НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_______ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

«_» ____________________ 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою
«Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»
(код і назва)

на тему: **Оцінка функціонала від послідовності авторегресії**

Виконав: студент 2 курсу магістратури, групи ОМ-21мп

Шуляк Антон Вікторович ____________
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник к. ф.-м. н., доцент, Голіченко І. І. ____________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент к. ф.-м. н., доцент, Синявська О. О. ____________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент________________
(підпис)

Київ – 2024

Національний Технічний Університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти — другий (магістр)
Спеціальність 111 «Математика»

«ЗАТВЕРДЖЕНО»
Завідувач кафедри
_______ Клесов. О. І.
(підпис) (ініціали, прізвище)
«___» __________________ 2023 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську роботу студенту

Шуляку Антону Вікторовичу ______________
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

1. Тема роботи: Оцінка функціонала від послідовності авторегресії,
науковий керівник роботи к. ф.-м. н., доцент, Голіченко І. І.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «_____»________2023 р. №

2. Термін подання студентом роботи «________»_______________2024 р.

3. Об'єкт дослідження: Випадкова послідовність авторегресії.
4. Предмет дослідження: Лінійний функціонал від невідомих значень послідовності авторегресії.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити: Дослідження літератури про стохастичні процеси та оцінювання лінійних функціоналів. Ознайомлення із сучасними підходами для оцінювання лінійних функціоналів випадкових процесів. Вирішення задачі оцінки лінійного функціоналу для випадкової послідовності авторегресії
6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: презентація — 15 аркушів А4

7 Орієнтовний перелік публікацій:
8 Дата видачі завдання «________»______________2023 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломного проекту	Термін виконання етапів проекту	Примітка
1.	Опрацювання літератури за темою	10.09.2023 - 31.10.2023	
2.	Написання літературного огляду теорії випадкових процесів	01.11.2023 - 14.11.2023	
3.	Розгляд вивчених методів в контексті поставленої задачі	15.11.2023 - 21.11.2023	
4.	Використання вивчених методів для розв'язання задачі	22.11.2023 - 10.12.2023	
5.	Дослідження отриманих результатів та побудова висновків	11.12.2023 - 22.12.2023	
6.	Оформлення роботи	23.12.2023 - 01.01.2024	

Студент ______________ А. В. Шуляк
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник роботи ______________ І. І. Голіченко
(підпис) (ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи за обсягом становить 30 сторінок. Для дослідження було використано 11 бібліографічних найменувань.

Дана робота присвячена задачі оцінювання лінійного функціоналу від послідовності авторегресії.

Мета. Розширити теорію розв'язання задач лінійної екстраполяції авторегресійних послідовностей від її невідомих значень.

Актуальність. Задачі екстраполяції стохастичних послідовностей наявні у великій кількості наукових та практичних сфер.

Об'єкт дослідження. Випадкова послідовність авторегресії.

Предмет дослідження. Лінійний функціонал від невідомих значень послідовності авторегресії.

Задачі дослідження:

а) Використати наявні дані щодо розв'язання задач оцінювання лінійного функціоналу від випадкової послідовності для випадку послідовності авторегресії.

б) За допомогою відомої теорії розв'язати задачу екстраполяції послідовності авторегресії.

Розв'язання задачі оцінювання лінійного функціоналу у даній магістерській дисертації включає у себе використання таких розділів математики, як теорія ймовірностей та теорія випадкових процесів, зокрема її підрозділи щодо дослідження стаціонарних процесів, теорії екстраполяції випадкових процесів. Вивчена теорія застосована до розв'язання задачі екстраполяції послідовності авторегресії.

Ключові слова: *стохастичні процеси*, *стаціонарні випадкові послідовності*, *екстраполяція випадкових послідовностей*, *послідовність авторегресії*, *спектральна щільність*, *спектральна характеристика*.

ABSTRACT

The diploma work explanatory note includes 30 pages of the text. At the problem modern state analysis, overall 11 references were used.

This work is devoted to the study of estimation of linear functional from autoregression sequences.

The purpose of the work. To expand the theory of solving problems of linear extrapolation of autoregressive sequences from its unknown values.

Relevance of the topic: Problems of extrapolation of stochastic sequences are available in a large number of scientific and practical fields.

The object of the study. Random sequence of autoregression.

The subject of research Linear functional from unknown values of autoregression sequences.

Research objectives:

a) To use the available data on solving the problems of estimating a linear functional from a random sequence for the case of an autoregression sequence.

b) Using the known theory, solve the problem of extrapolation of the autoregression sequence.

Solving the problem of estimating a linear functional in this master's thesis includes the use of such sections of mathematics as the theory of probabilities and the theory of random processes, in particular its subsections on the study of stationary processes, the theory of extrapolation of random processes. The studied theory is applied to solving of the problem of extrapolation of the autoregression sequence.

