НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ О. І. Клесов
«08» січня 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Ознака Єрмакова збіжності рядів»

Виконала:
студентка II курсу магістратури, групи ОМ-21мп
Лунюшкіна Олександра Олександрівна ___________

Науковий керівник:
Доктор фізико-математичних наук, професор
Клесов Олег Іванович ___________

Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Чорней Руслан Костянтинович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____________

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
___________ Олег Іванович КЛЕСОВ
«___» січня 2024р.

ЗАВДАННЯ
На магістерську дисертацію
Лунюшкіній Олександрі Олександрівні

1. Тема дисертації «**Ознака Єрмакова збіжності рядів**», науковий керівник дисертації Доктор фізико-математичних наук, професор Клесов Олег Іванович, затверджені наказом по університету від « 13 » листопада 2023 р. № 5250-с

2. Термін подання студентом дисертації 11.01.2024

3. Об’єкт дослідження: ознака збіжності рядів В. П. Єрмакова.

4. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Знайти та проаналізувати статті В. П. Єрмакова стосовно ознаки збіжності рядів,

2) Розглянути приклади,

3) Порівняти ознаку Єрмакова з ознакою Д’аламбера,

4) Порівняти ознаку Єрмакова з ознакою Коші,

5) Порівняти ознаку Єрмакова з ознакою Раабе,

6) Дослідити ознаку Єрмакова з показниковою функцією.

5. Консультантів немає.

6. Дата видачі завдання 07.09.2023

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Аналіз статей В.П.Єрмакова стосовно ознаки збіжності нескінченних рядів	До 01.10.2023	виконано
2	Вивчення літератури стосовно збіжності нескінченних рядів (підручники Фіхтенгольц, Knopp, Bromwich, Fabry) ст	До 17.10.2023	виконано
3	Порівняти ознаки Єрмакова та Даламбера	До 05.11.2023	виконано
4	Порівняти ознаки Єрмакова та Коші	До 20.11.2023	виконано
5	Порівняти ознаки Єрмакова та Раабе	До 10.12.2023	виконано
6	Дослідити ознаку Єрмакова з показниковою функцією	До 20.12.2023	виконано

Студент Олександра ЛУНЮШКІНА

Науковий керівник Олег КЛЕСОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 40 сторінок, 28 слайдів для проектора, 13 першоджерел.

Згадується життя та творчість Василя Петровича Єрмакова, доктора математики, професора Київського університету, член-кореспондента Петербурзької академії наук. Детально розглядається одна з найважливіших його ознака збіжності рядів.

Мета роботи: проаналізувати оригінальні статті Єрмакова про ознаку збіжності та порівняти її з іншими відомими ознаками збіжності рядів.

Під час написання цієї роботи, було знайдено оригінал статті В. П. Єрмакова та розглянуто наступні теореми: оригінальна теорема збіжності рядів, теорема Єрмакова в граничному вигляді, теорема збіжності додатного потрійного ряду з монотонно спадними членами. Також порівняно ознаку Єрмакова з ознакою Д'аламбера, Коші та Раабе. Проведено аналіз ознаки Єрмакова для сім'ї функції a^x.

Ключові слова: Ознака збіжності Єрмакова, ознака збіжності Д'аламбера, ознака збіжності Коші, ознака збіжності Раабе.

Abstract

Master's Thesis: 40 pages, 28 projector slides, 13 primary sources.

The life and work of Vasyl Petrovych Yermakov, a doctor of mathematics, professor at Kyiv University, and corresponding member of the St. Petersburg Academy of Sciences, are discussed. One of his most important convergence criteria for series is thoroughly examined.

The objective of the work is to analyze the original articles by Yermakov on the convergence criterion and compare it with other well-known convergence criteria for series.

During the writing of this work, the original article by V. P. Yermakov was found, and the following theorems were examined: the original convergence theorem for series, Yermakov's theorem in its limiting form, and the convergence theorem for a positive triple series with monotonically decreasing terms. The Yermakov criterion was also compared with D'Alembert's, Cauchy's, and Raabe's criteria. An analysis of the Yermakov criterion was conducted for a family of functions a^x.

Keywords: Yermakov's convergence criterion, D'Alembert's convergence criterion, Cauchy's convergence criterion, Raabe's convergence criterion.

Зміст

Вступ

Магістерська дисертація присвячена розгляду життя та творчості відомого математика Василя Петровича Єрмакова, починаючи з дитячих його років, початку на шляху до вищої математики, а також найважливіших досягнень в житті як професора та викладача.

Одним із найвідоміших досягнень Василя Петровича Єрмакова, як професора Київського університету є ознака збіжності рядів названа на його честь.

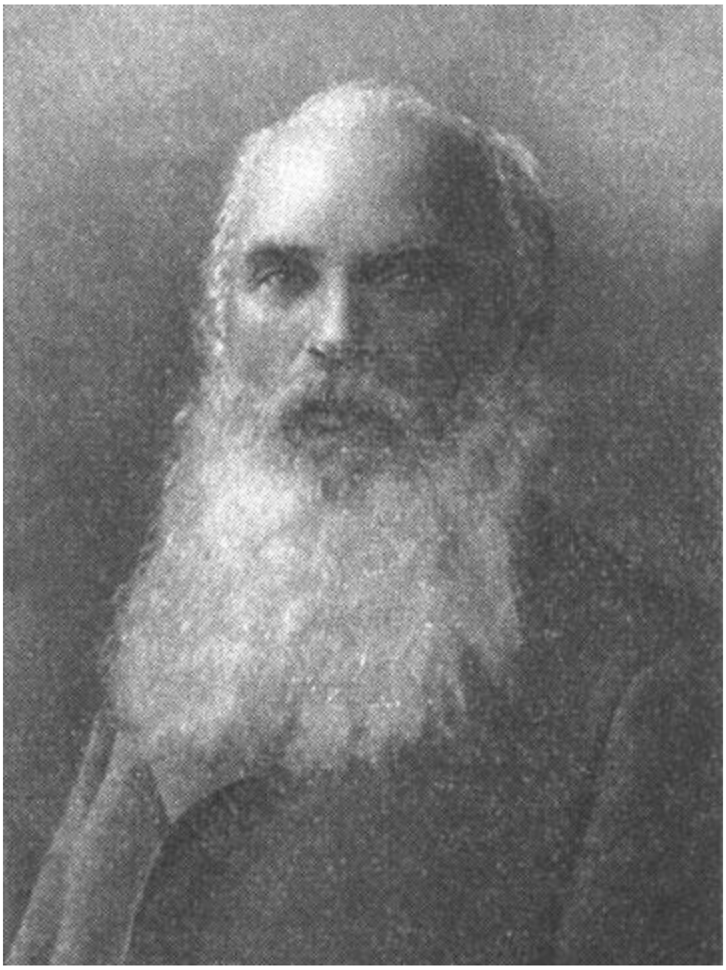
Ця робота здебільшого включає в себе:

- розгляд ознаки збіжності Єрмакова,
- детальне її доведення,
- ознаку Єрмакова в граничному вигляді,
- ознака Єрмакова збіжності додатного потрійного ряду з монотонно спадними членами,
- приклади використання в задачах,
- приклади, коли ознака Єрмакова не працює,
- доведення того, що ознака Єрмакова краща за інші відомі ознаки збіжності, такі як ознака Коші, Д'аламбера та Раабе.

