Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний,
О.А. Тимошенко

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ

ПРАКТИКУМ

Київ — 2014

Математичні моделі в економічних задачах. Практикум (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 57 с.

Навчальне видання

Математичні моделі в економічних задачах

Практикум

для студентів І курсу економічних спеціальностей

Укладачі: *Буценко Юрій Павлович*, канд. фіз-мат. наук, доц.
Диховичний Олександр Олександрович, канд. фіз-мат. наук, доц.
Тимошенко Олена Анатоліївна, асистент .

Відповідальний редактор *О. І. Клесов*, д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензенти: *С. В. Єфіменко*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В. Г. Шпортюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

У практикумі представлено набір задач економічного змісту та основні математичні моделі, що застосовуються для розв'язання цих задач. Застосування відповідних моделей проілюстровано достатньою кількістю докладно розв'язаних прикладів. Матеріал доповнено завданнями для самостійної роботи. Призначено для студентів спеціальностей: 6.030601 «Менеджмент»

Вступ

Професійний рівень сучасного економіста-управлінця істотно залежить від рівня володіння математичним апаратом та уміння використовувати його в аналізі складних економічних процесів і прийняття рішень. Сучасна економіка ввібрала в себе велике число математичних дисциплін. Сьогодні на перший план виходить математична модель як інструмент дослідження і прогнозу економічних явищ. Використання математичного моделювання в економіці та управлінні дозволяє поглибити кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації.

Опанування методик з побудови економічних моделей, уміння використовувати відповідний математичний апарат у вирішенні економічних та управлінських задач допоможе студентам – майбутнім економістам та менеджерам у застосуванні моделювання під час подальшого вивчення професійно – орієнтованих дисциплін,а також під час курсового та дипломного проектування.

Практикум охоплює матеріал курсу «Спеціальні розділи математики», який викладається студентам першого курсу ФММ на спеціальності «Менеджмент». Практикум містить економічні задачі, в яких використовуються математичні моделі у повній відповідності до всіх розділів курсу «Вища та прикладна математика» студенів тієї ж спеціальності. Для кожної економічної задачі будується математична модель та наводиться її розвязання.

Також по всіх темах запропоновано задачі для індивідуальних завдань, які розбиті на 30 варіантів.

Зміст

1. Методи та моделі лінійної та векторної алгебри

1.1 Модель багатогалузевої економіки Леонтьєва

Розглянемо економічну систему, яка складається з n пов'язаних між собою галузей виробництва. Продукція кожної галузі частково іде на зовнішнє споживання (*кінцевий продукт*), а частково використовується в якості сировини в інших галузях. Цю частину продукції називають *виробничими потребами*.

Позначимо через X_i *обсяг валової продукції* $i-$*ої* галузі за запланований період, а через Y_i *обсяг кінцевої продукції* $i-$*ої* галузі, призначеної для невиробничого споживання $i=(1,2,...,n)$, $x_{ij}-$ частина продукції $i-$*ої* галузі, що споживається $j-$*ою* для забезпечення випуску її продукції в розмірі X_j.

Величини $a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j}$, $(i,j=1,2,...,n)$ називаються коефіцієнтами прямих витрат.

Ці коефіцієнти утворюють квадратну *матрицю коефіцієнтів прямих витрат.*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають матрицею технологічних коефіцієнтів (*технологічною матрицею*)

Матриця називається *продуктивною*, якщо усі елементи додатні, та сума елементів в кожному стовбці менша за 1.

Матриця $A=\left\|a_{ij}\right\|-$ містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків та про технологію виробництва даної економіко-виробничої системи.

Рівняння вигляду

$$\begin{cases} X_1 = x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}+Y_1, \\ X_2 = x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}+Y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_i = x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}+Y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = x_{n1}+x_{n2}+\ldots+x_{nn}+Y_n. \end{cases} \qquad (1)$$

називають *співвідношенням балансу.*

З рівності $x_{ij}=a_{ij}X_j$ випливає, що (1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

або

$$X = AX + Y,$$

де $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$ – вектор-план, $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$ – вектор кінцевої продукції.

Тоді балансові співвідношення можна записати у вигляді

$$(E - A)X = Y,$$

де E – одинична матриця.

Основною задачею міжгалузевого балансу є знаходження вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих затрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y. Тому, якщо матриця $(E - A)$ не вироджена, то

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Матриця

$$S = (E - A)^{-1}$$

називається матрицею *повних затрат.*

Приклад 1. У наступній таблиці наведено балансовий звіт для двогалузевої моделі економіки.

Галузь	Споживання продукції		Валовий випуск
	Енергетика	Машинобуд	
Енергетика	100	160	500
Машинобудування	275	40	400

Обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, що забезпечує вектор випуску кінцевої продукції $Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. За формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ (i, j = 1, 2, ..., n)$$

знаходимо матрицю коефіцієнтів прямих затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix},$$

яка є продуктивною.

Матриця $(E - A)$ має вигляд

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 \\ 0,45 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних затрат $S = (E - A)^{-1}$:

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,5} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,55 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix}.$$

Отже, для даного вектора кінцевої продукції Y можемо знайти необхідний об'єм валового випуску X за формулою:

$$X = SY,$$

$$X = \begin{pmatrix} 1,8 & 0,8 \\ 1,1 & 1,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

1.2 Модель міжнародної торгівлі

Нехай країни S_1, S_2, …, S_n мають національні прибутки x_1, x_2, …, x_n відповідно. Позначимо через a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i. Припустимо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто для кожної країни

S_j, $j=1,2,...,n$, є справедливою рівність $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$. Матриця $A=\left\|a_{ij}\right\|$, яка складається з часток національного доходу, називається *структурною матрицею торгівлі*.

Міжнародна торгівля буде збалансованою тоді і тільки тоді, коли для кожної країни S_j, $j=1,2,...,n$, дохід $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$ від зовнішньої та внутрішньої торгівлі співпадає з національним доходом x_i цієї країни, тобто коли виконується рівність

$$AX = X,$$

де $X=(x_1, x_2,..., x_n)-$ вектор доходів

Приклад 2. Для структурної матриці A торгівлі трьох країн S_1 , S_2, S_3, яка має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання. Розв'яжемо матричне рівняння $AX=X$ або $(A-E)X=0$. З цього матричного рівняння отримаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему методом Гауса, отримаємо: $x_1 = 8c,\ x_2 = 3c,\ x_1 = 10c,$ тобто $x=(8c,\ 3c,\ 10c)$, де $c \neq 0-$довільне число.

З отриманого результату можна зробити висновок, що збалансованість торгівлі 3-х країн досягається при векторі національних доходів $x=(8c,\ 3c,\ 10c)$. Тобто при співвідношенні національних доходів трьох країн $8:3:10$.

1.3 Простір товарів. Вектор цін

Під *товаром* розуміють деяку продукцію або послугу, яка надходить на ринок для продажу в певний час у певному місці. Вважатимемо, що маємо n різних товарів. Обсяг $i-го$ позначимо через x_i, $i=1,2,...,n.$. Тоді деякий набір цих товарів можна записати у вигляді вектора $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, тобто $\overline{x}$ є $n-$вимірним арифметичним вектором. З економічних міркувань розглядатимемо лише такі набори товарів, у яких компоненти $x_i \geq 0$ для всіх $i=1,2,...,n.$ Множину всіх наборів товарів називають *простором товарів* C.

Вважаємо, що кожен товар має певну *ціну*. Всі ціни строго додатні. Нехай ціна одиниці $i-го$ товару становить p_i, $i=1,2,...,n.$ Тоді вектор $\overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$ називають *вектором цін.*

Для набору товарів $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ розглянемо вектор відповідних цін $\overline{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$. Скалярний добуток цих векторів

$$\overline{p}\cdot\overline{x}=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$$

є числом, яке визначає ціну набору товарів і позначається $c(\overline{x})$.

Індекс споживчих цін характеризує зміни у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання. Введемо позначення $\overline{q}=(q_1,q_2,...,p_n)-$ вектор обсягу споживчих товарів**.** Тоді *індексом цін* (у відсотках) називається величина, що обчислюється за формулою

$$p=\frac{\overline{c}\cdot\overline{q}}{\overline{c}_n\cdot\overline{q}}\cdot 100,$$

де $\overline{c}=(c_1,c_2,...,c_k)$ − вектор цін у поточному місяці, $\overline{c}_n=(c_1,c_2,...,c_n)$ − вектор цін у попередньому місяці. Звідси $100\cdot\overline{c}\cdot\overline{q}=p\cdot\overline{c}_n\cdot\overline{q}$, або $(100\cdot\overline{c}-p\cdot\overline{c}_n)\cdot\overline{q}=0$, тобто індекс можна визначати як числовий коефіцієнт p, який робить вектор $\overline{q}$ перпендикулярним до вектора $(100\cdot\overline{c}-p\cdot\overline{c}_n)$.

