

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_____ О.І. Клесов
«08» січня 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»**

на тему: «Математичні моделі оптимізації інвестиційного портфелю »

Виконала:

студентка II курсу магістратури, групи ОМ-21мп
Сичова Дар'я Андріївна _____

Керівник:

кандидат технічних наук, доцент
Іваненко Тетяна Вікторівна _____

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Фартушний Іван Дмитрович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студентка _____

Київ - 2024 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Сичовій Дар'ї Андріївни

1. Тема дисертації «Математичні моделі оптимізації інвестиційного портфеля», науковий керівник дисертації Іваненко Тетяна Вікторівна, кандидат технічних наук, доцент, затверджені наказом по університету від «13» листопада 2023 р. № 5250-с
2. Термін подання студентом дисертації: 11.01.2024 р.
3. Об'єкт дослідження: інвестиційний портфель.
4. Вихідні дані: котирування обраних цінних паперів за даними торгів на платформі ПФТС за період 2020 – 2023 р.р.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 - 1) зібрати та систематизувати дані котирувань з відкритих джерел;
 - 2) проаналізувати динаміку дохідності цінних паперів як часових рядів, побудувати автокореляційну функцію;
 - 3) з'ясувати наявність тренду у зміні кінцевої дохідності досліджуваної облигації та перевірити його на значущість за допомогою критерія Стьюдента.
 - 4) провести вирівнювання часового ряду методом ковзної середньої;

5) порівняти дохідність облігацій у 2020-2021 р.р. з періодом 2022-2023 р.р.

6) проаналізувати динаміку дохідності акцій за вказаний період;

7) розрахувати оптимальний розподіл коштів інвестора між активами за допомогою портфельної теорії Марковіца.

7. Орієнтовний перелік публікацій: підготувати тези доповіді на ХІХ конференцію імені Михайла Кравчука.

8. Консультантів немає.

9. Дата видачі завдання: 07.09.2023 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Підбір літературних джерел та огляд літератури.	до 20.09.2023	Виконано
2.	Написання 1 розділу.	до 15.10.2023	Виконано
3.	Збір та систематизація даних для дослідження.	до 30.10.2023	Виконано
4.	Проведення необхідних розрахунків.	до 15.11.2023	Виконано
5.	Написання 2 розділу.	до 30.11.2023	Виконано
6.	Опис отриманих результатів та висновків.	до 15.12.2023	Виконано
7.	Оформлення магістерської дисертації та підготовка до захисту.	до 11.01.2024	Виконано

Студент

Дар'я СИЧОВА

Науковий керівник

Тетяна ІВАНЕНКО

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 57 сторінки, 23 слайдів презентації, 13 першоджерел.

Об'єктом магістерської дисертації є інвестиційний портфель.

Мета магістерської дисертації: сформувати інвестиційний портфель цінних паперів з максимальною дохідністю за умови обмеженого ризику.

У роботі були розглянуті такі види цінних паперів як акції та облігації, моделі дослідження часових рядів та моделі формування портфелю цінних паперів. Було проведено аналіз фондового ринку України, а також аналіз дохідності чотирьох активів за допомогою адитивної та мультиплікативної моделей часових рядів. В результаті за допомогою портфельної теорії Марковіца, було сформовано оптимальний інвестиційний портфель, що відповідає заданим вимогам.

Ключові слова: інвестиції, облігації, акції, дохідність, автокореляційна функція, часовий ряд, критерій Стьюдента, коваріаційна матриця, портфельна теорія.

ABSTRACT

The master's thesis contains 57 pages, 23 presentation slides, 12 primary sources.

The object of the master's thesis is an investment portfolio.

The goal of the master's thesis: to form an investment portfolio of securities with maximum return under the condition of limited risk.

The paper considered such types of securities as shares and bonds, models of time series research and models of formation of a portfolio of securities. An analysis of the stock market of Ukraine was carried out, as well as an analysis of the profitability of four assets using additive and multiplicative time series models. As a result, with Markowitz's portfolio theory, an optimal investment portfolio that meets the given requirements was formed.

Key words: investments, bonds, shares, yield, autocorrelation function, time series, Student's criterion, covariance matrix, portfolio theory.

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Теоретичні відомості.....	8
1.1 Огляд цінних паперів.....	8
1.2 Інвестиційний портфель та моделі його оптимізації.....	17
1.3 Огляд та аналіз Фондового ринку України.....	22
2 Моделювання оптимізації інвестиційного портфелю.....	29
Висновки.....	53
Список використаних джерел.....	56

Вступ

Сучасний фінансовий ринок характеризується постійними змінами і великим ступенем невизначеності. В цих умовах кожен інвестор прагне отримати максимальний прибуток при найменших ризиках, що пов'язані з формуванням портфелю цінних паперів. Тому завжди виникає питання оптимального складу інвестиційного портфелю, як розподілити частки цінних паперів, в які хоче вкласти кошти інвестор, враховуючи його схильність до ризику або консерватизм. У вирішенні цього питання надійним інструментом стає використання моделей оптимізації інвестиційного портфелю, які базуються на математичних та економетричних методах.

Ця магістерська робота спрямована на вивчення та аналіз моделей оптимізації інвестиційного портфеля, їхнім теоретичним основам та практичному застосуванню в умовах сучасного фінансового ринку. Досліджуючи це питання, ми спробуємо визначити оптимальну стратегію розподілу активів для досягнення максимального прибутку при обмеженому ризику за допомогою математичного моделювання та методів економетрики.

В рамках цієї роботи проведено аналіз фондового ринку України, розглянуто класичну математичну модель портфельної теорії Марковіца. В практичній частині розроблено математичну модель формування оптимального інвестиційного портфелю на основі цінних паперів фондового ринку України та акцій відомих іноземних компаній. Після розв'язання задачі отримано оптимальний розподіл загальної суми інвестиції між різними видами цінних паперів та значення максимального очікуваного прибутку портфеля.

1 Теоретичні відомості

1.1 Огляд цінних паперів

Цінні папери – це документи, які мають встановлену форму та відповідні реквізити. Вони свідчать про право на грошовий або інший вид майнових активів, визначають взаємини між особою, яка випустила цінний папір (емітентом), та особою, яка володіє правами на цей цінний папір. Крім того, ці документи включають зобов'язання передавати права на цінний папір іншим особам. Обіг цінних паперів відбувається на фондовому ринку, який може бути охарактеризований за двома основними аспектами: етапами та місцями проведення торгів. [1]

Якість цінних паперів, які потрапляють на фондовий ринок, залежать від статусу їхніх емітентів та економіко-фінансових результатів їх діяльності. Наприклад, державні цінні папери характеризуються низьким рівнем ризиковості, прийнятною дохідністю та фактично абсолютною ліквідністю, тому є досить вигідними об'єктами торгівлі на біржах. Банки, у свою чергу, виступають як безперечні лідери серед фінансово-кредитних установ у випуску цінних паперів. Вони відрізняються високим рівнем прибутковості та суворим регулюванням умов емісії та обігу цінних паперів зі сторони центрального банку[3]. Саме тому, цінні папери, які емітують банки, мають високий рівень надійності та займають важливе місце на фондовому ринку.

Для оцінки коливань цін на цінні папери використовують біржові індикатори та індекси. Індикатор представляє собою середньоарифметичне значення курсів акцій у певний момент часу для репрезентативної групи акцій. Індекс вимірює поточну динаміку курсів цих акцій у порівнянні з величиною, яка була обчислена в певний минулий період часу.

Інвестори порівнюють середні індикатори або індекси на конкретні дати, з метою визначення відносної стійкості чи слабкості ринку. Найпопулярніший індикатор – це середня Доу Джонса (Dow Jones Industrial Average – DJIA), що формується з курсів 30 випусків акцій. Їх обирають через високу оцінку на ринку і поширеність серед багатьох власників. Іншим відомим індексом є індекс автоматизованого котирування Національної асоціації дилерів цінних паперів (NASDAQ), який показує обіг цінних паперів на позабіржовому ринку.

В Україні найбільш показовим є індекс ПФТС (Першої Фондової Торговельної Системи), він розраховується як середньозважена курсів найбільш ліквідних українських акцій, які мають найбільшу ринкову капіталізацію. Ринкова капіталізація – це добуток ціни останньої угоди у поточному періоді на кількість емітованих акцій.[3]

При створенні інвестиційного портфеля, інвестори зазвичай використовують найбільш поширені фінансові інструменти в Україні, такі як акції і облігації. Кожен з цих фінансових інструментів має власне співвідношення між ризиком і доходністю: акції, характеризуються високим рівнем ризику і можливої прибутковості, тоді як облігації мають низький рівень обох цих показників. При формуванні інвестиційного портфеля для розподілу ризику зазвичай обирають певну комбінацію інвестиційних інструментів, і різниця полягає у їхньому співвідношенні. Акції переважно вибирають люди, які прихильні до ризикової інвестиційної стратегії, тоді як консервативні інвестори, які не бажають ризикувати, віддають перевагу облігаціям.[4]

Облігація – це цінний папір, який встановлює взаємовідносини між особою, яка видала облігацію (позичальником), і особою, яка її придбала (кредитором). Облігація підтверджує, що перший власник цього цінного папера вніс кошти, і вона також встановлює зобов'язання для емітента повернути кредиторів суму облігації визначеної номінальної вартості у визначений строк і виплатити дохід за облігацією, визначений купонною(тобто процентною) ставкою. [1]

Залежно від емітента облігації можуть бути державними, муніципальними, корпоративними та іноземними. Наприклад, державні облігації України є найбільш поширеними на фондовому ринку України.[4] Вони поділяються на облігації внутрішньої державної позики України та облігації зовнішніх державних позик України. Облігації внутрішньої державної позики України — це цінні папери, що розміщуються виключно на внутрішніх ринках капіталу і підтверджують зобов'язання України щодо відшкодування пред'явникам цих облігацій їхньої номінальної вартості з виплатою доходу відповідно до умов розміщення облігацій.[1]

Актуальним прикладом облігацій внутрішньої державної позики є військові облігації, які на початку повномасштабного вторгнення стали єдиним доступним цінним папером на фондовому ринку України. Тобто держава фактично бере кошти в борг на певний період, в кінці якого виплачує встановлену дохідність та повертає отримані від інвестора кошти. Дохід інвестора у такому разі буде визначений як різниця між номіналом облігації і фактичною ціною її придбання. Виплати за такими облігаціями на 100% гарантуються державою та обслуговуються Міністерством фінансів України, що було особливо привабливим для інвесторів на той час. У структурі торгів за 2022 рік на державні облігації (ОВДП) припадало 89,09% або 14,2 млрд. грн.[2,3]

В залежності від того, як власник отримує дохід, облігації поділяються на такі види: купонні – тип облігацій, за якою власнику облігації виплачується не тільки номінальна вартість у момент погашення, але і періодичний відсоток; цільові облігації – передбачають зобов'язання емітента надавати товари або послуги; дисконтні облігації, також відомі як облігації з нульовим купоном, продаються за ціною, яка є нижчою від їхньої номінальної вартості, але погашаються за її номінальною вартістю[3].

Облігація характеризується такими критеріями: номінальною вартістю (сумою позики N); купонною ставкою (кредитним процентом $r\%$); терміном погашення n ; емісійною вартістю; ринковою вартістю (V_p); інвестиційною вартістю; курсом. Емісійна вартість облігації – це ціна, за яку вона вперше видається на ринок, і вона може відрізнятися від її номінальної вартості, оскільки включає в себе витрати на емісію. Ринкова вартість облігації – це ціна, за якою її можна продати на вторинному ринку. Інвестиційна вартість облігації – це поточна вартість потоку платежів (PV), що облігація генерує.[3]

Курс облігації – це відношення ринкової вартості до номіналу, що обчислюється за формулою [3]:

$$K = \frac{V_p}{N} \times 100\%$$

У випадку коли облігації певного емітента обертаються на фондовому ринку, то ринкову вартість розраховують за середнім біржовим курсом на фондовій біржі, розрахованим за останні три місяці їх обігу, що передують дню, станом на який визначається ринкова вартість таких облігацій. В інших випадках вона може бути розрахованою як теперішня вартість грошового потоку за формулою [3]:

$$PV = \sum_{k=1}^n \frac{INT}{(1+r_p)^k} + \frac{N}{(1+r_p)^n}$$

де PV – сучасна вартість облігації;

INT – річна процентна виплата по облігації (від англ. *interest*) $INT = N_r$, N

– номінальна вартість облігації;

r_p – ринкова процентна ставка дисконтування, виражена десятковим дробом, що діє на момент оцінювання;

n – кількість періодів до погашення.