Розділ 1

Життєвий шлях Єрмакова

1.1 Основні дати та досягнення Єрмакова



Василь Петрович Єрмаков з'явився на світ 11 березня 1845 року в селі Терюха, розташованому на Гомельщині. Його батько був викладачем церковно-парафіяльної школи, і саме там Василь Петрович отримав свою першу освіту. Пізніше він продовжив своє навчання в Гомельському училищі, а після – в Чернігівській гімназії. У 1864 році він вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету. У 1873 році Єрмаков успішно захистив свою дисертацію і отримав ступінь магістра математичних наук. Після цього йому було запропоновано викладати на кафедрі чистої математики Київського університету, де він провів наступні 25 років свого життя. Як викладач він також працював у Київській жіночій гімназії, у військовій гімназії та на Вищих жіночих курсах. У 1877 році він захистив дисертацію і отримав ступінь доктора математичних наук, і незабаром йому було присуджено звання «екстраординарного професора». Василь Єрмаков був автором численних праць з різних галузей математики, включаючи математичний аналіз, теорію диференціальних рівнянь, теорію чисел, алгебру та механіку. Він також написав перший в Україні підручник з теорії ймовірностей. У 1884 році почалася активна діяльність Єрмакова, пов'язана з організацією і видавництвом журналу «елементарної математики», який призначався для учнів старших класів гімназій, любителів математики, студентів і вчителів. У 1885 році журнал був допущений в якості необов'язкового позакласного посібника в середніх навчальних закладах. Цей журнал публікував короткі статті про геометрію, алгебру, теорію чисел, теорію ймовірностей та фінансову математику. Головною метою Василя Єрмакова був розвиток творчих здібностей його читачів, тому значна частина журналу була присвячена завданням і завданням для математичних змагань. Насправді, Єрмаков є ініціатором перших в Україні заходів, які зараз називаються математичними олімпіадами. Василь Єрмаков брав активну участь у роботі Московського та Харківського фізико-математичних товариств. У 1889 році він був одним з організаторів Київського фізико-математичного товариства, на засіданнях якого він представив близько ста наукових і педагогічних доповідей. Дійсно продуктивною виявилася науково-педагогічна діяльність Василя Петровича у щойно створеному Київському Політехнічному Інституті (тепер КПІ ім. Ігоря Сікорського), куди він був запрошений в 1899 році на посаду професора кафедри Вищої математики. При створенні КПІ особлива увага приділялася високому теоретичному навчанню майбутніх інженерів, зокрема, в галузі вищої математики. Комісія, відповідальна за організацію інституту, обрала Василя Єрмакова гідним кандидатом для керівництва кафедрою Вищої математики в новому навчальному закладі, оскільки він був вченим і обдарованим викладачем. Василь Єрмаков помер 16 березня 1922 року і був похований на Лук'янівському кладовищі.

1.2 Перший завідувач кафедри математики КПІ

Видатний вчений Університету Києва та член-кореспондент Академії наук у Петербурзі, В.П. Єрмаков, отримав пропозицію прочитати лекції з математики в Політехнічному інституті в 1898 році. Рік пізніше, під час засідання, В.Л. Кирпичов висловив ініціативу призначити В.П. Єрмакова завідувачем математичної кафедри через його успішні досягнення. В.П. Єрмаков славився як видатний київський математик, який завершив навчання в Київському університеті у 1868 році та випробував професійний розвиток за кордоном — в Берліні та Парижі. Учений вніс значний внесок у різноманітні галузі математики, відкрив новий критерій збіжності числових рядів у 1870 році, успішно захистив магістерську та докторську дисертації в 1874 і 1877 роках відповідно, а також опублікував широкий спектр наукових праць і монографій різної тематики. В.П. Єрмаков активно займався громадською діяльністю, засновуючи математичне товариство та журнал, які стали ключовими ресурсами для навчання майбутніх математиків. Запропонований В.П. Єрмаковим формат практичних занять з математичних дисциплін в КПІ виявився важливою інновацією в удосконаленні освіти. Вчений також активно сприяв дослідженням у галузі алгебри, теорії ймовірностей, варіаційного числення та інших аспектів математики, ділився своїми досягненнями та надавав допомогу іншим вченим. Завдяки його внеску, теорія диференціальних рівнянь стала одним із головних напрямків у навчальній програмі КПІ. Наукова діяльність В.П. Єрмакова тривала і після його смерті завдяки його учням, які стали відомими математиками і викладачами. Вчений також активно досліджував теорію ймовірностей разом із іншим професором Київського університету, М. Є. Ващенко-

Захарченко, і розробив курс лекцій, заснований на останніх досягненнях Петербурзької математичної школи.

1.3 «Журнал елементарної математики»

На думку шанованих дослідників, "журнал елементарної математики" був найціннішим періодичним виданням для вчителів математики у другій половині XIX століття. Заснований і спочатку редагований професором Василем Петровичем Єрмаковим з Київського університету, журнал набув поширення по всій країні і суттєво вплинув на розвиток вітчизняної математичної та методичної культури. Його перша назва між 1884 і 1886 роками була "журнал елементарної математики", а потім вона була змінена на "Вісник дослідної фізики та елементарної математики". Пізніше журнал став видаватися в Одесі.

Спочатку редакція планувала включити тільки методичний матеріал, вважаючи, що "основний педагогічний підхід полягає в стислості і ясності викладу". Однак у передмові редактора В.П. Єрмакова думка змінилася, і він додатково ввів педагогічний (методичний) розділ в журналі, щоб обмінятися практичним досвідом викладання. Однак цей розділ не встиг повністю розвернутися і звівся головним чином кількох рецензій.

Метою журналу, сформульованої редактором, була популяризація елементарних математичних знань. Журнал прагнув показати, що область елементарної математики виходить за межі шкільної програми, пропонуючи цікаві питання, які не включаються в освітні курси ні середніх, ні вищих навчальних закладів. Ще однією особливістю журналу було те, що він публікував статті не лише з математики, а й з фізики, хоча спочатку фізиці було приділено менше уваги.

Акцент був зроблений на геометрії, особливо на задачах з побудови, в математичній частині журналу. В алгебраїчному розділі переважали завдання на знаходження екстремуму функцій, а також проблеми теорії з'єднань і елементи теорії ймовірностей. У розділі завдань співпрацювали видатні вчені того часу, такі як Р.Вороний, Д. Граве і у. Каган.

За час існування журналу було опубліковано близько 250 статей і заміток, більшість з яких написано самим В.П. Єрмаковим. Він зміг залучити до співпраці безліч авторитетних авторів, включаючи професорів Київського університету М.Є. Ващенко-Захарченко та І. І. Рахманінова, видатних вчених А. А. Маркова і А. І. Коркіна, а також викладачів вищих і середніх навчальних закладів.