Індекс інфляції обчислюється за формулою

$$i=p-100.$$

до того ж

$$i=\frac{\overline{c}\cdot\overline{q}}{\overline{c}_n\cdot\overline{q}}\cdot 100-100=100\left(\frac{(\overline{c}-\overline{c}_n)\overline{q}}{\overline{c}_n\cdot\overline{q}}\right).$$

Приклад 3. Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції задано в таблиці:

Ресурси	Кількість	
Сировина першого виду	200 кг	3 грн/ кг
Сировина другого виду	500 $м^2$	5 грн/кг
Витрати праці	0,65 людино-год	10 грн/людино год
Обладнання	0,7 машино-год	15 грн/ машино-год

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції .

Розв'язання. Введемо вектор витрат ресурсів на одиницю продукції $\overline{x} = (200\ ; 500;\ 0{,}65;\ 0{,}7)$ та вектор цін одиниць відповідних ресурсів $\overline{p} = (3\ ; 5;\ 10;\ 15)$. Вартість усіх ресурсів, що використовуються для виготовлення одиниці продукції, буде скалярним добутком векторів $\overline{x}$ та $\overline{p}$. Тому

$$c(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{p} = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i.$$

Отже,

$$c(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{p} = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 200 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 0{,}65 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 15 = 3117 \quad \textit{грн.}$$

Приклад 4. Комерційний банк, що бере участь у будівництві багатоповерхових будинків на одному з масивів міста, одержав кредити від трьох комерційних банків. Кожен з них надав кредити в розмірі 200, 300, 400 тис. грн. під річні процентні ставки 40, 25 і 30 % Визначимо, яку суму треба заплатити за кредити наприкінці року.

Розв'язання. Розглянемо вектор кредитів і вектор процентних ставок. Простим розрахунком керівник комерційного банку може визначити, скільки потрібно заплатити наприкінці року за кредити, взяті в банків:

$$c(\overline{x}) = \overline{x} \cdot \overline{p} = 200 \cdot 1{,}4 + 300 \cdot 1{,}25 + 400 \cdot 1{,}3 = 1175 \quad \textit{тис. грн.}$$

Приклад 5. (***Індекс цін та індекс інфляції)*** Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з 300 видів товарів і послуг, для індексів цін певного місяця, що наведено в таблиці.

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	3	4000	12000	3500	10500
B	10	2000	20000	1800	18000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати:	-	-	40000	-	37500

Розв'язання. Введемо вектор обсягу споживчих товарів

$$\vec{q}=(3;10;2);$$

вектор цін у поточному місяці

$$\vec{c}=(4000{,}2000;4000);$$

вектор цін у попередньому місяці

$$\overline{c_n}=(3500;1800;4500).$$

Розрахуємо індекс цін. Для цього обчислимо скалярні добутки $\bar{c}\cdot\bar{q}$ та $\bar{c}_n\cdot\bar{q}$

$$\bar{c}\cdot\bar{q}=3\cdot 4000+10\cdot 2000+2\cdot 4000=40000\ ;$$

$$\bar{c}_n\cdot\bar{q}=3\cdot 3500+10\cdot 1800+2\cdot 4500=37500;$$

Тепер перейдемо до індексу інфляції.

$$p=40000:37500\cdot 100\ \%=106{,}7\ \%.$$

А також

$$i=p-100\ \%=106{,}7\ \%-100\ \%=6{,}7\ \%.$$

Таким чином, індекс інфляції становить 6,7%.

2. Методи та моделі аналітичної геометрії

2.1 Модель рівноваги ринку

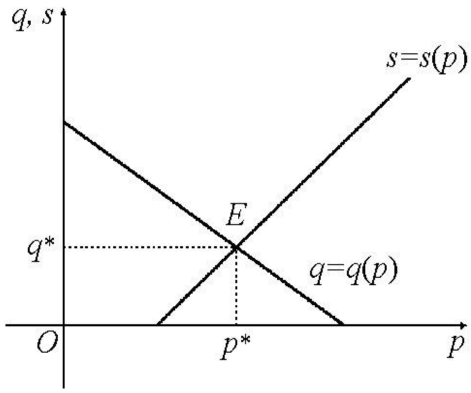

Рис. 1

Візьмемо деякий товар. За даної ціни p за одиницю товару через $s(p)$ позначимо число одиниць товару , які продавці на ринку пропонують для продажу. Функцію $s = s(p)$ називають *функцією пропозиції товару*. Через $q(p)$ позначимо число одиниць товару, які покупці бажають купити за даною ціною p. Функцію $q = q(p)$ називають *функцією попиту на товар*. З економічних міркувань функція пропозиції $s = s(p)$ зростаюча, а функція попиту $q = q(p)$ спадна.

Ціну, за якої попит на певний товар дорівнює пропозиції цього товару на ринку, називають *рівноважною ціною*. Тобто за рівноважної ціни $p*$ виконується рівність $s(p*) = q(p*)$. Точку $E(p*; q*)$ називають *точкою рівноваги*.(див. рис.1)

Приклад 6. За умови, що функція попиту має вигляд, $q = -5p + 40,$ а функція пропозиції $s = 7{,}5p - 10,$ визначити рівноважну ціну. Нехай уряд деякої країни встановив акцизний податок T за одиницю товару (цей податок є фіксованим числом, а не процентом від продажної ціни). З'ясувати, як зміняться при цьому рівноважна ціна та обсяг товару.

Розв'язання. Координати точки рівноваги $E(p*, q*)$ задовольняють умову рівноваги $s(p*) = q(p*)$, тобто $7{,}5p - 10 = -5p + 40$, звідки $p* = 4,$ $s(p*) = q(p*) = 20.$

Якщо уряд установить акцизний податок T за одиницю товару, то функція пропозиції зміниться і задаватиметься співвідношенням

$$s = s(p - T) = 7{,}5(p - T) - 10,$$

а функція попиту залишиться незмінною. Тоді нову точку рівноваги (p^T, q^T) можна визначити з умови рівноваги $s(p^T) = q(p^T)$, тобто

$$7{,}5(p^T - T) - 10 = -5p^T + 40.$$

Отже, нова рівноважна ціна $p^T = 4 + 0{,}6T$, а відповідний обсяг товару $s(p^T) = q(p^T) = 20 - 3T$. Дістали нову точку рівноваги $(4 + 0{,}6T,\ 20 - 3T)$.

2.2 **Модель рівноваги доходів і збитків**.

Розглянемо просту модель рівноваги доходів і збитків компанії. Компанія випускає продукцію й продає її за ціною p (грн.) за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми $y_в$ загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції в кількості x (тис.од.) має таку закономірність: $y_в = ax + b$. Знайдемо точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії.

Оскільки дохід від продажу x (тис.) виробів продукції ціною p (грн.) за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_д = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалась умова рівноваги:

$$y_в = y_д.$$

Знаходимо розв'язок рівняння $px = ax + b$. Маємо

$$x^* = \frac{b}{p - a}.$$

Отже, визначили точку рівноваги

$$E\left(\frac{b}{p-a}; \frac{pb}{p-a}\right).$$

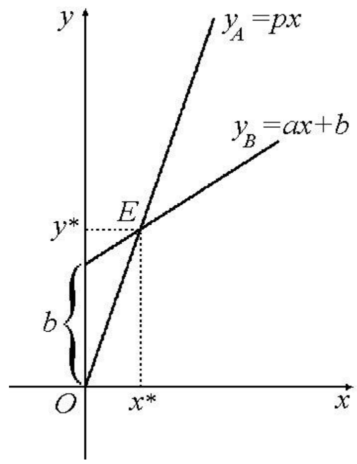

Рис. 2

Прибуток Q компанії визначається рівністю

$$Q = y_д - y_в.$$

Якщо $0 \le x \le x^*$, то графік функції доходу проходить нижче за графік функції витрат. Тоді $Q < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то графік функції доходу проходить вище за графік функції витрат. Тоді $Q > 0$, і компанія одержує прибуток.

Приклад 7. ***(Визначення рентабельності транспортного постачання)*** Побудувати графіки транспортних витрат та визначити, для яких відстаней вигідніше перевозити залізничним або автомобільним транспортом. Якщо транспортні витрати перевезення одиниці вантажу y залізничним та автомобільним транспортом на відстань x x визначаються за формулами:

$$y = \frac{1}{2}x + 10 \quad \text{та} \quad y = x + 5,$$

де x вимірюється десятками км.

Розв'язання. Побудуємо графіки транспортнихвитратперевезення (див.рис. 3). Графіки прямих перетинаються в точці N. Знайдемо координати точки N:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 10 \\ -x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 20 \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 15;\ x = 10.$$

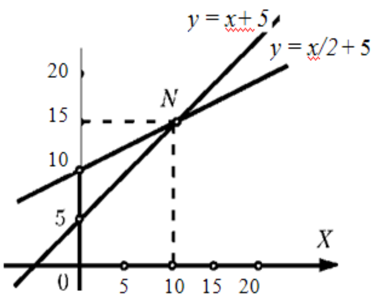

Рис. 3

Графіки витрат дозволяють зробити висновки:

а) коли $x \in [0,10)$, тобто $x < 100$ км, транспортні витрати у перевезення автотранспортом нижче витрат перевезення залізничним транспортом;

б) коли $x \in [10,\infty)$, тобто $x > 100$ км, більш рентабельним буде залізничний транспорт.