Ця формула оцінює купонну облігацію з виплатою процентів один раз на рік та погашенням по завершенню терміну обігу. Коли нарахування відсотків відбувається m разів на рік і виплати відбуваються p разів на рік вартість буде розраховуватись за формулою:

$$PV = \frac{INT}{p} \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{r_p}{m}\right)^{-mn}}{\left(1 + \frac{r_p}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} + \frac{N}{\left(1 + \frac{r_p}{m}\right)^{mn}}$$

Під час емісії облігації її купонна ставка дорівнює ринковій ставці за подібними зобов'язаннями, однак пізніше ринкова ставка може змінюватись. Якщо ринкова ставка знизиться ($r_p < r$), то поточна вартість облігації стане більшою за її номінальну вартість ($PV > N$), тобто облігація буде продаватись з премією. Такі облігації називаються преміальними. Якщо ринкова ставка зросте і $r_p > r$, то $PV < N$, тобто облігація буде продаватись дешевше номіналу, то такі облігації називаються дисконтними. При зростанні інфляції та збільшенні ризику ставка доходності r_p буде рости. Якщо ж ніяких змін не буде і $r_p = r$, то $PV = N$, такі облігації називаються паритетними. [3]

Під час заснування акціонерного товариства (АТ), необхідно створити фонд, який буде виступати як початковий капітал. Такий фонд називають статутним. Згідно з законодавством України «Про акціонерні товариства», АТ – є комерційною організацією, і його статутний капітал розподілено на певну кількість однакових часток із фіксованою номінальною вартістю, корпоративні права за якими засвідчуються акціями. Статутний капітал складається із суми номінальної вартості всіх виданих акцій. [1]

Акція – це іменний цінний папір, який свідчить про наступні майнові права власника акцій (акціонера): право на отримання частини чистого прибутку Акціонерного товариства (АТ) у вигляді дивідендів; право на отримання частини майна АТ в разі його ліквідації; право на участь в управлінні акціонерним товариством. Основні рішення щодо діяльності АТ приймаються через загальні збори акціонерів, які є найвищим органом управління. Рішення приймаються голосуванням більшістю голосів, де кожна акція надає право одного голосу. Таким чином, акціонер, який володіє більшою кількістю акцій, може впливати на результати голосування в більшій мірі. Контрольний пакет акцій визнається тоді, коли власник володіє більшою частиною від загальної кількості акцій АТ. Власник контрольного пакету може фактично самостійно приймати рішення щодо діяльності АТ. [1,3]

АТ видають два види акцій: прості та привілейовані. Прості акції надають їх власникам право отримувати частки прибутку АТ у вигляді дивідендів та на участь в управлінні акціонерним товариством. Також надається право на отримання майна АТ у разі припинення його існування. Прості акції не можуть бути конвертованими у привілейовані акції або інші цінні папери АТ, на відміну від привілейованих акцій, які можна

конвертувати в прості або у привілейовані акції інших класів. Привілейовані акції надають їх власникам переважні права на отримання частини доходу АТ у вигляді дивідендів (якщо дохід незадовільний, то власники привілейованих акцій отримують дивіденди за рахунок коштів резервного фонду); переважні, відносно власників простих акцій, права на отримання частини майна АТ у разі припинення його існування; надають права на участь в управлінні АТ лише у випадках, передбачених статутом і законом «Про акціонерні товариства». АТ розміщує привілейовані акції різних класів (з різним обсягом прав), якщо така можливість передбачена його статутом.

У такому разі умовою їх розміщення є черговість отримання дивідендів і виплат з майна ліквідованого товариства для кожного класу привілейованих акцій, яка встановлюється статутом товариства. Частина привілейованих акцій у статутному капіталі АТ не може бути більшою за 25%. [3]

Акція, що обертається на фондовому ринку, характеризується: номінальною вартістю, ринковою вартістю (V_p), інвестиційною вартістю, емісійною вартістю, курсом, величиною дивідендів на одну акцію (d_k в k -му році). Курс акції, як і у випадку з облігаціями, визначається відношенням її ринкової ціни до номінальної вартості. Відмінність полягає в тому, що акції не мають встановленого терміну погашення і перебувають в обігу стільки, скільки існує акціонерне товариство. [3]

Дохід з акцій не характеризується фіксованою відсотковою ставкою, як у випадку облігацій. Він залежить від діяльності акціонерного товариства. У випадку, коли підприємство у формі акціонерного товариства зазнає збитків, власники звичайних акцій не отримують прибутку протягом відповідного періоду. Навіть у разі рентабельної діяльності акціонерного товариства, власники звичайних акцій можуть не

отримати дивіденди, оскільки на зборах акціонерів може бути прийняте рішення виділити частину або всі прибуткові кошти на інші цілі, такі як розвиток, розширення та інвестиційна діяльність. [3]

Якщо акції АТ знаходяться в обігу на фондовому ринку, їхню ринкову вартість визначають, як і для облігацій, за середнім біржовим курсом. Якщо акції не беруть участі у торгах, їхню вартість можна розрахувати за формулою[3]:

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{(1+r_k)^k}$$

де d_k – величина дивідендів за акцією в k -му році;

r_k – ставка можливого реінвестування дивідендів в k -му році.

Якщо власник продасть акцію через n років, тоді вартість акції розраховується за формулою:

$$PV = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{(1+r_k)^k} + \frac{P_n}{(1+r_k)^n},$$

де P_n – ціна продажу акції.

Якщо придбати акції на вторинному ринку — це фінансова інвестиція, вартість якої, як і для облігації, дорівнює $NPV = PV - V_p$. У випадку, коли $NPV = 0$, стала ставка дисконтування r – це IRR проекту. Таким чином, ставка, за якою розрахована теперішня вартість акції, дорівнює її ринковій ціні, та називається вартістю власного капіталу компанії. Труднощі, що виникають при оцінці акцій є не лише прогнозування майбутніх дивідендів, але й визначення ставки дисконтування, яка визначає прибутковість інших можливих інвестиційних варіантів. Тому при прогнозуванні роблять деякі припущення і використовують різні моделі[3]:

1) Модель з постійними дивідендами та незмінною ставкою дисконтування.

Розглядається випадок, коли акція генерує грошовий потік — довічну ренту, її поточну вартість обчислюють за формулою:

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{(1+r_k)^k} = \frac{d}{r}$$

Дана модель властива для привілейованих акцій. У випадку коли відома ринкова ціна акції V_p , то внутрішню норму прибутковості обчислюють за формулою:

$$IRR = \frac{d}{V_p}$$

2) Модель одиничного періоду.

Дана модель бере до уваги, що інвестор купує акцію, та рівно через 1 рік продає її. Поточна вартість акції в такому випадку розраховується за формулою:

$$PV = \frac{d_1 + FV_1}{1+r}$$

де d_1 – величина дивідендів за акцією за рік;

FV_1 – ціна акції через рік.

Можна визначити швидкість зростання ціни g : $FV_1 = PV(1 + g)$,

тоді $PV = \frac{d_1 + PV(1+g)}{1+r} \Rightarrow PV = \frac{d_1}{r-g}$ (при умові $r > g$).

3. Модель з постійним темпом приросту дивідендів (модель Гордона).

Нехай g постійний темп приросту дивідендів, тоді:

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(1+g)^k}{(1+r)^k}$$

За формулою суми геометричної прогресії $b_1 = \frac{d(1+g)}{1+r}$, $q = \frac{1+g}{1+r}$

, за умови, що $r > g \Rightarrow PV = \frac{\frac{d(1+g)}{1+r}}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{d(1+g)}{r-g}$.

Поточна вартість акції визначається наступним чином:

$$PV = \frac{d_1}{r-g},$$

де d_1 – величина дивідендів за акцією через 1 рік.

Внутрішню норму рентабельності такої фінансової інвестиції розраховують за формулою[3]:

$$IRR = \frac{d_1}{V_p} + g.$$

1.2 Інвестиційний портфель цінних паперів та модель його оптимізації

Портфель цінних паперів – це сукупність фінансових інструментів, підібрана для інвестиційної діяльності відповідно до обраної стратегії. Портфель може складатися з однотипних цінних паперів або різних активів (акції, облігації, тощо).

Перед формуванням оптимального інвестиційного портфелю необхідно провести дослідження та аналіз кожного активу, в який інвестор хоче вкласти кошти. Для цього необхідно зібрати дані щодо зміни вартості цінних паперів за певний період часу.

Вибірка, що складається з цих даних являє собою часовий ряд — сукупність значень будь-якого показника за декілька послідовних моментів або періодів часу. Елементи часового ряду називаються рівнями ряду, а кількість рівнів ряду — довжиною ряду. Рівень часового ряду формується під впливом факторів, які можна поділити на 3 групи[13]:

- 1) Фактори, що формують тенденцію ряду;
- 2) Фактори, що формують циклічні коливання ряду;
- 3) Випадкові фактори.

Якщо у часовому ряді присутні тенденція та циклічні коливання, значення кожного наступного рівня ряду залежать від попередніх. Кореляційну залежність між послідовними рівнями часового ряду називають автокореляцією рівнів ряду. Кількісно її можна виміряти за допомогою лінійного коефіцієнта кореляції між рівнями вихідного часового ряду та рівнями цього ряду, зрушеними на кілька кроків у часі:

$$r_k = \frac{(n - k) \sum_{t=1}^{n-k} y_t y_{t+k} - \sum_{t=1}^{n-k} y_t \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}}{\sqrt{\left[(n - k) \sum_{t=1}^{n-k} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-k} y_t \right)^2 \right] \left[(n - k) \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k} \right)^2 \right]}}$$

Число періодів, якими розраховується коефіцієнт автокореляції, називають лагом. Зі збільшенням лага число пар значень, якими розраховується коефіцієнт автокореляції, зменшується. Послідовність коефіцієнтів автокореляції рівнів першого, другого і т. д. порядків називають автокореляційною функцією часового ряду. Графік залежності її значень від величини лага (порядку коефіцієнта автокореляції) називається корелограмою[13].

Існує декілька підходів для аналізу структури часового ряду, що містять сезонні та циклічні коливання. Один з найпростіших – розрахунок сезонної компоненти методом ковзної середньої і побудовою адитивної або мультиплікативної моделі часового ряду.

Після аналізу кожного цінного паперу, можна сформувати інвестиційний портфель за допомогою теорії, розробленою Гаррі Марковіцем, що відома як "Сучасна портфельна теорія" [5]. Дана теорія відповідає на ключове питання: як оптимально розподілити інвестиції між різними активами. Вона стала справжнім проривом в області прийняття інвестиційних рішень та змінила уявлення про формування інвестиційного портфелю.

Головна ідея теорії полягає в тому, що формувати портфель потрібно не по окремим показникам дохідності та ризику різних активів, а враховуючи залежність між ними. Метод ґрунтується на ідеї несистематичного розподілу ризику: кореляція між активами у портфелі відіграє ключову роль у визначенні загального ризику портфелю[6].

Інвестиційний портфель складається з деякої кількості різних видів цінних паперів, кожен з яких характеризується певним очікуваним прибутком r_i за період n :

$$r_i = \frac{C_{in} - C_{io}}{C_{io}},$$

де C_{io} – вартість активу у початковий часовий період.

Загальна дохідність активу визначається за формулою :

$$r^* = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_i,$$

де t – кількість минулих спостережень дохідності активу.

Ризик активу визначається середнім квадратичним відхиленням його дохідності:

$$\sigma_i = \text{var}(r_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2},$$

де \bar{r} – середнє арифметичне ринкової вартості активу.

Для того щоб визначити залежність дохідності між активами розраховується коефіцієнт коваріації:

$$\text{cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^k (r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)$$

Сформулюємо оптимізаційну задачу: маємо $i = 1 \dots n$ видів активів, встановлений допустимий ризик дорівнює σ_{req} , а цільова функція буде виражатись через формулу дохідності портфелю, яку ми будемо максимізувати:

$$R = \sum_{i=1}^n w_i \cdot r_i \rightarrow \max,$$

де n – кількість цінних паперів у портфелі, w_i – частка активу у інвестиційному портфелі, r_i — дохідність конкретного активу.

Ризик портфелю визначається функцією:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n (w_a \cdot \sigma_a \cdot w_b \cdot \sigma_b \cdot \text{cov}(r_a, r_b))},$$

де $w_{i,j}$ – частка активу у портфелі;

σ_i, σ_j – ризик даних паперів.

Обов'язкове обмеження: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Якщо модель Марковіца розглядається без урахування можливості коротких продаж, то додатково встановлюється обмеження $w_i \geq 0$. [6]

Тоді пряма задача формування інвестиційного портфелю набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N w_i r_i \rightarrow \max; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (w_i \cdot \sigma_i \cdot w_j \cdot \sigma_j \cdot \text{cov}(r_i, r_j))} \leq \sigma_{req}; \\ w_i \geq 0; \\ \sum w_i = 1. \end{array} \right.$$

Обернена задача розраховується аналогічно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N w_i r_i \geq R_{req}; \\ \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (w_i \cdot \sigma_i \cdot w_j \cdot \sigma_j \cdot \text{cov}(r_i, r_j))} \rightarrow \min; \\ w_i \geq 0; \\ \sum w_i = 1. \end{array} \right.$$

В результаті отримуємо оптимальний розподіл часток активів у портфелі, відповідно до обраної стратегії.

