НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 517.928

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ О. І. Клесов
«___»_____________20__ р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем з періодичними коефіцієнтами»

Виконала:
студентка II курсу магістратури, групи ОМ-21мп
Кавтиш Єлизавета Олексіївна __________

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Самусенко Петро Федорович __________

Рецензент:
науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань
Інституту математики НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Дворник Анатолій Володимирович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____________

Київ – 2024

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
___________ Олег КЛЕСОВ
«___» __________ 2023 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію
Кавтиш Єлизаветі Олексіївній

1. Тема дисертації «Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем з періодичними коефіцієнтами», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, доцент Самусенко Петро Федоровивич, затверджені наказом по університету від « 13 » листопада 2023 р. № 5250-с
2. Термін подання студентом дисертації 11.01.2024
3. Об’єкт дослідження диференціально-алгебраїчні системи
4. Предмет дослідження сингулярно збурені диференціально-алгебраїчні системи з періодичними коефіцієнтами
5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) Ознайомитися з літературою за тематикою дослідження.

2) Навести необхідні теоретичні відомості з теорії матриць та теорії диференціальних рівнянь.

3) Навести класичні результати теорії асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами і малим параметром.

4) Довести теорему про існування та єдиність періодичного розв'язку регулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи з періодичними коефіцієнтами у випадку простих елементарних дільників граничної в'язки матриць.

5) Довести теорему про існування та єдиність періодичного розв'язку сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи з періодичними коефіцієнтами у випадку простих елементарних дільників граничної в'язки матриць.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу ___ слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій

8. Дата видачі завдання 07.09.2023

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Огляд літератури	07.09.23-07.10.23	Виконано
2	Опанування необхідними відомостями з теорії матриць та теорії лінійних диференціальних рівнянь.	08.10.23-25.10.23	Виконано
3	Вивчення основ асимптотичного інтегрування диференціальних рівнянь з параметром.	26.10.23-08.11.23	Виконано
4	Доведення теореми про існування та єдиність періодичного розв’язку регулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи з періодичними коефіцієнтами.	09.11.23-30.11.23	Виконано
5	Доведення теореми про існування та єдиність періодичного розв’язку сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи з періодичними коефіцієнтами.	01.12.23-15.12.23	Виконано
6	Оформлення магістерської дисертації	16.12.23-10.01.24	Виконано

Студент Єлизавета КАВТИШ

Науковий керівник Петро САМУСЕНКО

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 46 сторінок, 17 слайдів презентації, 25 першоджерел.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

Об'єктом дослідження: диференціально-алгебраїчні системи.

Предмет дослідження: сингулярно збурені диференціально-алгебраїчні системи з періодичними коефіцієнтами.

Мета роботи: розробка методів асимптотичного інтегрування диференціально-алгебраїчних систем з періодичними коефіцієнтами.

Перший розділ магістерської дисертації містить теоретичні відомості з теорії матриць, які використовуються як апарат при побудові розв'язків систем диференціальних рівнянь.

Другий розділ містить класичні результати асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Ці результати узагальнено для диференціально-алгебраїчних систем. Зокрема, доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв'язку збуреної диференціально-алгебраїчної системи з періодичними коефіцієнтами за умови простих елементарних дільників граничної в'язки матриць. Розглядається випадок як регулярного, так і сингулярного збурення.

Ключові слова: асимптотичний розв'язок, диференціально-алгебраїчна система, періодичний розв'язок, елементарні дільники, власні значення.

ABSTRACT

The master's thesis contains 46 pages, 17 presentation slide, 25 primary sources. The work consists of an introduction, two chapters, conclusions and a list of used sources.

The object of research: differential-algebraic systems.

Research subject: singularly perturbed differential-algebraic systems with periodic coefficients.

The purpose of the work: development of methods of asymptotic integration of differential-algebraic systems with periodic coefficients.

The first chapter of the master's thesis contains theoretical information on the theory of matrices, which are used as an apparatus for constructing solutions of systems of differential equations.

The second section contains classical results of asymptotic integration of systems of differential equations with periodic coefficients. These results are generalized for differential-algebraic systems. In particular, theorems on existence and uniqueness have been proved

of the periodic solution of a perturbed differential-algebraic system with periodic coefficients under the condition of simple elementary divisors of the limiting matrix matrix. The case of both regular and singular perturbation is considered.

Keywords: asymptotic solution, differential-algebraic system, periodic solution, elementary divisors, eigenvalues.

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні рівняння є універсальним математичним апаратом, який застосовується при дослідженні різноманітних природних процесів та при розв'язуванні технічних задач. Головною проблемою при цьому є знаходження розв'язків відповідних диференціальних рівнянь. Доволі часто фізичні процеси описуються за допомогою диференціальних рівнянь, що містять малий параметр. Одними з найбільш ефективних методів наближеного інтегрування таких рівнянь є асимптотичні методи, що ґрунтуються на ідеї розкладу шуканого розв’язку в ряд за степенями малого параметра. Хоча такі ряди, як правило, є розбіжними, наближений розв’язок, отриманий шляхом обривання формального ряду на m-му члені, достатньо добре наближує невідомий точний розв’язок. Побудовані таким чином наближені розв’язки мають асимптотичний характер - вони прямують до відповідних точних розв’язків не лише із збільшенням числа m, але, насамперед, при прямуванні до нуля малого параметра і фіксованому m.

Асимптотичні методи доволі часто використовують у різних розділах теорії диференціальних рівнянь. Найбільш ефективні вони при наближеному розв’язуванні диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами (коефіцієнти рівнянь є функціями повільного часу $\tau = \varepsilon t$, де ε – якийсь числовий параметр).

До диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами зводяться різноманітні задачі практики: задачі механіки, автоматичного регулювання, хімічної кінетики, задачі оптимального керування, теорії коливань тощо.

У 1807 р. Ж. Фур’є запропонував оригінальний метод розв’язування диференціальних рівнянь із частинними похідними. Цей метод приводить до звичайних диференціальних рівнянь, які містять деякий параметр. При застосуванні методу відокремлення змінних (методу Фур'є) виникають дві основні задачі:

1. Про знаходження розв'язків (фундаментальних функцій) звичайних диференціальних рівнянь.
2. Про розклад довільної функції в ряд за фундаментальними функціями.

У частинних випадках задачі 1, 2 розв'язані вже самим Фур'є.

У працях Ж. Ліувілля наведено умови, при виконанні яких довільна функція може бути розвинена в ряд за фундаментальними функціями рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[\lambda g(x)-r(x)]y=0 \tag{1}$$

λ – великий параметр.

Перші результати щодо асимптичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з великим параметром були отримані у працях Л. Шлезінгера, Дж. Біркгофа, Я.Д. Тамаркіна.

У працях В.І. Тржицинського узагальнено результати Л. Шлезінгера, Дж. Біркгофа, Я.Д. Тамаркіна на випадок інтегро-диференціальних рівнянь.

Суттєвий внесок у теорію асимптотичного інтегрування диференціальних рівнянь зробили Г.Л. Туррітін і М. Хукухара. Вони запропонували процедуру асимптотичного розщеплення системи лінійних диференціальних рівнянь на підсистеми нижчого порядку.

У фундаментальних роботах М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського створено нові асимптотичні методи нелінійної механіки, які тепер є одними із головних методів дослідження процесів, що відбуваються в коливних системах.

Під впливом асимптотичних методів Крилова-Боголюбова інтенсивно розвиваються дослідження диференціальних рівнянь із повільно змінними коефіцієнтами. Так, у працях С.Ф. Фещенка досліджується питання про асимптотичне зображення розв'язків диференціального рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon p(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + q(\tau,\varepsilon)y = \varepsilon f(\tau,\varepsilon)e^{i\Theta(\tau,\varepsilon)} \qquad (2)$$

де $\rho(\tau,\varepsilon), q(\tau,\varepsilon), f(\tau,\varepsilon)$ – повільно змінні функції, які розкладаються у формальні ряди за степенями малого параметра ε. При цьому розглянуто як нерезонансний, так і резонансний випадок (функція

$$i\nu(\tau) = i\frac{d\Theta(\tau,\varepsilon)}{d\tau},\ i = \sqrt{-1}$$

при деяких значеннях змінної τ із відрізка [0; L] дорівнює одному із простих коренів відповідного характеристичного рівняння).

Найбільш важливими результатами С.Ф. Фещенка є теореми про асимптотичне розщеплення системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x \qquad (3)$$

де $A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau)$ – матриці, елементи яких є повільно змінні функції. Для таких систем С.Ф. Фещенко показав, що за певних умов їх можна асимптотично розщепити на підсистеми нижчого порядку.

Зауважимо, що у випадку простих коренів характеристичного рівняння як наслідок із теорем Фещенка випливають теореми Біркгофа і Тамаркіна про асимптотичне зображення розв'язків системи (3).