Після дворічного існування "Журнал елементарної математики" перейшов в руки Є. Шпачинського, одного зі співробітників журналу, оскільки В.П. Єрмаков відмовився від редагування через велику кількість своїх справ. Очоливши математичну частину журналу, Єрмаков погодився зберегти ідеологічне керівництво, а журнал отримав нову назву - "Вісник дослідної фізики і елементарної математики".

Розділ 2

Про дві роботи Єрмакова стосовно ознаки збіжності рядів

2.1 Огляд статті Єрмакова [6]

В деяких джерелах [5] сказано, що Єрмаков відкрив нову ознаку збіжності нескінченних рядів у 1870 році, проте існує дві його роботи присвячені цій тематиці. Перша написана Єрмаковим французькою мовою [1], а друга вже російською [6]. Як виявилось, різниця між цими двома виданнями полягає лише в тому, що в 1872 році Єрмаков написав більш розгорнуту статтю, використовуючи більш детальний підхід в доведенні своєї теореми. Тому пропоную розглянути саме цю статтю:

Робота «Новый признак сходимости и расходимости бесконечных знакопостоянных рядов» була написана В. П. Єрмаковим 1872р. Складається з 9 розділів:

В *першому* розділі описана класифікація, яка полягає в розділенні рядів на два класи: знакозмінні та знакосталі; при чому знакосталі розділені ще на три групи (спадні ряди, зростаючі та хвильоподібні). В даному розділі Єрмаков посилається на дисертацію професора Бугаєва, де вказано спосіб отримання нескінченної кількості ознак збіжності, стверджуючи, що в своїй роботі відкриє світу ознаку, яка буде більш чуттєва та проста у порівнянні з іншими відомими ознаками збіжності. Проте , в самій статті про це не сказано.

Другий розділ включає в себе загальні означення, такі як: збіжний, розбіжний та коливний ряд.

В наступних, *третьому та четвертому* розділах, Єрмаков згадує теорему Коші:

Якщо знакосталий спадний ряд:

$f(0)+f(1)+\cdots$ *збігається, то визначений інтеграл*

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ *має величину скінченну; якщо ряд розбіається, то інтеграл нескінченно великий.*

Цікавим є той факт, що в наш час цю теорему викладають в оберненому вигляді, а саме:

Якщо функція неперервна, монотонно спадна, додатна на проміжку (0;inf) , то ряд $f(0)+f(1)+\cdots$ *збігається, коли збігається невласний інтеграл* $\int_0^\infty f(x)\,dx$*. Ряд розбігається, коли розбігається вказаний інтеграл.*

Тут він також описує необхідну ознаку збіжності ряду.

П'ятий розділ вже розкриває оригінальну ознаку збіжності Єрмакова (теорема 1). Доведення цієї теореми Фіхтенгольц [12] представив аналогічно тому, що писав сам Єрмаков.

Перетворення оригінальної ознаки Василь Петрович розкрив у наступному, *шостому* розділі. Зробивши заміну $\varphi(x)=z,\ x=\psi(z)$ та врахувавши, що $\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(z)}$, то це відношення набуде вигляду $\frac{f(z)}{\psi'(z)f\psi(z)}$, де $\varphi(x)>x$ – спряжена функція першого роду, а $\psi(x)<x$ – функція обернена до φ, спряжена функція другого роду.

Нова теорема.

Визначений інтеграл буде збігатись, якщо відношення $\frac{f(z)}{\psi'(z)f\psi(z)}$, при $z\to\infty$ буде менше за 1, та розбігатись, якщо відношення буде більше або рівне за 1.

Далі в оригінальну ознаку (теорема 1), де $x = \theta(z)$ – спряжена функція першого або другого роду, покладемо : $\frac{\varphi'\theta(z)f\varphi\theta(z)}{f\theta(z)}$, $\varphi\theta(z) = \phi(z)$ та продиференціювавши отримане рівняння отримали наступне: $\frac{\phi'(z)f\phi(z)}{\theta'(z)f\theta(z)}$. Звідси вже правило збіжності Єрмаков виразив так:

Теорема.

Якщо $\phi(z)$ і $\theta(z)$ дві спряжені функції, що задовольняють нерівності $\phi(z) > \theta(z)$, то визначений інтеграл $\int_m^\infty f(z)\,dz$ буде збігатись, якщо $\frac{\phi'(z)f\phi(z)}{\theta'(z)f\theta(z)} < 1$ та розбігатись, якщо $\frac{\phi'(z)f\phi(z)}{\theta'(z)f\theta(z)} \geq 1$, при $z \to \infty$.

Розділ *сім* показує означення найвигіднішої ознаки збіжності.

Теорема.

З двох спряжених функцій першого роду більша функція дає ознаки більш, або принаймні так само чуттєві, як і з меншою функцією.

Найбільш зручною Єрмаков вважав функцію e^x , а найкращим правилом збіжності, теорема яка є сучасною та більш відомою для нас.

Теорема сучасна.

Ряд $f(0) + f(1) + \cdots$ збігається, якщо відношення $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} < 1$ та розбігається, якщо $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \geq 1$, при $x \to \infty$.

Сумнівним Єрмаков називав той випадок, коли відношення $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \to 1$, при $x \to \infty$.

І на завершення Єрмаков приділив два *розділи (8,9)* на коротке обговорення хвильоподібних знакосталих рядів та знакозмінних рядів.

2.2 Оригінальна теорема збіжності рядів Єрмакова

Однією з ознак збіжності нескінченних додатних числових рядів з монотонно спадними членами є ознака Єрмакова (1871р.).

Теорема:

Нехай на проміжку $\mathbf{1} \leq \mathrm{x} < \infty$ *задана неперервна, монотонно спадна, додатна функція* $\boldsymbol{f(x) > 0}$. *Нехай на тому ж проміжку задана додатна, монотонно зростаюча та необмежена зверху, всюди неперервно диференційована функція* $\boldsymbol{\varphi(x) > 0}$, *яка задовольняє нерівність* $\boldsymbol{\varphi(x) > x}$. *Тоді:*

1) *Якщо, починаючи з деякого значення* $\boldsymbol{x_0 \geq 1}$, *виконується умова*

$$\frac{\boldsymbol{\varphi'(x) f(\varphi(x))}}{\boldsymbol{f(x)}} \leq \boldsymbol{q} < \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{x \geq x_0}, \qquad (\mathbf{1})$$

То ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f(n)}$ *збігається.*

2) *Якщо, починаючи з деякого значення* $\boldsymbol{x_0 \geq 1}$, *виконується умова*

$$\frac{\boldsymbol{\varphi'(x) f(\varphi(x))}}{\boldsymbol{f(x)}} \geq \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{x \geq x_0}, \qquad (\mathbf{2})$$

То ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f(n)}$ *розбігається.*

Єрмаков вважав, що найпростішою його ознака стане, якщо обрати функцію $\boldsymbol{\varphi(x) = e^x}$. В цьому випадку ознака Єрмакова називається показниковою.