1.3 Огляд та аналіз Фондового ринку України

Фондовий ринок — це сукупність економічних відносин, де компанії можуть видавати цінні папери, щоб залучити капітал для розвитку бізнесу, а інвестори можуть купувати та продавати ці цінні папери з метою отримання прибутку.

На фондовому ринку України діють різні фондові біржі та інші фінансові установи, які надають послуги торгівлі цінними паперами. До них включаються такі біржі, як "Українська біржа", "ПФТС" (ПЕРША ФОНДОВА ТОРГОВА СИСТЕМА), "Перспектива" та інші. Фондовий ринок відіграє важливу роль у розвитку економіки, оскільки він допомагає компаніям залучати інвестиції та забезпечує інвесторам можливість розширити свій портфель та отримати прибуток через інвестування у цінні папери. Навіть якщо фондовий ринок і реальний сектор економіки функціонують як відносно незалежні системи, між ними існують певні взаємодії. Особливо значущий вплив фондового ринку на реальний сектор спостерігається під час кризових ситуацій[10].

Аналіз фондового ринку важливий для розуміння та прийняття інвестиційних рішень. По перше, це допомагає інвесторам оцінювати ринки та інвестиційні інструменти, створювати диверсифіковані портфелі, зменшуючи ризик втрат та збільшуючи можливості отримання прибутку. По друге, аналіз фондового ринку дозволяє враховувати макроекономічні та геополітичні події, які можуть вплинути на ринок та інвестиційний клімат.

Незважаючи на позитивні тенденції, варто відзначити, що для інвесторів вибір ліквідних фінансових інструментів на фондовому ринку України обмежений. Нестійкість фондового ринку стримує його розвиток та перешкоджає встановленню повноцінного механізму мобілізації фінансових ресурсів.[10]

Розглянемо показники та проведемо аналіз Фондового ринку України на прикладі трьох найпопулярніших фондових бірж: ПФТС, Українська біржа, Перспектива (Таблиця 1.1).[8][9][10]

Таблиця 1.1

**Обсяг торгів на фондових біржах протягом
2018—2022 років, млрд грн.**

<i>Організатор торгівлі</i>	<i>Роки</i>				
	2018	2019	2020	2021	2022
ПФТС	114,09	114,9	132,7	221,5	90,3
УБ	20,8	3,8	2,4	13,3	16,008
Перспектива	127,3	186,37	201,46	201,5	65,53
ВСЬОГО	262,19	305,07	336,56	436,3	171,838

Візуалізуємо показники на Рис.1.1 та Рис 1.2.

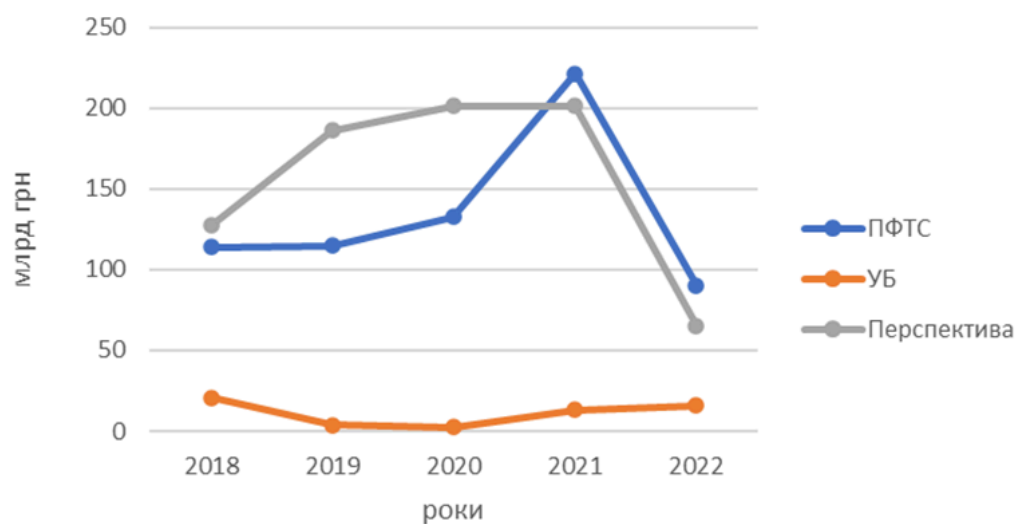


Рис.1.1. Динаміка обсягу торгів на біржах

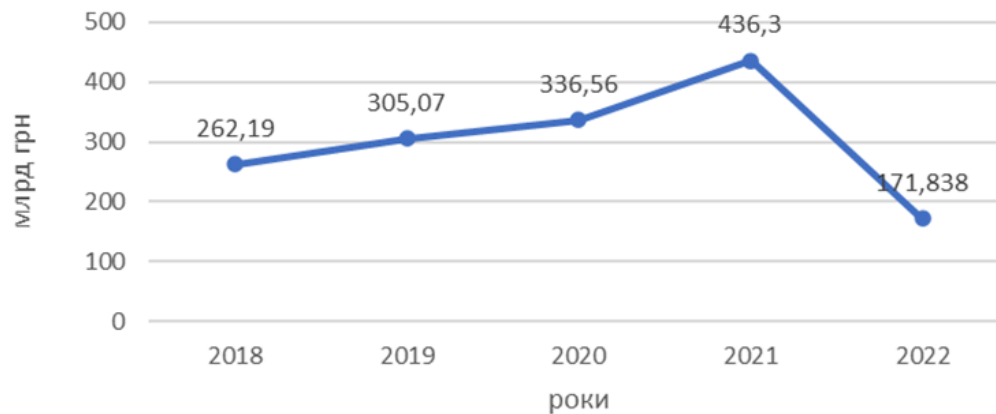


Рис.1.2. Динаміка загального обсягу торгів

Можемо спостерігати, що фондовий ринок України мав тенденцію стабільного зростання починаючи з 2018 року, з максимальним показником у 2021 році. Та після початку війни у 2022 році загальний обсяг торгів на фондових біржах зменшився на 67.8% в порівнянні з 2021 роком та показники опустились нижче показників 2018 року.

Порівнюємо дані обсягів торгів за січень-червень 2023 року з аналогічними періодами минулих років, млрд грн(Таблиця 1.2) та візуалізуємо це на Рис.1.3 та Рис.1.4.

Таблиця 1.2

Обсяг торгів за період січень-червень 2023 року

<i>Організатор торгівлі</i>	<i>Роки</i>		
	2021	2022	2023
ПФТС	94,1	52,4	132,6
УБ	3,9	8,1	6,7
Перспектива	106,1	46,32	79,61
ВСЬОГО	204,1	106,82	218,91

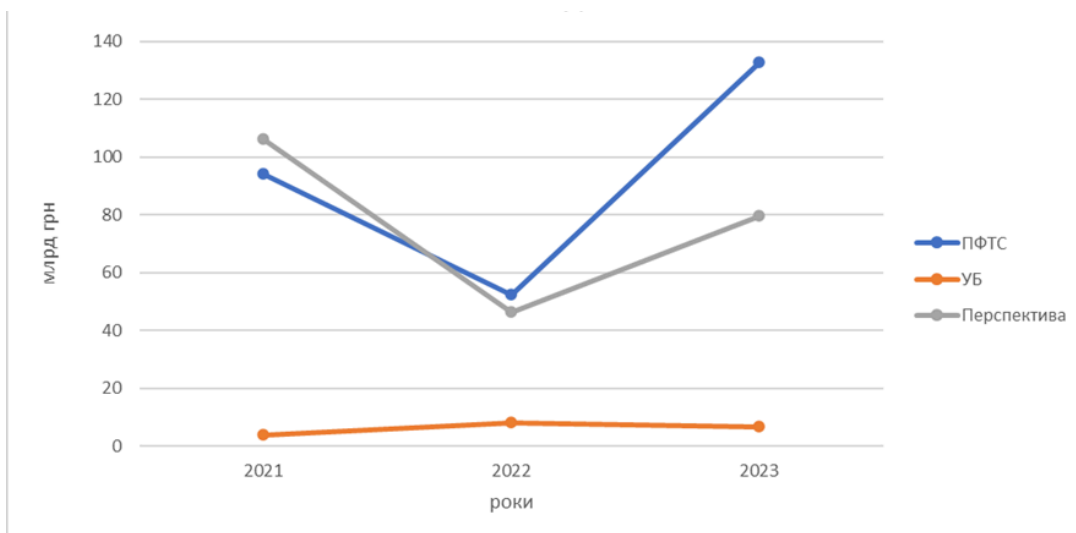


Рис.1.3. Обсяг торгів на біржах за період січень-червень 2021-2023 роки

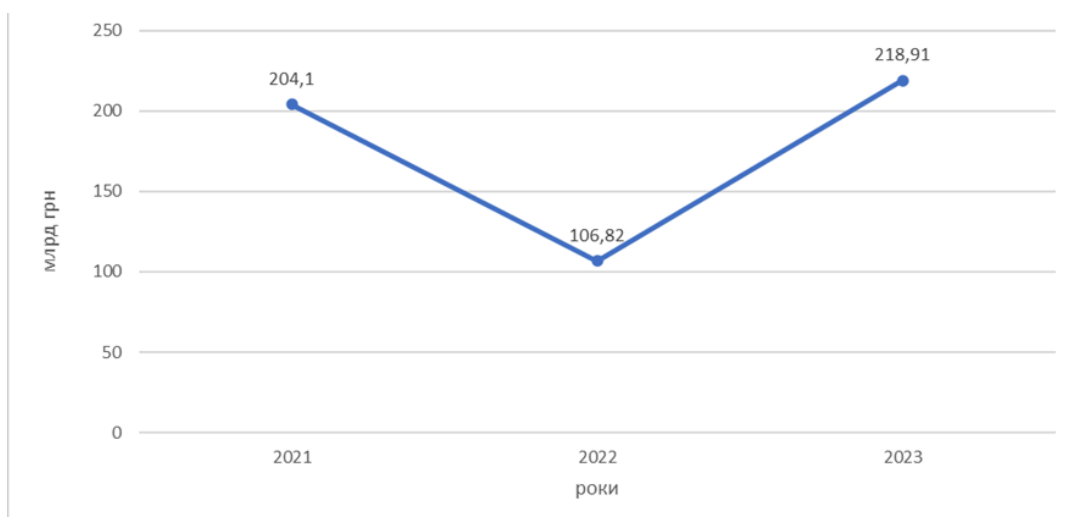


Рис.1.4. Загальний обсяг торгів за період січень-червень 2021-2023 роки

Як можна побачити на графіку, є суттєве зниження біржової активності у 2022 році порівняно з аналогічним періодом 2021 року. Це викликано введенням воєнного стану, на початку якого була дозволена торгівля виключно військовими ОВДП. Наприклад, лише 13 випусків цінних паперів з 389 випусків ЦП було допущено до торгів на ПФТС[7].

На даних з фондової біржі “Перспектива” [7] можемо побачити, що за перше півріччя 2022 року було укладено 15,59 тис. угод на суму 46,32 млрд грн. (-56% до січня-червня 2021 р.), а за аналогічний період 2023 року було укладено вже 43,00 тис. угод на суму 79,61 млрд грн. (+72% до січня-червня 2022 р.). Також ще більший зріст за січень-червень 2023 року спостерігається і на біржі ПТФС[7] (253% рівня аналогічного періоду 2022 року або 147% рівня 2022 року). Показники за 2023 рік на даній біржі навіть перевищують показники довоєнного часу. На Українській біржі показники лишаються стабільно невеликими.

Загальний обсяг торгів на всіх біржах за перше півріччя 2023 року має більший показник, ніж за повний 2022 рік, тож можна припустити, що до кінця року обсяг торгів може наблизитись до довоєнних цифр.