Використовуючи теореми про асимптотичне розщеплення, взагалі кажучи, не можна побудувати асимптотичні розв'язки системи (3) у випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння цієї системи є кратні корені, яким відповідають кратні елементарні дільники.

Випадок, коли характеристичне рівняння має кратні корені, яким відповідають кратні елементарні дільники був досліджений М.І.Шкілем.

Ідеї С.Ф. Фещенка про асимптотичне розщеплення були узагальнені у працях К.А. Абгаряна для диференціально-алгебраїчних систем вигляду

$$B(\tau,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x,$$

де $A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t)$, $B(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(t)$, і аналогічних системи без параметра.

Сингулярно збурені системи

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{4}$$

для $\det B_0(t) \equiv 0$ при всіх $t \in [0;T]$ вперше були розглянуті в роботах І.І. Старуна та В.П. Яковця. На відміну від випадку, коли $\det B_0(t) \neq 0$, при інтегруванні системи (4) виникають суттєві ускладнення принципового характеру. Справді, відомо, що для побудови загального розв'язку такої системи необхідно знайти загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x \tag{5}$$

і деякий частинний розв'язок неоднорідної системи. Якщо $\det B_0(t) \neq 0$, то вигляд розв'язків (вигляд відповідних формальних рядів) визначається поведінкою коренів характеристичного рівняння

$$\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) = 0,$$

яке для неособливої матриці $B_0(t)$ має n коренів. Тоді системи (5) має n лінійно незалежних частинних розв'язків, лінійна комбінація яких і є загальним розв'язком вихідної системи. Якщо ж матриця $B_0(t)$ особлива, то можливі наступні випадки:

1) $\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) \equiv \det A_0(t) \neq 0$;

2) $\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) \equiv 0$;

3) рівняння $\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) = 0$ має $1 \leq k \leq n-1$ коренів.

За визначенням, у випадках 1), 3) в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ є регулярною, а у випадку 2) – сингулярною.

Виявляється, що кількість і вигляд розв’язків системи (5) суттєво залежать від вигляду матриці $B(t,\varepsilon)$. Тому окремо розглядають випадки $B(t,\varepsilon)\equiv B(t)$ та $B(t,\varepsilon)\equiv\sum_{s\ge 0}\varepsilon^s B_s(t),$ де хоч би одна з матриць $B_s(t),\, s\ge 1,$ відмінна від нульової. Якщо $B(t,\varepsilon)=B(t)$, то загальний розв’язок системи (5) можна знайти лише за умови умови 3). При цьому система (5) досліджується, насамперед, у випадку регулярної в’язки матриць $A_0(t)-\lambda B_0(t)$. Якщо ж хоч одна з матриць $B_s(t),\, s=1,2,...,$ відмінна від нульової, то, як правило, вважають, що $\det B(t,\varepsilon)\neq 0$ при $\varepsilon\neq 0$. Тоді існує загальний розв’язок системи (4) у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних частинних розв’язків.

Якщо $\varepsilon=1$, то система (4) набуде вигляду

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t). \tag{6}$$

Такі системи при $\det B(t)\equiv 0$ вивчались у працях багатьох дослідників. Найбільш суттєві результати отримали Ю.О. Бояринцев, В.М. Корсуков, В.А. Єременко, В.Ф. Чистяков, Ю.Д. Шлапак. Для систем (6) з періодичними коефіцієнтами у працях Ю.Д. Шлапака побудовано періодичне неособливе перетворення, за допомогою якого вихідну систему можна розщепити на дві такі системи: алгебраїчну і диференціальну. Таким чином, питання про існування періодичного розв'язку системи (6) зводиться до аналогічного питання але вже для диференціальної системи меншого порядку.

Для сингулярно збуреної системи (4) М.І. Шкілем встановлено достатні умови некритичності відповідної однорідної системи, доведено існування єдиного розв'язку неоднорідної системи, а також побудовано асимптотичні формули для мультиплікаторів системи.

Для нелінійних систем диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами у працях Дж. Хейла доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв’язку. При цьому припускалось, що матриця у лінійній частині відповідних систем є сталою. Розглядався випадок регулярно та сингулярно збуреної системи.

У даній роботі результати Дж. Хейла узагальнюються для диференціально-алгебраїчних систем регулярно або сингулярно збурених.

РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ МАТРИЦЬ

1.1 . Основи теорії матриць

Прямокутну таблицю що складається з m рядків і n стовпців

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

називають прямокутною матрицею розмірів $m \times n$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці.

Позначають матриці великими латинськими літерами, наприклад A, B. Скорочено матрицю (1.1.1) будемо записувати так $A = \| a_{ij} \|, i = 1,...,m;\ j = 1,...,n.$

Матрицю, в якої $m = n$ називають квадратною і позначають $A = \| a_{ij} \|_1^n$.

Матриці розмірів $1 \times m$ і $n \times 1$ називають відповідно вектор-рядком і вектор-стовпцем.

Визначник квадратної матриці A позначатимемо $|A|$ або $\det A$. Матриця, для якої $\det A = 0$ називається особливою, а в протилежному випадку - неособливою.

Квадратну матрицю, всі елементи якої крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю називають діагональною. Її позначають $\{d_1, d_2, ..., d_n\}$, де d_i, $i = \overline{1,n}$ - елементи головної діагоналі.

Діагональну матрицю з одиничними елементами називають одиничною і позначають E. Надалі, якщо це буде потрібно, через E_m позначатимемо одиничну матрицю порядку m.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю називають нульовою і позначають O.

Матрицю A називають нільпотентною, якщо існує таке натуральне число m, що

$$A^m = O,$$

де $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m}$. При цьому число m називають індексом нільпотентності. Наприклад, нільпотентною є матриця

$$H_m = (h_{ij})_1^m, \; h_{ij} = \begin{cases} 1, \; j = i + k \\ 0, \; j \neq i + k \end{cases},$$

індекс нільпотентності якої дорівнює m.

Матриця A^{-1} називається оберненою до A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема 1.1.1 Матриця A має обернену тоді і тільки тоді коли $\det A \neq 0$.

Матрицю $A - \lambda E$ називають характеристичною матрицею, а многочлен $\det(A - \lambda E)$ характеристичним многочленом матриці A.

«Розділивши» прямокутну матрицю розмірів $m \times n$ горизонтальними і вертикальними лініями отримаємо так названу блочну матрицю, елементами якої є матриці. Блочну матрицю, у якої всі блоки крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, є нульовими матрицями називають квазідіагональною і позначають

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} = \{A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{mm}\}.$$

Матрицю $A(\lambda)$, елементи якої є многочленами від λ,

$$A(\lambda) = \left\| a_{ik}^{(0)} \lambda^l + a_{ik}^{(1)} \lambda^{l-1} + \ldots + a_{ik}^{(l)} \right\|$$

називають многочленною.

Дві матриці $A = \| a_{ij} \|_1^n$ і $B = \| b_{ij} \|_1^n$ називаються еквівалентними якщо існують такі неособливі матриці P і Q, що $A = PBQ$. Якщо при цьому $Q = P^{-1}$, то матриці A і B називаються подібними.

1.2. Канонічна форма матриці

Розглянемо матрицю $A = \| a_{ik} \|_1^n$ з елементами з поля K. Складемо для неї характеристичну матрицю. Многочлени

$$i_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \; i_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \ldots, \; i_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}, \qquad (1.2.1)$$

де $D_j(\lambda)$ – найбільший спільний дільник всіх мінорів $j-$ го порядку матриці $A - \lambda E$ ($j = \overline{1, n}, D_0(\lambda) \equiv 1$), називають інваріантними многочленами матриці A.

Розкладемо інваріантні многочлени $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ на незвідні в полі K множники:

$$i_1(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{c_1} [\varphi_2(\lambda)]^{c_2} \ldots [\varphi_s(\lambda)]^{c_s},$$
$$i_2(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{d_1} [\varphi_2(\lambda)]^{d_2} \ldots [\varphi_s(\lambda)]^{d_s},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$i_n(\lambda) = [\varphi_1(\lambda)]^{t_1} [\varphi_2(\lambda)]^{t_2} \ldots [\varphi_s(\lambda)]^{t_s}.$$

Відмінні від одиниці многочлени серед $[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}$,… $[\varphi_s(\lambda)]^{t_s}$ називаються елементарними дільниками матриці A.

Якщо відомі інваріантні многочлени (а тому і елементарні дільники) матриці A, то можна достатньо просто з’ясувати її канонічну (найпростішу у певному розумінні) структуру.

Многочленна прямокутна матриця називається діагональною, якщо вона має вигляд $\{a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_s(\lambda), 0, \ldots, 0\}$, де $a_i(\lambda) \neq 0$, ($i = \overline{1, s}$) і кожен із многочленів $a_2(\lambda), \ldots, a_s(\lambda)$ ділиться без остачі на попередній. При цьому старші коефіцієнти всіх многочленів дорівнюють одиниці.