Key words: *stochastic processes*, *stationary random sequences*, *extrapolations of random sequences*, *autoregression sequence*, *spectral density*, *spectral characteristic.*

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ. 7
ВСТУП 8
РОЗДІЛ 1. Теорія стохастичних процесів 10
1.1. Спектральне представлення коваріаційної функції 10
1.2. Ортогональні стохастичні міри та стохастичні інтеграли 13
1.3. Спектральне представлення стаціонарних послідовностей. 15
1.4. Розклад Вольда 16
1.5. Екстраполяція випадкових послідовностей. 19
РОЗДІЛ 2. Оцінювання функціоналу від випадкової послідовності авторегресії 22
2.1. Необхідні теоретичні відомості 22
2.2. Задача оцінки функціоналу послідовності авторегресії 25
ВИСНОВКИ. 28
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ 29

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

AR(1) — Послідовність авторегресії порядку 1

L^2 — Простір випадкових величин із скінченним другим моментом

ВСТУП

У ході наукового розвитку математики особливу увагу приділяли завданням оцінки невідомих значень випадкових процесів. Ці завдання представляють собою узагальнення екстраполяції стохастичних процесів і важливі для теорії випадкових подій. Крім того, вони мають практичне застосування, особливо в сучасному науково-технічному просторі. У сучасних умовах розвитку науки та технологій ці завдання можуть виникати під час вивчення та розв'язання важливих економіко-математичних питань, а також у прикладних науках, таких як економіка, фізика та інші.

Дана галузь знань привернула та привертає увагу багатьох вчених, які працюють над збагаченням новими відкриттями в області стохастичних процесів, зокрема оцінки невідомих значень випадкових послідовностей.

У галузі випадкових процесів працювало багато вчених, серед іноземних науковців популярними роботами є праці Яглома А.М., Херда Г., Вінера Н..

Роботи [8, 10, 11] Яглома А.М. присвячені статистичному опису серії спостережень, які залежать від часу, але не зазнають систематичних змін, лише здійснюють невпорядковані коливання навколо постійного середнього рівня.

Херд Г. у книзі [4] розглянув періодично корельовані випадкові послідовності, широко висвітлив ключові поняття, включаючи гільбертові простори, теорію Фур'є та спектральну теорію гармонізованих послідовностей. Дані відомості є фундаментом для теорії прогнозування випадкових послідовностей.

Вінер Н. у роботі [9] дослідив задачу екстраполяції стаціонарних часових рядів. Автор поєднав ідеї статистики та аналізу часових рядів, що дало змогу краще відрізняти сигнали за наявності шуму. Дана робота має велике прикладне значення.

Колмогоров А.М. у [3] розкрив основні поняття теорії ймовірностей та статистики, які є основою для аналізу випадкових процесів.

Серед українських науковців відомими є праці Моклячука М.П[1,6], у яких вивчено задачі оцінювання невідомих значень випадкових послідовностей та процесів.

У процесі вивчення випадкових процесів математики також звертають увагу на розробку методів прогнозування та стратегій управління ризиками. Це особливо актуально в сучасному світі, де нестабільність і невизначеність стали невід'ємною частиною багатьох сфер життя.

Важливим аспектом є інтеграція математичних підходів у вирішення економічних проблем, що може сприяти розвитку бізнесу та оптимізації управлінських процесів. Застосування методів оцінювання випадкових подій у вищезазначених науках, таких як економіка та фізика, може розкрити нові можливості для розвитку та вдосконалення технологій.

В цілому, математичні знання в галузі випадкових процесів не лише розширюють наше розуміння фундаментальних аспектів науки, але й відкривають двері до нових перспектив у вирішенні складних завдань у різних галузях знань.

Магістерська дисертація складається із двох розділів.

У першому розділі розглянута теорія стохастичних процесів. Надано означення стаціонарної послідовності, коваріаційної функції, сформульована теорема Герглотца про існування спектральної міри та розклад Вольда стаціонарного стохастичного процесу. Розглянута теорія прогнозу стаціонарних послідовностей за минулими значеннями.

У другому розділі наведена теорія щодо екстраполяції лінійного функціоналу від невідомих значень стаціонарної послідовності, наведене формулювання та розв'язання задачі оцінки лінійного функціоналу утвореного значеннями послідовності авторегресії.

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРІЯ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. Спектральне представлення коваріаційної функції

Згідно визначення стаціонарною у вузькому сенсі називається така послідовність $\xi = (\xi_1, \xi_2, ...)$ для якої із будь-якої множини $B \in B(\mathbb{R}^\infty)$ та будь-якого $n \geq 1$ виконується наступне співвідношення, [8]:

$$P\{(\xi_1, \xi_2, ...) \in B\} = P\{(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, ...) \in B\}. \tag{1.1}$$

Також звідси можна помітити наступне - якщо $E\xi_1^2 < \infty$, то $E\xi_n$ не залежить від n:

$$E\xi_n = E\xi_1, \tag{1.2}$$

а коваріація $cov(\xi_{n+m}\xi_n) = E(\xi_{n+m} - E\xi_{n+m})(\xi_n - E\xi_n)$ залежить лише від m, [8]:

$$cov(\xi_{n+m}, \xi_n) = cov(\xi_{1+m}, \xi_1). \tag{1.3}$$

Нехай $H^2 = H^2(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ простір комплекснозначних випадкових величин ξ другого порядку, тобто $E|\xi|^2 < \infty$. Цей простір як і для випадку дійсних випадкових величин із скалярним добутком $(\xi, \eta) = E\xi\overline{\eta}$ і нормою $||\xi|| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ є повним. Відповідно до термінології функціонального аналізу простір H^2 є унітарним гільбертовим простором випадкових величин.