3. Послідовності у задачах фінансової математики

3.1 Задача про неперервне нарахування відсотків

Нехай початковий вклад у банк становить S_0 (грн.). Банк нараховує p (%) річних. Треба знайти розмір вкладу S_t через t років.

У разі використання *простих відсотків* розмір вкладу щороку збільшуватиметься на одну і ту саму величину $\frac{p}{100}S_0$, а саме

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ \ S_2 = S_1\left(1 + \frac{2p}{100}\right),\ \ \ldots,\ \ S_t = S_0\left(1 + \frac{tp}{100}\right),$$

тобто S_t – є арифметичною прогресією. На практиці частіше використовують складні відсотки. В цьому випадку розмір вкладу щороку збільшуватиметься в одне і те саме число $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів, тобто

$$S_1 = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ \ S_2 = S_1\left(1+\frac{2p}{100}\right)^2,\ \ \ldots,\ \ S_t = S_0\left(1+\frac{tp}{100}\right)^t.$$

Формули такого типу застосовуються також у демографічних розрахунках (приросту населення) та в економічних прогнозах (збільшення валового національного продукту).

Нехай початковий депозит S_0 покладено в банк під $p = 100\%$ річних. Тоді через рік сума депозити становитиме $2S_0$ Припустимо, що через півроку рахунок закрито з результатом $S_1 = S_0\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}S_0$, і цю суму знов покладено як депозит у той самий банк. Наприкінці року депозит становив

$$S_2 = S_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 \cdot S_0.$$

Будемо зменшувати строк розміщення депозиту в банку за умови його подальшого розміщення після вилучення. За щоквартального повторення цих операцій депозит наприкінці року становитиме

$$S_3 = S_0\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \approx 2{,}37 \cdot S_0.$$

У загальному випадку, якщо відсоток нарахування p і рік розбито на n частин, то через t років сума депозиту становитиме

$$S_t = S_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Тоді якщо кількість нарахувань відсотків прямує до нескінченності, то таке нарахування називається *неперервним.* З урахуванням *другої визначної* границі, нарощена сума вкладу при неперервному нарахуванні відсотків обчислюється за формулою

$$S_t = \lim_{n\to\infty} S_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = S_0 e^{\frac{tp}{100}},$$

або

$$S_t = S_0 e^{\frac{tp}{100}}.$$

Приклад 8. Знайти нарощену суму відсотків S за 5 років, якщо нарахування відсотків відбувається щорічно, розмір першого внеску в банк дорівнює 1 млн. грн., річні складні відсотки − 10% (тобто нарахування відсотків у кінці кожного року проводяться на нарощені суми). Знайти нарощену суму вкладу S_t для $t = 10\ln 2.$

Розв'язання. Маємо

$$S = 1(1+0{,}1)^5 = 1{,}610151 \text{ млн. грн.}$$

Для $t = \ln 2.$ нарощена сума вкладу буде дорівнювати

$$S_t = \lim_{n\to\infty} S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} = S_0 e^{\frac{tp}{100}} = e^{\ln 2} = 2 \text{ млн. грн.}$$

3.2 Рахунки накопичення

Прикладом розрахунку накопичень є такий рахунок фізичної або юридичної особи, на який регулярно нараховують і зараховують (наприклад вкінці кожного місяця або на початку наступного року) фіксований дохід та роблять баланс вкладень і запланованих відсотків з врахуванням терміну одержаних вкладень.

Приклад 9. Кожного місяця робітник вносить 100 грн. на свій рахунок накопичення з одержанням прибутку величиною 0,5 % за кожен місяць. Обчислити величину його накопичень безпосередньо після здійснення 25 внеску.

Розв'язання. Кожен внесок за місяць зростає в 1,005 рази (0,5 % за місяць). Тому перший внесок за 24 місяця перебування рахунку приймає значення $100\cdot(1{,}005)^{24}$. Другий внесок знаходився на рахунку 23 місяця, тому він прийме значення $100\cdot(1{,}005)^{23}$ третій внесок стане $100\cdot(1{,}005)^{22}$ і т.д. Отже, загальна сума накопиченого рахунку робітника прийме значення

$$S = 100\cdot(1{,}005)^{24} + 100\cdot(1{,}005)^{23} + \ldots + 100\cdot(1{,}005) + 100$$

Якщо записати праву частину в зворотньому порядку, тоді її можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $b_1 = 100$ і знаменником $q = 1{,}005$. Тому, використовуючи формулу суми скінченої геометричної прогресії, одержимо

$$S = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{100\left((1{,}005)^{25} - 1\right)}{1{,}005 - 1} = 2655{,}91.$$

Таким чином, після 24 місяців робітник буде мати на своєму рахунку накопичення 2655, 9 гривень.

4. Застосування диференціального числення функції однієї змінної

4.1 Рівноважна ціна. Еластичність попиту та пропозиції

За допомогою поняття похідної в економіці впроваджують поняття *еластичності*. *Еластичністю функції* $y = f(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Еластичність позначають $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x).$$

Величину $E_x(y)$ при заданому значенні x називають також *коефіцієнтом* або *показником еластичності*. Еластичність функції відносно x є наближений відсотковий приріст функції (підвищення або пониження), що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

Розглянемо деякі властивості еластичності функції.

1) Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темпи зміни функції: $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ тобто

$$E_x(y) = x(\ln y)'.$$

2) Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей цих функцій:

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v).$$

3) Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичності цих функцій:

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

4) Якщо $C = const$, то

$$E_x(cu) = E_x(u).$$

Приклад 10. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис.грн.) і випуском продукції ***x*** (млрд. грн.) виражається функцією $y = -0{,}5x + 80$ (грн.). Знайти еластичність собівартості, якщо випуск продукції складає 60 млрд. грн.

Розв'язання. Обчислимо еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{x}{-0{,}5x + 80} \cdot (-0{,}5) = \frac{x}{x - 160};$$

$$E_{60}(y) = \frac{60}{60 - 160} = -0{,}6;$$

тобто, у разі випуску продукції на 60 млрд. грн. збільшення його на 1% призведе до зниження собівартості на 0,6%.

Еластичність функції застосовується для аналізу попиту й споживання, прогнозів цінової політики.

Нехай $q = q(p)$ – функція попиту на товар ціною p за одиницю.

Еластичність попиту за ціною називається наступне співвідношення

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = \frac{p}{q} \cdot q'.$$

Еластичність виражає відносну зміну (в процентах) розміру попиту на будь-який товар або послугу зі зміною ціни на 1% і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Якщо цінова еластичність попиту за абсолютною величиною $\left|E_p(q)\right| > 1$, то попит вважають еластичним. Якщо $\left|E_p(q)\right| = 1$ – нейтральним, якщо $\left|E_p(q)\right| < 1$, то функція називається еластичною.

Додатність еластичності попиту за доходом характеризує нормальні (якісні) товари, а а її від'ємне значення – малоцінні (неякісні) товари.

Взагалі високий коефіцієнт еластичності попиту означає високий ступень задоволення потреби; низький – вказує на незадоаолені потреби в даному товарі.

Приклад 11. Знайти рівноважну ціну та еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни, якщо функцію попиту $q = \dfrac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + \dfrac{1}{2}$, де q і s – обсяги товарів, а p – їх ціна.

Розв'язання. Рівноважну ціну p^* можна знайти наступним чином:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + \frac{1}{2},$$

$$p + 8 = p^2 + 2p + \frac{1}{2}p + 1,$$

$$p^2+\frac{6}{2}p-p=0,$$

$$2p^2+3p-14=0.$$

Маємо $p_1=-3{,}6;\ p_2=2.$

Ціна не буває від'ємною, тому з економічних міркувань $p_1=-3{,}6<0$ не задовольняє умові задачі. Отже, рівноважна ціна $p^*=2$.

Обчислюємо еластичність попиту:

$$E_p(q)=\frac{p}{q}\cdot q'_p=\frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

Обчислимо еластичність пропозиції:

$$E_p(s)=\frac{p}{s}\cdot s'_p=\frac{2p}{2p+1}.$$

За рівноважної ціни $p^*=2$ маємо:

$$E_2(q)=-0{,}3;$$

$$E_2(s)=0{,}8.$$

Оскільки отримані значення еластичностей за абсолютною величиною менші за одиницю, то і попит, і пропозиція даного товару при ціні рівноваги нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при збільшенні ціни $\boldsymbol{p}$ на 1% попит зменшиться приблизно на 0,3%, а пропозиція збільшиться приблизно на 0,8%.

Приклад 12. Нехай функція попиту на товар, який випускає деяка фірма, змодельовано залежністю $p(q)=q_0e^{-kp^2}$, де q_0 і k – відомі величини. Визначимо, за якої ціни p попит буде еластичним.

Розв'язання. Обчислимо еластичність попиту:

$$E_p(q)=\frac{p}{q}q'_p, E_p(q)=\frac{-2kpq_0e^{-kp^2}}{q_0e^{-kp^2}}\cdot p=-2kp^2.$$

Аби попит був еластичним, необхідно, щоб виконувалася нерівність $2kp^2>1$.