Теорема 1.2.1. Многочленна матриця $A(\lambda)$ еквівалентна деякій канонічній діагональній матриці

$$\begin{pmatrix} i_m(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i_{m-1}(\lambda) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & i_1(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

де $m = rangA(\lambda)$, а $i_1(\lambda), i_2(\lambda), ..., i_m(\lambda)$ – інваріантні многочлени матриці $A(\lambda)$, які визначаються за формулами (1.2.1).

Наслідок 1.2.1. Дві прямокутні матриці однакових розмірів $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони мають однакові інваріантні многочлени.

Теорема 1.2.2. Якщо два регулярні [1] двочлени $A_0\lambda + A_1$ і $B_0\lambda + B_1$ еквівалентні, то ці двочлени строго еквівалентні, тобто в тотожності

$$B_0\lambda + B_1 = P(\lambda)(A_0\lambda + A_1)Q(\lambda)$$

неособливі матриці $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ можна замінити сталими неособливими матрицями P і Q.

Розглянемо матриці $A = \| a_{ik} \|_1^n$, $B = \| b_{ik} \|_1^n$. Нехай $i_1(\lambda), i_2(\lambda), ..., i_n(\lambda)$ – інваріантні многочлени матриці A.

Теорема 1.2.3. Для того щоб дві матриці $A = \| a_{ik} \|_1^n$ і $B = \| b_{ik} \|_1^n$ були подібні необхідно і достатньо щоб вони мали однакові інваріантні многочлени, або що те саме, однакові елементарні дільники в полі K.

З теореми 1.2.3 випливає, що інваріантні многочлени визначають вихідну матрицю A з точністю до перетворення подібності.

В теорії диференціальних рівнянь серед канонічних форм матриць найчастіше використовують так названу жорданову форму.

Припустимо, що числове поле K містить елементи матриці A і всі

---

[1]Многочлен з матричними коефіцієнтами $A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + ... + A_m$ називається регулярним, якщо $|A_0| \neq 0$.

характеристичні числа цієї матриці. Тоді елементарні дільники матриці A мають вигляд

$$(\lambda-\lambda_1)^{s_1},(\lambda-\lambda_2)^{s_2},\ldots,(\lambda-\lambda)^{s_t} \quad (\sum_{i=1}^{t} s_i = n) \tag{1.2.3}$$

Розглянемо один із елементарних дільників $(\lambda-\lambda_0)^s$ і поставимо йому у відповідність матрицю порядку s :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 E_s + H_s \tag{1.2.4}$$

За побудовою, матриця $\lambda_0 E_s + H_s$ має один елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0)^s$.

Матрицю (1.2.4) називають жордановою клітиною, що відповідає елементарному дільнику $(\lambda-\lambda_0)^s$.

Якщо жорданові клітини, що відповідають елементарним дільникам (1.2.3) позначити через $J_1, J_2, \ldots, J_t$, то многочлени (1.2.3) є елементарними дільниками квазідіагональної матриці $J = \{ J_1, J_2, \ldots, J_t \}$.

Запишемо матрицю J наступним чином

$$J = \{ \lambda_1 E_1 + H_1, \lambda_2 E_2 + H_2, \ldots, \lambda_t E_t + H_t \}.$$

Оскільки матриці A і J мають однакові елементарні дільники, то вони подібні, тобто існує така неособлива матриця T , що

$$A = T\, J\, T^{-1} = T\, \{ \lambda_1 E_1 + H_1, \lambda_2 E_2 + H_2, \ldots, \lambda_t E_t + H_t \}\, T^{-1}. \tag{1.2.5}$$

Матриця J називається жордановою нормальною формою або просто жордановою формою матриці A. Жорданова форма визначається квазідіагональним виглядом і спеціальною структурою діагональних клітин.

Якщо елементарні дільники матриці A прості, то її жордановою формою є діагональна матриця

$$A = T\, \{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \}\, T^{-1}.$$

1.3.Функції від матриць

Нехай

$$C_n = \| c_{ij}^{(n)} \|, \ \ n = 1,2,... \qquad (1.3.1)$$

послідовність матриць однакових розмірів. Тоді матрицю

$$C = \lim_{n\to\infty} C_n \equiv \| \lim_{n\to\infty} c_{ij}^{(n)} \| \ , \qquad (1.3.2)$$

якщо вона існує, називають границею послідовності (1.3.1).

Вираз вигляду

$$U_1 + U_2 + ... + U_n + ... \qquad (1.3.3)$$

називається матричним рядом.

Матричний ряд (1.3.3) називається збіжним, якщо існує границя послідовності його частинних сум

$$S = \lim_{n\to\infty} (U_1 + U_2 + ... + U_n).$$

При цьому число S називають сумою ряду (1.3.3) і записують $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$.

Матричний ряд (1.3.3) називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд з норм[2] його членів

$$\|U_1\| + \|U_2\| + ... + \|U_n\| + ...$$

Теорема 1.3.1. Абсолютно збіжний матричний ряд збігається.

Наслідок 1.3.1 (ознака порівняння). Якщо матричний ряд (1.3.3) абсолютно збігається і мають місце нерівності

$$\|V_n\| \le \|U_n\| \ , \ n = 1,2,...$$

то матричний ряд $V_1 + V_2 + ... + V_n + ...$ також абсолютно збігається.

Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \qquad (1.3.4)$$

де X – квадратна матриця порядку s, a_n – комплексні числа.

---

[2] Тут під нормою матриці A розуміють одне із чисел : $\|A\|_I = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ $\|A\|_{II} = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ $\|A\|_{III} = \{ \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \}^{1/2}$

Поряд з матричним рядом (1.3.4) розглянемо скалярний степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{1.3.5}$$

де x – комплексна змінна і нехай R – його радіус збіжності.

Теорема 1.3.2. Матричний степеневий ряд (1.3.4) збігається абсолютно для кожної такої матриці X, що

$$\|X\| < R. \tag{1.3.6}$$

Якщо функція $F(X)$ в деякій області D є сумою матричного степеневого ряду за степенями X, тобто

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X^n$$

або

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n B_n$$

де A_n, B_n $(n = 0,1,2,...)$ – сталі матриці, то $F(X)$ називається аналітичною функцією в області D .

Нехай $F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ – функція, аналітична в області $\|X\| < R$.

Теорема 1.3.3. Якщо $F(X)$ визначена для матриці X, то вона визначена також для подібної матриці $SXS^{-1} (\det S \neq 0)$ і має місце формула

$$F(SXS^{-1}) = SF(X)S^{-1} \ . \tag{1.3.7}$$

Теорема 1.3.4. Матричний степеневий ряд (1.3.4) збігається, якщо всі власні значення $\lambda_1,...,\lambda_s$ матриці X належать кругу збіжності відповідного числового ряду (1.3.5), тобто, якщо виконуються нерівності

$$|\lambda_k| < R, \ k = 1,...,n$$

де R – радіус збіжності ряду (1.3.5). Якщо ж хоча б одне власне значення матриці X лежить за межами замкнутого круга збіжності $|x| \le R$, то ряд розбігається.

Наслідок 1.3.2. Якщо власні значення матриці X належать кругу збіжності числового ряду (1.3.5), то характеристичними коренями матриці $F(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n X^n$ будуть числа $F(\lambda_k),(k=1,...,n)$. Якщо до того ж $F'(\lambda_k)\neq 0,(k=1,...,n)$, то порядки відповідних клітин Жордана матриць X і $F(X)$ дорівнюють один одному.

1.4. Експонента матриці

Нехай задано квадратну матрицю $X = \| x_{ij} \|_1^n$. Експонентою квадратної матриці X називають матричну функцію

$$\exp X \equiv e^X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}. \tag{1.4.1}$$

Відомо, що матричний ряд (4.1) абсолютно збігається для довільної квадратної матриці X.

Нехай X і Y комутативні, тобто має місце рівність $XY = YX$. Доведемо комутативність експоненти матриці, тобто покажемо, що

$$e^X e^Y = e^{X+Y}. \tag{1.4.2}$$

Оскільки ряд (1.4.1) збігається абсолютно, то

$$e^X e^Y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{X^p Y^q}{p! q!}.$$

Покладемо $p + q = s$, ($s = 0,1,2,...$), тоді $q = s - p \ge 0$, тобто $p \le s$ і

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{s} \frac{X^p Y^{s-q}}{p! q!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^{s} C_s^p X^p Y^{s-p}. \tag{1.4.3}$$

Згідно з припущенням матриці X та Y комутативні. Тому

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_s^p X^p Y^{s-p} = (X+Y)^p.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$e^X e^Y = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} (X+Y)^s = e^{X+Y}.$$

Зауважимо, що з формули (1.4.1) випливає, що

$$(e^X)^{-1} = e^{-X},$$

тобто експонента від матриці відмінна від нуля для довільної матриці X.

