega+3}-\frac{1}{\omega-3}\right)\sin\omega x dx.$$

Відповідь: $f(x)=-\frac{6}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega^2-9}\sin\frac{\omega\pi}{3}\sin\omega x dx$.

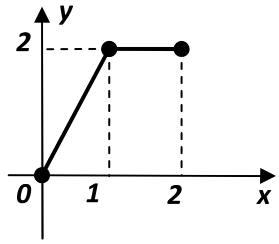
Індивідуальні завдання

Завдання 22. Функція $f(x)$, що задана графічно, розвинути в ряд Фур’є: а) за синусами; б) за косинусами; в) з періодом $T=2$.

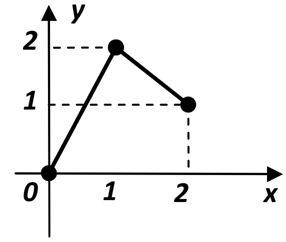
1.



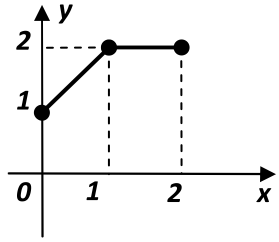
2.



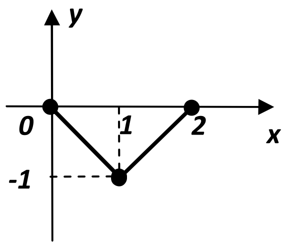
3.



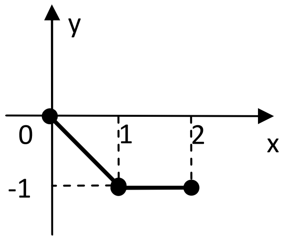
4.



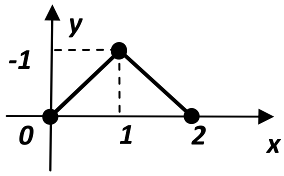
5.



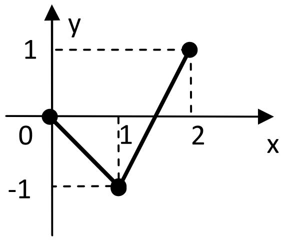
6.



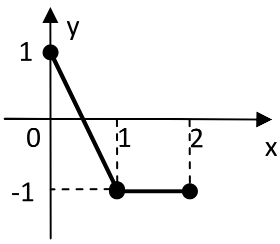
7.



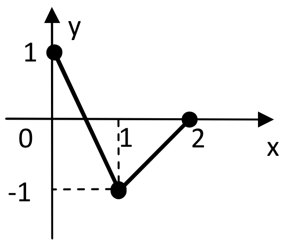
8.



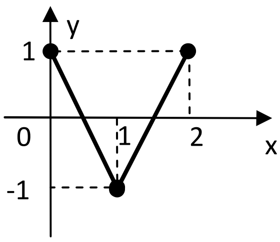
9.



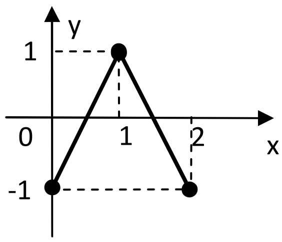
10.



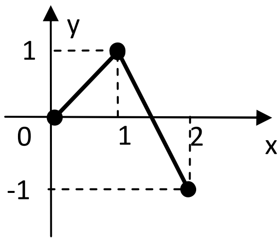
11.



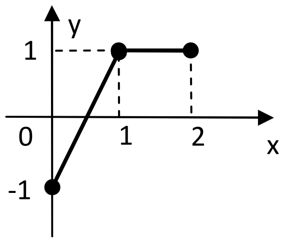
12.



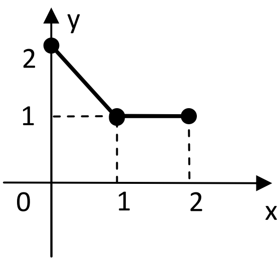
13.



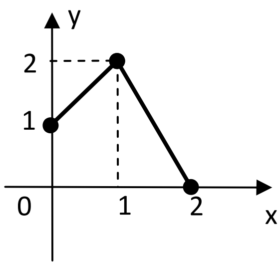
14.