Отже,

$$p>1/\sqrt{2k}.$$

4.2 Зв'язок еластичності з доходом

Еластичність попиту q *за доходом* R:

$$E_R(q) = \frac{dq}{q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{q} \cdot \frac{dq}{dR},$$

виражає відносну зміну (в процентах) попиту на будь-який товар або послугу в разі зміни доходу споживачів цього блага на 1%.

Річний дохід фірми обчислюється за формулою $R(p) = q(p) \cdot p$ і залежить як від ціни товару, так і від попиту на нього на ринку, тобто дохід може зростати або спадати. Обчислимо похідну цієї функції

$$R'(p) = q + pq'_p = q(1 + E_p(q))$$

Для того, щоб річний доход фірми збільшився , потрібно, щоб функція доходу зростала, тобто її похідна була додатною. Проаналізуємо всі варіанти еластичності попиту

1. $E_p(q) < -1$. Тоді $R'(p) < 0$. Таким чином, за еластичного попиту збільшення ціни спричиняє зниження доходу.
2. $E_p(q) = -1$. Тоді $R'(p) = 0$, тобто за нейтрального попиту зміна ціни на товар не впливає на доход.
3. $E_p(q) > -1$. Тоді $R'(p) > 0$, тобто за нееластичного попиту збільшення ціни зумовлює збільшення доходу.

4.3 Оптимальна ціна, граничні витрати, оптимальний обсяг виробництва.

Нехай монополіст, знаючи функцію попиту на свою продукцію, вирішує, скільки її виробляти і за якою ціною продавати. Якщо монополіст встановить достатньо високу ціну, то споживачі за певний період придбають у нього не дуже багато продукції. Якщо він вироблятиме більше продукції, то йому доведеться знизити ціну.

Для того, щоб визначити обсяг оптимального випуску продукції монополіст має знати залежність прибутку від обсягу продукції.

Нехай задано функцію доходу $R = R(q)$ і функцію витрат $C = C(q)$ фірми. Тоді функція її прибутку від випуску продукції має вигляд

$$P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q).$$

Логічно поставити питання: за якого обсягу продукції прибуток фірми буде максимальним? Відповідь визначається за допомогою похідної.

Приклад 13. На основі досліджень була встановлена залежність попиту q від ціни p за одиницю товару: $q = 100000 - 200p$, де q – кількість одиниць товару для продажу за рік. Витрати на випуск q одиниць товару складають: $C(q) = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$. Розрахувати річний доход фірми і визначити його максимальне значення.

Розв'язання. За умовою задачі:

$$P = 500 - \frac{q}{200}.$$

Маємо:

$$R(q) = 500q - \frac{q^2}{200}.$$

Річний дохід розраховується наступним чином:

$$P(q) = 500q - \frac{q^2}{200} - (150000 + 100q + 0{,}003q^2) = -0{,}008q^2 + 400q - 150000.$$

Визначимо максимальний прибуток.

$$P'(q) = -0{,}016q + 400;$$

$$-0{,}016q + 400 = 0.$$

Отже, $q = 25000$ - оптимальний обєм продаж, а $P(25000) = 4850000$ грн. – максимальне значення прибутку.

5. Функції багатьох змінних

Прикладом функцій багатьох змінних серед економічних показників є *виробничі функції. Виробнича функція* – це функція $y = f(x_1, ..., x_2)$, незалежні змінні якої $x_1, ..., x_2$ є обсягами ресурсів, які використовуються у виробництві , а значення функції виражає обсяг виробленої продукції. Для певного виробництва виробнича функція може пов'язувати обсяг продукції у вартісному або кількісному вигляді з людськими ресурсами, обсягами сировини, енергії, основним капіталом тощо. Такі функції описують технологію певного підприємства.

5.1 Еластичність виробництва

Наведемо економічну інтерпретацію частинних похідних. Маємо виробничу функцію $z = f(x, y)$, що виражає витрати виробництва в залежності від кількості двох видів продукції x і y, що випускаються.

Еластичність виробничої функції $z = f(x,y)$ відносно чинників виробництва x і y встановлюється таким чином:

$$E_x(z(x,y)) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

і показує відсотковий приріст виробничої функції (підвищення, пониження) відповідно до приросту чинника x на 1% за умови, що чинник y не змінюється;

$$E_y(z(x,y)) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

показує відсотковий приріст виробничої функції відповідно до приросту чинника y на 1% за умови, що чинник x не змінюється.

$E_x(z)$-*коефіцієнт еластичності* x за z, $E_y(z)$ - *коефіцієнт еластичності* z за y.

Приклад 14. Знайти коефіцієнти еластичності за змінними x та y функції $z = x^y$ у точці M (4.3).

Розв'язання. Очислюємо коефіцієнти еластичності:

$$E_x(z(x,y)) = \frac{x}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y.$$

$$E_y(z(x,y)) = \frac{y}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = y \ln x.$$

Отже

$$E_x(z(x,y)) = 3, \; E_y(z(x,y)) = 3\ln 4.$$

5.2 Задача про максимальний прибуток

Позначимо через x та y кількість ресурсів I та II виду, які використовуються у виробництві деякої фірми. Нехай p_1, p_2 − ціни факторів виробництва, а $f(x, y)$−

виробнича функція фірми, товар продається за ціною p_0. Тоді функція прибутку має вигляд

$$P(x,y) = p_0 f(x,y) - p_1 x - p_2 y.$$

Максимальний прибуток буде досягатись в точці локального максимуму такої функції. Це вимагає розвя'зання системи

$$\begin{cases} P'_x = 0; \\ P'_y = 0 \end{cases}$$

з наступним аналізом її розв'язків

Приклад 15. Знайти комбінацію ресурсів $(x^*; y^*)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток, якщо задано виробничу функцію фірми $f(x,y) = p_0 x^{1/4} y^{1/2}$ та ринкові ціни продукції $p_0 = 2$ і ціни факторів виробництва відповідно $p_1 = 1, p_2 = 1/2$ грн.

Розв'язання. Функція прибутку фірми

$$P(x,y) = 2x^{1/4}y^{1/2} - x - \frac{1}{2}y.$$

Дослідимо її на екстремум. Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку й прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} P'_x = 2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1; \\ P'_y = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2} = x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0; \\ x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{4}}; \\ \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4; \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, точка M(1;4) є критичною.

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їх значення в точці M(1;4):

$$P''_{xx}=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{2}},$$

$$P''_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{2}},$$

$$P''_{yy}=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}}.$$

Тоді

$$A=P''_{xx}(M)=2\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{3}{4},\qquad B=P''_{xy}(M)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$

$$C=P''_{yy}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{16}.$$

Оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16}\end{vmatrix}=\frac{3}{64}-\frac{1}{64}=\frac{2}{64}=\frac{1}{32}>0.$$

та

$$A=-\frac{3}{4}<0.$$

то точка M(1;4) – точка локального максимуму.

Обчислимо максимальний прибуток фірми :

$$P_{max}=R(1;4)=2\cdot 1\cdot 2-1-\frac{1}{2}4=4-1-2=1.$$

6. Застосування визначених інтегралів

6.1 Застосування в динамічних процесах

Економічний зміст визначеного інтегралу полягає в тому, що він чисельно дорівнює обсягу виробленої підприємством продукції з продуктивністю праці $f=f(t)$ за інтервал часу $[0;T]$, тобто

$$q=\int_0^T f(t)dt. \qquad (2)$$

Приклад 16. Продуктивність праці виробничої бригади виражається функцією $f(t)=8t-t^2$. Робітники працюють 8 годин, тобто $t\in[0;\,8]$. Обчислити обсяг виробленої продукції:

1) За робочій день;
2) За інтервал часу $[2;\,6]$;
3) Порівняти ці обсяги в процентному відношенні.

Розв'язання.

1) $q_1=\int\limits_0^8 f(t)dt=\int\limits_0^8 (8t-t^2)dt=\left(4t^2-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^8=\frac{256}{3}$ од. пр.;

2) $q_2=\int\limits_0^8 f(t)dt=\int\limits_0^8 (8t-t^2)dt=\left(4t^2-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_2^6=\frac{176}{3}$ од. пр.;

3) $r=\frac{q_1}{q_2}\cdot 100\%=\frac{17600}{256}=68{,}75\%.$

В економічній часто зустрічається теорії виробнича функція Кобба-Дугласа, яка враховує технічний прогрес, має вигляд $f(t)=AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)e^{\lambda t}$, де K - обсяг фондів; L - обсяг трудових ресурсів; λ - інтенсивність розвитку виробництва, пов'язаного з технічним прогресом. Тоді згідно з економічним змістом виробничої функції Кобба-Дугласа можна показати, що обсяг виробленої продукції за T років визначається за формулою (2).