Якщо матриці X_1 та X подібні, тобто

$$X_1 = SXS^{-1}, \ (\det S \ne 0),$$

то

$$\exp(SXS^{-1}) = S(\exp X)S^{-1}.$$

Нехай A – квадратна матриця. Розглянемо експоненту від матриці e^{At}, де t – числовий параметр. Позначимо через $\lambda_1,...,\lambda_m,(m \le n)$ власні значення матриці A, що відповідають різним клітинам $J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m)$ її жорданової форми, порядки яких дорівнюють $s_1,...,s_m$ відповідно. Тоді

$$A = S^{-1}\{J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m)\}S,$$

де S – деяка неособлива матриця.

Згідно формули (1.4.1) дістаємо

$$e^{At} = \exp\{tS(J_1(\lambda_1),...,J_m(\lambda_m))S\} = S^{-1}\{e^{tJ_1(\lambda_1)},...,e^{tJ_m(\lambda_m)}\}S. \qquad (1.4.4)$$

Якщо покласти $J_q(\lambda_q) = \lambda_q E_q + H_q$, ($q = 1,...,m$), то (1.4.4) набуде вигляду

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}(\lambda_q E_q + H_q)^p =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{r=0}^{p} \frac{p!}{r!(p-r)!} \lambda_q^{p-r} H_q^r = \sum_{r=0}^{p} \frac{H_q^r t^r}{r!} \sum_{p=r}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^{p-r}}{(p-r)!}, \qquad (1.4.5)$$

Враховуючи нільпотентність H_q^r, дістаємо

$$\sum_{p=r}^{\infty} \frac{(\lambda_q t)^{p-r}}{(p-r)!} = e^{\lambda_q t}.$$

Тому

$$e^{tJ_q(\lambda_q)} = e^{\lambda_q t} \sum_{r=0}^{s_q - 1} \frac{t^r}{r!} H_q^r, (q = 1,...,m). \qquad (1.4.6)$$

Зазначимо, що за допомогою формул (1.4.4), (1.4.6) визначають жорданову форму матриці e^{At}.

Крім того, з формул (1.4.4), (1.4.6) для $t = 1$ випливає, що, якщо $\lambda_q\,(q = 1,...,m)$ – власні значення матриці A, то e^{λ_q} є власними значеннями матриці e^A, і що порядки відповідних клітин Жордана матриць A і e^A однакові.

1.5. Логарифм матриці

Нехай задано неособливу матрицю B. Покажемо, що існує така матриця A, що $e^A = B$.

Нехай біноми $(\lambda - \lambda_1)^{r_1}, \dots, (\lambda - \lambda_1)^{r_m}$ є елементарними дільниками матриці B. Тоді, покладаючи

$$e^{A_i} = \lambda_i E_{r_i} + H_i \ ,$$

можна визначити матрицю A ($A = \{A_1, \dots, A_m\}$).

Справді, з нільпотентності матриці H_j випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} (\lambda_j)^{-k} H_j^k$. А тому існує сума цього ряду, яку називають логарифмом матриці $E_{r_j} + \frac{1}{\lambda_i} H_j$ і записують

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} (\lambda_j)^{-k} H_j^k = \ln(E_{r_j} + \frac{1}{\lambda_i} H_j) .$$

Отже, $\exp(\ln(E_{r_j} + \lambda_j^{-1} H_j))$ є многочленом за степенями $\lambda_j^{-1} H_j$.

Розглянемо тепер рівність

$$1 + x = e^{ln(1+x)} = 1 + \left(x - \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{1}{2} x^2 + \dots \right)^2 + \dots, \ (|x| < 1) .$$

Зводячи подібні доданки у правій частині останньої рівності, приходимо до висновку - коефіцієнти при степенях $x^k, k \ge 2$, дорівнюють нулю, а коефіцієнт при x дорівнює 1. Ця тотожність виконується і для $\exp(\ln(E_{r_j} + \lambda_j^{-1} H_1))$, тому

$$\exp(\ln(E_{rj} + \lambda_j^{-1} H_j)) = E_{rj} + \lambda_j^{-1} H_j \ .$$

Отже, для відповідного блоку матриці A маємо

$$A_j = \ln \lambda_j E + \ln \left(E_{rj} + \frac{1}{\lambda_j} H_j \right).$$

Таким чином, матрицю A визначено. Матрицю A називають логарифмом матриці B і позначають $A = \ln B$.

1.6. В'язки матриць

Нехай дано матриці A, B, A_1, B_1 однакових розмірів $m \times n$ з елементами числового поля K. З'ясуємо умови, при яких існують такі неособливі матриці P і Q порядків відповідно m і n, що мають місце рівності

$$PAQ = A_1, \quad PBQ = B_1, \tag{1.6.1}$$

тобто

$$P(A + \lambda B)Q = A_1 + \lambda B_1. \tag{1.6.2}$$

Дві в'язки прямокутних матриць $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ однакових розмірів $m \times n$, для яких виконується рівність (1.6.2), де P і Q – сталі квадратні неособливі матриці відповідно порядків m і n, називають строго еквівалентними.

В'язка матриць $A + \lambda B$ називається регулярною, якщо матриці A і B є квадратними і визначник $\det(A + \lambda B)$ тотожно не дорівнює нулю.

У всіх інших випадках (вказані матриці не є квадратні, або якщо квадратні, то $\det(A + \lambda B) \equiv 0$) в'язка називається сингулярною.

Надалі розглядаємо регулярні в'язки матриць. Нехай матриці *A, B* в'язок $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$ є квадратними одного порядку.

Теорема 1.6.1. Дві в'язки квадратних матриць однакового порядку $A + \lambda B$ і $A_1 + \lambda B_1$, у яких $|B| \neq 0$ і $|B_1| \neq 0$ строго еквівалентні тоді і тільки тоді, коли ці в'язки мають однакові елементарні дільники в полі K.

Введемо поняття нескінченного елементарного дільника в'язки. Запишемо в'язку $A + \lambda B$ у більш загальному вигляді: $\mu A + \lambda B$, де λ, μ - деякі параметри. Позначимо через $D_k(\lambda, \mu)$ найбільший спільний дільник усіх мінорів k-го порядку матриці $\mu A + \lambda B$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Многочлени,

$$i_1(\lambda, \mu) = \frac{D_n(\lambda, \mu)}{D_{n-1}(\lambda, \mu)}, \; i_2(\lambda, \mu) = \frac{D_{n-1}(\lambda, \mu)}{D_{n-2}(\lambda, \mu)}, \ldots$$

називаються інваріантними многочленами в'язки $\mu A + \lambda B$.

Розкладаючи інваріантні многочлени за степенями незвідних в полі K многочленів отримаємо елементарні дільники $e_m(\lambda,\mu)$ ($m=1,2,\ldots$) в'язки $\mu A+\lambda B$ в цьому полі.

Тепер якщо $\mu=1$ у формулі для $e_m(\lambda,\mu)$, то таким чином ми отримуємо елементарні дільники $e_m(\lambda)$ в'язки $A+\lambda B$, які ще називають скінченними елементарними дільниками в'язки $\mu A+\lambda B$. Навпаки, кожен елементарний дільник $e_m(\lambda)$ степеня q в'язки $A+\lambda B$ породжує відповідний елементарний дільник в'язки $\mu A+\lambda B$ за формулою $e_m(\lambda,\mu)=$ $\mu^q e_m\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)$. Таким чином можна знайти всі елементарні дільники в'язки $\mu A+\lambda B$ крім елементарних дільників вигляду μ^q.

Елементарні дільники μ^q існують тоді і тільки тоді коли $|B|=0$, і мають назву нескінченних елементарних дільників в'язки матриць $A+\lambda B$.

Теорема 1.6.2. Для того, щоб дві регулярні в'язки матриць $A+\lambda B$ і $\mu A_1+\lambda B_1$ були строго еквівалентними необхідно і достатньо щоб вони мали однакові скінченні і нескінченні елементарні дільники.

З'ясуємо до якої канонічної форми можна звести регулярну в'язки $A+\lambda B$. Для цього припустимо що регулярна в'язка $\mu A+\lambda B$ має t нескінченних елементарних дільників $\mu^{s_1},\mu^{s_2},\ldots,\mu^{s_t},(s=\sum_{i=1}^{t}s_i)$ і m скінченних елементарних дільників $(\lambda-\lambda_1)^{t_1},\ldots,(\lambda-\lambda_m)^{t_m}$ $(\sum_{i=1}^{m}t_i=n-s)$.

