

Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 24 січня 2024 року
Задачі для студентів старших курсів, категорія С

1. Функція $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є розв'язком диференціального рівняння

$$f'(x) - f(x) + x^x = 0.$$

Знайти

$$\int_0^1 x^{-x}(f(x) - f''(x)) dx.$$

2. Побудуйте схематичний графік функції

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}e^x}{x^n + x^{-n}}, \quad x > 0.$$

3. Нехай $P(x)$ — такий поліном степеня $n + 1$, що

$$P(0) = P(1) = \dots = P(n) = 0 \quad \text{та} \quad P(n + 1) = n + 1.$$

Знайти

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{P'(k)} \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{(P'(k))^2}.$$

4. Про дійсні числа x, y, z відомо, що

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 2024.$$

Знайдіть найбільше та найменше значення суми цих чисел.

5. В квадрат $ABCD$ зі стороною 1 вписано коло. Нехай M — точка на цьому колі. Знайдіть довжину вектора

$$\vec{a} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}.$$

6. Розв'яжіть матричне рівняння

$$AX + XB = C,$$

якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$