Приклад 17. Знайдемо обсяг продукції , виробленої фірмою за два роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд

$$f(t)=(1+2t)e^{5t}.$$

Розв'язання.

$$q=\int\limits_0^2 (1+2t)e^{5t}dt=\begin{vmatrix} u=1+2t & du=2dt \\ dv=e^{5t}dt & v=\frac{1}{5}e^{5t}\end{vmatrix}=\frac{1+2t}{5}e^{5t}\Bigg|_0^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{5t}dt=0{,}9e^{10}-0{,}1.$$

6.2 Загальні витрати виробництва

Нехай $V(x)$ – функція загальних витрат на виробництво x одиниць продукції, $V'(x)$ називається маргінальною функцією витрат, тоді визначений інтеграл

$$\int_{k_1}^{k_2} V'(x)dx = V(x)\Big|_{k_1}^{k_2} = V(k_2) - V(k_1)$$

дорівнює зміні загальних витрат при зростанні кількості виробленої продукції від k_1 до k_2.

Приклад 18. Знайти зростання загальних витрат, коли виробництво зростає з 1000 до 1600 одиниць, якщо функція маргінальних витрат фірми має вигляд

$$V'(x) = 23{,}6 - 0{,}01x.$$

Розв'язання. Зростання загальних витрат:

$$\int_{1000}^{1600} V'(x)dx = \int_{1000}^{1600} (23{,}6 - 0{,}01x)dx = \left(23{,}6x - 0{,}01 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1000}^{1600} =$$
$$= 23{,}6 \cdot 1600 - 0{,}006(1600)^2 - \left(23{,}6 \cdot 1000 - 0{,}006 \cdot (1000)^2\right) = 6600.$$

Отже, витрати зростуть на 6 600 грн.

6.3 Коефіцієнт нерівномірного розподілу прибуткового податку

Нехай y є частиною загального прибуткового податку, яка пропорційна частині x усього населення держави. Графік функції $y = f(x)$, яка описує дійсний розподіл прибуткового податку, називають ***кривою Лоренца***.

Коефіцієнтом нерівномірності розподілу податку кривої Лоренца (коефіцієнтом Джині) *називають відношення площі фігури, обмеженої кривою Лоренца та прямою* $y = x$ *(на рис. 4 вона заштрихована) до площі фігури, що лежить нижче прямої* $y = x$ *(на рис. 4 – це прямокутний трикутник:* $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1;\ y = x$.

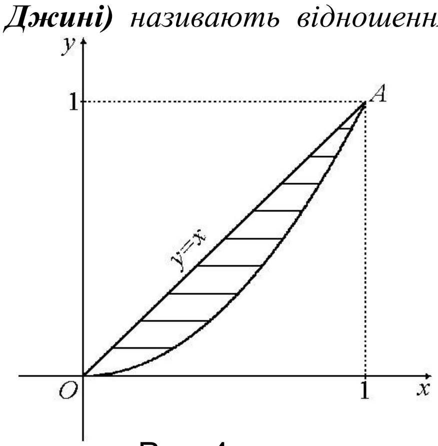

Рис. 4

Площа трикутника

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Площу заштрихованої фігури одержимо з використанням визначеного інтегралу за формулою

$$S_1 = \int_0^1 \left(x - f(x)\right)dx.$$

Тому, згідно з означенням, коефіцієнт Джині обчислюють за формулою

$$L = \frac{S_1}{S_{OAB}}.$$

Приклад 19. За даними досліджень розподілу доходів населення деякої країни крива Лоренца описується функцією $y = \frac{15}{16} \cdot x^2 + \frac{1}{16} x.$ Визначити коефіцієнт нерівномірності розподілу податку.

Розв'язання. При $x = 0.2$, маємо $y(0,2) = 0,05$. Це означає, що 20 % населення сплачує 5% загального податку. При $x = 0.5$, маємо $y(0,5) = 0,27$. Це означає, що 50 % населення сплачує 27 % загального податку.

Обчислимо коефіцієнт Джині.

$$L = 2\int_0^1 \left(x - \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}x\right) dx = \frac{15}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{16}$$

Відмітимо, що коефіцієнт нерівномірності розподілу податку завжди задовольняє співвідношення $0 \le L \le 1$. Якщо $L = 0$, то прибутковий податок розподілено рівномірно, при $L = 1$, нерівномірність розподілу податків найбільша.

7. Економічні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь

Приклад 20. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість – A_0. Якою буде вартість використання впродовж t років?

Розв'язання. Нехай A_0 – вартість обладнання в момент t. Зміна вартості (знецінювання) виражається різницею $A_0 - A_t$. Швидкість знецінювання $\frac{d}{dt}(A_0 - A_t)$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t. Одержуємо рівняння

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{dt} = kA_t$$

з початковою умовою

$$A_t(0) = A_0.$$

Розв'язавши його, одержимо:

$$-\frac{dA_t}{dt}=kA_t;\Rightarrow\int\frac{dA_t}{A_t}=-\int kdt;$$

$$\ln|A_t|=-kt+\ln|C|\Rightarrow\ln\left|\frac{A_t}{C}\right|=-kt;\Rightarrow\frac{A_t}{C}=e^{-kt}\Rightarrow A_t=Ce^{-kt}.$$

Для визначення довільної сталої C використаємо початкову умову
при t=0:

$$A_0=Ce^{-k0},\quad C=A_0,$$

Одержаний частинний розв'язок має вигляд

$$A_t=A_0e^{-kt}.$$

Приклад 21. Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y'=y(2-y)$ і $y(0)=1$ (t вимірюють у днях).

Розв'язання. Розв'яжемо диференціальне рівняння $y'=y(2-y)$ методом відокремлення змінних:

$$\frac{dy}{dt}=y(2-y),$$

$$\frac{dy}{y(2-y)}=dt.$$

Проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int\frac{dy}{y(2-y)}=\int dt,$$

$$\int\left(\frac{A}{y}+\frac{B}{2-y}\right)dy=t+C,$$

Знайдемо А та В з рівності:

$$\frac{A}{y}+\frac{B}{2-y}=\frac{1}{y(2-y)};\ A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{2}.$$

Тоді:

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2-y}\right)dy=t+C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{y}{2-y}=t+C.$$

Знайдемо с з рівняння $y(0)=1,\ 2c=0\Rightarrow c=0;$

Тоді при $t=10$

$$\frac{y}{2-y} = e^{20},$$

$$y = \frac{2e^{20}}{1+e^{20}} \Rightarrow y \approx 2.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання № 1.

Для даних, що є балансовим звітом двогалузевої моделі економіки (див. таблицю 1), обчислити необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, що забезпечував би вектор випуску кінцевої продукції $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Таблиця 1

Галузь	Споживання продукції		Валовий випуск
	Енергетика	Машинобуд	
Енергетика	x_{11}	x_{12}	x_1
Машинобудування	x_{21}	x_{22}	x_2

Для завдання № 1 дивись вихідні дані наведені для варіантів 1-30 в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Варіант	Споживання продукції		Валовий випуск	Y
	Енергетика	Машинобуд.		
1.	165 110	140 120	600 800	400 200
2.	120 140	200 180	800 1000	100 400
3.	100 170	115 120	1000 1000	300 100
4.	175 175	165 125	600 600	500 300
5.	120 125	125 170	600 800	100 200
6.	110 100	170 120	800 800	300 300
7.	125 180	170 165	1000 600	200 400
8.	135 125	105 165	700 1000	500 400
9.	115 125	150 105	700 1000	200 200
10.	140 150	180 155	900 800	100 100
11.	190 175	165 195	700 900	500 100
12.	130 170	185 195	1000 600	500 500
13.	145 115	110 130	1000 900	200 100

14.	105 185	120 180	800 1000	200 400
15.	190 155	195 110	600 900	300 200
16.	170 200	200 105	900 900	300 500
17.	115 195	110 140	1000 1000	200 500
18.	110 105	105 190	800 900	300 100
19.	125 125	160 115	700 600	500 300
20.	140 110	150 110	1000 900	100 400
21.	120 155	145 140	700 700	100 200
22.	150 115	125 185	600 1000	300 300
23.	100 180	165 110	1000 900	100 300
24.	150 115	140 100	900 600	400 200
25.	170 100	120 125	600 700	500 500
26.	130 115	185 165	1000 700	300 300
27.	115 125	105 195	1000 1000	200 200
28.	200 105	165 180	900 900	100 100
29.	150 140	130 100	600 800	300 100
30.	145 100	180 135	600 700	200 400

Завдання № 2.

Для структурної матриці A торгівлі двох країн S_1 та S_2, яка має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Знайти відношення національних доходів країн для збалансованої торгівлі. (Див вих. дані з таблиці 2)

Таблиця 2

Варіант	A
1.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$
2.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{7} & \frac{1}{4}\\ \frac{6}{7} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$
3.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{7}{10}\\ \frac{8}{9} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$
4.	$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{6} & \frac{8}{9}\end{pmatrix}$
5.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & \frac{1}{6}\\ \frac{8}{9} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$
6.	$A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$
7.	$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & \frac{1}{7}\\ \frac{4}{9} & \frac{6}{7}\end{pmatrix}$
8.	$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{9} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$
9.	$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$
10.	$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{1}{4}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$
11.	$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{2}{3}\\ \frac{9}{10} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

12.	$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$
14.	$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
15.	$A = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$
16.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
17.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$
18.	$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$
19.	$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$
20.	$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$
21.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{5} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
22.	$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
23.	$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

24.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ \frac{2}{3} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$
25.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$
26.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$
27.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
28.	$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
29.	$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$
30.	$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Завдання №3

Визначити індекс цін та індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з 3 видів товарів і послуг, для індексів цін для певного місяця, що наведено в таблиці.