Теорема 1.6.3. Регулярну в'язку $A+\lambda B$ можна звести до строго еквівалентного канонічного квазідіагонального виду $\Omega+\lambda H$, де

$$\Omega=\{E_s,W\},\ H=\{H^*,E_{n-s}\}$$

$$E_s=\{E_{s_1},E_{s_2},\ldots,E_{s_t}\},\ W=\{J_1,J_2,\ldots,J_m\},$$

$$H^*=\{H_{s_1},H_{s_2},\ldots,H_{s_t}\},\ E_{n-s}=\{E_{t_1},E_{t_2},\ldots,E_{t_m}\}.$$

РОЗДІЛ 2. АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ З ПЕРІОДИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

2.1. Деякі відомості теорії лінійних систем диференціальних рівнянь

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x,\ t \in [0;T]. \qquad (2.1.1)$$

Матрицю $X(t)$, стовпці якої є лінійно незалежними розв'язками системи (2.1.1), називають фундаментальною матрицею системи.

Теорема 2.1.1. Для того, щоб матриця, стовпцями якої є розв'язки системи (2.1.1) була фундаментальною необхідно і достатньо щоб $\det X(t) \neq 0, t \in [0;T]$.

Нехай матриця $X(t)$ – фундаментальна матриця системи. Тоді згідно теореми 2.1.1 існує обернена матриця $X^{-1}(t)$, тобто

$$X(t)X^{-1}(t) = E.$$

Продиференціювавши останню рівність за змінною t, дістаємо

$$0 = \frac{dX(t)}{dt}X^{-1}(t) + X(t)\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = B(t)X(t)X^{-1}(t) + X(t)\frac{dX^{-1}(t)}{dt},$$

тобто

$$\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)B(t). \qquad (2.1.2)$$

Отже, за побудовою $X^{-1}(t)$ є фундаментальною матрицею системи

$$\frac{dy}{dt} = -yB(t), \qquad (2.1.3)$$

де y – вже вектор-рядок. Систему (2.1.3) називають спряженою до системи (2.1.1). Фундаментальну матрицю спряженої системи ми будемо використовувавти в подальшому для побудови формальної фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь з параметром

Розглянемо систему (2.1.1) зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{2.1.4}$$

тут A - стала матриця. Як відомо, матриця

$$X(t) = e^{At} \tag{2.1.5}$$

є фундаментальною матрицею системи (2.1.4). Тому, для того, щоб дослідити поведінку розв'язків системи (2.1.4), достатньо з'ясувати структуру матриці e^{At}.

Якщо P - деяка стала неособлива матриця, то використовуючи неособливе перетворення

$$x = Py$$

систему (2.1.4) запишемо наступним чином

$$\frac{dy}{dt} = Cy, C = P^{-1}AP. \tag{2.1.6}$$

Матрицю C можна вважати квазідіагональною, діагональними елементами якої є відповідні жорданові клітини.

Фундаментальна матриця системи (2.1.6)

$$Y(t) = e^{Ct}$$

також є квазідіагональною, структура якої цілком визначається структурою матриці A.

Враховуючи, що

$$e^{Ct} = P^{-1}e^{At}P,$$

приходимо до таких висновків. Якщо дійсні частини власних значень матриці A від'ємні, то всі розв'язки системи (2.1.4) прямують до нуля при $t \to \infty$. Якщо ж дійсні частини власних значень матриці А недодатні, а власним значенням з нульовими дійсними частинами відповідають прості елементарні дільники, то розв'язки системи (2.1.4) обмежені для всіх $t \geq t_0$.

2.2. Системи диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (-\infty < t < \infty) \tag{2.2.1}$$

де x – n-вимірний вектор, а $A(t)$ – квадратна матриця порядку n. Припускаємо, що елементи матриці $A(t)$ є неперервними і періодичними за змінною t з деяким періодом $T \neq 0$ функціями, тобто $A(t+T) \equiv A(t)$. При цьому систему (2.2.1) називають періодичною системою, а T періодом матриці $A(t)$.

Теорема 2.2.1 (Флоке) Якщо $X(t)$ – фундаментальна матриця системи (2.2.1), то матриця $X(t+T)$ також є фундаментальною матрицею цієї системи. Для кожної такої фундаментальної матриці $X(t)$ існують такі неособлива періодична матриця $Q(t)$ періоду T і стала матриця B, що

$$X(t) = Q(t)e^{tB}. \tag{2.2.2}$$

Використовуючи теорему Флоке, можна визначити фундаментальну матрицю системи (2.2.1) на всій числовій осі.

Розглянемо тепер нелінійну систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + q(t,x,\varepsilon), \tag{2.2.3}$$

де ε малий параметр, x і q $-n$- вимірні вектори, A – квадратна матриця порядку n; елементи $A(t)$ та $q(t,x,\varepsilon)$ неперервні і періодичні за змінною t з періодом T; вектор-функція $q(t,x,\varepsilon)$ неперервна також за змінними x та ε і задовольняє умові Ліпшиця за змінною x для $-\infty < t < \infty,\ 0 \le \|x\| \le R,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$. Лінійна система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{2.2.4}$$

називається некритичною відносно T, якщо вона не має періодичних розв'язків, відмінних від тривіального ($x = 0$). У протилежному випадку система (2.2.4) називається критичною.

Лема 2.2.1. Якщо система (2.2.4) – некритична відносно T і $f(t)$ – довільний n- вимірний періодичний з періодом T вектор, то існує єдина T -періодична функція $x^*(t)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t). \tag{2.2.5}$$

Крім того, якщо $X(t)$ є фундаментальною системою розв'язків системи (2.2.4) і $X(0) = E$, то має місце оцінка

$$\left\| x^*(t) \right\| \le \frac{K}{T} \int_0^T \| f(u) \| du, \tag{2.2.6}$$

де

$$\frac{K}{T} = \sup_{0 \le t \le T} \sup_{t \le \tau \le t+T} \left\| \left\{ X(\tau) \left[X^{-1}(T) - E \right] X^{-1}(t) \right\}^{-1} \right\| -$$

стала, що не залежить від f (залежить лише від T та $X(t)$).

Доведення. Покажемо, що система (2.2.5) може мати не більше ніж один періодичний розв'язок. Справді, нехай система (2.2.5) має два різні періодичні розв'язки $y(t)$ та $z(t)$. Тоді справедливі рівності

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t),$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t).$$

Віднімаючи їх, дістаємо

$$\frac{d(y-z)}{dt} = A(t)(y-z).$$

Отже, система (2.2.4) має відмінний від нуля періодичний розв'язок, що суперечить припущенню про її некритичність.

Таким чином, система (2.2.5) може мати не більше ніж один періодичний розв'язок.

Побудуємо тепер періодичний розв'язок системи (2.2.5). Якщо $X(t)$ – фундаментальна матриця розв'язків системи (2.2.4), то для $X^{-1}(t)$ маємо

$$\frac{dX^{-1}(t)}{dt} = -X^{-1}(t)A(t).$$

Отже, якщо $x(t)$ – деякий розв'язок системи (2.2.5), для якого $x(0) = x_0$, то

$$\frac{d}{dt}\left[X^{-1}(t)x(t)\right] = X^{-1}(t)f(t),$$

або

$$X^{-1}(t)x(t) = x_0 + \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \qquad (2.2.7)$$

Звідси з умови періодичності розв'язку $x(t+T) = x(t)$ знаходимо x_0:

$$x_0 = \left(X^{-1}(T) - E\right)^{-1}\int_0^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau .$$

Тоді періодичний розв'язок системи (2.2.5) можна записати у вигляді

$$x^*(t) = X(t)\left((X^{-1}(T) - E)^{-1}\int_0^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right) =$$

$$= X(t)(X^{-1}(T) - E)^{-1}\left(\int_0^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + (X^{-1}(T) - E)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right) =$$

$$= X(t)(X^{-1}(T) - E)^{-1}\left(\int_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X^{-1}(T)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right) =$$

$$= X(t)(X^{-1}(T) - E)^{-1}\left(\int_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X^{-1}(T)\int_T^{t+T} X^{-1}(\tau - T)f(\tau)d\tau \right) =$$

$$= X(t)(X^{-1}(T) - E)^{-1}\left(\int_t^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + \int_T^{t+T} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \right) =$$

$$= X(t)(X^{-1}(T) - E)^{-1}\int_t^{t+\mathrm{T}} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau .$$

При цьому має місце оцінка (2.2.6).

Теорема доведена.

Теорема 2.2.2. Нехай система (2.2.4) – некритична відносно T і існує така неперервна та неспадна за ε, ρ функція $\eta(\varepsilon, \rho)$ для $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0,\ 0 \le \rho \le a$, що

$$\left\| q(t, x_1, \varepsilon) - q(t, x_2, \varepsilon) \right\| \le \eta(\varepsilon, \rho) \left\| x_1 - x_2 \right\|, \tag{2.2.8}$$

для всіх $-\infty < t < \infty,\ 0 \le \left\| x_1 \right\| \le \rho, 0 \le \left\| x_2 \right\| \le \rho,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, причому $q(t,0,0) = 0$, $\eta(0,0) = 0$.