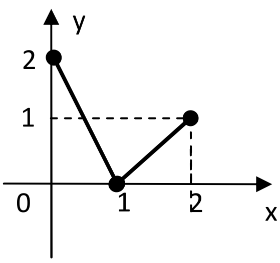
15.



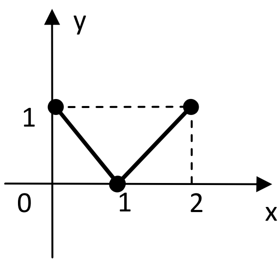
16.



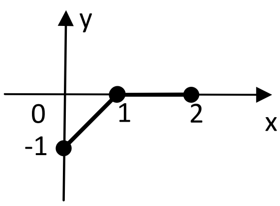
17.



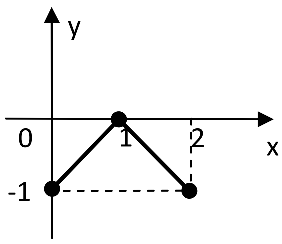
18.



19.



20.



Завдання 23.

1.	Розкласти з періодом Т=2 в ряд Фур`є функцію $y = \lvert x\rvert, x \in [-1;1]$
2.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $y = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ по косинусам
3.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $y = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ по косинусам
4.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $y = \cos\frac{x}{2}, \quad x \in [0;\pi]$ по синусам
5.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $y = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ по синусам
6.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $y = \sin x, \quad x \in [0;\pi]$ по косинусам
7.	Розкласти з періодом Т=6 в ряд Фур`є функцію $f(x) = 2x - 3$ *на* $(-3;3)$
8.	Розкласти за синусами в ряд Фур`є функцію

	$f(x) = \pi - x, x \in (0; 2\pi)$
9.	Розкласти за косинусами в ряд Фур`є функцію $f(t) = \begin{cases} 0, & \pi < t \leq 2\pi \\ 1, & 2\pi < t < 3\pi \end{cases}$
10.	Розкласти в ряд Фур`є, що складається лише з косинусів, функцію $f(x) = \cos x, x \in (0; \frac{\pi}{2})$
11.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $f(x) = \lvert\cos x\rvert$
12.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $f(t) = \lvert\sin t\rvert$
13.	Розкласти за косинусами в ряд Фур`є функцію $f(x) = x, \quad 0 < x \leq \pi$
14.	Розкласти за синусами в ряд Фур`є функцію $f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in (0; 2\pi)$
15.	Розкласти в ряд Фур`є по косинусам функцію $f(x) = x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
16.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
17.	Розкласти в ряд Фур`є по косинусам функцію $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$
18.	Розкласти в ряд Фур`є по косинусам функцію

	$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ 0, & \dfrac{l}{2} < x < l \end{cases}$
19.	Розкласти з періодом Т=10 в ряд Фур\`є функцію $f(x) = 5x - 1, \quad x \in (-5;5)$
20.	Розкласти в ряд Фур\`є, що складається лише з синусів, функцію $f(x) = 1, \quad x \in (0;l)$
21.	Розкласти з періодом Т=3 в ряд Фур\`є функцію $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1] \\ 1, & x \in (1;2) \\ 3 - x, & x \in [2;3] \end{cases}$
22.	Розкласти в ряд Фур\`є функцію $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$
23.	Розкласти в ряд Фур\`є функцію $f(x) = x^2 \quad -\pi \le x \le \pi$
24.	Розкласти в ряд Фур\`є по синусам функцію $f(x) = x^2, \quad x \in (0;\pi)$
25.	Розкласти в ряд Фур\`є функцію $f(t) = t - 6 \text{ при } 3 < t < 9$
26.	Розкласти в ряд Фур\`є по синусам функцію $f(x) = \dfrac{\pi - 2x}{4}, \quad x \in (0;\pi)$
27.	Розкласти в ряд Фур\`є по синусам функцію $f(x) = ch\, x, \quad x \in (0;\pi)$

28.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $f(x) = \dfrac{x^2}{4} \qquad -\pi \le x \le \pi$
29.	Розкласти з періодом T=10 в ряд Фур`є функцію $f(x) = 5x - 1 \;, \qquad x \in (-5; 5)$
30.	Розкласти в ряд Фур`є функцію $f(x) = \lvert x \rvert - 5 \;\; на \;\; (-2; 2)$

Завдання 24.