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	*	*	*	*	*
B	*	*	*	*	*
C	*	*	*	*	*
Загальні витрати:	-	-	*	-	*

Вихідні дані для варіантів 1-30 наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Варіант	Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
1.	A	3	3500	10500	2500	10500
	B	7	7000	49000	6800	18000
	C	4	1500	6000	2500	9000
	Загальні витрати:	-	-	65500	-	65100
2.	A	8	3000	24000	2000	10500
	B	5	6000	30000	5300	18000
	C	5	2500	12500	3500	9000
	Загальні витрати:	-	-	66500	-	60000
3.	A	12	4000	48000	4100	10500
	B	6	8500	51000	8300	18000
	C	2	7000	14000	6500	9000
	Загальні витрати:	-	-	113000	-	112000
4.	A	8	1000	8000	1500	10500
	B	3	3500	10500	2500	18000
	C	5	9000	45000	7000	9000
	Загальніви трати:	-	-	63500	-	54500
5.	A	7	5000	35000	2500	10500
	B	13	4700	61100	4600	18000
	C	5	3000	15000	4000	9000
	Загальні витрати:	-	-	111100	-	97300
6.	A	11	6500	71500	5300	10500
	B	10	3600	36000	3500	18000
	C	6	2000	12000	3000	9000
	Загальні витрати:	-	-	119500	-	111300
7.	A	12	6500	78000	5300	10500
	B	9	3600	32400	3900	18000
	C	6	4000	24000	3000	9000
	Загальні витрати:	-	-	134400	-	116700
8.	A	10	6500	65000	5300	10500
	B	4	6600	26400	6000	18000
	C	7	6000	42000	6300	9000
	Загальні витрати:	-	-	133400	-	121100
9.	A	9	4500	40500	5300	10500
	B	3	1600	4800	1700	18000
	C	6	6000	36000	4300	9000
	Загальні	-	-	81300	-	78600

	витрати:					
10.	А	7	6000	42000	5300	10500
	В	4	3600	14400	3700	18000
	С	1	4000	4000	4300	9000
	Загальніви трати:	-	-	60400	-	56200
11.	А	9	8000	72000	7500	10500
	В	1	1100	1100	1700	18000
	С	4	5000	20000	3500	9000
	Загальні витрати:	-	-	93100	-	83200
12.	А	5	3000	15000	3500	10500
	В	13	7100	92300	6400	18000
	С	4	3000	12000	3500	9000
	Загальні витрати:	-	-	119300	-	114700
13.	А	15	1000	15000	1500	10500
	В	11	6350	69850	5700	18000
	С	12	5300	63600	5100	9000
	Загальні витрати:	-	-	148450	-	146400
14.	А	6	4000	24000	3800	10500
	В	1	3000	3000	3700	18000
	С	8	1300	10400	1100	9000
	Загальні витрати:	-	-	37400	-	35300
15.	А	4	5100	20400	4900	10500
	В	3	8000	24000	7750	18000
	С	7	2000	14000	1200	9000
	Загальні витрати:	-	-	58400	-	51250
16.	А	7	3100	21700	2900	10500
	В	7	6600	46200	7050	18000
	С	9	6000	54000	5500	9000
	Загальні витрати:	-	-	121900	-	119150
17.	А	5	7500	37500	6900	10500
	В	8	4500	36000	4000	18000
	С	3	8000	24000	7500	9000
	Загальні витрати:	-	-	97500	-	89000
18.	А	6	6000	36000	6900	10500
	В	11	9000	99000	8000	18000
	С	1	1000	1000	500	9000
	Загальні витрати:	-	-	136000	-	129900
19.	А	7	2000	14000	1700	10500
	В	7	5000	35000	4500	18000
	С	2	5000	10000	4000	9000
	Загальні	-	-	59000	-	51400

	витрати:					
20.	A	3	8000	24000	7100	10500
	B	4	5900	23600	5500	18000
	C	3	3000	9000	4000	9000
	Загальні витрати:	-	-	56600	-	55300
21.	A	7	9500	66500	7700	10500
	B	3	3500	10500	3800	18000
	C	7	3000	21000	2000	9000
	Загальні витрати:	-	-	98000	-	79300
22.	A	6	7700	46200	7500	10500
	B	1	3500	3500	3000	18000
	C	10	3400	34000	3200	9000
	Загальні витрати:	-	-	83700	-	80000
23.	A	7	700	4900	500	10500
	B	11	2500	27500	4000	18000
	C	12	6700	80400	5300	9000
	Загальні витрати:	-	-	112800	-	111100
24.	A	8	1000	8000	1000	10500
	B	9	500	4500	1000	18000
	C	10	9900	99000	9100	9000
	Загальні витрати:	-	-	111500	-	108000
25.	A	2	5000	10000	3000	10500
	B	4	6700	26800	6500	18000
	C	1	4900	4900	4000	9000
	Загальні витрати:	-	-	41700	-	36000
26.	A	4	7500	30000	7000	10500
	B	4	7000	28000	5000	18000
	C	6	9000	54000	9300	9000
	Загальні витрати:	-	-	112000	-	103800
27.	A	1	3500	3500	3400	10500
	B	11	8700	95700	7700	18000
	C	7	4000	28000	5300	9000
	Загальні витрати:	-	-	127200	-	125200
28.	A	5	5000	25000	3000	10500
	B	2	6000	12000	6100	18000
	C	3	7000	21000	6900	9000
	Загальні витрати:	-	-	58000	-	47900
29.	A	9	4600	41400	3000	10500
	B	5	5000	25000	6100	18000
	C	2	1000	2000	900	9000
	Загальні	-	-	68400	-	59300

	витрати:					
30.	A	4	1200	4800	1000	10500
	B	2	6900	13800	7000	18000
	C	8	9600	76800	9600	9000
	Загальні витрати:	-	-	95400	-	94800

Завдання №4

Побудувати графіки транспортних витрат та визначити для яких відстаней вигідніше перевозити вантаж залізничним або автомобільним транспортом, якщо транспортні витрати перевезення одиниці вантажу залізничним транспортом та автомобільним транспортом на відстань *x визначаються* за формулами:

$$y = k_1 x + b_1; \quad y = k_2 x + b_2$$

де *x* вимірюється десятками км. (Див.таблицю 4).

Таблиця 4

Варіант	$y = k_1 x + b_1; \quad y = k_2 x + b_2$
1.	y1=0.2 x+6 y2=0.3 x+4
2.	y1=0.2 x+4 y2=0.1 x+6
3.	y1=0.2 x+9 y2=0.3 x+4
4.	y1=0.1 x+10 y2=0.3 x+4
5.	y1=0.2 x+8 y2=0.5 x+5
6.	y1=1 x+2 y2=0.1 x+10
7.	y1=0.3 x+5 y2=0.2 x+9
8.	y1=0.1 x+10 y2=1 x+6
9.	y1=0.2 x+10 y2=1 x+6
10.	y1=0.1 x+9 y2=1 x+1
11.	y1=0.2 x+6 y2=0.1 x+9
12.	y1=0.3 x+7 y2=0.1 x+8
13.	y1=0.1 x+9

	y2=0.2 x+4
14.	y1=0.5 x+2 y2=0.2 x+6
15.	y1=0.1 x+5 y2=0.2 x+1
16.	y1=1 x+2 y2=0.2 x+7
17.	y1=0.3 x+8 y2=0.2 x+9
18.	y1=0.2 x+9 y2=1 x+6
19.	y1=0.3 x+1 y2=0.2 x+2
20.	y1=0.1 x+7 y2=0.3 x+4
21.	y1=0.5 x+3 y2=0.3 x+5
22.	y1=0.5 x+2 y2=0.3 x+5
23.	y1=0.2 x+3 y2=0.1 x+9
24.	y1=0.3 x+1 y2=0.1 x+10
25.	y1=0.3 x+4 y2=0.1 x+8
26.	y1=0.3 x+3 y2=0.2 x+10
27.	y1=1 x+9 y2=0.2 x+10
28.	y1=1 x+1 y2=0.2 x+3
29.	y1=0.5 x+6 y2=0.3 x+9
30.	y1=0.5 x+2 y2=0.1 x+5

Завдання № 5

Знайти накопичену суму відсотків S за n років, якщо нарахування відсотків відбувається щорічно , розмір першого внеску в банк дорівнює P , річні складні відсотки – i %. (Див. вихідні дані для кожного варіанту з таблиці 5)

Таблиця 5

Варіант	Перший внесок (P)	Річний відсоток (i)	Кількість років (n)
1	1	20	4
2	2	20	5
3	3	20	6
4	4	20	7
5	5	20	8
6	6	20	9
7	7	20	10
8	8	15	4
9	9	15	5
10	10	15	6
11	11	15	7
12	12	15	8
13	13	15	9
14	14	15	10
15	15	10	4
16	16	10	5
17	17	10	6
18	18	10	7
19	19	10	8
20	20	10	9
21	21	10	10
22	22	5	4
23	23	5	5
24	24	5	6
25	25	5	7
26	26	5	8
27	27	5	9
28	28	5	10
29	29	3	4
30	30	3	5

Завдання №6

Знайти рівноважну ціну та еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни, Якщо задано функцію попиту $q=\dfrac{p+a}{p+b}$ і пропозиції $s=p+c$, де q і s – обсяги товарів, а p – їх ціна.