Тоді існують сталі $\sigma > 0,\ \varepsilon_1 > 0$, такі, що для всіх $\varepsilon \in [0; \varepsilon_1],\ \left\| x \right\| \le \sigma$ система (2.2.3) має єдиний періодичний за змінною t з періодом T розв'язок $x^*(t, \varepsilon)$, причому $x^*(t,0) = 0$.

Доведення. Розглянемо множину S усіх неперервних n-вимірних вектор-функцій $x(t)$, періодичних за змінною t з періодом T. Позначимо через S_σ множину вигляду

$$S_\sigma = \left\{ x \in S : \left\| x \right\| \le \sigma \right\}.$$

Для $x \in S_\sigma$ визначимо функцію $\omega = Fx$ за допомогою співвідношення

$$\omega(t) = Fx(t) = \int_t^{t+\mathrm{T}} \left(X(u)(X^{-1}(T) - E) X^{-1}(t) \right)^{-1} q(u, x(u), \varepsilon) du, \tag{2.2.9}$$

де $X(u)$ така фундаментальна матриця системи (2.2.4), що $X(0) = E$. Тоді $\omega \in S$, і якщо існує така $x^* \in S$, що $x^* = Fx^*$, то функція x^* задовольняє систему (2.2.3). Зазначимо, що згідно леми 1 правильне і обернене твердження.

Покажемо, що для достатньо малих ε і σ існує нерухома точка оператора F. Для цього потрібно довести, що оператор, визначений за формулою (2.2.9) відображає множину S_σ в себе і є оператором стиску.

З нерівності (2.2.8) випливає існування такої функції $\mu(\varepsilon),\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, що $\mu(0) = 0$ і

$$\begin{aligned} \left\| q(t, x, \varepsilon) \right\| &\le \left\| q(t, x, \varepsilon) - q(t,0,\varepsilon) \right\| + \left\| q(t,0,\varepsilon) \right\| \le \\ &\le \eta(\varepsilon, \sigma) \left\| x \right\| + \mu(\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Нехай K – стала з леми 1. Тоді виберемо ε_1 і σ так, щоб виконувалась нерівність

$$K[\eta(\varepsilon_1,\sigma)\sigma + \mu(\varepsilon_1)] < \sigma .$$

Тоді оператор, визначений за формулою (2.2.9) відображає множину S_σ в себе і є оператором стиску. Отже, на множині S_σ існує єдина нерухома точка $x^*(t,\varepsilon)$ відображення F. З рівності (2.2.9) і неперервності функції $q(t,x,\varepsilon)$ за змінною ε випливає неперервність $x^*(t,\varepsilon)$ за змінною ε. Покажемо, що $x^*(t,0)=0$. Побудуємо для цього послідовні наближення за формулами

$$x^{(0)} = 0,$$
$$x^{(k+1)}(t) = Fx^{(k)}(t), \quad k = 0,1,2,...$$

Враховуючи, що $x^*(t,\varepsilon)$ є границею послідовності $\{x^{(k)}(t)\}$ при $n \to \infty$, то $x^*(t,0)=0$.

Теорему доведено.

Теорема 2.2.3. Якщо A – стала квадратна матриця порядку n з дійсними елементами, $\det A \neq 0$, функція $q(t,x,\varepsilon)$ задовольняє співвідношенню (2.2.8) і $h(t)$ — неперервна періодична функція періоду T, причому

$$\int_0^T h(t)dt = 0,$$

то існують такі $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ та $\sigma > 0$, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon[Bx + q(t,x,\varepsilon) + h(t)] \qquad (2.2.11)$$

має T-періодичний розв’язок $x^*(t,\varepsilon)$ і цей розв’язок єдиний в області $\| x \| < \sigma$, якщо $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$. Крім того, $x^*(t,0) = 0$.

Доведення. Нехай, S – множина всіх неперервних періодичних вектор-функцій з періодом T і нормою v , і нехай $S_\sigma = \{x \in S: v(x) \le \sigma\}$. Для $y \in S_\sigma$ визначимо функцію $w = Fx$ за допомогою співвідношення

$$w(t) = Fx(t) =$$

$$= (e^{-\varepsilon BT} - I)^{-1} \varepsilon \int_0^T e^{\varepsilon B(t-u)} [q(u, x(u), \varepsilon) + h(u)]\, du \qquad (2.2.12)$$

Оскільки $\det B \neq 0$, то матриця $(e^{-\varepsilon BT} - I)$ – неособлива при $\varepsilon \neq 0$ та $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ якщо $\varepsilon_1 > 0$ достатньо мале.

Інтегруючи (2.2.12) частинами, отримуємо

$$w(t) = Fx(t) = \varepsilon (e^{-\varepsilon BT} - I)^{-1} \left\{ \varepsilon B \int_0^T e^{-\varepsilon Bv} \left[\int_t^{t+v} h(\tau) d\tau \right] dv + \right.$$

$$\left. + \int_0^T e^{-\varepsilon Bv} [q(t+v, x(t+v), \varepsilon)] dv \right\}$$

оскільки $\int_0^T h(u) du = 0$.

За побудовою

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \varepsilon (e^{-\varepsilon BT} - I)^{-1} = (BT)^{-1}.$$

Тому нехай

$$K = \sup \| \varepsilon (e^{-\varepsilon BT} - I)^{-1} \|, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Звідси випливає, що для будь-якого $x \in S_\sigma$, при $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ виконуються нерівності

$$\| w(t) \| \leq K(\varepsilon K_1 + [\eta(\varepsilon, \sigma)\sigma + \mu(\varepsilon)] K_2),$$

$$\| w_1(t) - w_2(t) \| = \| Fx_1(t) - Fx_2(t) \| \leq K K_3 \eta(\varepsilon, \sigma) v(x_1 - x_2),$$

де K_1, K_2, K_3 деякі сталі, а $\mu(\varepsilon)$ визначається за формулою (2.2.10).

Виберемо ε_1 і σ настільки малими, щоб для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ виконувались нерівності

$$K(\varepsilon K_1 + [\eta(\varepsilon, \sigma)\sigma + \mu(\varepsilon)] K_2) \leq \sigma,$$

$$K K_3 \eta(\varepsilon, \sigma) < 1.$$

Тоді оператор F відображає множину S_σ в себе і є оператором стиску. Тому існує така єдина функція $x^*(t, \varepsilon) \in S_\sigma$, що $x^* = Fx^*$, тобто $x^*(t, \varepsilon)$ – періодичний розв’язок системи (2.2.11).

Це єдиний T-періодичний розв’язок системи (2.2.11), що належить області $\| x \| \leq \sigma$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ оскільки система

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon Bx$$

некритична і її періодичний розв'язок має бути нерухомою точкою відображення F.

Оскільки $x^*(t,\varepsilon)$ є границею рівномірно збіжної послідовності функцій

$$x^{(0)} = 0,$$

$$x^{(k+1)} = Fx^{(k)}, k \in N \cup \{0\},$$

то $x^*(t,\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорему доведено.

Теорема 2.2.4. Якщо A – стала квадратна матриця порядку n, дійсні частини власних значень якої відмінні від нуля, і якщо функція $q(t,x,\varepsilon)$ задовольняє умову (2.2.8), то існують такі $\varepsilon_1 > 0$ і $\sigma > 0$, що система рівнянь

$$\varepsilon\dot{x} = Ax + q(t,x,\varepsilon) \tag{2.2.13}$$

має періодичний розв'язок $x^*(t,\varepsilon)$ періоду T, неперервний за змінними t, ε при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1$, $x^*(t,0) = 0$ і цей розв'язок єдиний в області $0 \le \|x\| \le \sigma$.

Доведення. Нехай S – множина усіх неперервних n-вимірних вектор-функцій $x(t)$, періодичних за змінною t з періодом T і нормою ν, і нехай

$$S_\sigma = \{x \in S : \|x\| \le \sigma\}.$$

Для $x \in S_\sigma$ визначимо функцію $\omega = Fx$ за допомогою співвідношення

$$\omega(t) = Fx(t) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(\frac{-AT}{\varepsilon}\right) - E\right)^{-1} \int\limits_t^{t+T} q(u, x(u), \varepsilon) \exp\left(\frac{A(t-u)}{\varepsilon}\right) du. \tag{2.2.14}$$

Оскільки дійсні частини власних значень матриці A відмінні від нуля, то матриця $e^{-AT/\varepsilon} - E$ неособлива для всіх $\varepsilon > 0$.

