Відкрита студентська Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 24 січня 2024 року Задачі для студентів першого курсу, категорія Т

1. Позначимо
$$a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}.$$
Знайти
$$\frac{a_1 - 1}{a_2 - 1} \cdot \frac{a_3 - 1}{a_4 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2023} - 1}{a_{2024} - 1}.$$

2. Точка (a, b) лежить на колі з центром $(0, 1)$ та площею 5π. Відомо, що
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x\sqrt{2a}) + ax^2 - 1}{\mathrm{e}^{b \sin^4 x} - 1} = \frac{1}{3}.$$
Знайти a та b.

3. Нехай $P(x)$ — такий поліном степеня $n + 1$, що
$$P(0) = P(1) = \ldots = P(n) = 0 \quad \text{та} \quad P(n+1) = n + 1.$$
Знайти
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(k)} \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(P'(k))^2}.$$

4. Про дійсні числа x, y, z відомо, що
$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 2024.$$
Знайдіть найбільше та найменше значення суми цих чисел.

5. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3, -2, -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

6. Розв'яжіть матричне рівняння
$$AX + XB = C,$$
якщо
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$