На прикладі Української біржі розглянемо розподіл цінних паперів у об’ємі торгів за період першого півріччя 2021-2023 років(Таблиця 1.3) та зобразимо це на на Рис.1.5, Рис.1.6,Рис.1.7 .[9]

Таблиця 1.3

**Розподіл цінних паперів на УБ за період
січень-червень 2023 року.**

Цінні папери	Роки					
	2021		2022		2023	
	млн грн	%	млн грн	%	млн грн	%
Акції	209,1	5,3	32,4	0,39	49,5	0,73
Корпоративні облігації	46,8	1,1	42,7	0,52	103,8	1,53
Державні внутрішні облігації	3 231, 06	82,2	6 896,4	84,9	6 568, 9	97,42

Інвестиційні сертифікати	11, 8	0,3	3,8	0,04	1,9	0,02
Державні зовнішні облігації	432, 8	11,1	1 139,8	14,03	18,05	0,26
Муніципальні облігації	0, 135	0,003	4,8	0,05	--	--
ВСЬОГО	3 931,8	100	8 120, 1	100	6 742, 3	100

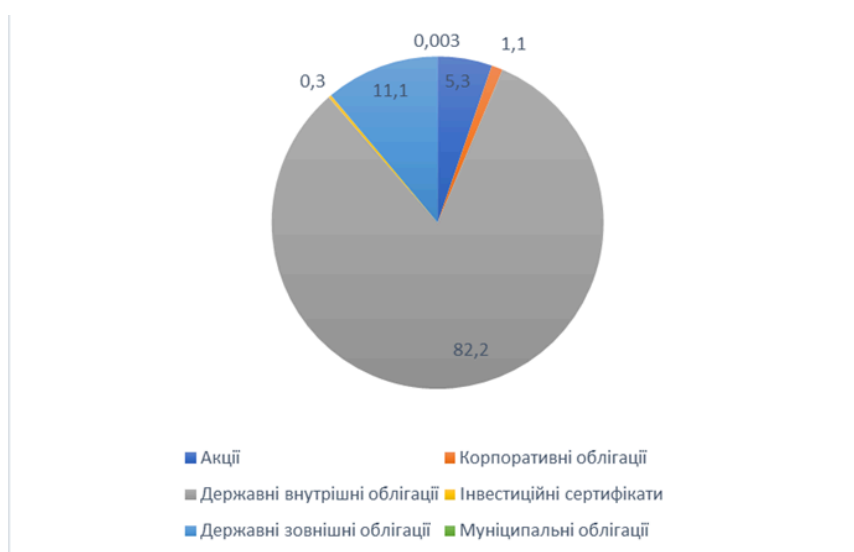


Рис.1.5 Розподіл цінних паперів на УБ за 2021 рік

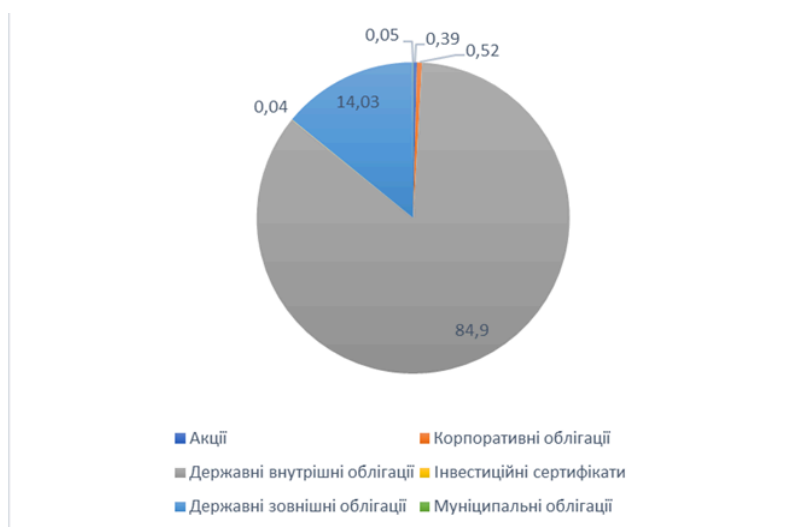


Рис.1.6 Розподіл цінних паперів на УБ за 2022 рік

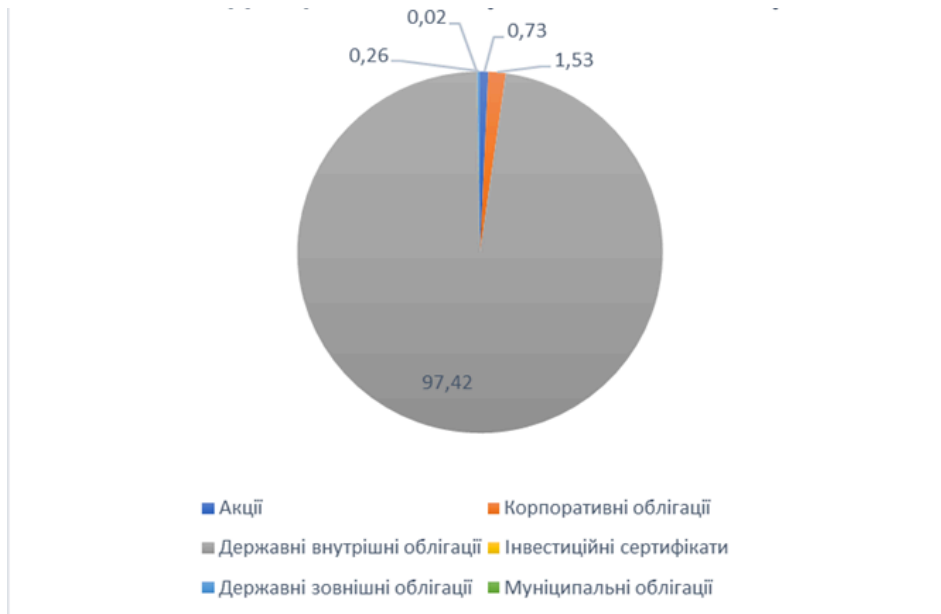


Рис.1.7 Розподіл цінних паперів на УБ за 2023 рік

Суттєву перевагу на Українській біржі за період січень-червень 2021-2023 років складають державні внутрішні облігації, і особливо зростає їх питома вага у 2023 році, зокрема за рахунок військових облігацій, які є їх видом. На біржах ПФТС та “Перспектива” також безперечно більшість в обігу цінних паперів складають державні внутрішні облігації (>90%).

Помітно знизився обсяг обігу акцій у першій половині 2022 року в порівнянні з цим же періодом у 2021 році, та мав невеликий приріст у 2023 році. Зовнішні державні облігації мали найбільший показник після внутрішніх облігацій протягом першого півріччя 2021-2022 років, проте мають суттєво нижчі показники за 2023 рік.

2 Математична модель формування інвестиційного портфелю

Наша мета оптимізувати інвестиційний портфель, обравши стратегію максимізації середнього прибутку за умови лімітованого ризику. Інвестор хоче вкластись у різні цінні папери і задача, яку потрібно вирішити: як розподілити умовну суму коштів між цінними паперами різних видів, враховуючи встановлені умови.

Першим активом оберемо найменш ризикований тип цінних паперів, а саме облігацію внутрішніх державних позик (ОВДП) України. На основі даних з Першої фондової торговельної системи (ПФТС)[7], зробимо вибірку біржових курсів обраної ОВДП станом на останній день кожного кварталу 2020-2023 років. Така статистична вибірка утворює часовий ряд і кожний його рівень (елемент вибірки) складається з трендової, сезонної та випадкової компонент.[4] На рис.2.1 показано котирування обраної ОВДП на відповідні дати, розраховано її кінцеву дохідність (дохідність до погашення YTM).

	A	B	C	
1	ОВДП	код ISIN 204150	дата погаш.:	2,
2			котирування на 100	дохідн
3	дата	номер	одиниць номіналу	до пог
4	3/31/2020		1	104.8
5	6/30/2020		2	118.42
6	9/30/2020		3	115.28
7	12/31/2020		4	113.24
8	3/31/2021		5	109.65
9	6/30/2021		6	109.34
10	9/30/2021		7	107.51
11	12/31/2021		8	106.46
12	3/31/2022		9	105.05
13	6/30/2022		10	105.05
14	9/30/2022		11	90.78
15	12/31/2022		12	89.4

Рис. 2.1. Динаміка котирувань ОВДП та зміна її кінцевої дохідності

Купонна ставка даної облігації складає 15.84% . Вибіркове середнє значення дорівнює 15.24%, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 4.65\%$. На рис.2.2 наведено графіки котирування, дохідності та лінію тренду. Як видно з графіку, лінія тренду зростає, тобто дохідність облігації зростає з плином часу.

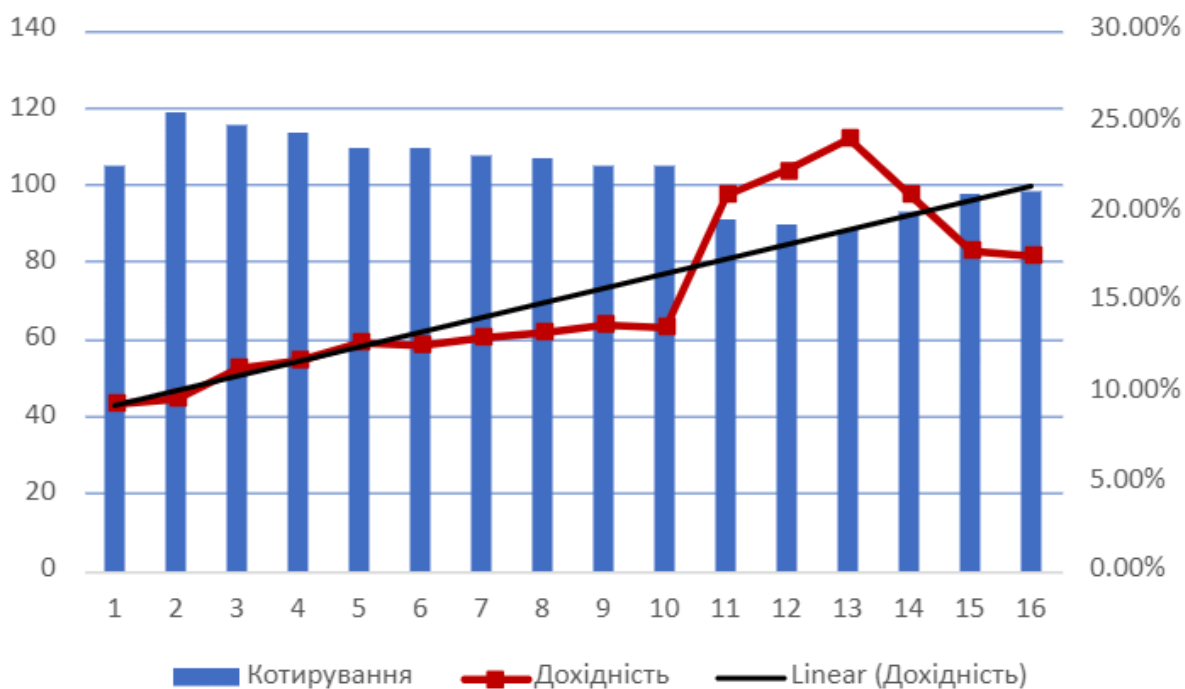


Рис.2.2. Зміна дохідності до погашення облігації

Щоб визначити структуру нашого часового ряду необхідно побудувати автокореляційну функцію та провести її аналіз. На рис. 2.3 зображено графік автокореляційної функції, значеннями якої є коефіцієнти автокореляції n -го порядку r_n , розраховані між рівнями ряду y_t та y_{t-n} , де за y_t позначено дохідність до погашення в момент t , а за y_{t-n} – YTM у момент $t - n$ з лагом n . Ці коефіцієнти характеризують щільність лінійного зв'язку між поточним і попереднім рівнями ряду. [4]

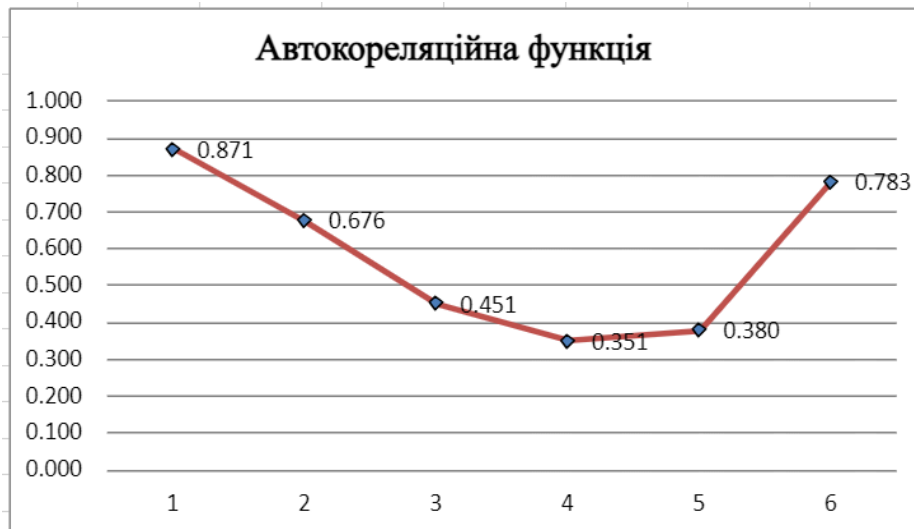


Рис. 2.3. Коефіцієнти автокореляції 1 – 6 порядків

Оскільки найбільший лаг не повинен бути більше $1/4$ від загальної кількості спостережень [13], у нашому випадку потрібно враховувати лише коефіцієнти r_1, r_2, r_3, r_4 . Так як найвищий за абсолютною величиною вийшов коефіцієнт $r_1 = 0,871$, можемо зробити висновок про наявність тренду у зміні кінцевої дохідності обраної облігації, а його високе значення свідчить про те, що зв'язок між рядами є високим.