Вихідні дані наведені в таблиці 6.

Таблиця 6

Варіант	Попит	Пропозиція
1	$q = \frac{x+8}{x+2}$	$s = x + 2$
2	$q = \frac{x+6}{x+1}$	$s = x + 2$
3	$q = \frac{x+6}{x+1}$	$s = x - 1$
4	$q = \frac{x+7}{x+1}$	$s = x + 1$
6	$q = \frac{x+8}{x}$	$s = x + 3$
6	$q = \frac{x+3}{x}$	$s = x - 1$
7	$q = \frac{x+7}{x+2}$	$s = 2x + 2$
8	$q = \frac{x+8}{x+3}$	$s = x$
9	$q = \frac{x+4}{x}$	$s = \frac{1}{2}x$
10	$q = \frac{x+6}{x+1}$	$s = 4x + 4$
11	$q = \frac{x+14}{x+2}$	$s = \frac{1}{2}x + 1$
12	$q = \frac{x+9}{x+1}$	$s = \frac{1}{3}x + 2$
13	$q = \frac{x+6}{x+1}$	$s = 3x + 3$
14	$q = \frac{x+8}{x}$	$s = \frac{1}{4}x + 2$
16	$q = \frac{x+11}{x+3}$	$s = \frac{1}{2}x + \frac{6}{2}$
16	$q = x^2 + x + 1$	$s = \frac{1}{2}x + \frac{6}{2}$
17	$q = x^2 + x + 1$	$s = x + 2$
18	$q = x^2 + 2x - 2$	$s = x + 10$
19	$q = 6x^2 + 2x - 4$	$s = 6x + 10$

20	$q = 8x^2 + 2x + 7$	$s = 2x + 9$
21	$q = 2x^2 + x - 9$	$s = 7x - 1$
22	$q = x^2 + 7x - 21$	$s = 6x + 9$
23	$q = 3x^2 + 4x + 1$	$s = 9x + 3$
24	$q = x^2 + 8x - 17$	$s = 6x + 1$
25	$q = 7x^2 + 8x + 1$	$s = 3x + 13$
26	$q = 9x^2 + 6x + 4$	$s = 3x + 6$
27	$q = x^2 + 2x - 7$	$s = 6x - 3$
28	$q = x^2 + 2x - 3$	$s = 6x + 1$
29	$q = 2x^2 + 3x + 6$	$s = 6x + 17$
30	$q = 2x^2 + x - 1$	$s = x + 7$

Завдання №7

На основі досліджень була встановлена залежність попиту q від ціни p за одиницю товару: $q = q(p)$, де q – кількість одиниць товару для продажу за рік. Витрати на випуск q одиниць товару складають $C(q)$. Розрахувати річний доход фірми і визначити його максимальне значення.

Вихідні дані наведені в таблиці 7.

Таблиця 7

Варіант	$q = q(p)$	$C(q)$
1	$q = 100000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 200q + 0,002q^2$
2	$q = 100000 - 250p$	$C(q) = 150000 + 100q + 0,002q^2$
3	$q = 150000 - 500p$	$C(q) = 200000 + 100q + 0,001q^2$

4	$q = 120000 - 250p$	$C(q) = 160000 + 300q + 0{,}006q^2$
5	$q = 100000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 150q + 0{,}002q^2$
6	$q = 120000 - 200p$	$C(q) = 140000 + 350q + 0{,}002q^2$
7	$q = 110000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 100q + 0{,}004q^2$
8	$q = 130000 - 500p$	$C(q) = 150000 + 110q + 0{,}003q^2$
9	$q = 120000 - 400p$	$C(q) = 140000 + 200q + 0{,}001q^2$
10	$q = 125000 - 500p$	$C(q) = 150000 + 100q + 0{,}002q^2$
11	$q = 10000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 200q + 0{,}002q^2$
12	$q = 100000 - 200p$	$C(q) = 130000 + 200q + 0{,}003q^2$
13	$q = 130000 - 250p$	$C(q) = 160000 + 300q + 0{,}004q^2$
14	$q = 100000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 200q + 0{,}002q^2$
15	$q = 150000 - 500p$	$C(q) = 250000 + 100q + 0{,}001q^2$
16	$q = 120000 - 400p$	$C(q) = 150000 + 200q + 0{,}002q^2$
17	$q = 10000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 200q + 0{,}002q^2$
18	$q = 100000 - 100p$	$C(q) = 125000 + 300q + 0{,}004q^2$
19	$q = 110000 - 500p$	$C(q) = 140000 + 200q + 0{,}003q^2$
20	$q = 130000 - 100p$	$C(q) = 165000 + 400q + 0{,}002q^2$
21	$q = 120000 - 100p$	$C(q) = 145000 + 300q + 0{,}004q^2$
22	$q = 120000 - 500p$	$C(q) = 150000 + 300q + 0{,}004q^2$
23	$q = 120000 - 200p$	$C(q) = 145000 + 100q + 0{,}001q^2$

24	$q = 100000 - 250p$	$C(q) = 125000 + 200q + 0{,}003q^2$
25	$q = 130000 - 100p$	$C(q) = 170000 + 400q + 0{,}002q^2$
26	$q = 105000 - 250p$	$C(q) = 150000 + 100q + 0{,}003q^2$
27	$q = 130000 - 200p$	$C(q) = 165000 + 400q + 0{,}004q^2$
28	$q = 100000 - 200p$	$C(q) = 125000 + 100q + 0{,}002q^2$
29	$q = 100000 - 500p$	$C(q) = 125000 + 200q + 0{,}002q^2$
30	$q = 130000 - 100p$	$C(q) = 150000 + 500q + 0{,}001q^2$

Завдання №8

Знайти еластичність виробництва й часткові еластичності для виробничої функції $z=f(x,y)$. (Див табл. 8).

Таблиця 8

Варіант	$z=f(x,y)$
1.	$z = x^2 y^2$
2.	$z = \sqrt{xy}$
3.	$z = x^2 + y^2$
4.	$z = y^2 \cos^2 x$
5.	$z = x^2 y^4$
6.	$z = \sqrt{xy^2}$

7.	$z = x^2 \sin^2 y$
8.	$z = 2x^2 + y^4$
9.	$\left(3+x\right)^2 y^4$
10.	$z = x^4 tg^4 y$
11.	$z = x^4 + 3y^2$
12.	$z = x^4 (1+y)^2$
13.	$z = 5y^2 \sin^4 x$
14.	$z = x^2 y^6$
15.	$\left(x+2y\right)^2 + 3$
16.	$z = x^2 \left(\sin y + 1\right)^2$
17.	$z = (3x+y)^4$
18.	$z = 6x^2 \left(y + \sin x\right)^2$
19.	$z = \frac{3}{8}(x-2)^2 y^8$
20.	$z = \frac{5}{3} x^{10} y^4$
21.	$z = \arcsin^2 xy$
22.	$z = y^2 \sqrt[4]{x^6}$

23.	$z = arctg^4(x+y)$
24.	$z = 15y^4(3+5x)^2$
25.	$z = (x+1)^2 + (y-3)^4 + 5$
26.	$z = arcctg^2(2x-5y)$
27.	$z = 2x^2\sqrt[3]{y^4}$
28.	$z = 4y^2 + 3x^4y^2$
29.	$z = \sin^2 x + \cos^4(y+1)$
30.	$z = 9x^4y^8 + 2x^2$

Завдання №9

Знайти комбінацію ресурсів $(x^*; y^*)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток, якщо задано виробничу функцію фірми $f(x, y)$ та ринкові ціни продукції p_0 і ціни факторів виробництва відповідно p_1, p_2 умов. грош. од. (Див. вихідні дані для кожного варіанту з таблиці 9).