1.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x < \pi \\ 2\pi - x, \pi < x < 2\pi \end{cases}$
2.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}, x \in (0; \pi)$
3.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами $f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1 \\ 2 - x, 1 < x < 2 \end{cases}$
4.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x < 1 \\ 1, 1 < x < 2 \end{cases}$
5.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами
6.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами $f(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, 1 \le x \le 2 \end{cases}$

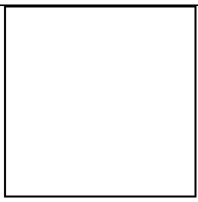
7.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за косинусами
8.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за косинусами
9.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\{x\}$
10.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=sign(\sin x)$
11.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=sign(\cos x)$
12.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=sign(tgx)$
13.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=sign(ctgx)$
14.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\left\{\frac{x}{2}\right\}$
15.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\{4x\}$
16.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за синусами $f(x)=\cos x, x\in(0;\pi)$
17.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за косинусами $f(x)=\sin x, x\in(0;\pi)$
18.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $\| \ \|, \quad (\ 1;1$

19.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\lvert\cos 2x\rvert$
20.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\left\lvert\cos\frac{x}{2}\right\rvert$
21.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\lvert\cos x\rvert$
22.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\lvert\sin x\rvert$
23.	Розвинути функцію в ряд Фур'є $f(x)=\lvert\sin 2x\rvert$
24.	Розвинути функцію в ряд Фур'є
25.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за періодом Т=6 $f(x)=x-6, 3<x<9$
26.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за періодом Т=3 $f(x)=\begin{cases} x, x\in[0;1] \\ 1, x\in[1;2] \\ 3-x, x\in[2;3] \end{cases}$
27.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за періодом Т=2 $f(x)=\begin{cases} 1, 0<x<1 \\ 2-x, 1<x<2 \end{cases}$
28.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за періодом Т=2 $f(x)=\begin{cases} x, 0<x<1 \\ 1, 1<x<2 \end{cases}$

29.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за періодом Т=2 π $f(x)=\pi-x, x\in(0;2\pi)$
30.	Розвинути функцію в ряд Фур'є за періодом Т=2 $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1\le x\le 2 \end{cases}$

Завдання 25. Представити функцію $f\left(x\right)$ інтегралом Фур'є.

1.	$f(x)=\begin{cases} 3, x\in[0;3] \\ 0, x\notin[0;3] \end{cases}$	**2.**	$f(t)=e^{-\lvert t\rvert}$
3.	$f(x)=\begin{cases} 2, x\in[2;4] \\ 0, x\notin[2;4] \end{cases}$	**4.**	
5.		**6.**	$f(x)=\begin{cases} 5, x\in[0;1] \\ 0, x\notin[0;1] \end{cases}$
7.	$f(x)=\begin{cases} -3, x\in[-3;0] \\ 0, x\notin[-3;0] \end{cases}$	**8.**	$f(x)=\begin{cases} 5, x\in(-1;0) \\ 0, x\notin(-1;0) \end{cases}$
9.	$f(t)=e^{-2\lvert t\rvert}$	**10.**	$f(x)=\begin{cases} -5, x\in(1;2) \\ 0, x\notin(1;2) \end{cases}$
11.	$f(x)=\begin{cases} 7, x\in[-2;0] \\ 0, x\notin[-2;0] \end{cases}$	**12.**	$f(x)=\begin{cases} 2, x\in[-1;1] \\ 0, x\notin[-1;1] \end{cases}$
13.		**14.**	
15.	$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\triangleright 0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}$	**16.**	$f(x)=\begin{cases} 5, x\in[0;2] \\ 0, x\notin[0;2] \end{cases}$
17.	$f(x)=\begin{cases} 2, x\in[1;3] \\ 0, x\notin[1;3] \end{cases}$	**18.**	$f(x)=\begin{cases} 5, x\in(0;5) \\ 0, x\notin(0;5) \end{cases}$