Але цей коефіцієнт кореляції також необхідно перевірити на значущість за допомогою критерія Стюдента. Задамо рівень значущості $\alpha = 0,05$ та перевіримо основну гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта кореляції r_1 генеральної сукупності проти альтернативної. [4]

Тоді маємо: $T = \frac{r_1 \sqrt{16-2}}{\sqrt{1-(r_1)^2}} \approx 6.63$, а критичне значення складає

$t_{кр}(0,05; 14) = 2,15$. Так як $|T| \geq t_{кр}$, то гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта автокореляції ми відхиляємо. Отже, коефіцієнт автокореляції r_1 є значущим.

На Рис.2.2 можна помітити зменшення амплітуди сезонних коливань, тому обираємо мультиплікативну модель часового ряду: $Y=T \cdot S \cdot E$, де Y – дохідність облігації, T – трендова складова, S – сезонна компонента, E – випадкова складова. Для початку проведемо вирівнювання часового ряду методом ковзної середньої[13].

Для цього необхідно:

1) додати рівні ряду послідовно за кожні три квартали зі зсувом на один момент часу, після чого розділимо отримані значення на 3, щоб знайти середню ковзну. Отримані таким чином дані вже не містять сезонної компоненти;

2) Після цього ми приведемо ці значення у відповідності з фактичними моментами часу, для чого знайдемо середнє значення із двох послідовних ковзних середніх і отримаємо значення центрованої ковзної середньої;

3) Знайдемо оцінки сезонної компоненти як частку від ділення фактичних значень ряду на центровану ковзну середню.

Дані запишемо в Таблицю 2.1. Використаємо отримані оцінки для розрахунку значень сезонної компоненти S . Для цього знайдемо середні за кожен квартал оцінки сезонної компоненти S та коригувальний коефіцієнт. Після цього ми зможемо визначити скориговані значення сезонної компоненти S_i , помноживши її середні оцінки на коригуючий коефіцієнт (таблиця 2.2).

Таблиця 2.1

Розрахунок оцінок сезонної компоненти часового ряду

Періоди, t	YTM, y_t (%)	Ковзна середня за 4 квартала	Центрована ковзна середня	Оцінка сезонної компоненти
1	9.24			
2	9.62	10.47		
3	11.33	11.32	10.90	1.04
4	11.71	12.07	11.69	1.00
5	12.62	12.49	12.28	1.03
6	12.61	12.87	12.68	0.99
7	13.03	13.13	13.00	1.00
8	13.25	13.35	13.24	1.00
9	13.66	15.32	14.34	0.95
10	13.49	17.57	16.44	0.82
11	20.88	20.16	18.86	1.11
12	22.24	22.01	21.08	1.05
13	24.03	21.24	21.62	1.11
14	20.88	20.05	20.64	1.01
15	17.81			
16	17.46			

Таблиця 2.2

Розрахунок сезонної компоненти S

Рік	№ кварталу, i			
	1	2	3	4
1			1.04	1.00
2	1.03	0.99	1.00	1.00
3	0.95	0.82	1.11	1.05
4	1.11	1.01		
Усього за i -й квартал	3.09	2.82	3.15	3.05
Середні оцінка сезонної компоненти для i -го кварталу \bar{S}_i	1.03	0.94	1.05	1.02
Скориговані сезонна компонента S_i	1.01	0.93	1.03	1.03

Маємо

$$1.03 + 0.94 + 1.05 + 1.02 = 4.04$$

Визначимо коригувальний коефіцієнт:

$$k = \frac{4}{4.04} = 0.99$$

Визначимо скориговані значення сезонної компоненти, помноживши її середні оцінки на коригувальний коефіцієнт:

$$S_i = \bar{S}_i \cdot k, \text{ де } i = \overline{1, 4}.$$

Взаємопогашуваність сезонних впливів в мультиплікативній моделі виражається в тому, що сума значень сезонної компоненти по всім кварталам повинна бути рівною числу періодів в циклі. В нашому випадку число періодів одного циклу (року) дорівнює 4 (квартали).

Перевіримо умову рівності 4 суми значень сезонної компоненти:

$$1.01 + 0.93 + 1.03 + 1.03 = 4$$

Отримали наступні значення сезонної компоненти (Таблиця 2.3).

Таблиця 2.3

Значення сезонної компоненти

1 квартал	$S_1 = 1.01$
2 квартал	$S_2 = 0.93$
3 квартал	$S_3 = 1.03$
4 квартал	$S_4 = 1.03$

Отримані результати занесено в Таблицю 2.2.

Тепер вирівняємо початковий часовий ряд для виключення впливу сезонної компоненти і отримаємо величини, які містять лише трендову та випадкову компоненту $T * E$ (Таблиця 2.4).

Таблиця 2.4.

Розрахунок вирівняних значень у мультиплікативній моделі

t	y_t	S_i	$y_t/S_i = T \cdot E$	T	$T \cdot S$	E
1	9.24	1.01	9.15	9.19	9.28	1.00
2	9.62	0.93	10.34	10.00	9.30	1.03
3	11.33	1.03	11.00	10.80	11.13	1.02
4	11.71	1.03	11.37	11.61	11.96	0.98
5	12.62	1.01	12.50	12.42	12.54	1.01
6	12.61	0.93	13.56	13.22	12.30	1.03
7	13.03	1.03	12.65	14.03	14.45	0.90
8	13.25	1.03	12.86	14.84	15.28	0.87
9	13.66	1.01	13.52	15.64	15.80	0.86
10	13.49	0.93	14.51	16.45	15.30	0.88
11	20.88	1.03	20.27	17.26	17.78	1.17
12	22.24	1.03	21.59	18.07	18.61	1.20
13	24.03	1.01	23.79	18.87	19.06	1.26
14	20.88	0.93	22.45	19.68	18.30	1.14
15	17.81	1.03	17.29	20.49	21.10	0.84
16	17.46	1.03	16.95	21.29	21.93	0.80

На рис. 2.3 зображено графіки фактичного (червона крива) та вирівняного (зелена крива) часових рядів та рівняння ліній тренду. З рівняння тренду $y = 0.807t + 8.381$ знайдемо рівні T для кожного моменту часу.

Після цього ми можемо знайти рівні ряду за мультиплікативною моделлю, помноживши рівні T на значення сезонної компоненти для відповідних періодів, а також похибку $E = y_t : (T \cdot S)$. Результати розрахунків наведено у таблиці 2.4.

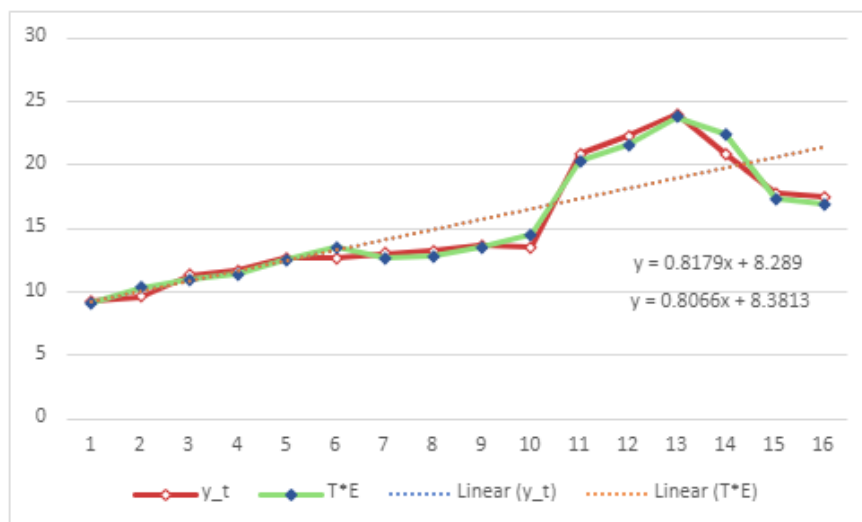


Рис.2.3. Порівняння початкового часового ряду та ряду з виключеною сезонною компонентою

На рис.2.4 візуалізуємо графіки фактичного та вирівняного часового ряду.

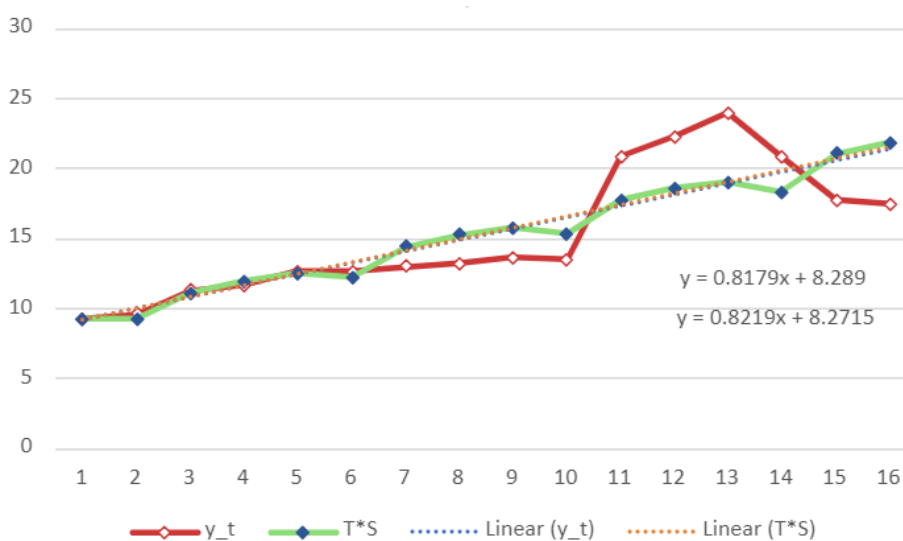


Рис. 2.4 Дохідність ОВДП (фактичні та вирівняні за мультиплікативною моделлю часові ряди)

Вибіркове середнє в такому випадку буде дорівнювати 15.26%, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3.27\%$.

Облігації внутрішньої державної позики це фактично безризиковий вклад коштів для інвестора. Як ми бачимо на рис.4 лінія тренду лінійно зростає, а це означає, що дохідність обраної ОВДП має тенденцію збільшуватись з плином часу. Оскільки ми розглядали період 2020-2023 років, варто зауважити, що дані за період 20-21 років та 22-23 років відрізняються, оскільки ситуація на фондовому ринку України суттєво змінилась. На рис.2.1 видно, що в період після початку повномасштабного вторгнення значно впала котировка облігації, тобто її вартість.

Але якщо взяти помісячні дані за період 2020-2021 року, дохідність цієї облігації становила 12.35% (середнє квадратичне відхилення 1,409%), а за період 22-23 років — 18.61% (середнє квадратичне відхилення 3,63%) (Рис. 2.5).

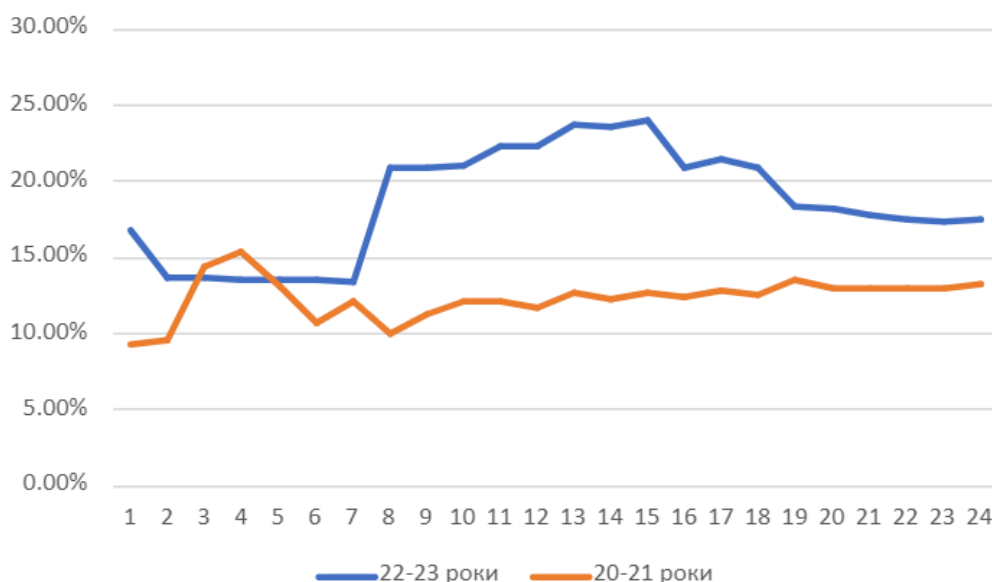


Рис. 2.5 Дохідність ОВДП по місяцям за період в 2 роки

Другий актив, який ми оберемо в наш портфель, буде військова облигація, що є підвидом облигацій внутрішньої державної позики. Даний тип цінних паперів є найактуальніший в наш час. На рис. 2.6 зображено котирування військової облигації на останній день місяця, в який відбулись торги. Вибірка є невеликою, оскільки розміщення військових облигацій є нерегулярним, на відміну від звичайних ОВДП та вони мають середньостроковий термін обігу.