Доведення цієї Теореми добре виклав у своїй доповіді Фіхтенгольц [16], воно є майже аналогічним доведенню самого Єрмакова.

Доведення:

Нехай виконується нерівність $\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leq q < 1, \quad x \geq x_0$, отримаємо: $\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt = |t = e^u| = \int_{x_0}^{x} f(e^u) \cdot e^u\,du \leq q \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$

Звідси

$(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \le q\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt\right) \le q\left(\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt - \int_{x}^{e^x} f(t)\,dt\right) \le q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$

, $e^x > x$. (*)

Тоді $\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \le \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$, додамо до обох частин нерівності інтеграл $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$ та враховуючи (*) отримаємо:

$\int_{x_0}^{e^x} f(t)\,dt \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt = L \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \le L\,,\quad x \ge x_0$.

Так як при $x \to \infty$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ зростає та існує границя $\int_{x_0}^{\infty} f(t)\,dt$ та за інтегральною ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається.

Нехай тепер $\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \ge 1$, тоді: $\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \ge \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$,

Якщо до лівої та правої частини нерівності додати інтеграл $\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$ та враховуючи (*) $x_0 < e^{x_0} \Rightarrow \int_{x}^{e^x} f(t)\,dt \ge \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt = \gamma > 0$.

Розглянемо послідовність $x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x_n, \dots$, де $x_n = e^{x_{n-1}}$ з доведеного випливає, що $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt \ge \gamma$, $\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \ge n\gamma$

Звідси $\int_{x_0}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = +\infty$.

Та за інтегральною ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ розбігається.

2.3 Приклад 1

Приклад 1

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. $f(x) = \frac{1}{x^p}$

Випадок 1. $p > 1$.

Функція $\varphi(x) = x^q,\ \ q > 1$ – задовольняє умовам Єрмакова.

Тоді:

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}=\frac{qx^{q-1}\frac{1}{(x^q)^p}}{\frac{1}{x^p}}=qx^{q-1}x^{-pq}x^p=qx^{q+p-pq-1}\to 0, \text{ при } x\to\infty,$$

якщо $q+p-pq-1<0 <=> q>1.$

Тому ряд збігається.

Випадок 2. $p<1.$

Функція $\varphi(x)=x^q,\ \ q>1$ – задовольняє умовам Єрмакова.

Тоді:

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}=\frac{qx^{q-1}\frac{1}{(x^q)^p}}{\frac{1}{x^p}}=qx^{q-1}x^{-pq}x^p=qx^{q+p-pq-1}\to \infty, \text{ при } x\to\infty,$$

якщо $q+p-pq-1>0 <=> q>1.$

Тому ряд розбігається.

Випадок 3. $p=1.$

Функція $\varphi(x)=x^q,\ \ q>1$ – задовольняє умовам Єрмакова.

Тоді: $\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)}=\frac{qx^{q-1}\frac{1}{(x^q)^p}}{\frac{1}{x^p}}=qx^{q-1}x^{-pq}x^p=qx^{q+p-pq-1}=q>1.$

Тому ряд буде розбігатись.

2.4 Теорема Єрмакова в граничному вигляді

Нехай на проміжку $\mathbf{1}\le \mathrm{x}<\infty$ задана неперервна, монотонно спадна, додатна функція $\boldsymbol{f(x)>0}$. Нехай на тому ж проміжку задана додатна, монотонно зростаюча та необмежена зверху, всюди неперервно диференційована функція $\boldsymbol{\varphi(x)>0}$, яка задовольняє нерівність $\boldsymbol{\varphi(x)>x}$. Тоді, якщо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = q \qquad (3),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається за умовою $q < 1$ і розбігається при умові $q > 1$.

Граничну форму ознаки Єрмакова можна посилити за допомогою верхньої та нижньої границь, замінивши умови 1 і 2 на наступні:

1) якщо $\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} < 1$, то ряд збігається, (4)

2) якщо $\underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} > 1$, то ряд розбігається. (5)

Необхідні відомості з теорії потрійних рядів.

Теорія нескінченних потрійних рядів будується аналогічно до теорії подвійних рядів. Членами потрійного ряду будемо вважати члени деякої послідовності $\{a_{n\,m\,p}\}$. (6)

Суми перших членів (6) будемо називати частинними сумами потрійного ряду. Частинною сумою потрійного ряду по прямокутним паралелепіпедам називається скінченна сума членів послідовності (6)

$$S_{n\,m\,p} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} a_{i\,j\,k}\,. \qquad (7)$$

Множина всіх частинних сум $S_{n\,m\,p}$ являє собою потрійну числову послідовність $\{S_{n\,m\,p}\}$, яку ми будемо називати нескінченним числовим рядом та позначати $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i\,j\,k}$. (8)

Сумою числового нескінченного потрійного ряду (8) по Прингсхейму називається число S , що дорівнює границі часткових сум (7):

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ p\to\infty}} S_{n\,m\,p} = S$$

Це означає, що для будь якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число N_ε таке, що виконується нерівність :

$\left|S_{n\,m\,p} - S\right| < \varepsilon$, для всіх натуральних чисел n, m, p таких, що

$min(n, m, p) > N_\varepsilon$.

Сума збіжного ряду позначається таким самим символом

$S = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i\,j\,k}$.

Ряд називається збіжним, якщо він має скінченну суму S. Інакше, ряд буде розбіжним.

Ряд називається додатним, якщо всі його члени невід'ємні $a_{i,j,k} \geq 0$.

Ряд називається строго додатним, якщо всі його члени додатні $a_{i,j,k} > 0$.

Можна також використовувати інший набір часткових сум, наприклад, по трикутним пірамідам або кулям, та знайти суму ряду як границю часткових сум, тоді вона може відрізнятись від суми ряду по Прингсхейму або ряд може розбігатись.

$$S_n = \sum_{3 \leq i+j+k \leq n} a_{i\,j\,k} \quad \text{або} \quad S_n = \sum_{3 \leq \sqrt{i^2+j^2+k^2} \leq n} a_{i\,j\,k}$$

2.5 Теорема збіжності додатного потрійного ряду з монотонно спадними членами.

Нехай на множині $1 \leq x < \infty, 1 \leq y < \infty,\ 1 \leq z < \infty$ задана неперервна, незростаюча додатна функція $f(x, y, z) > 0$.

$(f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0), x > x_0, y > y_0, z > z_0)$.

Та на проміжку $1 \leq x < \infty, 1 \leq y < \infty,\ 1 \leq z < \infty$ задано три додатні, монотонно зростаючі та необмежені зверху всюди неперервно диференційовані функції $\varphi(x) > 0, \psi(y) > 0, \eta(z) > 0$, що задовольняють нерівності $\varphi(x) > x, \psi(y) > y, \eta(z) > z$. Тоді:

1) Якщо, починаючи з деяких значень $x_0 \geq 1, y_0 \geq 1, z_0 \geq 1$ виконується умова:

$$\frac{\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} \leq q < 1,\ \ x \geq x_0, y \geq y_0, z \geq z_0 \quad (9),$$

то потрійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ збігається.