Коваріацією двох випадкових величин $\xi, \eta \in H^2$ будемо називати наступну величину:

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)\overline{(\eta - E\eta)}. \tag{1.4}$$

Якщо припустити наступне:

$$E\xi = E\eta = 0, \tag{1.5}$$

отримаємо наступний результат для коваріації двох випадкових величин:

$$cov(\xi, \eta) = (\xi, \eta). \tag{1.6}$$

Уведемо додатково ще одне поняття щодо послідовностей випадкових величин, яке широко застосовується при роботі із випадковими об'єктами. Послідовність комплексних випадкових величин ξ_n із скінченим другим моментом називається стаціонарною в широкому сенсі для всіх $n \in Z$, якщо виконані наступні дві умови:

$$E\xi_n = E\xi_0, \tag{1.7}$$

$$cov(\xi_{k+n}, \xi_k) = cov(\xi_n, \xi_0), k \in Z. \tag{1.8}$$

Для зручності покладемо, що:

$$E\xi_0 = 0. \tag{1.9}$$

Це припущення не зменшує загальне розуміння цього поняття, але дозволяє ототожнювати коваріацію випадкових величин із скалярним добутком. Позначимо також наступні величини:

$$R(n) = cov(\xi_n, \xi_0), n \in Z, \tag{1.10}$$

$$\rho(n) = \frac{R(n)}{R(0)}, n \in Z. \tag{1.11}$$

Функцію $R(n)$ називатимемо коваріаційною функцією, а функцію $\rho(n)$ - кореляційною. Також із визначення коваріаційної функції можна підмітити, що вона є невід'ємно-визначеною, це саме стосується і кореляційної функції.

Теорема Герглотца, [8]. Нехай $R(n)$ - коваріаційна функція стаціонарної в широкому сенсі послідовності випадкових величин з нульовим середнім. Тоді на $([-\pi,\pi],\mathcal{B}([-\pi,\pi]))$ знайдеться така скінченна міра $F=F(B)$, $\mathcal{B}\in\mathcal{B}([-\pi,\pi])$, що для будь-якого $n\in Z$:

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}F(d\lambda). \tag{1.12}$$

Міру $F=F(B)$, яка бере участь у представленні 1.12, називають спектральною мірою, а функцію $F(\lambda)$ називають спектральною функцією стаціонарної послідовності з коваріаційною функцією $R(n)$.

Спектральна міра F однозначно визначається своєю коваріаційною функцією. Уявимо, що F_1 і F_2 - дві спектральні міри: $\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}F_1(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}F_2(d\lambda)$, але так як будь-яка обмежена неперервна функція $g(\lambda)$ може бути наближена на $[-\pi,\pi)$ тригонометричними поліномами, то:

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)F_1(d\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}g(\lambda)F_2(d\lambda). \tag{1.13}$$

Звідки отримуємо, що $F_1(B)=F_2(B)$.

Якщо стаціонарна послідовність складається із дійсних чисел, то отримуємо наступне:

$$R(n)=\int_{-\pi}^{\pi}cos\lambda nF(d\lambda). \tag{1.14}$$

Приклади стаціонарних послідовностей.

1. Нехай $\xi_n=\xi_0 g(n)$, де $E\xi_0=0$, $E\xi_0^2=1$ і $g=g(n)$ - деяка функція. Можна довести, що послідовність $\xi=(\xi_n)$ буде стаціонарною тоді і лише тоді, коли функція $g(k+n)\overline{g(k)}$ залежить лише від n. Можна показати, що завжди знайдеться таке λ, що $g(n)=g(0)e^{i\lambda n}$. Тому, послідовність випадкових величин

$$\xi_n=\xi_0 g(0)e^{i\lambda n} \tag{1.15}$$

є стаціонарною з коваріаційною фунцією

$$R(n) = |g(0)|^2 e^{i\lambda n}. \tag{1.16}$$

В частинному випадку можемо отримати, що випадкова константа $\xi(n) = \xi(0)$ також утворює стаціонарну послідовність.

2. Білий шум. Нехай $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ - послідовність ортонормованих випадкових величин із $E\varepsilon_n = 0$ та $E\varepsilon_i\overline{\varepsilon_j} = \delta_{ij}, \delta_{ij} = 1, i = j$ та $\delta_{ij} = 0, i \neq j$. Така послідовність є стаціонарною із $R(n) = 1$ при $n = 0$ та $R(n) = 0$ при n відмінних від нуля.

3. Послідовність ковзного середнього. Відштовхуючись від білого шуму $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, утворимо нову послідовність:

$$\xi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{1.17}$$

де a_k - комплексні числа, сума модулів квадратів яких скінченна. В силу рівності Парсеваля можемо отримати:

$$cov(\xi_{n+m}, \xi_m) = cov(\xi_n, \xi_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n+k}\overline{a_k}. \tag{1.18}$$

Тому, дана послідовність є стаціонарною.