Не обмежуючи загальності вважаємо, що $A = \{A_+, A_-\}$, де A_+ – квадратна матриця, власні значення якої є власними значеннями матриці A

з додатними дійсними частинами, а власні значення матриці A_- є власними значеннями A з від'ємними дійсними частинами. Покладемо

$$q = \mathrm{col}(q_+, q_-),$$
$$\omega = \mathrm{col}(\omega_+, \omega_-),$$

де розмірності векторів q_+, ω_+ і q_-, ω_- дорівнюють відповідно порядкам матриць A_+ і A_-. Тоді

$$\omega_+(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(\frac{-A_+T}{\varepsilon}\right) - E\right)^{-1}\int_0^T q_+(t+\upsilon, x(t+\upsilon), \varepsilon)\exp\left(\frac{-A_+\upsilon}{\varepsilon}\right)d\upsilon;$$

$$\omega_-(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(E - \exp\left(\frac{A_-T}{\varepsilon}\right)\right)^{-1}\int_0^T q_-(t+\upsilon, x(t+\upsilon), \varepsilon)\exp\left(\frac{A_-(T-\upsilon)}{\varepsilon}\right)d\upsilon.$$

За побудовою, існують такі сталі K_1 і $\alpha > 0$, що

$$\left\|\exp\left(\frac{-A_+\upsilon}{\varepsilon}\right)\right\| \le K_1\exp\left(\frac{-\alpha\upsilon}{\varepsilon}\right), \upsilon \ge 0$$
$$\left\|\exp\left(\frac{A_-(T-\upsilon)}{\varepsilon}\right)\right\| \le K_1\exp\left(\frac{-\alpha(T-\upsilon)}{\varepsilon}\right), \upsilon \le T,$$
$$\left\|\left(\exp\left(\frac{-A_+T}{\varepsilon}\right) - E\right)^{-1}\right\| \le K_1, \left\|\left(E - \exp\left(\frac{A_-T}{\varepsilon}\right)\right)^{-1}\right\| \le K_1$$

для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Для кожної вектор-функції $x \in S_\sigma$ і функції $\mu(\varepsilon)$, визначеної за формулою (2.2.10), мають місце нерівності

$$\begin{aligned} &\|\omega(t)\| \le \frac{2K_1^2}{\alpha}(\eta(\varepsilon,\sigma)\sigma + \mu(\varepsilon)), \\ &\|Fx_1(t) - Fx_2(t)\| \le \frac{2K_1^2}{\alpha}\eta(\varepsilon,\sigma)\|x_1 - x_2\|, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

для всіх t, ε при $0 \le t \le T$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$. Якщо σ, ε_1 вибрати так, щоб виконувались нерівності

$$\frac{2K_1^2}{\alpha}(\eta(\varepsilon_1,\sigma)\sigma + \mu(\varepsilon_1)) \le \sigma,$$
$$\frac{2K_1^2}{\alpha}\eta(\varepsilon_1,\sigma) < 1.$$

то F відображає S_σ в себе і є оператором стиску. Тому існує така єдина функція $x^*(t,\varepsilon) \in S_\sigma$, що $x^* = Fx^*$, тобто $x^*(t,\varepsilon)$ є періодичним розв'язком рівняння (2.2.13).

Зазначимо, що це єдиний періодичний розв'язок рівняння (2.2.13) періоду T, що належить області $D = \{(x,\varepsilon) : \|x\| \le \sigma; 0 < \varepsilon \le \varepsilon_1\}$, оскільки система $\varepsilon\dot{x} = Bx$ некритична і її періодичний розв'язок повинен бути нерухомою точкою F (лема 2.2.1).

Враховуючи, що $x^*(t,\varepsilon)$ границя рівномірно збіжної послідовності функцій

$$x^{(0)} = 0,$$

$$x^{(k+1)}(t) = Fx^{(k)}(t), \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

де F визначається за формулою (2.2.14), маємо $x^*(t,\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

2.3. Побудова періодичних розв'язків сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем

Розглянемо диференціально-алгебраїчну систему

$$B\frac{dx}{dt} = \varepsilon(Ax + q(t,x,\varepsilon) + h(t)) \qquad (2.3.1)$$

де $x = x(t,\varepsilon)$ – шукана n-вимірна вектор-функція, A, B – сталі квадратні матриці порядку n, $q(t,x,\varepsilon)$, $h(t)$ – задані n-вимірні вектор-функції, з дійсними або комплекснозначними компонентами, ε – малий параметр.

Припустимо, що система (2.3.1) задовольняє умови:

1. $rank\ B = n-1$, $detA \neq 0$.
2. В'язка матриць $A - \lambda B$ регулярна, має $n-1$ різних власних значень $\lambda_1, \lambda_2 \dots\ , \lambda_{n-1}$.
3. Функція $q(t,x,\varepsilon)$ неперервна за змінними x, t, ε на множині S,

$$S = \{(x,t,\varepsilon): ||x|| \leq \sigma, -\infty < t < \infty, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\},\ 0 < \varepsilon_0 \ll 1,$$

періодична за змінною t з періодом T.

4. Функція $h(t)$ неперервна на відрізку $[0;T]$, періодична з періодом T і

$$\int_0^T h(t)dt = 0.$$

З умов 1, 2 випливає існування таких неособливих матриць P, Q, що

$$PBQ = H = diag\{0, E_{n-1}\}$$

$$PAQ = \Omega = diag\{1, W_{n-1}\},$$

де E_{n-1} – одинична матриця $(n-1)$-го порядку,

$$W_{n-1} = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\ , \lambda_{n-1}\}.$$

У системі (2.3.1) покладемо $x = Qy$ і домножимо її обидві частини зліва на P:

$$H\frac{dy}{dt} = \varepsilon\big(\Omega y + g(t,y,\varepsilon) + k(t)\big), \qquad (2.3.2)$$

тут $g(t,y,\varepsilon) = Pq(t,y,\varepsilon)$, $k(t) = Ph(t)$.

Згідно структури в'язки матриць $\Omega - \lambda H$ систему (2.3.2) можна розщепити на такі дві системи:

$$0 = \varepsilon\big(y_1 + g_1(t,y,\varepsilon) + k_1(t)\big), \qquad (2.3.3)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \varepsilon\big(W_{n-1}y_2 + g_2(t,y,\varepsilon) + k_2(t)\big) \qquad (2.3.4)$$

де $y_1, g_1(t,y,\varepsilon), k_1(t)$ перші компоненти векторів $y, g(t,y,\varepsilon)$ та $k(t)$, $y_2, g_2(t,y,\varepsilon), k_2(t)$ - $(n-1)$ - вимірні вектори, які складаються з решти компонент векторів y, $g(t,y,\varepsilon)$ та $k(t)$ відповідно.

Розглянемо спочатку рівняння (2.3.3), яке запишемо так

$$y_1 = -g_1(t,y,\varepsilon) - k_1(t) \qquad (2.3.5)$$

або

$$y_1 = L_1 y_1,$$

де оператор L_1 визначається правою частиною формули (2.3.5).

Визначимо множину D наступним чином

$$D = \{y : Qy \in S, \| y \| \le \sigma_1\}.$$

Надалі припускаємо виконання таких умов:

5. $g(t,0,0) = 0$.

6. Для всіх $u, v \in D$ має місце нерівність

$$\| g(t,u,\varepsilon) - g(t,v,\varepsilon) \| \le c \| u - v \|,$$

де c достатньо мала стала, яка визначається нижче.

Зазначимо, що з умови 5 випливає, що

$$g(t,0,\varepsilon) = \mu(\varepsilon),$$

де $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай

$$D_1 = \{y_1(t,y_2,\varepsilon) \in C[0;T] : y_1(t+T,y_2,\varepsilon) = y_1(t,y_2,\varepsilon),$$
$$\| y_1(t,y_2,\varepsilon) \| \le \sigma_1\}.$$

Тоді

$$\| L_1 y_1 \| = \| g_1(t,y,\varepsilon) + k_1(t) \| =$$
$$= \| g_1(t,y,\varepsilon) - g_1(t,0,\varepsilon) + g_1(t,0,\varepsilon) - k_1(t) \| \le$$
$$\le \| g_1(t,y,\varepsilon) - g_1(t,0,\varepsilon) \| + \| g_1(t,0,\varepsilon) \| + \| k_1(t) \| \le$$
$$\le c\sigma_1 + \| g_1(t,0,\varepsilon) \| + \| k_1(t) \| \le c\sigma_1 + \mu(\varepsilon) + l,$$

де стала l визначається з нерівності

$$||k_1(t)|| \le l, t \in [0;T].$$

Припустимо, що мають місце умови:

7. $0 < c < 1$.

8. $\frac{l}{1-c} < 1$.

Тоді

$$\| L_1 y_1 \| \le \sigma_1,$$

тобто оператор L_1 відображає множину D_1 в себе.

Оскільки

$$\| L_1 \overline{y}_1 - L_1 \overline{\overline{y}}_1 \| = ||g_1(t, \overline{y}, \varepsilon) - g_1\left(t, \overline{\overline{y}}, \varepsilon\right)|| \le c||\overline{y}_1 - \overline{\overline{y}}_1||$$

то оператор L_1 на множині D_1 буде оператором стиску.