2) Якщо, починаючи з деяких значень $x_0 \geq 1, y_0 \geq 1, z_0 \geq 1$ виконується умова:

$$\frac{\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} \geq 1,\ \ x \geq x_0, y \geq y_0, z \geq z_0 \quad (10),$$

То потрійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ розбігається.

Доведення:

Для початку розглянемо перший випадок. З нерівності (9) випливає, що:

$$\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f\big(\varphi(x),\psi(y),\eta(z)\big) \leq qf(x,y,z), q < 1, x \geq x_0, y \geq y_0, z \geq z_0 \quad (11).$$

Оскільки функція $f(x,y,z)$ неперервна на необмеженому кубі $[1,\infty) \times [1,\infty) \times [1,\infty)$, то на будь якому прямокутному паралелепіпеді $[x_0,x] \times [y_0,y] \times [z_0,z]$ з цього куба функція $f(x,y,z)$ інтегрована. Так як $x_0 < x,\ y_0 < y,\ z_0 < z$, то $x_0 < \varphi(x_0),\ \ y_0 < \psi(y_0),\ \ z_0 < \eta(z_0)$, тому в силу монотонності функцій $\varphi(x), \psi(y),\ \eta(z)$ маємо:

$$x_0 < \varphi(x_0) < \varphi(x),\ \ y_0 < \psi(y_0) < \psi(y),\ \ z_0 < \eta(z_0) < \eta(z).$$

З цього випливає, що куб $[\varphi(x_0), \varphi(x)] \times [\psi(y_0), \psi(y)] \times [\eta(z_0), \eta(z)]$ належить необмеженому кубу $[1,\infty)\times[1,\infty)\times[1,\infty)$. Проінтегруємо функцію $f(r,s,t)$ по цьому кубу, переходячи до повторного інтегралу

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt =$$
$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} dr \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} ds \int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} dt\, f(r,s,t).$$
(12)

Вводячи в інтегралі (12) заміну змінних $r=\varphi(u), s=\psi(v), t=\eta(w)$ та повертаючись від повторного інтеграла до потрійного, маємо:

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} dr \int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)} ds \int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} dt\, f(r,s,t) =$$
$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(u)du \int_{y_0}^{y} \psi'(v)dv \int_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\, \eta'(w)dw =$$
$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\, \varphi'(u)\psi'(v)\eta'(w)dudvdw$$

Або

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt =$$
$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\, \varphi'(u)\psi'(v)\eta'(w)dudvdw$$
(13).

Щоб формула була справедлива достатньо, щоб $f(x,y,z)$ була неперервна на прямокутному паралелепіпеді $[\varphi(x_0),\varphi(x)]\times[\psi(y_0),\psi(y)]\times[\eta(z_0),\eta(z)]$, а похідні $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$, $\eta'(z)$ були неперервні відповідно на відрізках $[x_0,x]$, $[y_0,y]$, $[z_0,z]$. Ці умови забезпечені умовами ознаки Єрмакова.

Використовуючи нерівність (11) з нерівності $\varphi(x)>x, \psi(y)>y, \eta(z)>z$ з нерівності (13) отримаємо:

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt \le q\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw \le$$
$$q\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw$$

Або

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(r,s,t)drdsdt - \int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt \le q\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw$$

Звідси

$$\int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt$$

В силу того, що $\varphi(x) > x > x_0, \psi(y) > y > y_0, \eta(z) > z > z_0, f(x,y,z) > 0$ та $\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw \le \int_{x_0}^{\varphi(x)}\int_{y_0}^{\psi(y)}\int_{z_0}^{\eta(z)} f(u,v,w)dudvdw,$ можемо посилити передостанню нерівність

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw \le \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)drdsdt \qquad (14)$$

Оскільки $f(x,y,z) > 0$ та значення x, y, z довільні враховуючи $x > x_0, y > y_0, z > z_0$, то з нерівності (14) випливає, що невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ збігається. В такому випадку, за інтегральною ознакою для потрійного ряду, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ також збігається.

Перша частина ознаки Єрмакова доведена.

Розглянемо другий випадок.

З нерівності (10) випливає, що

$$\varphi'(x)\psi'(y)\eta'(z)f\big(\varphi(x),\psi(y),\eta(z)\big) \ge f(x,y,z),\ \ x \ge x_0, y \ge y_0, z \ge z_0 \qquad (15).$$

Проінтегрувавши функцію $f(x,y,z)$ за прямокутним паралелепіпедом $[\varphi(x_0),\varphi(x)]\times[\psi(y_0),\psi(y)]\times[\eta(z_0),\eta(z)]$, використавши підстановки $r=\varphi(u), s=\psi(v), t=\eta(w)$ та нерівність (15) отримаємо:

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)}\int_{\psi(y_0)}^{\psi(y)}\int_{\eta(z_0)}^{\eta(z)} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt =$$
$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(\varphi(u),\psi(v),\eta(w))\,\varphi'(u)\psi'(v)\eta'(w)dudvdw \geq$$
$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} f(u,v,w)dudvdw$$

Додамо до обох частин нерівності інтеграл $\int_{x}^{\varphi(x_0)}\int_{y}^{\psi(y_0)}\int_{z}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt$, отримаємо:

$$\int_{x}^{\varphi(x)}\int_{y}^{\psi(y)}\int_{z}^{\eta(z)} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt \geq$$
$$\int_{x_0}^{\varphi(x_0)}\int_{y_0}^{\psi(y_0)}\int_{z_0}^{\eta(z_0)} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = L$$

(16).

Так як $\varphi(x_0)>x_0, \psi(y_0)>y_0, \eta(z_0)>z_0$ та $f(r,s,t)>0$, то $L>0$. Задамо три послідовності $\{x_i\}, \{y_j\}, \{z_k\}$ наступним чином:

$$x_i=\varphi(x_{i-1}), i=1,\dots n\dots;\ y_j=\psi(y_{j-1}), j=1,\dots m\dots;\ z_k=$$
$$\eta(z_{k-1}), k=1,\dots p\ \dots.$$

З нерівності (16) випливає, що

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt \geq L,\ \ i=1,2,\dots n\dots; j=1,2,\dots m\dots;\ k=$$
$$1,2,\dots p\dots$$

Просумуємо по i,j,k нашу нерівність, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt \geq nmpL,$$

Тобто інтеграл $\int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt$ необмежений при $n\to\infty, m\to\infty, p\to\infty$ незалежно. Так як $\varphi(x) > x, \psi(y) > y, \eta(z) > z$, то послідовності $\{x_i\},\{y_j\},\{z_k\}$ мають строго монотонно зростати в силу того, що

$x_i=\varphi(x_{i-1}) > x_{i-1}, i = 1,\dots n\dots;\ y_j = \psi(y_{j-1}) > y_{j-1}, j = 1,\dots m\dots;$

$z_k = \eta(z_{k-1}) > z_{k-1}, k = 1,\dots p\dots;.$

Нехай вони обмежені зверху. Тоді послідовності збігаються відповідно до деяких границь a, b, c, при чому $x_i < a, y_j < b, z_k < c$ для будь-яких номерів i,j,k. Тому, для будь-яких натуральних чисел n, m, p має виконуватись нерівність:

$$\int_{x_0}^{a}\int_{y_0}^{b}\int_{z_0}^{c} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt \geq \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt \geq nmpL,$$

Що ж неможливим, так як перша частина нерівності зростає з n, m, p.

