

Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПШ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 24 січня 2024 року
Задачі для студентів першого курсу, категорія С

1. Позначимо

$$a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$

Знайти

$$\frac{a_1 - 1}{a_2 - 1} \cdot \frac{a_3 - 1}{a_4 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2023} - 1}{a_{2024} - 1}.$$

2. Побудуйте схематичний графік функції

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n} e^x}{x^n + x^{-n}}, \quad x > 0.$$

3. В квадрат $ABCD$ зі стороною 1 вписано коло. Нехай M — точка на цьому колі. Знайдіть довжину вектора

$$\vec{a} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}.$$

4. Про дійсні числа x, y, z відомо, що

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 2024.$$

Знайдіть найбільше та найменше значення суми цих чисел.

5. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3, -2, -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{2} = \frac{z - 1}{2}.$$

6. Розв'яжіть матричне рівняння

$$AX + XB = C,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$