

Відкрита студентська Олімпіада з математики  
КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 24 січня 2024 року  
Задачі для студентів старших курсів, категорія Т

1. Функція  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  є розв'язком диференціального рівняння

$$f'(x) - f(x) + x^x = 0.$$

Знайти

$$\int_0^1 x^{-x}(f(x) - f''(x)) dx.$$

2. Розклавши в ряд Фур'є за синусами функцію

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in (0, \pi),$$

знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

3. Нехай  $P(x)$  — такий поліном степеня  $n+1$ , що

$$P(0) = P(1) = \dots = P(n) = 0 \quad \text{та} \quad P(n+1) = n+1.$$

Знайти

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{P'(k)} \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{(P'(k))^2}.$$

4. За допомогою операційного числення знайдіть значення інтегралу

$$I_{m,n}(t) = \int_0^t s^m (s-t)^n ds, \quad t > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

5. Знайти суму ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(k+l+m)!}.$$

6. Знайдіть всі розв'язки рівняння

$$e^{iz^2} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$