19.	$f(x)=\begin{cases}\sin x, x\in(0;\pi)\\ 0, x\notin(0;\pi)\end{cases}$	**20.**	$f(x)=\begin{cases}7, x\in(0;1)\\ 0, x\notin(0;1)\end{cases}$
21.	$f(x)=\begin{cases}2, x\in[-2;0]\\ 0, x\notin[-2;0]\end{cases}$	**22.**	$f(x)=\begin{cases}-1, x\in(1;2)\\ 0, x\notin(1;2)\end{cases}$
23.	$f(x)=\begin{cases}7, x\in(1;3)\\ 0, x\notin(1;3)\end{cases}$	**24.**	$f(x)=\begin{cases}-4, x\in(-3;0)\\ 0, x\notin(-3;0)\end{cases}$
25.	$f(x)=\begin{cases}5, x\in[2;5]\\ 0, x\notin[2;5]\end{cases}$	**26.**	$f(x)=\begin{cases}-2, x\in(0;2)\\ 0, x\notin(0;2)\end{cases}$
27.	$f(x)=\begin{cases}-6, x\in(0;3)\\ 0, x\notin(0;3)\end{cases}$	**28.**	$f(x)=\begin{cases}4, x\in[1;4]\\ 0, x\notin[1;4]\end{cases}$
29.	$f(x)=\begin{cases}1, x\in[-2;0]\\ 0, x\notin[-2;0]\end{cases}$	**30.**	
31.			

Завдання 26. Представити функцію інтегралом Фур’є.

1.	$f(x)=\begin{cases}0, t<-2,\\ 1, -2\le t\le -1,\\ 0, t>-1.\end{cases}$	**2.**	$f(t)=\begin{cases}\cos t, -\pi\le t\le\pi,\\ 0, \lvert t\rvert>\pi.\end{cases}$
3.	$f(t)=\begin{cases}0, t\le 0,\\ \sin t, 0<t\le\pi,\\ 0, t\ge\pi.\end{cases}$	**4.**	$f(t)=\begin{cases}1+t, -1<t<0,\\ 1-t, 0\le t<1,\\ 0, \lvert t\rvert\ge 1.\end{cases}$
5.	$f(t)=\begin{cases}\cos t, 0\le t\le\pi,\\ 0, t<0, t>\pi.\end{cases}$	**6.**	$f(x)=\begin{cases}0, t<-1,\\ 1, -1\le t\le 0,\\ 0, t>0.\end{cases}$
7.	$f(t)=\begin{cases}2, 0<t<3,\\ 1, t=3,\\ 0, t>3.\end{cases}$	**8.**	

9.	$f(x)=\begin{cases}0,t<0,\\1,0\le t\le 1,\\0,t>1.\end{cases}$	**10.**	$f(t)=\begin{cases}t+1,-1<t\le 0.5,\\1,\lvert t\rvert<0.5,\\1-t,0.5\le t<1,\\0,\lvert t\rvert\ge 1.\end{cases}$
11.	$f(t)=\begin{cases}0,t<0,\\\pi t,0\le t\le 1,\\0,t>1.\end{cases}$	**12.**	
13.		**14.**	$f(t)=\begin{cases}2\sin 3t,\lvert t\rvert\le 2\pi,\\0,\lvert t\rvert=2\pi\end{cases}.$
15.	$f(t)=\begin{cases}1,1\le x\le 2,\\0,t<1,t>2\end{cases}.$	**16.**	$f(t)=e^{-3\lvert t\rvert}.$
17.	$(\ )=\begin{cases}\sin\ ,0\le\ \le\ ,\\0,\ >\pi.\end{cases}$	**18.**	
19.	$f(t)=\begin{cases}1,\lvert t\rvert\le 1,\\0,\lvert t\rvert>1,\end{cases}$	**20.**	$f(t)=\begin{cases}3t,0\le t\le 1,\\0,t>1,\end{cases}$