1.2. Ортогональні стохастичні міри та стохастичні інтеграли

Комплекснозначна функція $Z(\Delta) = Z(\omega, \Delta)$, визначена для $\omega \in \Omega$ та $\Delta \in \mathcal{E}_0$, називається скінченно-адитивною стохастичною мірою, якщо:

1. Для будь-якого $\Delta \in \mathcal{E}_0$ $E|Z(\Delta)|^2 < \infty$.

2. Для будь-яких двох множин, які не перетинаються, Δ_1 і Δ_2 із $\mathcal{E}_0$:

$$Z(\Delta_1 + \Delta_2) = Z(\Delta_1) + Z(\Delta_2). \tag{1.19}$$

Скінченно-аддитивна стохастична міра $Z(\Delta)$ називається елементарною стохастичною мірою, якщо для будь-яких множин, які не перетинаються, Δ_1, Δ_2, Δ_3, ..., із $\mathcal{E}_0$ і таких, що $\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \in \mathcal{E}_0$

$$E|Z(\Delta) - \sum_{k=1}^{\infty} Z(\Delta_k)|^2 \to 0, n \to \infty. \tag{1.20}$$

Елементарна стохастична міра $Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{E}_0$, називається ортогональною (або мірою з ортогональними значеннями), якщо для будь-яких двох множин, які не перетинаються, Δ_1 і Δ_2 із $\mathcal{E}_0$

$$EZ(\Delta_1)\overline{Z(\Delta_2)} = 0. \tag{1.21}$$

Структурною функцією $m(\Delta)$ елементарної стохастичної міри $Z = Z(\Delta), \Delta \in \mathcal{E}_0$, називатимемо функцію:

$$m(\Delta) = E|Z(\Delta)|^2. \tag{1.22}$$

Нехай $Z = Z(\Delta)$ - елементарна ортогональна стохастична міра, $\Delta \in \mathcal{E}_0$ із структурною функцією $m = m(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{E}$. Тоді для кожної функції:

$$f(\lambda) = \sum f_k I_{\Delta_k}, \tag{1.23}$$

яка приймає скінченне число значень, визначимо випадкову величину:

$$\mathcal{I}(f) = \sum f_k Z(\Delta_k). \tag{1.24}$$

Побудована випадкова функція визначається однозначно (з точністю до стохастичної еквівалентності) і не залежить від вибору апроксимуючих послідовностей f_n. Назвемо дану функцію стохастичним інтегралом від функції $f \in L^2$ по елементарній ортогональній стохастичній мірі Z і будемо це записувати як:

$$\mathcal{I} = \int_E f(\lambda) Z(d\lambda). \tag{1.25}$$

Сукупність випадкових величин Z_λ, $\lambda \in R$, заданих на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, назвемо випадковим процесом з ортогональними приростами, якщо:

1.$E|Z_\lambda|^2 < \infty$, $\lambda \in R$.

2.Для будь-якого $\lambda \in R$:

$$E|Z_\lambda - Z_{\lambda_n}|^2 \to 0, \lambda_n \downarrow \lambda, \lambda_n \in R. \tag{1.26}$$

3.Для будь-яких $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$:

$$E(Z_{\lambda_4} - Z_{\lambda_3})\overline{(Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1})} = 0. \tag{1.27}$$

Стохастичний інтеграл $\int_R f(\lambda) dZ_\lambda$, де Z_λ - деякий процес з ортогональними приростами, є стохастичний інтеграл $\int_R f(\lambda) Z(d\lambda)$ по відповідній ортогональній стохастичній мірі.

1.3. Спектральне представлення стаціонарних послідовностей

Теорема 1, [8]. Існує така ортогональна стохастична міра $Z = Z(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$, що для будь-якого $n \in Z$:

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} Z(d\lambda). \tag{1.28}$$

При цьому $E|Z(\Delta)|^2 = F(\Delta)$.

Звідси можемо отримати наступні наслідки:

1. Нехай $\xi = (\xi_n)$ - стаціонарна послідовність дійсних випадкових величин $\xi_n, n \in Z$. Тоді стохастична міра $Z = Z(\Delta)$, із спектрального представлення така, що для будь-якого $\Delta \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$ виконується:

$$Z(\Delta) = \overline{Z(-\Delta)}. \tag{1.29}$$

Додатково покладемо $Z(\Delta) = Z_1(\Delta) + iZ_2(\Delta)$, тоді для будь-яких Δ_1 та Δ_2:

$$EZ_1(\Delta_1)Z_2(\Delta_2) = 0. \tag{1.30}$$

Теорема 2, [8]. Якщо $\eta \in L^2(\xi)$, то знайдеться така функція $\varphi \in L^2(F)$, що:

$$\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda) Z(d\lambda). \tag{1.31}$$

Імпульсною перехідною функцією, або фільтром, називатимемо таку функцію $h = h(s), s \in Z$, яка в момент часу m здійснює перетворення сигналу x_m та на виході видає сигнал $h(n-m)x_m$. Сумарний сигнал y_n, який отримується на виході із певної системи можна подати у вигляді:

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x_m. \tag{1.32}$$

Теорема 3, [8]. Нехай $\eta = (\eta_n)$ - стаціонарна послідовність із спектральною щільністю $f_n(\lambda)$. Тоді можна знайти таку послідовність $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, яка є білим шумом, і такий фільтр, що справедливе представлення:

$$\eta_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\varepsilon_{n-m}. \tag{1.33}$$

1.4. Розклад Вольда

Окрім частотного представлення стаціонарної послідовності також широко застосовується розклад Вольда по часовій області. Суть розкладу Вольда зводиться до того, що деяка стаціонарна послідовність представляється у вигляді суми двох стаціонарних послідовностей, одну з яких ми можемо повністю передбачити, в тому сенсі, що її значення прогнозуються по попередніх значеннях, а друга послідовність не володіє даною властивістю.

Уведемо декілька позначень. Нехай $H_n(\xi) = \overline{L}^2(\xi^n)$ і $H(\xi) = \overline{L}^2(\xi)$ породжені величинами $\xi^n = (\ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ і $\xi = (\ldots, \xi_{n-1}, \xi_n, \ldots)$. Нехай також:

$$S(\xi) = \cap_n H_n(\xi). \tag{1.34}$$

Уведемо також поняття проекції елементу $\eta \in H(\xi)$ на підпростір $H_n(\xi)$ і позначимо через:

$$\widehat{\pi}_n(\eta) = \hat{E}(\eta | H_n(\xi)). \tag{1.35}$$

Простір $H(\xi)$ можна представити у вигляді ортогональної суми:

$$H(\xi) = S(\xi) \oplus R(\xi), \tag{1.36}$$

де $S(\xi)$ складається із елементів $\widehat{\pi}_{-\infty}(\eta)$, а $R(\xi)$ із елементів $\eta - \widehat{\pi}_{-\infty}(\eta)$ з $\eta \in H(\xi)$.

Стаціонарна послідовність $\xi = (\xi_n)$ називається регулярною, якщо:

$$H(\xi) = R(\xi) \tag{1.37}$$

і сингулярною, якщо:

$$H(\xi) = S(\xi). \tag{1.38}$$

Теорема 1, [8]. Будь-яка стаціонарна в широкомі сенсі послідовність ξ допускає і до того ж єдиний розклад:

$$\xi_n = \xi_n^r + \xi_n^s, \tag{1.39}$$

де ξ_n^r - регулярна, а ξ_n^s - сингулярна послідовності. Також варто відмітити, що дані дві послідовності є ортогональними.

Сингулярні послідовності також ще називаються детермінованими, тобто визначеними, регулярні чисто або цілком недетермінованими. Якщо $S(\xi)$ - це власний підпростір простору $H(\xi)$, то послідовність ξ називається недетермінованою.

Нехай $\xi = (\xi_n)$ - невироджена стаціонарна послідовність. Випадкову послідовність $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ називатимемо відновлювальною послідовністю(для ξ), якщо:

а)$\varepsilon = (\varepsilon_n)$ складається із попарно ортогональних випадкових величин з $E\varepsilon_n = 0$ та $E|\varepsilon_n|^2 = 1$,

б) $H_n(\xi) = H_n(\varepsilon)$ для будь-якого $n \in Z$.

Термін відновлення розуміємо в тому сенсі, що ε_{n+1} приносить нову інформацію до наявної в $H_n(\xi)$, яка необхідна для утворення $H_{n+1}(\xi)$.

Теорема 2, [8]. Для того, щоб невироджена послідовність ξ була регулярною, необхідно і достатньо, щоб знайшлася така відновлювальна послідовність $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ і послідовність комплексних чисел $(a_n), n \geq 0$ з $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, що:

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}. \tag{1.40}$$

Із теореми 2 слідує, що невироджена послідовність ξ є регулярною тоді і лише тоді, якщо вона може бути представлена у вигляді одностороннього ковзного середнього:

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k \tilde{\varepsilon}_{n-k}, \tag{1.41}$$

де $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_n)$ - деяка ортонормована система.

Теорема 3, [8]. Якщо $\xi = (\xi_n)$ - невироджена стаціонарна послідовність, то

$$\xi_n = \xi_n^s + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{n-k}, \tag{1.42}$$

де $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ і $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ - деяка відновлювальна послідовність для ξ^r.

Теорема 4, [8]. Нехай ξ - невироджена регулярна стаціонарна послідовність. Тоді існує спектральна щільність $f(\lambda)$ така, що:

$$\int_{-\pi}^{\pi} ln f(\lambda) d\lambda > -\infty. \tag{1.43}$$

Дана теорема також працює в іншу сторону, якщо спектральна щільність задовольняє умові 1.43, то така послідовність є регулярною.

1.5. Екстраполяція випадкових послідовностей

Сингулярні послідовності допускають безпомилковий прогноз(екстраполяцію) величин $\xi_n, n \geq 1$ за минулими значеннями $\xi^0 = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0)$. Для задач екстраполяції для будь-яких стаціонарних послідовностей варто розглянути прогнозування регулярних послідовностей.

