Відкрита студентська Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 24 січня 2024 року
Задачі для студентів першого курсу, категорія М

1. Позначимо
$$a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$
Знайти
$$\frac{a_1 - 1}{a_2 - 1} \cdot \frac{a_3 - 1}{a_4 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2023} - 1}{a_{2024} - 1}.$$

2. Точка (a, b) лежить на колі з центром $(0, 1)$ та площею 5π. Відомо, що
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x\sqrt{2a}) + ax^2 - 1}{\mathrm{e}^{b \sin^4 x} - 1} = \frac{1}{3}.$$
Знайти a та b.

3. Нехай $P(x)$ — такий поліном степеня $n + 1$, що
$$P(0) = P(1) = \ldots = P(n) = 0 \quad \text{та} \quad P(n+1) = n + 1.$$
Знайти
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(k)} \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(P'(k))^2}.$$

4. Нехай A — квадратна матриця порядку 2024, всі елементи якої — попарно різні цілі числа. Довести, що в ній знайдуться два елементи, які є сусідніми в рядку або стовпці і різниця між якими більша за 1012.

5. Знайти всі функції $f\colon \mathbb{Z} \to (0, \infty)$, які для всіх $x, y \in \mathbb{Z}$ задовольняють рівність
$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y) + f(x - y).$$

6. Нехай A — скінченна множина точок на площині. Називатимемо точку $x \in A$, $x \neq y$, найближчою до $y \in A$, якщо $d(x, y) = \min_{z \in A, z \neq y} d(z, y)$. Тут d означає відстань між точками. При рівності відстаней найближчих точок може бути декілька.

   Нехай $C_x = \{y \in A\colon x \text{ є найближчою точкою до } y\}$, а $|C_x|$ означає кількість елементів множини C_x. Знайти $\max_A \max_{x \in A} |C_x|$, де зовнішній максимум береться за всіма можливими скінченними множинами A на площині.