A	B	C	D
ОВДП	код ISIN 226450	дата погаш.:	3/13/2024
		котирування на 100	дохідність
дата	номер	одиниць номіналу	до погашення
2/28/2023	1	97.22	19.04%
4/30/2023	2	96.57	20.41%
5/25/2023	3	98.55	17.91%

Рис. 2.6. Динаміка котирувань військової облигації та зміна її кінцевої дохідності

Купонна ставка для обраної облигації становить 16%. Вибіркове середнє дорівнює 18.87%, а середнє квадратичне відхилення — 1.13%. Оскільки для детального аналізу даного часового ряду недостатньо відкритих даних, будемо вважати, що співвідношення дохідність/ризик по даному цінному паперу дорівнює обчисленому вище вибіркового середньому та середньому квадратичному відхиленню відповідно.

Згідно з даними Національної комісії з цінних паперів та фондового ринку найбільший обсяг торгів за фінансовими інструментами на операторах організованих ринків капіталу протягом зазначеного періоду зафіксовано з ОВДП – 321,6 млрд грн (92,6 % від загального обсягу торгів фінансовими інструментами на операторах організованих ринків капіталу протягом січня-жовтня поточного року). Торгів за ОВДП було здійснено на 321640,9 млн. гривень, в той час як за акціями було здійснено торгів лише на 79,1 млн. грн. [12] Тому, на жаль, відома актуальна інформація по

акціям підприємств та компаній України є недостатньою для проведення аналізу їх дохідності.

Останніми активами в нашому інвестиційному портфелі будуть акції двох відомих іноземних компаній: Тесла (TSLA) та McDonald's (MCD).

Позначимо ціну акцій у i -тому періоді як P_i , тоді дохідність – це відношення різниці між вартостями у кінці періоду та на початку до початкової вартості:

$$R_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{P_i}$$

Тоді дохідність, що очікується розраховується за формулою:

$$R_m = \frac{\sum R_i}{n}$$

де R_i – дохідність акції; n – кількість періодів, що розглядаються.

Ризик розраховується як вибіркове середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (R_i - R_m)^2}{n-1}}$$

У таблиці 2.5 наведено вартості акцій помісячно за чотири останні роки (кожен рядок таблиці – 1 рік) для двох компаній на основі відкритих даних [11].

Таблиця 2.5

Динаміка вартості акцій TSLA

Місяці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	43.37	44.53	34.93	52.13	55.67	71.99	95.38	166.11	143	129.35	189.2	235.22
2021	264.51	225.17	222.64	236.48	208.41	226.57	229.07	245.24	258.49	371.33	381.59	352.26
2022	312.24	290.14	359.2	290.25	252.75	224.47	297.15	275.61	265.25	227.54	194.7	123.18
2023	173.22	205.71	207.46	164.31	203.93	261.77	267.43	258.08	250.22	200.84	240.08	248.48

На основі цих даних розрахуємо дохідності(таблиця 2.6) та зобразимо динаміку на графіку (рис.2.7) Враховуючи, що ціна акції на момент 01.02.2024 становить 248,48 також можемо розрахувати дохідність за грудень 2023 року.

Таблиця 2.6

Дохідності акцій помісячно

Рік	Місяць, №											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	2.67%	-21.56%	49.24%	6.79%	29.32%	32.49%	74.16%	-13.91%	-9.55%	46.27%	24.32%	12.45%
2021	-14.87%	-1.12%	6.22%	-11.87%	8.71%	1.10%	7.06%	5.40%	43.65%	2.76%	-7.69%	-11.36%
2022	-7.08%	23.80%	-19.20%	-12.92%	-11.19%	32.38%	-7.25%	-3.76%	-14.22%	-14.43%	-36.73%	40.62%
2023	18.76%	0.85%	-20.80%	24.11%	28.36%	2.16%	-3.50%	-3.05%	-19.73%	19.54%	3.50%	-0.02%

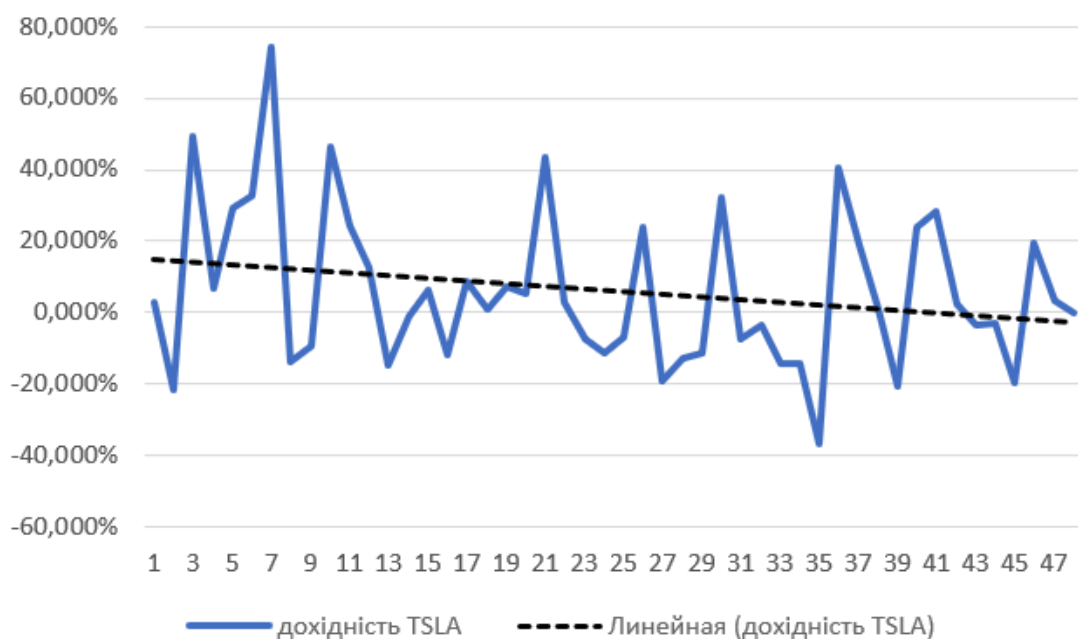


Рис. 2.7. Динаміка зміни дохідностей акцій TSLA та лінія тренду

В такому випадку очікувана дохідність акцій становить $R_m = 5.98\%$

Для розрахунку ризику проведемо проміжні розрахунки $(R_i - R_m)^2$

(Таблиця 2.7):

Таблиця 2.7

Проміжні розрахунки для визначення ризику

Рік	Місяці, №											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	0,001	0,075	0,188	0	0,055	0,071	0,467	0,039	0,024	0,163	0,034	0,004
2021	0,043	0,005	0	0,031	0,001	0,002	0	0	0,143	0,001	0,018	0,003
2022	0,017	0,032	0,063	0,035	0,029	0,07	0,017	0,009	0,04	0,041	0,181	0,121
2023	0,017	0,003	0,071	0,033	0,051	0,001	0,009	0,008	0,065	0,019	0,001	0,003

Тоді середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\frac{2.33}{47}} = 22.28\%$.

Щоб визначити структуру даного часового ряду обчислимо його автокореляційну функцію(рис.2.8).

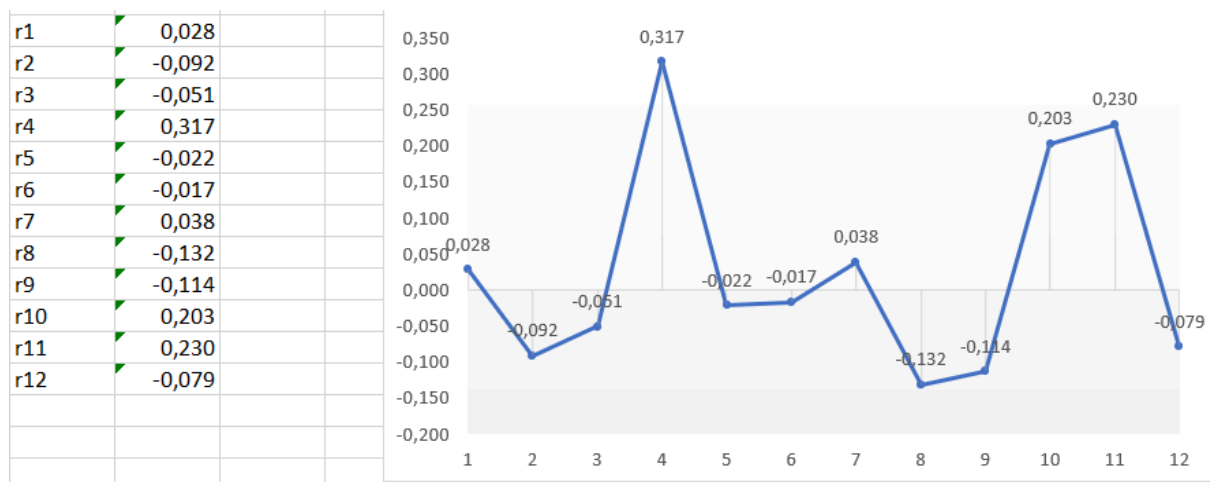


Рис.2.8. Автокореляційна функція

Найбільшим за абсолютною величиною виявився коефіцієнт $r_4 = 0,317$. Це може свідчити про наявність циклічних коливань з періодичністю в 4 місяці. Перевіримо цей коефіцієнт на значущість за допомогою критерія Стюдента. Задамо рівень значущості $\alpha = 0,05$ та перевіримо основну гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта кореляції r_4 генеральної сукупності проти альтернативної. Тоді маємо:

$$T = \frac{r_4 \sqrt{48-2}}{\sqrt{1-(r_4)^2}} \approx 2.267, \quad \text{а критичне значення складає}$$

$t_{кр}(0,05;46) = 2,013$. Так як $|T| \geq t_{кр}$, то гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта автокореляції ми відхиляємо. Коефіцієнт автокореляції r_4 є значущим, а це означає, що циклічна компонента присутня. На Рис.2.7 бачимо, що амплітуда коливань приблизно однакова, тому обираємо адитивну модель часового ряду $Y = T + S + E$.

Для усунення впливу циклічних коливань проведемо вирівнювання часового ряду методом ковзної середньої аналогічно попереднім розрахункам для ОВДП. Відрізняється лише метод знаходження оцінки циклічної компоненти в адитивній моделі: вона визначається як різниця між фактичними значеннями ряду та центрованої ковзної середньої. Провівши всі розрахунки, отримали наступні значення оцінок циклічної компоненти(Таблиця 2.8)

Таблиця 2.8

Розрахунок циклічної компоненти

№	№ періода довжиною в 4 місяці		
	1	2	3
1			-5,83
2	6,61	-0,08	41,06
3	-39,57	-32,07	28,26
4	9,24	-5,26	-25,99
5	-4,06	8,59	-9,41
6	7,95	-0,04	3,65
7	-4,53	29,14	-10,11
8	-16,62	-11,86	-3,87%
9	25,82	-15,54	-8,56
10	-7,39	33,62	-8,65
11	-5,93	-10,15	-0,83%
12	-25,00	42,69	14,79
13	-7,02	-28,59	17,18
14	20,07	-8,46	-12,89
15	-3,03	-15,88	20,35
16	3,05		

Середні оцінка циклічної компоненти для i -го кварталу \bar{S}_i	-2,67	-0,93	2,61
Скоригована циклічна компонента S_i	-0,023	-0,006	0,029

Для даної моделі маємо $-2,67 - 0,93 + 2,61 = -0,98$

Визначимо коригуючий коефіцієнт $k = -0,98/3 = -0,33$

Скориговані значення циклічної компоненти для адитивної моделі часового ряду розраховуються як різниця між її середньою оцінкою та значенням коригуючого коефіцієнта. Отримали наступні значення циклічної компоненти (Таблиця 2.9).

Таблиця 2.9

Скориговані значення циклічної компоненти

S_1	S_2	S_3
-0,023	-0,006	0,029

Взаємопогашуваність циклічних впливів в адитивній моделі виражається в тому, що сума значень циклічної компоненти по всім періодам повинна бути рівною 0.

Перевіримо: $-0,023 - 0,006 + 0,029 = 0$.