Теорема 1, [8]. Якщо спектральну щільність послідовності ξ можна представити у вигляді $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\Phi(e^{-i\lambda})|^2$(де функція $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ та має радіус збіжності $r > 1$ і не має нулів в області $|z| \leq 1$), то оптимальна лінійна оцінка $\hat{\xi}_n$ величини ξ_n по $\xi^0 = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0)$ задається формулою:

$$\hat{\xi}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{\varphi}_n(\lambda) \, Z(d\lambda), \tag{1.44}$$

де $\hat{\varphi}_n(\lambda) = e^{i\lambda n} \frac{\Phi_n(e^{-i\lambda})}{\Phi(e^{-i\lambda})}$ і $\Phi_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} b_k z^k$.

Розкладаючи функцію $\hat{\varphi}_n(\lambda)$ в ряд Фур'є отримуємо, що прогноз $\hat{\xi}_n$ задається формулою:

$$\hat{\xi}_n = C_0 \xi_0 + C_{-1} \xi_{-1} + C_{-2} \xi_{-2} + \dots \tag{1.45}$$

Розглянемо приклад для ілюстрації Теореми 1. Нехай спектральна щільність:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}(5 + 4cos\lambda). \tag{1.46}$$

Відповідна коваріаційна функція R(n) має трикутний вигляд:

$$R(0) = 5, R(\pm 1) = 2, R(n) = 0 \text{ при } |n| \geq 2. \tag{1.47}$$

Дану спектральну щільність можна подати у вигляді:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|2 + e^{-i\lambda}|^2, \tag{1.48}$$

тому можемо використати Теорему 1. Звідси отримуємо, що:

$$\hat{\varphi_1}(\lambda) = e^{i\lambda}\frac{e^{-i\lambda}}{2 + e^{-i\lambda}}, \hat{\varphi_n}(\lambda) = 0 \text{ при } n \geq 2. \tag{1.49}$$

Тому для всіх $n \geq 2$ оцінка $\hat{\xi_n} = 0$, тобто лінійний прогноз значення ξ_n за спостереженнями $\xi^0 = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0)$ є тривіальним. Для $n = 1$ можемо використати формулу 1.44:

$$\hat{\xi_1} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda}\frac{e^{-i\lambda}}{2 + e^{-i\lambda}}\, Z(d\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + \frac{e^{-i\lambda}}{2}}\, Z(d\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda}\, Z(d\lambda) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi_k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\xi_0 - \frac{1}{4}\xi_{-1} + \dots .$$

Із розкладу Вольда регулярної послідовності слідує, що спектральна щільність $f(\lambda)$ допускає представлення

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|\Phi(e^{-i\lambda})|^2, \tag{1.50}$$

де $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Якщо функція $f(\lambda)$ допускає представлення з функцією $\Phi(z)$, то розклад Вольда для ξ_n має вид

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_{n-k}. \tag{1.51}$$

Таким чином, задачі пошуку спектральної функції і задача відшукання коефіцієнтів a_k в розкладі Вольда еквівалентні.

РОЗДІЛ 2.

ОЦІНЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛУ ВІД ВИПАДКОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ АВТОРЕГРЕСІЇ

2.1. Необхідні теоретичні відомості

Скористаємося відомостями щодо екстраполяції стохастичних послідовностей, які наведені у статті Моклячука М.П., [6].

Розглянемо функціонал $A\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)\xi(k)$, який залежить від невідомих значень стаціонарної стохастичної послідовності $\xi(k)$. Оцінимо функціонал $A\xi$ за відомими значеннями послідовності $\xi(j)+\eta(j)$ у моменти часу $j = -1, -2, ...$, де $\eta(j)$ - некорельована з $\xi(j)$ стаціонарна випадкова послідовність. Припустимо, що коефіцієнти $a(k)$ задовольняють умовам:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a(k)| < \infty, \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)|a(k)|^2 < \infty. \tag{2.2}$$

За умов 2.1 та 2.2 функціонал $A\xi$ матиме скінченний другий момент.

Припустимо, що послідовності $\xi(j)$ та $\eta(j)$ некорельовані між собою величини та мають спектральні функції $f(\lambda), g(\lambda)$, відповідно, та задовольняють умову мінімальності:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) + g(\lambda))^{-1}\, d\lambda < \infty. \tag{2.3}$$

Функціонал $A\xi$ має лінійну оцінку $\hat{A}\xi$ за даними спостережень послідовності $\xi(j) + \eta(j)$, $j = -1, -2, ...$, яка задається спектральною характеристикою $h(e^{i\lambda})$. Функція $h(e^{i\lambda})$ належить підпростору $L_2^-(f + g)$, який породжений функціями $e^{ij\lambda}$, $j=-1,-2,\ldots$. Спектральна характеристика $h(f,g)$ оптимальної лінійної оцінки $A\xi$ мінімізує величину середньоквадратичної похибки:

$$\min_{h\in L_2^-(f+g)} \Delta(h;f,g)=\min_{\hat{A}\xi} E|A\xi-\hat{A}\xi|^2=\Delta(h(f,g);f,g)=\Delta(f,g). \qquad (2.4)$$