З цього випливає, що послідовності $\{x_n\},\{y_m\},\{z_p\}$ необмежені зверху, а власний інтеграл розбігається

$$\int_{x_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\int_{z_0}^{\infty} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ p\to\infty}} \int_{x_0}^{x_n}\int_{y_0}^{y_m}\int_{z_0}^{z_p} f(r,s,t)\,dr\,ds\,dt = +\infty$$

.

В такому випадку, згідно інтегральної ознаки потрійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ теж розбігається.

Друга частина ознаки Єрмакова доведена.

4. Ознака Єрмакова в граничній формі збіжності додатного потрійного ряду з монотонно спадними членами. Так само, як у випадку звичайних додатних нескінченних рядів, ознака Єрмакова може бути сформована в граничній формі:

Ознака Єрмакова в граничній формі.

Нехай на множині $1 \le x < \infty$, $1 \le y < \infty$, $1 \le z < \infty$ задана неперервна монотонно спадна додатна функція $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) > f(x_0,y_0,z_0),\ x_0 > x, y_0 > y, z_0 > z)$. Нехай до того ж на проміжку $1 \le x < \infty$, $1 \le y < \infty$, $1 \le z < \infty$ задано три додатні, монотонно зростаючі та необмежені зверху всюди неперервно диференційовані функції $\varphi(x) > 0, \psi(y) > 0, \eta(z) > 0$, що задовольняють нерівності $\varphi(x) > x, \psi(y) > y, \eta(z) > z$. Тоді, якщо

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ z\to\infty}} \frac{\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} = q, \quad (17)$$

То ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ збігається за умовою $q < 1$, та розбігається при $q > 1$.

<u>Доведення:</u>

З означення границі функції декількох змінних в точці $(+\infty, +\infty, \dots + \infty)$ випливає, що границя (17) означає, що виконується наступна подвійна нерівність

$$q - \varepsilon < \frac{\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} < q + \varepsilon\,,$$

Для якзавгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ одразу для всіх значень x, y, z, більших за деяке число $\Delta_\varepsilon > 0$. Перепишемо цю нерівність як:

$$(q-\varepsilon)f(x,y,z) < \varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f\big(\varphi(x),\psi(y),\eta(z)\big) < (q+\varepsilon)f(x,y,z)$$
(18)

Якщо $q < 1$, то взявши достатньо мале ε, отримаємо $q' = q + \varepsilon < 1$. Тоді, порівнявши праву частину нерівності (18) з нерівність (11), за ознакою Єрмакова отримаємо, що потрійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ збігається.

Якщо $q > 1$, то взявши достатньо мале ε, отримаємо $q'' = q - \varepsilon > 1$. Тоді, порівнявши праву частину нерівності (18) з нерівність (11), за ознакою Єрмакова отримаємо, що потрійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} f(n,m,p)$ розбігається.

Гранична форма ознаки Єрмакова для потрійного ряду доведена.

Зрозуміло, що гранична форма ознаки Єрмакова менш використована ніж перша. Хоча її можна посилити, використавши означення верхньої та нижньої границі, замінивши границю (17) на наступні

1) Якщо $\overline{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}} \frac{\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} = q, \quad q < 1,$ то ряд збігається, (19)

2) Якщо $\underline{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}} \frac{\varphi'(x)\psi'(y)\,\eta'(z)f(\varphi(x),\psi(y),\eta(z))}{f(x,y,z)} = q, \quad q > 1,$ то ряд розбігається, (20)

Розглянемо приклад використання ознаки Єрмакова.

Дослідити потрійний ряд на збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(n+m+p)^{\sigma}}, \sigma > 0 \qquad (21)$$

Нехай $\sigma > 3$. Розглянемо додатну і монотонно спадну функцію $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z)^{\sigma}}$, обравши за функції $\varphi(x) = e^x$, $\psi(y) = e^y$, $\eta(z) = e^z$. Згідно ознаки Єрмакова необхідно обчислити границю

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}} \frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^{\sigma}}{(e^x+e^y+e^z)^{\sigma}} \qquad (22)$$

Використовуючи відому нерівність, про те, що середнє арифметичне трьох додатніх чисел $a > 0, b > 0, c > 0$ не менше ніж їх середнє геометричне $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, маєм оцінку

$$0 \leq \frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^\sigma}{(e^x+e^y+e^z)^\sigma} \leq \frac{e^{x+y+z}(x+y+z)^\sigma}{3^\sigma e^{(x+y+z)\frac{\sigma}{3}}} = \frac{1}{3^\sigma} \frac{(x+y+z)^\sigma}{e^{(x+y+z)(\frac{\sigma}{3}-1)}} \quad (23)$$

Так як $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{3^\sigma} \frac{t^\sigma}{e^{t(\frac{\sigma}{3}-1)}} = 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ z\to+\infty}} \frac{1}{3^\sigma} \frac{(x+y+z)^\sigma}{e^{(x+y+z)(\frac{\sigma}{3}-1)}} = 0$

Отже, перейшовши в нерівності (23) до границі, за теоремою про двох поліцейських отримаємо границю

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty \\ z\to+\infty}} \frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^\sigma}{(e^x+e^y+e^z)^\sigma} = 0, \quad \sigma > 3$$

Отже, ряд (21) збігається, якщо $\sigma > 3$.

Нехай $0 < \sigma < 2$. Не важко довести наступні нерівності:

$$ab \geq a + b, \quad a \geq 2, b \geq 2 \qquad (24)$$

$$abc \geq \frac{4}{3}(a + b + c), \quad a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2 \qquad (25)$$

Дійсно, нехай $a = 2 + \alpha, b = 2 + \beta, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Підставивши ці значення в нерівність (24), отримаємо:

$$4 + 2\alpha + 2\beta + \alpha\beta \geq 4 + \alpha + \beta$$

Звідси, в силу невід'ємності значень α та β , випливає правильна рівність:

$$\alpha + \beta + \alpha\beta \geq 0.$$

Виконавши обчислення в іншу сторону, отримаємо нерівність (24).