І тепер виключаємо вплив циклічної компоненти, віднімаючи її від від кожного рівня вхідного ряду: $T + E = Y - S$. Ці значення розраховуються за кожен момент часу і містять лише тенденцію та випадкову компоненту (Таблиця 2.10)

Таблиця 2.10

Вирівняні значення часового ряду

Рік	Місяці, №											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	5,01%	-20,96%	46,30%	9,13%	29,91%	29,55%	76,50%	-13,31%	-12,48%	48,61%	24,92%	9,51%
2021	-12,53%	-0,53%	3,28%	-9,53%	9,31%	-1,84%	9,40%	6,00%	40,72%	5,10%	-7,09%	-14,30%
2022	-4,74%	24,40%	-22,13%	-10,58%	-10,59%	29,44%	-4,91%	-3,16%	-17,16%	-12,09%	-36,14%	37,69%
2023	21,10%	1,45%	-23,74%	26,45%	28,96%	-0,78%	-1,16%	-2,45%	-22,67%	21,88%	4,10%	-2,92%

На рис.2.9 порівняємо графіки значень фактичного часового ряду та згладженого, а також зобразимо лінію тренду.

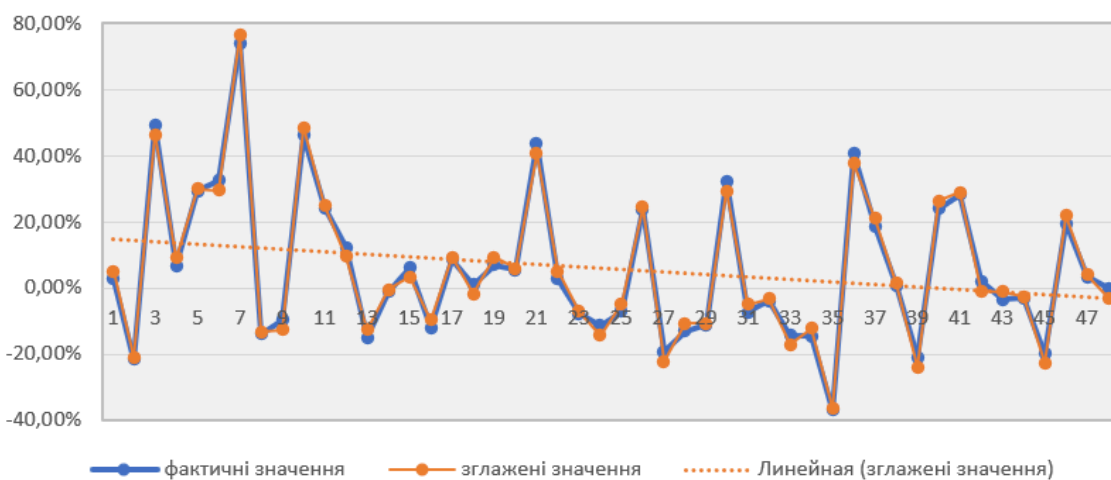


Рис.2.9. Розрахунки по адитивній моделі часового ряду (фактичні та згладжені ряди, лінія тренду)

В результаті дохідність акції після виключення циклічної компоненти становить 5,85%, а ризик 22,34%

Далі аналогічним способом визначимо дохідність та ризик акцій MCD. У таблиці 2.11 зазначена помісячна вартість акцій компанії на основі відкритих даних з [11], а в таблиці 2.12 зазначена дохідність акцій. Враховуючи вартість акції за 02.01.2024 року $r_{i+1} = 297.04$, можемо також розрахувати дохідність за грудень 2023 року.

Таблиця 2.11

Динаміка вартості акцій MCD

Місяці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	213.97	194.17	165.35	187.56	186.32	184.47	194.28	213.52	219.49	213	217.44	214.58
2021	207.84	206.14	224.14	236.08	233.89	230.99	242.71	237.46	241.11	245.55	244.6	268.07
2022	259.45	244.77	247.28	249.16	252.21	246.88	263.37	252.28	230.74	272.66	272.79	263.53
2023	267.4	263.91	279.61	295.75	285.11	298.41	293.2	281.15	263.44	262.17	281.84	296.49

Таблиця 2.12.

Дохідність акцій MCD

Рік	Місяць, №											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	-9.25%	-14.84%	13.43%	-0.66%	-0.99%	5.32%	9.90%	2.80%	-2.96%	2.08%	-1.32%	-3.14%
2021	-0.82%	8.73%	5.33%	-0.93%	-1.24%	5.07%	-2.16%	1.54%	1.84%	-0.39%	9.60%	-3.22%
2022	-5.66%	1.03%	0.76%	1.22%	-2.11%	6.68%	-4.21%	-8.54%	18.17%	0.05%	-3.39%	1.47%
2023	-1.31%	5.95%	5.77%	-3.60%	4.66%	-1.75%	-4.11%	-6.30%	-0.48%	7.50%	5.20%	0.19%

Візуально зобразимо динаміку дохідності акцій MCD та лінію тренду на рис.2.10.

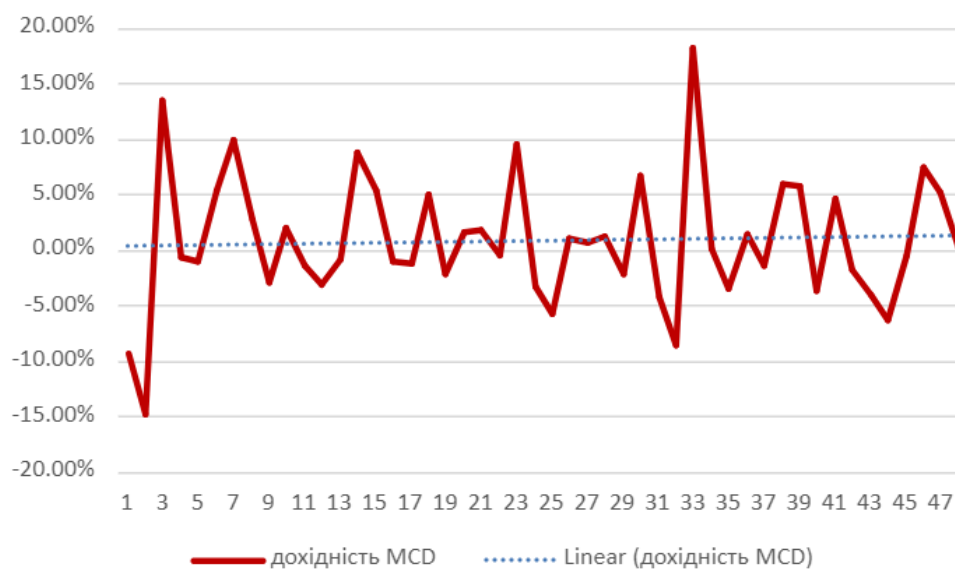


Рис.2.10. Динаміка дохідності акцій MCD помісячно

В такому випадку очікувана дохідність акцій становить $R_m = 0.85\%$

Проміжні розрахунки $(R_i - R_m)^2$ занесені в таблицю 2.13:

Таблиця 2.13

Проміжні розрахунки для визначення ризику

Рік	Місяць, №											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	0.01021	0.02463	0.01582	0.00023	0.00034	0.00199	0.00819	0.00038	0.00145	0.00015	0.00047	0.00159
2021	0.00028	0.00621	0.00200	0.00032	0.00044	0.00178	0.00091	0.00005	0.00010	0.00015	0.00764	0.00165
2022	0.00424	0.00000	0.00000	0.00001	0.00088	0.00340	0.00256	0.00882	0.02998	0.00006	0.00180	0.00004
2023	0.00047	0.00260	0.00242	0.00198	0.00145	0.00068	0.00246	0.00511	0.00018	0.00442	0.00189	0.00004

Ризик буде становити $\sigma = \sqrt{\frac{0.162}{47}} = 5.88\%$.

Аналогічно попереднім розрахункам знаходимо автокореляційну функцію. Результат зображено на рис.2.11.

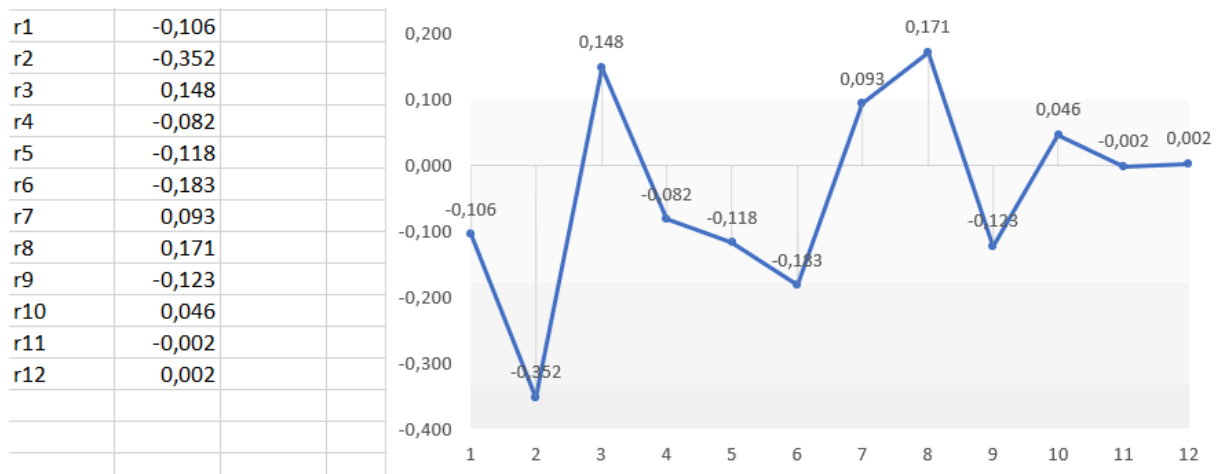


Рис.2.11. Автокореляційна функція

Найбільшим виявився коефіцієнт r_2 , що може свідчити про наявність циклічних коливань з періодичністю в 2 місяці. Перевіримо цей коефіцієнт на значущість за допомогою критерія Стюдента при рівні значущості $\alpha = 0,05$.

Маємо: $T = \frac{r_2 \sqrt{48-2}}{\sqrt{1-(r_2)^2}} \approx -2.55$, а критичне значення складає

$t_{кр}(0,05; 46) = 2,013$. Так як $|T| \geq t_{кр}$, то гіпотезу про рівність нулю коефіцієнта автокореляції ми відхиляємо. Коефіцієнт автокореляції r_2 є значущим, а це означає, що циклічна компонента присутня. На Рис.2.10 бачимо, що амплітуда коливань критично не змінюється, тому обираємо адитивну модель часового ряду $Y = T + S + E$.

Для усунення впливу циклічної компоненти, розрахуємо її скориговані значення як для попередньої акції, але для 2 періодів. Отримані результати запишемо в Таблицю 2.14.

Таблиця 2.14

Розрахунок циклічної компоненти

Середня оцінка циклічної компоненти для i -го кварталу \bar{S}_i	-0,0031	0,009793
Скоригована циклічна компонента S_i	-0,00645	0,00645

Визначимо коригуючий коефіцієнт: $k = 0,003347$.

Скориговані значення циклічної компоненти для адитивної моделі часового ряду розраховуються як різниця між її середньою оцінкою та значенням коригуючого коефіцієнта. Отримані результати внесемо в таблицю 2.14. Умова взаємопогашуваності циклічних впливів в адитивній моделі виконується.

Тепер виключаємо вплив циклічної компоненти, віднімаючи її від від кожного рівня вхідного ряду: $T + E = Y - S$. і отримуємо згладжений часовий ряд (Таблиця 2.15)

Таблиця 2.15.

Згладжені значення дохідності акції MCD

Рік	Місяць, №											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020	-8,61%	-15,49%	14,08%	-1,31%	-0,35%	4,67%	10,55%	2,15%	-2,31%	1,44%	-0,67%	-3,79%
2021	-0,17%	8,09%	5,97%	-1,57%	-0,60%	4,43%	-1,52%	0,89%	2,49%	-1,03%	10,24%	-3,86%
2022	-5,01%	0,38%	1,40%	0,58%	-1,47%	6,03%	-3,57%	-9,18%	18,81%	-0,60%	-2,75%	0,82%
2023	-0,66%	5,30%	6,42%	-4,24%	5,31%	-2,39%	-3,47%	-6,94%	0,16%	6,86%	5,84%	0,22%

На рис. 2.12 зобразимо графіки фактичного та вирівняного часового ряду а також лінію тренду.