Уведена величина $\Delta(f,g)$ залежить лише від щільностей, тобто $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$. Припустивши, що щільності відомі, можна скористатися методом Колмогорова, [6], [12]:

$$h(f,g)=\frac{A(e^{i\lambda})f(\lambda)-C(e^{i\lambda})}{f(\lambda)+g(\lambda)}=A(e^{i\lambda})-\frac{A(e^{i\lambda})g(\lambda)+C(e^{i\lambda})}{f(\lambda)+g(\lambda)}, \qquad (2.5)$$

$$\Delta(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|A(e^{i\lambda})g(\lambda)+C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda)+g(\lambda))^2}f(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|A(e^{i\lambda})f(\lambda)-C(e^{i\lambda})|^2}{(f(\lambda)+g(\lambda))^2}g(\lambda)\,d\lambda=\langle Bc,c\rangle+\langle Ra,a\rangle, \qquad (2.6)$$

де $c=B^{-1}Da$, $C(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{\infty}c(j)e^{ij\lambda}$, $A(e^{i\lambda})=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)e^{ij\lambda}$, $\langle a,c\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}a(k)\overline{c(k)}$ - відповідає скалярному добутку, B, D, R - оператори у просторі l_2, які задані матрицями, елементи яких отримуються із перетворень Фур'є функцій $(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}$, $f(\lambda)g(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}$ та $f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}$:

$$B(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\lambda}(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\,d\lambda, \qquad (2.7)$$

$$D(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\lambda}f(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\,d\lambda, \qquad (2.8)$$

$$R(k,j)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j-k)\lambda}f(\lambda)g(\lambda)(f(\lambda)+g(\lambda))^{-1}\,d\lambda,\;\; k,j=0,1,\cdots. \qquad (2.9)$$

Лема(Моклячук М.П., [6], [12]). Нехай $\xi(j)$, $\eta(j)$ -некорельовані стаціонарні послідовності, які мають спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$, які задовольняють умові 2.3 та виконуються умови (2.1, 2.2). Спектральну характеристику $h(f,g)$ та величину середньоквадратичної похибки $\Delta(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ від невідомих значень послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)+\eta(j)$ при $j=-1,-2,\cdots$ можна обчислити за формулами (2.5, 2.6).

Якщо спектральна щільність $f(\lambda)$ допускає канонічну факторизацію:

$$f(\lambda)=|d(e^{-i\lambda})|^2=|\sum_{k=0}^{\infty}d(k)e^{-ik\lambda}|^2, \qquad (2.10)$$

то за наступними формулами можемо обчислити спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_N\xi=\sum_{k=0}^{N}a(k)\xi(k)$ від послідовності $\xi(j)$ за даними спостережень $\xi(j)$, $j=-1,-2,...$, [6], [12]:

$$\Delta_N(h(f),f)=||A_Nd||^2, \qquad (2.11)$$

$$h(f)=A_N(e^{i\lambda})-r_N(e^{i\lambda})d^{-1}(e^{-i\lambda}), \qquad (2.12)$$

де $r_N(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{N}(A_Nd)(k)e^{ik\lambda}$, $A_N(e^{i\lambda})=\sum_{k=0}^{N}a(k)e^{ik\lambda}$, $d(k)$ - відповідає коефіцієнтам канонічної факторизації 2.10, а A_N - оператор, який задається матрицею $A(k,j)=a(k+j)$, коли $0\le k+j\le N$,$A(k,j)=0$ за умови $k+j>N$.

2.2. Задача оцінки функціоналу послідовності авторегресії

Задано функціонал:

$$A_0\xi = \xi(0), \tag{2.13}$$

де $\xi(0)$ - це невідоме значення стаціонарної випадкової послідовності $\xi(n), n \in Z$ авторегресії порядку 1. Оцінимо функціонал за спостереженнями послідовності авторегресії $\xi(n), n = -1, -2, ...,$ та обчислимо середньоквадратичну похибку оцінки функціоналу $A_0\xi$.

Спектральна щільність для AR(1) задається формулою, [7]:

$$f(\lambda) = \frac{1}{|1 - pe^{-i\lambda}|^2}, \tag{2.14}$$

де $|p| < 1$.

Перевіримо, чи задовольняє дана спектральна щільність умову мінімальності:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)^{-1}\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{|1 - pe^{-i\lambda}|^2}\right)^{-1} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |1 - pe^{-i\lambda}|^2\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1 - pe^{-i\lambda})(1 - \overline{p}e^{i\lambda})\, d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \overline{p}e^{i\lambda} - pe^{-i\lambda} + |p|^2)\, d\lambda =$$

$$= (\lambda - pe^{i\lambda}\frac{1}{i} - pe^{-i\lambda}\frac{1}{-i} + \lambda|p|^2)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi + 2\pi|p|^2 < \infty.$$

Отже, спектральна щільність задовольняє умову мінімальності.