Таким чином, відображення (2.3.5) на множині D_1 має єдину нерухому точку. Отже, рівняння (2.3.5) має єдиний T-періодичний розв'язок $y_1 = y_1(t, y_2, \varepsilon)$.

Вважаючи, що $y_1 = y_1(t, y_2, \varepsilon)$ запишемо систему (2.3.4) так

$$\frac{dy_2}{dt} = \varepsilon\big(W_{n-1} y_2 + g_2(t, y_2, \varepsilon) + k_2(t)\big). \tag{2.3.6}$$

Тоді, як і в теоремі 2.2.3 попереднього параграфу приходимо до оцінки

$$\left||w(t)|\right| \le K\big(\varepsilon K_1 + \big(c\sigma_1 + \mu(\varepsilon)\big)K_2\big),$$

де

$$K = \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_1} ||\varepsilon(e^{-\varepsilon BT} - E)^{-1}|| = \frac{1}{T}\left||W_{n-1}^{-1}|\right| + O(\varepsilon)\ ,$$

$$K_2 = \left\|\int_0^T e^{-\varepsilon W_{n-1}\,v}\,d\vartheta\right\| = \big(1 + O(\varepsilon)\big)T,$$

K_1 – деяка стала, величина якої не принципова, оскільки добуток εK_1 малий.

Оператор, визначений за допомогою формули (2.2.12), відображає множину D_2,

$$D_2 = \{y_2(t,\varepsilon) \in C[0;T]: y_2(t+T,\varepsilon) = y_1(t,\varepsilon), \| y_2(t,\varepsilon) \| \le \sigma_1\}$$

в себе, якщо

$$c\sigma_1 K K_2 = c\sigma_1\left||W_{n-1}^{-1}|\right| + O(\varepsilon) < 1,$$

і буде оператором стиску, якщо

$$\|w_1(t) - w_2(t)\| < cKK_2 \left\|\overline{y}_2 - \overline{\overline{y}}_2\right\|,$$

де

$$cKK_2 = c\left||W_{n-1}^{-1}|\right| + O(\varepsilon) < 1.$$

Тоді, вважаючи σ_1 достатньо малим, припускаємо виконання наступної умови.

9. Нехай $c\left||W_{n-1}^{-1}|\right| < 1$.

При виконанні умови 8 відображення (2.2.12) на множині D_2 має єдину нерухому точку. Отже, рівняння (2.2.12) має єдиний T-періодичний розв'язок $y_2 = y_2(t, \varepsilon)$.

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2.3.1. Нехай для системи (3.1) виконуються умови 1-9. Тоді існують такі $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ і $\sigma > 0$, що для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ система рівнянь (2.3.1) має єдиний T-періодичний розв'язок $x(t, \varepsilon)$ на множині $\left||x|\right| \le \sigma,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$.

Розглянемо тепер сингулярно збурену системи

$$\varepsilon B \frac{dx}{dt} = Ay + q(t, x, \varepsilon), \qquad (2.3.7)$$

в якій матриці A, B та вектор $q(t, x, \varepsilon)$ такі ж як і у системі (2.3.1).

Тоді, за умов 1-3 систему (2.3.7) можна розщепити на системи (2.3.3), (2.3.4), які у даному випадку матимуть вигляд

$$0 = y_1 + g_1(t, y, \varepsilon) \qquad (2.3.8)$$

$$\varepsilon \frac{dy_2}{dt} = W_{n-1} y_2 + g_2(t, y, \varepsilon) \qquad (2.3.9)$$

Система (2.3.6) розв'язується аналогічно до системи (2.3.4).

10. Нехай $Re\lambda_i \ne 0$.

Тоді оцінки (2.2.15) теореми 2.2.4 набудуть вигляду

$$\|\omega(t)\| \le \frac{2K_1^2}{\alpha}\left(c\sigma_1 + \mu(\varepsilon)\right),$$

$$\|\Im y_1(t) - \Im y_2(t)\| \le \frac{2K_1^2}{\alpha} c\|y_1 - y_2\|,$$

де сталі α, K_1, як і раніше, визначаються з нерівностей

$$\left\| \exp\left(\frac{-A_{+}\upsilon}{\varepsilon} \right) \right\| \le K_1 \exp\left(\frac{-\alpha\upsilon}{\varepsilon} \right), \upsilon \ge 0$$

$$\left\| \exp\left(\frac{A_{-}(T-\upsilon)}{\varepsilon} \right) \right\| \le K_1 \exp\left(\frac{-\alpha(T-\upsilon)}{\varepsilon} \right), \upsilon \le T,$$

$$\left\| \left(\exp\left(\frac{-A_{+}T}{\varepsilon} \right) - E \right)^{-1} \right\| \le K_1, \left\| \left(E - \exp\left(\frac{A_{-}T}{\varepsilon} \right) \right)^{-1} \right\| \le K_1,$$

для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$.

11. Припустимо, що

$$\frac{2K_1^2}{\alpha} c < 1.$$

Тоді оператор, визначений за формулою (2.2.14) відображає множину D_2 в себе і є оператором стиску. Отже, рівняння (2.2.14) має єдиний T-періодичний розв’язок $y_2 = y_2(t, \varepsilon)$.

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2.3.2. Нехай для системи (2.3.7) виконуються умови 1, 3, 5, 6, 10, 11. Тоді існують такі $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ і $\sigma > 0$, що для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ система рівнянь (2.3.7) має єдиний T-періодичний розв’язок $x(t, \varepsilon)$ на множині $||x|| \le \sigma,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$.

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації розглядаються диференціально-алгебраїчні системи з періодичними коефіцієнтами. При цьому припускається, що елементарні дільники (скінченні та нескінченні) відповідної граничної в’язки матриць прості та, що матриці лінійної частини диференціально-алгебраїчної системи є сталими.

Для такої диференціально-алгебраїчної системи з періодичними коефіцієнтами доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв’язку у випадку як регулярного, так і сингулярного збурення.

Зауважимо, що припущення про сталість матриць лінійної частини відповідної диференціально-алгебраїчної системи не принципове і отримані результати можуть бути узагальнені для випадку, коли зазначені матриці не є сталими, за умови стабільності структури граничної кронекеревої в’язки матриць.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Наука, 1974.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. - Москва: Наука, 1967.
3. Маркуш І.І. Розвиток асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь. – Ужгород, 1975.
4. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. - Київ.: Вища школа, 2000.
5. Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем рівнянь. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во "Політехніка", 2023.
6. Шкіль М.І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища школа, 1971.
7. Шкиль Н. И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – К.: Вища школа, 1989.
8. Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1989.
9. Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003.
10. Шлапак Ю.Д. Периодические решения линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журнал. – 1975. – Т.27, №1. – С. 137-140.
11. Штокало Й.З. Нарис розвитку математики в Україні за 40 років радянської влади.– К.:Наук. думка, 1958.

12. Яковець В.П. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: Автореферат дис. докт. фіз–мат. наук. – К., 1993.

13. Яковець В. П., Акименко, А. М. Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем з кратним елементарним дільником // Український математичний журнал. – 2002. – Т. 54, № 10. – С. 1403-1415.

14. Boyarintsev Yu. Methods of solving singular systems of ordinary ifferential equations. - Chicester: John Wiley and Sons, 1992.

15. Campbell S. Singular systems of differential equations II. - San-Francisco: Pitman, 1982.

16. Coddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. – New York: McGraw-Hill Book Comp., 1956.

17. Hale J. Oscillations in nonlinear systems. - New York: McGraw-Hill Book Company, 1963.

18. Gantmacher F. The Theory of Matrices. - New York: Chelsea Publishing Company, 1960.

19. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter // Funkc. Ekvacioj. – 1963. V. 5. – P. 71-134.

20. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter: Proof of the fundamental lemmas // Funkc. Ekvacioj. - 1964. - V. 6. – P. 89-141.

21. Lamour R., Marz R., Winkler R. How Floquet Theory Applies to Index 1 Differential Algebraic Equations // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – V. 217. P. 372-394.

22. Lamour R., Marz R., Winkler R. Stability of periodic solutions of index-2 differential algebraic systems // J. Math. Anal. Appl. – 2003. - V. 279. – P. 475-494.

23. Lamour R., Marz R., Weinmuller E. Boundary-value problems for differential-algebraic equations: a survey // Surveys in Differential-Algebraic Equations III. - Springer, Cham, 2015. – P. 177-309.
24. S.F. Feshchenko, M.I. Shkil', L.D. Nikolenko. Asymptotic methods in the theory of linear differential equations. - New York: American Elsevier Publishing Company, 1967.
25. P.F. Samusenko. Asymptotic integration of singularly perturbed linear systems of differential-algebraic equations // Miscolc Mathematical Notes. – 2016. – V. 17, № 2. –P. 1033-1047.