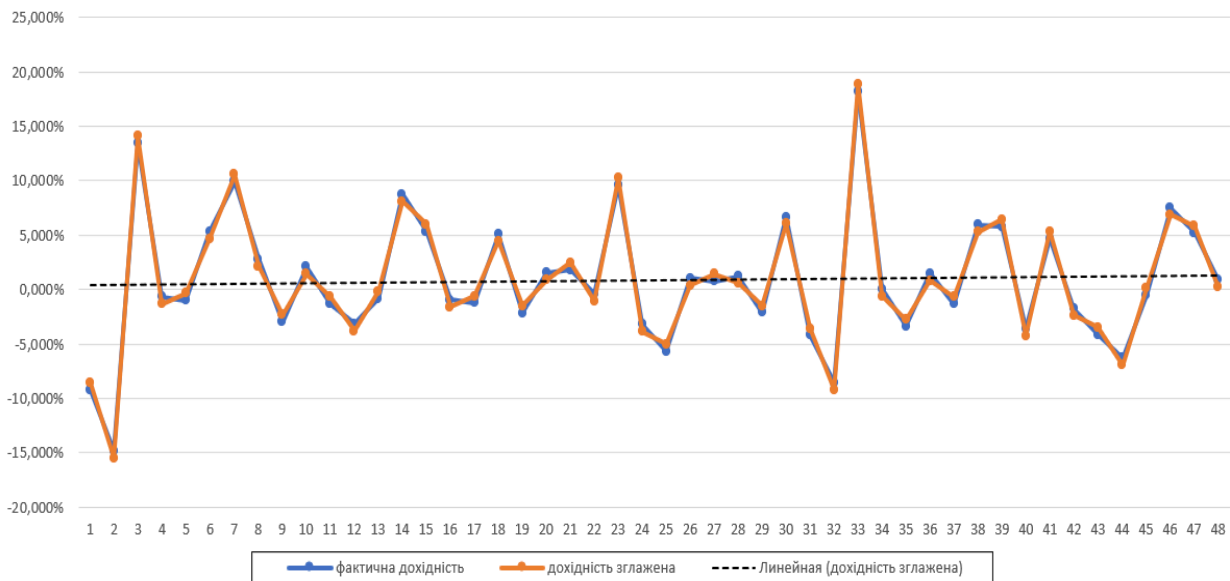


Рис. 2.12. Фактичні та вирівняні значення дохідності , лінію тренду.

В результаті наш портфель має таке співвідношення дохідності та ризику між активами:

Таблиця 2.16

Співвідношення дохідність\ризик обраних активів

Емітет	Дохідність	Ризик
ОВДП	15.26%	3.27%
Військова облігація	18.87%	1.13%
Акції TSLA	5.85%	22.34%
Акції MCD	0.87%	5.98%

Тепер, використовуючи портфельну теорію Марковіца, ми можемо визначити як оптимально розподілити кошти між обраними цінними паперами.

Для початку нам необхідно скласти коваріаційну матрицю, щоб визначити залежність одних активів від інших. Оскільки військова облігація була введена в обіг лише 13.09.2022[7] року, коваріаційну залежність всього портфелю ми можемо розглянути лише з цього моменту. Тому розглянемо два варіанти: портфель з чотирьох активів, включаючи військову облігацію та портфель без військової облігації.

1) Портфель з чотирьох активів.

За допомогою надбудови в Excel “Аналіз даних” побудуємо коваріаційну матрицю активів та призначимо довільні частки w паперів у портфелі, щоб розрахувати загальну дохідність складеного портфелю та його ризик. Вони мають бути додатними, а їхня сума дорівнювати 1 (Рис.2.13).

	ОВДП	ВО	TSLA	MCD	
ОВДП	0,00063651	0,00013025	0,00013025	0,00021662	0,25
ВО	0,00013025	5,0313E-05	-0,00047812	0,00052221	0,25
TSLA	0,000304	-0,00047812	0,02501331	0,00012823	0,25
MCD	0,00021662	0,00012823	0,00052221	0,00214688	0,25
	0,25	0,25	0,25	0,25	частки(w)

Рис.2.13. Коваріаційна матриця доходностей

При такому розподілу часток, загальна доходність портфелю складає 11,11%, а ризик — 4,28%.

Ми обрали стратегію максимального прибутку з умовою обмеженого ризику. Тому відповідно до цього нам потрібно розв'язати оптимізаційну задачу, в якій нашу цільову функцію (дохідність) необхідно максимізувати.

Призначимо максимально допустимий рівень ризику $\sigma_r \leq 4\%$. Також з метою диверсифікації нашого портфелю встановимо умову, що частка кожного активу w повинна бути не менше 10%. Відповідно до встановлених обмежень, за допомогою надбудови Excel «Пошук рішень» розв'язуємо отриману задачу. Результат представлено на рис.2.14.

	ОВДП	ВО	TSLA	MCD
ОВДП	0,00063651	0,00013025	0,00013025	0,00021662
ВО	0,00013025	5,0313E-05	-0,00047812	0,00052221
TSLA	0,000304	-0,00047812	0,02501331	0,00012823
MCD	0,00021662	0,00012823	0,00052221	0,00214688
	0,7	0,1	0,1	0,1
дохідність		16,65%		
ризик		1,90%		
обмеження		1		
умова диверсифікації		0,1		

Рис.2.14. Розподіл часток активів у портфелі з чотирьох активів

Отже, якщо вкласти 70% коштів у ОВДП, і по 10% у військову облигацію, акції TESLA та McDonald's, інвестор отримує портфель з доходністю 16,65% з ризиком 1,9%.

2) Портфель без військової облігації

Тепер розглянемо портфелью з трьох активів. Аналогічно попереднім розрахункам, нам необхідно скласти коваріаційну матрицю дохідностей за даними за 2020-2023 роки призначити довільні частки активів (Рис.2.15)

	ОДВП	TSLA	MCD	
ОДВП	0,001735421	-0,00111118	0,000255518	0,3
TSLA	-0,001111823	0,04955834	0,004361568	0,4
MCD	0,000255518	0,00436157	0,003456678	0,3
	0,3	0,4	0,3	частка (w)

Рис.2.15. Коваріаційна матриця портфелью з трьох активів

При такому розподілу часток, загальна дохідність портфелью складає 7,23%, а ризик — 9,6%. Максимізуючи дохідність, встановимо рівень ризику $\sigma_r \leq 5\%$. Також з метою диверсифікації нашого портфелью встановимо умову, що частка кожного активу w повинна бути не менше 10%. Відповідно до встановлених обмежень, за допомогою надбудови Excel «Пошук рішень» розв'язуємо отриману задачу. Результат представлено на рис.2.16.

	ОДВП	TSLA	MCD
ОДВП	0,001735421	-0,00111118	0,000255518
TSLA	-0,001111823	0,04955834	0,004361568
MCD	0,000255518	0,00436157	0,003456678
	0,8	0,1	0,1
дохідність		12,89%	
ризик		4,99%	
обмеження часток		1	
умова диверсифікації		0,1	

Рис.2.16. Розподіл часток активів у портфелі з трьох активів

В результаті маємо, що якщо інвестувати 80% коштів у ОВДП, і по 10% в акції TESLA та McDonald's, дохідність такого портфелью буде 12,89%, а ризик становить 4,99%.

Висновки

Кожен інвестор прагне отримати максимальний прибуток при найменших ризиках, що пов'язані з інвестиціями в цінні папери. У вирішенні цієї задачі надійним інструментом стають моделі оптимізації інвестиційного портфелю, які базуються на математичних та економетричних методах. Основною частиною моєї магістерської дисертації стало моделювання вибору найоптимальнішої стратегії розподілу активів у портфелі цінних паперів з метою досягнення максимального прибутку і з обмеженим ризиком. Зроблено це за допомогою портфельної теорії Марковіца, яка є фундаментальною для даної сфери інвестицій.

Підбір інструментів для інвестиційного портфелю цінних паперів починається з оцінки математичного очікування дохідності кожного інструменту за час, що розглядається. Це є середнє арифметичне від дохідності за кожний інтервал, а стандартне відхилення від динаміки дохідності – міра ризику. Така вибірка, що представляє собою сукупність значень будь-якого показника за декілька послідовних моментів або періодів часу, є часовим рядом. Аналіз часового ряду дозволяє визначити структуру ряду, наявність тренду, сезонних та циклічних коливань, що в свою чергу допомагає більш точно розрахувати реальну дохідність та ризик активу.

В цій роботі було сформовано інвестиційний портфель, який складається з чотирьох видів цінних паперів: ОВДП, військова облигація, акції TESLA та McDonald's. Варто зауважити, що акції іноземних компаній, замість вітчизняних, було обрано в портфель через обмежене функціонування фондового ринку України в умовах військового стану. По кожному активу, окрім військової облигації, було проведено аналіз динаміки дохідності, що являє собою часовий ряд.

Після визначення остаточних показників дохідності та ризику, було складено портфель з однаковим розподілом активів (частка одного активу $w_i = 0,25$). Дохідність такого портфелю становила 11,11% , а ризик — 4,28%.

Основна задача полягала в формуванні портфелю з максимальною дохідністю за умови обмеженого ризику. Тому було створено два види інвестиційних портфелів за теорією Марковіца з умовою диверсифікації портфелю в 10%:

1) Портфель з 4 активів, включаючи військову облігацію.

Максимізація цільової функції (дохідність) та встановлення допустимого рівня ризику $\sigma_r \leq 4\%$ дала наступні результати: якщо вкласти 70% коштів у ОВДП, і по 10% у військову облігацію, акції TESLA та McDonald's, інвестор отримає портфель з дохідністю 16,65% з ризиком 1,9%.

2) Портфель з 3 активів, без військової облігації.

Розв'язок за портфельною теорією Марковіца наступний: при встановленому ризику $\sigma_r \leq 5\%$ та зазначених умовах, якщо інвестувати 80% коштів у ОВДП, і по 10% в акції TESLA та McDonald's, дохідність такого портфелю буде 12,89%, а ризик становить 4,99%.

Можемо зробити висновки, що акції в більшості випадків будуть мати набагато вищий показник ризику ніж облігації, тому за умови обмеженого ризику, частка акцій в портфелі буде мінімальною. Натомість наявність облігацій внутрішньої державної позики у портфелі цінних паперів є найкращим рішенням для інвестування, адже ймовірність втратити кошти на облігаціях такого виду є низькою. Це пояснюється тим, що дохідність облігації визначена фіксованою купонною ставкою, а виплати по активу гарантуються державою. Зокрема, військові облігації,

що є підвидом ОВДП, мають показник найвищої дохідності та найменшого ризику (Таблиця 2.16), оскільки вони є середньостроковими, а торги по ним на біржах відбуваються нерегулярно. Тому даних для детального аналізу було недостатньо, проте розраховані характеристики показують, що військові облігації можуть бути включені в інвестиційний портфель окремо від інших цінних паперів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1]. Закон України “Про цінні папери та фондовий ринок” від 16.11.2017 № 2210-VIII. URL:
<https://www.nssmc.gov.ua/documents/zakon-ukrani-pro-tsnn-paperi-ta-fondoviy-rinok/>
- [2] В.С. Котковський – «Порядок та особливості розміщення в Україні віськових облигацій: правовий аспект» – Національний університет «Одеська юридична академія»
- [3] Т. В. Іваненко – «Основи фінансової математики: підручник для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Страхова та фінансова математика» – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 267 с.»
- [4] Т. В. Іваненко, І. Д. Фартушний – «Оптимізація інвестиційного портфеля консервативними інвесторами: Економічний вісник НТУУ «Київський політехнічний інститут» № 21 (2022)
- [5] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. The journal of finance, 7(1), 77-91.
- [6] Юхименко Г. К., Лазаренко І. С.,-- “МОДЕЛЮВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ФОНДУ АКЦІЙ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СТРАТЕГІЙ КЕРУВАННЯ ФІНАНСОВИМИ ДЕРИВАТИВАМИ ТА ХЕДЖУВАННЯ”: «Економічний вісник НТУУ "Київський політехнічний інститут"» №24, 2022
- [7] « АТ ФОНДОВА БІРЖА ПФТС» – URL: <https://pfts.ua/>
- [8] Українська біржа – URL: <https://www.ux.ua/>
- [9] Фондова біржа «Перспектива» – URL: <https://fbp.com.ua/>
- [10] О. В. Третякова, В. М. Харабара, Р. І. Грешко – “ ФОНДОВИЙ РИНОК УКРАЇНИ: ОСОБЛИВОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ В СУЧАСНИХ УМОВАХ” – Економіка та держава №5/2020.
- [11] Платформа фінансових ринків Investing.com – URL: <https://www.investing.com/>

[12] НКЦПФР: Інформаційна довідка щодо ринків капіталу України протягом січня – жовтня 2023 року. – 5с. URL: https://www.nssmc.gov.ua/wp-content/uploads/2023/12/informatsiina_dovidka_za_zhovten_2023.pdf

[13] А. Т. Яровий, Є. М. Страхов – “АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ”: Освіта України, 2019 - 109с.