Знайдемо канонічну факторизацію для заданої спектральної щільності $f(\lambda)$:

$$f(\lambda) = |d(e^{-i\lambda})|^2 = \frac{1}{|1 - pe^{-i\lambda}|^2} = \left|\frac{1}{1 - pe^{-i\lambda}}\right|^2. \tag{2.15}$$

Звідси можемо отримати, що:

$$d(e^{-i\lambda}) = \frac{1}{1 - pe^{-i\lambda}} = \left|\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} p^k e^{-i\lambda k} = \sum_{k=0}^{\infty} d(k) e^{-i\lambda k}.$$

Коефіцієнти в сумах повинні бути рівні, тому $d(k) = p^k$.

Вектор d матиме вигляд $d = (1, p, p^2, p^3, ...)$ Враховуючи, що ми розглядаємо задачу при $N = 0$, матриця A_0 приймає простий вигляд, де елемент $A(0,0) = 1$, а всі інші рівні нулю:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Виконаємо множення матриці A_0 на вектор d:

$$A_0 d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Отримавши значення для вектора $A_0 d$ отримуємо наступне:

$$r_0(e^{i\lambda}) = (A_0 d)(0) e^{i\lambda 0} = 1, \tag{2.17}$$

$$A_0(e^{i\lambda}) = a(0)e^{i\lambda 0} = 1. \tag{2.18}$$

Скористаємося формулою 2.12 для обчислення спектральної характеристики:

$$h(f) = A_0(e^{i\lambda}) - r_0(e^{i\lambda})d^{-1}(e^{i\lambda}) = 1 - 1(1 - pe^{-i\lambda}) = pe^{-i\lambda}. \tag{2.19}$$

Оцінка функціоналу обчислюється за формулою:

$$\hat{A}_0\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(f)\, Z(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} pe^{-i\lambda}\, Z(d\lambda) = p\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda}\, Z(d\lambda) =$$

$$= p\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(-1)}\, Z(d\lambda) = p\xi(-1).$$

Тобто для прогнозу значення $\xi(0)$ за спостереженнями $\ldots, \xi(-2), \xi(-1)$, достатньо знати значення лише останнього спостереження $\xi(-1)$.

Середньоквадратична похибка оцінки функціоналу $A_0\xi$, обчислена за формулою 2.11 дорівнює:

$$\Delta(f) = ||A_0 d||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(A_0 d)(k)|^2 = (A_0 d)(0) = 1.$$

Теорема. Нехай $\xi(n), n \in Z$ - випадкова послідовність авторегресії порядку 1. Тоді оцінка лінійного функціоналу 2.13 за спостереженнями $\xi(n), n = -1, -2, \ldots$ має вигляд:

$$\hat{A}_0\xi = p\xi(-1), \tag{2.22}$$

а середньоквадратична похибка оцінки даного функціоналу $\Delta(f) = 1$.

ВИСНОВКИ

У даній роботі вивчено розв'язання задачі оцінювання лінійного функціоналу від невідомих значень стаціонарної випадкової послідовності авторегресії.

Представлені основні теоретичні відомості теорії стохастичних процесів, такі як: спектральне представлення коваріаційної функції, ортогональні стохастичні міри та стохастичні інтеграли, спектральне представлення випадкових послідовностей, розклад Вольда, екстраполяція випадкових послідовностей. Окремо досліджено питання оцінювання лінійного функціоналу від стохастичної послідовності.

Для розв'язання задачі використано загальні формули для оцінювання лінійного функціоналу випадкової послідовності за відомої спектральної щільності, а саме: обчислена спектральна характеристика послідовності, завдяки якій побудована оцінка функціоналу та обчислена середньоквадратична похибка оцінки функціоналу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Голіченко І.І., Моклячук М.П. Оцінки функціоналів від періодично корельованих процесів: монографія – К.:НВП «Інтерсервіс», 2014.
[2] Pavliotis G. A. Stochastic processes and applications / Pavliotis. – London: Department of Mathematics Imperial College London, 2015.
[3] Kolmogorov A.N. Selected works by A.N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics/ A.N. Shiryayev(Ed.). - Kluwer Academic Publications, 1992.
[4] Hurd H. L. Periodically correlated random sequences: spectral theory and practice / H. L. Hurd, A. Miamee. – John Wiley Sons, Inc., Publication, 2007.
[5] Szabados T. Factorization of a spectral density with smooth eigenvalues of a multidimensional stationary time series / Tamas Szabados. // Econometrics. – 2023.
[6] Моклячук М. П. Екстраполяція стаціонарних послідовностей, що спостерігаються із шумом / М. П. Моклячук // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1997. – №57. – С. 125–133.
[7] Pelikan E. Spectral analysis of ARMA processes by Pronyś method / Emil Pelikan. // Kybernetika. – 1984.
[8] A. M. Yaglom, Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions, Vol.1: Basic results, Springer-Verlag,. New York, 1987
[9] N. Wiener. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. Whis engineering applications, The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass, 1966.
[10] A. M. Yaglom. Some clases of stochastic fields in ndimentional space related with stochastic stationary processes, Teor. Veroyatn. Primen, Vol.2, 292-338, 1957.
[11] A. M. Yaglom. Correlation theory of stationary and related stochastic processes with stationary nth increments, Mat. Sbornik, Vol.37, No.1, 141-196, 1955.

[12] Сіцінський Б. С. Оцінка функціонала від рухомого середнього / Сіцінський Б. С. – Київ, 2022.