

Відкрита студентська Олімпіада з математики  
КПШ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 24 січня 2024 року  
Задачі для студентів старших курсів, категорія М

1. Функція  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  є розв'язком диференціального рівняння

$$f'(x) - f(x) + x^x = 0.$$

Знайти

$$\int_0^1 x^{-x}(f(x) - f''(x)) dx.$$

2. Уздовж кола випадковим чином розставлені числа 1 та  $-1$  загальною кількістю 1024. На кожному кроці спочатку між кожною парою сусідніх чисел вписується їх добуток, а потім всі старі числа стираються. Позначимо через  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , суму всіх чисел на колі після  $n$ -го кроку. Які значення може набувати  $S_{2024}$ ?
3. У кожній вершині квадрата зі стороною 1 сидить по жуку. Всі жуки одночасно з однаковою швидкістю починають повзти сторонами квадрата за годинниковою стрілкою. Позначимо через  $B$  множину тих точок, які в будь-який момент часу знаходяться всередині чотирикутника, утвореного жуками. Знайти площу множини  $B$ .
4. Для  $N \geq 2$  позначимо

$$F_N(x) = \ln \left( \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right).$$

Обчислити значення похідних  $F_N^{(N)}(0)$  та  $F_N^{(N+1)}(0)$ .

5. Знайти суму ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l+m)!}.$$

6. Довести, що існує такий  $x \in (1, 2)$ , що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  число  $[x^{3^n}]$  є повним квадратом. Тут  $[\cdot]$  позначає цілу частину.