Нехай тепер $a = 2 + \alpha, b = 2 + \beta,\ c = 2 + \gamma, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$. Підставляючи ці значення в нерівність (25), отримаємо:

$$8 + 4\alpha + 4\beta + 4\gamma + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma + \alpha\beta\gamma \geq 8 + \frac{4}{3}(\alpha + \beta + \gamma).$$

Звідки, в силу невід'ємності значень α, β , γ випливає правильна рівність:

$$\frac{8}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma+\alpha\beta\gamma \geq 0.$$

Виконавши обчислення в іншу сторону, отримаємо нерівність (25).

Тепер поклавши $a=e^x, b=e^y, c=e^z$ та використавши нерівність (25) отримаємо:

$$\frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^\sigma}{(e^x+e^y+e^z)^\sigma} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^\sigma \frac{(x+y+z)^\sigma}{e^{(x+y+z)(\sigma-1)}} \quad (26)$$

Якщо $0<\sigma\leq 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^\sigma}{e^{t(\sigma-1)}}=+\infty$, тоді

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}\left(\frac{3}{4}\right)^\sigma \frac{(x+y+z)^\sigma}{e^{(x+y+z)(\sigma-1)}}=+\infty.$$

З нерівності (26) випливає, що границя (22) дорівнює

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ z\to+\infty}}\frac{e^x e^y e^z (x+y+z)^\sigma}{(e^x+e^y+e^z)^\sigma}=+\infty,\ 0<\sigma\leq 1.$$

2.6 Приклади 2

Приклад 1

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln^{1+\sigma}n}, \quad \sigma>0$

В цьому випадку $f(x)=\frac{1}{x\cdot ln^{1+\sigma}x}$, а вираз $\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}=\frac{ln^{1+\sigma}x}{x^{\sigma}}\to 0,\text{при } x\to\infty$

Так, що при достатньо великих x вираз буде менше за будь який правильний дріб q: ряд збігається.

Приклад 2

$\sum_{n=3}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$

Тут $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}$, а вираз $\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}=\ln\ln x\to\infty,\text{при } x\to\infty$,

Та при достатньо великих x буде більший за одиницю: ряд розбігається.

Приклад 3

$\sum_{n=3}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^{1+\sigma}}, \quad \sigma>0$

Тут маємо $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot(\ln\ln x)^{1+\sigma}}$,

$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)}=\frac{(\ln\ln x)^{1+\sigma}}{ln^{\sigma}x}\to 0,\text{при } x\to\infty$, ряд збігається.

Прямим наслідком інтегральної ознаки збіжності можна назвати відому ознаку В. П. Єрмакова (розгорнуту раніше).

Одна з «таємниць», пов’язана з цією ознакою, складається з того, що формулювання ознаки Єрмакова не містить і натяку на необхідність використання інтегральної ознаки збіжності. Тим не менш, відоме доведення цієї ознаки збіжності спирається саме на інтегральну ознаку збіжності. Хоча К. Кнопп [3] заявив, що можна довести ознак Єрмакова без застосування інтегральної ознаки, але воно буде досить громіздким:

«Es ist nicht schwer, den Beweis von dem Hilfsmittel des Integrals zu befreien; doch wird er dadurch etwas schwerfalliger». [8]

«Не важко представити доведення без допомоги інтегралів, але воно буде досить громіздким».

З того часу ніхто не зміг запропонувати таке доведення. Доведення Є. Фабрі [4] ознаки Єрмакова, яке він записав без використання інтегральної ознаки збіжності, значно звужує область використання ознаки Єрмакова, хоча і вигляд має трохи інакший.

2.7 Висновок до розділу

Встановлено ознаку Єрмакова збіжності додатного потрійного ряду з монотонно спадними членами. Знайдено її граничну форму, а також з використанням нижньої та верхньої границі. Наведено приклад використання ознаки Єрмакова для дослідження потрійного ряду на збіжність.

Розділ 3

Дослідження ознаки Єрмакова

3.1 Порівняння ознаки Єрмакова з ознакою Д'аламбера

Ознака Д'аламбера

Розглянемо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$ послідовність $D(n) = \frac{f(n+1)}{f(n)}$. Якщо при достатньо великих n, виконується нерівність $D(n) \leq q$, q – стале число, менше 1, то ряд збігається; якщо починаючи з деякого кроку $D(n) \geq 1$, то ряд розбігається.

$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq q < 1 \;\; \rightarrow \;\; \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \text{збігається}$

Теорема 1.

Якщо виконується умова Д'аламбера, то виконується умова Єрмакова.

Доведення:

Оцінемо відношення $\frac{f(m)}{f(n)} \leq q^{m-n}$

Запишемо умови для x та візьмемо за функцію e^n:

$n \leq x < n+1, \qquad m \leq e^n < m+1,$ отримаємо $\ln(m) \leq n < \ln(m+1)$

Тоді, за теоремою Єрмакова:

$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \frac{e^{n+1} f(m)}{f(n+1)} \leq e(m+1)q^{m-n} \leq$

$\leq e(m+1)q^{m-\ln(m+1)} = \frac{e}{q}(m+1)q^{(m+1)-\ln(m+1)} \rightarrow 0$,

Оскільки $\lim_{k\to\infty} kq^{k-\ln(k)} = 0$

3.2 Порівняння ознаки Єрмакова з ознакою Коші

Ознака Коші

Розглянемо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$ послідовність $F(n) = \sqrt[n]{f(n)}$. Якщо при достатньо великих n, виконується нерівність $F(n) \leq q$, q – стале число, менше 1, то ряд збігається; якщо починаючи з деякого кроку $F(n) \geq 1$, то ряд розбігається.

<u>Теорема 2.</u>

Якщо виконується умова Коші, то виконується умова Єрмакова.

Частіше цю ознаку використовують в граничному вигляді:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} < 1 \ \ => \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \text{збігається}$$

<u>Доведення:</u>

Існує таке $q_1 < q_2 : 0 < q_1 \leq \sqrt[n]{f(n)} \leq q_2 < 1$

$$q_1^n \leq f(n) \leq q_2^n$$

$$n \leq x < n+1, \quad m \leq e^n < m+1, \quad \ln(m) \leq n < \ln(m+1)$$

Тоді, за теоремою Єрмакова:

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \frac{e^{n+1} f(e^n)}{f(n+1)} \leq \frac{e(m+1) f(m)}{f(n+1)} \leq e(m+1)\frac{q_2^m}{q_1^{n+1}} \leq$$

$$\leq e(m+1)\frac{q_2^m}{q_1^{1+\ln(m+1)}} = \frac{e(m+1)}{q_2 q_1} \cdot \frac{q_2^{m+1}}{q_1^{\ln(m+1)}}$$

$$\ln(k) + k\ln(q_2) - \ln(k)\ln(q_1) = \ln(k)\left[1 + \ln\left(\frac{1}{q_1}\right)\right] - k\ln\left(\frac{1}{q_2}\right)$$

$$1 + \ln\left(\frac{1}{q_1}\right) > 0, \quad \ln\left(\frac{1}{q_2}\right) > 0$$

$$\lim_{k\to\infty}(a\ln(k) - bk) = -\infty, \quad a, b > 0$$

3.3 Порівняння ознаки Єрмакова з ознакою Раабе

Ознака Раабе

Якщо при достатньо великих n, виконується нерівність $F(n) = n\left(\frac{f(n)}{f(n+1)} - 1\right) \geq r$, де r – константа, більша за 1, то ряд збігається; якщо ж починаючи з деякого кроку $F(n) \leq 1$ то ряд розбігається.

$$n\left(\frac{f(n)}{f(n+1)} - 1\right) \geq r > 1 => \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \text{збігається}$$

<u>Теорема 3.</u>

Якщо виконується умова Раабе, то виконується умова Єрмакова.