Таблиця 9

Варіант	Виробнича функція фірми	Ринкові ціни продукції p_0	Ціна фактору виробництва p_1	Ціна фактору виробництва p_2
1	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$	1	$\frac{1}{2}$	1
2	$x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$	4	1	2
3	$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$	2	2	$\frac{1}{3}$

4	$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$	3	$\frac{1}{2}$	1
6	$x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
6	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$	3	2	2
7	$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$	2	$\frac{1}{3}$	2
8	$x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{1}{4}}$	2	2	2
9	$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
10	$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	2
11	$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$	3	2	$\frac{1}{4}$
12	$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$	1	$\frac{1}{3}$	3
13	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$	2	$\frac{1}{4}$	2
14	$x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$	1	$\frac{1}{4}$	2
16	$x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}$	4	1	$\frac{1}{8}$
16	$x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{\frac{1}{4}}+2x+y$	2	6	4
17	$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{4}}$	2	6	4
18	$x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}+x$	4	6	$\frac{1}{8}$
19	$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}-y$	1	$\frac{1}{3}$	2
20	$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}+y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{2}$
21	$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+x$	3	6	$\frac{1}{4}$
22	$x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y$	4	1	6
23	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x$	1	1	1

24	$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+x$	2	4	$\frac{1}{3}$
26	$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y$	3	$\frac{3}{2}$	2
26	$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+2x$	3	8	2
27	$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+y$	2	$\frac{1}{3}$	4
28	$x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}-y$	1	$\frac{1}{4}$	3
29	$x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}+2x$	4	9	$\frac{1}{8}$
30	$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{4}}-x+\frac{1}{2}y$	2	4	6

Завдання №10.

Знайти зростання загальних витрат, при зростанні виробництва від k_1 до k_2 одиниць. Відомо, що функція маргінальних витрат фірми має вигляд:

$$V'(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Розв’язати завдання № 10, використовуючи вихідні дані з таблиці 10.

Таблиця 10

Варіант	A	B	C	k_1	k_2
1	-3	200	60	6	10
2	-9	180	70	3	8
3	-18	240	60	4	9
4	-12	220	90	6	12
6	-6	260	40	6	11
6	-9	280	60	4	10
7	-21	200	60	6	9

8	-3	300	80	2	7
9	-18	260	90	2	6
10	-9	220	40	4	8
11	-6	200	60	7	12
12	-12	200	70	6	11
13	-21	180	60	6	10
14	-3	280	80	4	9
16	-18	300	90	3	8
16	-24	160	80	2	8
17	-6	240	70	4	9
18	-9	220	60	6	10
19	-18	200	90	6	11
20	-3	300	60	6	12
21	-12	260	40	3	8
22	-9	200	70	2	6
23	-24	180	60	2	7
24	-6	240	60	4	9
26	-18	200	80	6	10
26	-21	220	90	6	11
27	-12	200	40	7	12
28	-3	280	70	4	9

29	-9	180	60	3	8
30	-24	140	60	6	10

Завдання № 11

За даними досліджень розподілу доходів населення деякої країни крива Лоренца описується функцією *y=f(x)*, де *y* – частка сукупного доходу, яку одержує частина *x* населення. Обчислити коефіцієнт Джині. (Див табл. 11).

Таблиця 11

Варіант	*y=f(x)*
1.	$y=1-\sqrt{1-x}$
2.	$y=\frac{x}{2-x}$
3.	$y=\frac{3x}{4-x}$
4.	$y=\frac{2x}{3-x}$
5.	$y=\begin{cases}\frac{2}{3}x, x\in\left[0;\frac{1}{2}\right],\\ \frac{4}{3}x-\frac{1}{3}, x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\end{cases}$
6.	$y=\frac{x}{x^2-2x+2}$
7.	$y=\frac{x}{\sqrt{1-x}+1}$
8.	$y=\frac{3x}{4-x}$

9.	$y=\frac{9x}{10-x}$
10.	$y=\frac{2xe^{x-1}}{x+1}$
11.	$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x, x\in\left[0;\frac{2}{5}\right],\\ \frac{4}{3}x-\frac{1}{3}, x\in\left[\frac{2}{5};1\right]\end{cases}$
12.	$y=\frac{3xe^{x-1}}{2x+1}$
13.	$y=\frac{2x^2}{3-x}$
14.	$y=x^6e^{\sqrt{1-x}}$
15.	$y=\frac{x}{2-x}$
16.	$y=xe^{x-1}$
17.	$y=x\left(1-\sqrt{1-x}\right)$
18.	$y=\frac{3xe^{x-1}}{2+x}$
19.	$y=\begin{cases}\frac{3}{5}x, x\in\left[0;\frac{1}{3}\right],\\ \frac{6}{5}x-\frac{1}{5}, x\in\left[\frac{1}{3};1\right]\end{cases}$
20.	$y=x(2-x)e^{x-1}$
21.	$y=x^{11}e^{\sqrt{1-x}}$

22.	$y=x^4\left(1-\sqrt{1-x}\right)$
23.	$y=x^2e^{x-1}$
24.	$y=\dfrac{x}{2-x}$
25.	$y=\dfrac{2x^3}{(3-x)(2-x)}$
26.	$y=\begin{cases}\dfrac{2}{7}x, x\in\left[0;\dfrac{1}{4}\right],\\ \dfrac{26}{21}x-\dfrac{5}{21}, x\in\left[\dfrac{1}{4};1\right]\end{cases}$
27.	$y=x^2(2-x)\left(1-\sqrt{1-x}\right)$
28.	$y=x^5e^{x-1}$
29.	$y=\dfrac{4x}{5-x}$
30.	$y=x^3\left(5-4x\right)e^{x-1}$

Завдання №12

Знайти обсяг реалізованої продукції $y=y(t)$ за час $t=10$, якщо модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y'=Ay(B-y)$ і $y(0)=m$ (t вимірюють у днях). (Див табл. 12).

Таблиця 12

Варіант	A	B	m
1	1	6	3
2	1	4	2
3	2	6	3

4	1	10	6
6	1	3	2
6	0,6	1	2
7	3	3	4
8	1	2	6
9	2	6	3
10	4	4	3
11	0,6	2	1
12	2	1	0,6
13	2	3	1
14	1	2	0,6
16	2	4	2
16	0,6	8	4
17	4	6	2
18	1	7	1
19	2	10	3
20	3	1	1
21	2	7	14
22	1	8	4
23	0,6	3	6
24	1	9	3
26	2	6	10
26	1	12	1
27	2	10	3
28	3	13	4
29	0,6	11	2
30	3	16	1

Завдання №13

Швидкість зростання інвестиційного капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку r неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції. (Див табл. 13).

Таблиця 13

№	Інвестиція (тис. грн.) $K(0)=K_0$	Пропорційні відсотки R, $r=\dfrac{R}{100}$
1	10	5
2	15	3
3	7,5	4
4	8	4
5	8,5	5
6	7,25	4
7	15	5
8	12,5	4
9	12	3

10	11	5
11	11,25	4
12	9	3
13	9,5	4
14	12,25	4
15	9,75	4
16	5,5	10
17	10,25	5
18	10,45	5
19	12	4
20	13,25	5
21	8,5	4
22	3,25	4
23	14	2
24	8	4
25	10	2
26	12,25	5
27	8,75	4
28	15	2
29	14,5	1
30	13	2

Завдання №14

Прибуток деякої компанії $p(t)$ (t - вимірюється у роками) задовольняє диференціальне рівняння (див. таблицю 14) . Знайти закон зростання прибутку.

Таблиця 14

№	Прибуток компанії
1	$p' + \frac{p}{t} = 3t$
2	$p' + \frac{2tp}{1+t^2} = 1 + t^2$
3	$p' + \frac{1-2t}{t^2} p = 1$
4	$p' + 2pt = 3t^3 p^3$
5	$p' + \frac{3p}{t} = \frac{2}{t^3}$
6	$p' + 2pt = -2t^3$
7	$p' + pt = -t^3$
8	$2(p' + p) = tp^2$

9	$p' + 2pt = -te^{-t^2}$
10	$p' - p = t^4$
11	$p' + \frac{2p}{t+1} = (t+1)^3$
12	$p' - p\cos t = -\sin 2t$
13	$p' - 4pt = -4t^3$
14	$p' + p = tp^2$
15	$p' + pt = -t^4$
16	$p' + \frac{p}{t} = 5t$
17	$p' - p = t^3$
18	$p' - p\cos t = \sin 2t$
19	$p' + \frac{2tp}{t^2+1} = 2t$
20	$2(p' + p) = tp^2$
21	$p' + \frac{3p}{t} = \frac{2}{t^3}$
22	$p' + \frac{2tp}{1+t^2} = 1 + t^2$
23	$p' + \frac{4tp}{t^2+1} = \frac{3}{t^2+1}$
24	$p' + \frac{p}{t} = 6t$
25	$p' + \frac{2p}{t+2} = (t+2)^2$
26	$p' + \frac{2tp}{1+t^2} = 1$
27	$p' + \frac{3p}{t} = \frac{4}{t^2}$
28	$2(p' + p) = tp^2$
29	$p' + \frac{1-2t}{t^2} p = 1$
30	$p' + \frac{p}{t} = 6t$

Література

1. *В.В. Барковський , Н.В. Барковська.* Вища математика для економістів.- Київ: центр учб. Літ, 2010.

2 . *Колесников А.Н.* Краткий курс высшей математики для экономистов: Учебное пособие. – М.: Инфра – М,1997.

3 . Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: «Банки и биржи», 1998. – 471с.

4. *Кузнецов Ю.Н.* Аналитическая геометрия с экономическими примерами и задачами. – Київ: Вища школа, 1975.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова – М.: Инфра – М, 2003.- 575с.

6. *Грисенко М.В.* Математика для економістів. Методи і моделі, приклади та задачі. – Київ : «Либідь», 2007 .