<u>Доведення:</u>

З доведення Фіхтенгольца [12]:

$$\frac{f(m)}{f(n)} < \left(\frac{m}{n}\right)^{-S}, \quad 1 < s < r$$

$$n \leq x < n + 1, \quad m \leq e^n < m + 1, \quad \ln(m) \leq n < \ln(m + 1)$$

Аналогічно, за теоремою Єрмакова:

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \frac{e^{n+1} f(e^n)}{f(n+1)} \leq e(m + 1)\frac{f(m)}{f(n+1)} \leq e(m + 1)\left(\frac{m}{n+1}\right)^{-S} \leq$$

$$\leq e(m + 1)\left(\frac{m}{1+\ln(m+1)}\right)^{-S} = e(m + 1)\frac{(1+\ln(m+1))^S}{m^S} \to 0$$

$$Тоді\ \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \lambda < 1, \ \ x \geq x_0$$

Зауважемо, що функція e^x з ознаки Єрмакова, може бути замінена будь-якою іншою функцією $\varphi(x)$, монотонно зростаючою, додатною, яка має неперервну похідну та задовольняє нерівності: $\varphi(x) > x$.

3.4 Аналіз ознаки Єрмакова для сім'ї функцій a^x

Будемо говорити, що виконана умова Єрмакова $E(\varphi(x);\lambda)$, якщо для деякого $x_0 > 0$:

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)} \leq \lambda, \quad x \geq x_0 \qquad (*)$$

Теорема.

Нехай $a > e$.

Якщо виконується умова $\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leq \boldsymbol{\lambda}$, $x \geq x_0$,

то $\frac{f(a^x)\cdot(a^x)'}{f(x)} \leq \boldsymbol{\lambda} \ln a$, для $x \geq x_1$.

Таким чином, якщо виконується умова Єрмакова для $\varphi(x) = e^x$,

то виконується умова Єрмакова для $\varphi(x) = a^x$, $a > e$, якщо $\boldsymbol{\lambda} \ln a < 1$.

$$\boldsymbol{\lambda} \ln a < 1 \quad <=> \quad \ln a < \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}}$$

$$a < e^{\frac{1}{\boldsymbol{\lambda}}}, \ a^{\boldsymbol{\lambda}} < e.$$

Доведення:

Умова $E(a^x;\lambda)$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \leq \lambda, \quad x \geq x_0$$

Якщо позначити $y = e^x$, то $\frac{yf(y)}{f(\ln(y))} \leq \lambda, \quad y \geq e^{x_0}$.

Оскільки $a > e$, то $\frac{1}{f(\ln(y))} \geq \frac{1}{f(\log_a y)}$

Тому $\frac{yf(y)}{f(\log_a y)} \leq \lambda, \quad y \geq e^{x_0}$.

Позначивши тепер $y = a^x$:

$$\frac{a^x f(a^x)}{f(x)} \leq \lambda, \quad x \geq \log_a(e^{x_0}), \qquad (**)$$

Теорема 2.

Нехай $a > e$. *Якщо виконана умова* $E(e^x; \lambda)$, *то виконана і умова* $E(a^x; \lambda\, ln(a))$.

Доведення:

З Теореми 1 випливає умова (**). Тому:

$\ln(a)\frac{a^x f(a^x)}{f(x)} \leq \lambda \ln(a)$

Теорема 3.

Якщо $a^\lambda < e < a$, *та виконана умова* $E(e^x; \lambda)$ *з* $\lambda < 1$, *то виконано і умову* $E(a^x; \mu)$, $\mu < 1$.

Доведення:

З теореми 3 розділу 3 дисертації випливає, що $\frac{a^x \ln(a) \cdot f(a^x)}{f(x)} \leq \lambda \ln(a)$

Оскільки $a^\lambda < e$, то $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \ln(a) < 1$.

Висновки

Василь Петрович Єрмаков є одним з небагатьох відомих математиків про якого можна сказати, що він був не тільки талановитим вченим, а й чудовим педагогом. Він зміг зацікавити всіх: студентів, своїх колег, всіх присутніх на з'їзді математиків та навіть на одній із зустрічей природознавців і лікарів.

В даній роботі було розглянуто деякі ознаки збіжності Василя Петровича Єрмакова, наведено приклади та розглянуто галузі їх застосування.

В процесі написання дисертації було знайдено історичну знахідку відомого математика, а саме статтю В.П. Ермакова – Новый признак сходимости и расходимости бесконечных знакопостоянных рядов (1872), а також цю статтю написану французькою мовою в 1872р. Після порівняння цих двох робіт, виявлено в чому полягає між ними різниця та в чому їх схожість.

Теорема Єрмакова є досить важливою частиною з теорії збіжності числових рядів, а її дослідження цікаве для історичного розвитку всієї математики.

В частині самостійної роботи було обґрунтовано гіпотезу інших вчених, що ознака Єрмакова є більш чутливою у порівнянні з іншими ознаками відомих вчених, таких як Д'аламбер, Коші та Раабе. А також проведено аналіз ознаки Єрмакова для сім'ї функцій a^x. Як виявилось, такі умови з такою функцією навіть краще.

Список використаної літератури

1. V. ERMAKOF Caractère de convergence des séries Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 250-256
2. Psheborskyi, A.P. (1922). V. P. Ermakov [V. P. Ermakov]. Nauka na Ukraine – Science in Ukraine, 3, 285–287
3. Knopp K. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. - Berlin: Springer, 1922.- X+474 s.
4. Fabry E. Théorie des Séries a Termes Constants. Applications aux Calculs Numériques. - Paris: Hermann & Fils, 1910. - 198 p.
5. Н.В. Ічанська – Історія дослідження ознаки Єрмакова.
6. В.П. Єрмаков – Новый признак сходимости и расходимости бесконечних знакопостоянных рядов. 1872
7. И.В. Терещенко – Признак сходимости Ермакова. Краснодар. 2016.
8. Терещенко И.В. – История развития теории бесконечных положительных рядов с монотонно убывающими членами. Краснодар 2016
9. В.А. Добровольский - Василий Петрович Ермаков 1845-1922, издательство «Наука» М. 1981.
10. Ермаков В.П. Теория векторов на плоскости. – К., 1887.
11. Визначні науковці КПІ – Єрмаков В.П. перший завідувач кафедри КПІ. К. 2017
12. Г.М. Фихтенгольц – Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2
13. В.І. Сущанський – У світі математики 2013, т. 19