НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _519.2, 368.01__

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ
«__» ______ 2025 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Застосування Бутстреп-методу для оцінювання страхових резервів»

Виконала:
студентка II курсу, групи ОМ-41мп
Ільченко Анастасія Володимирівна __________

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Василик Ольга Іванівна __________

Рецензент:
канд. фіз.-мат. наук, доцент
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Яневич Тетяна Олександрівна __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка __________

Київ – 2025

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ Олег КЛЕСОВ

«09» вересня 2025 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Ільченко Анастасії Володимирівні

1. Тема дисертації «Застосування Бутстреп-методу для оцінювання страхових резервів», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, доцент Василик Ольга Іванівна, затверджені наказом по університету від «06» листопада 2025 р. № 4843-с.

2. Термін подання студентом дисертації «18» грудня 2025 року.

3. Об’єкт дослідження: методи актуарного оцінювання страхових резервів.

4. Предмет дослідження: аналіз класичних методів оцінювання резервів (метод ланцюгових сходів, модель Мака, метод Борнхюттера–Фергюсона) для оцінки резерву збитків, які виникли, але не заявлені, процедури побудови, застосування та аналізу бутстреп-методу для оцінювання резерву збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR) на основі даних трикутників розвитку збитків.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомлення з літературою, в якій описано основи бутстреп-методу та класичних методів оцінювання резервів, аналіз нормативних документів щодо формування страхових резервів в Україні;

2) аналіз та опрацювання наданого трикутника збитків, включаючи перевірку його структури, логіки розвитку та відповідності вимогам до даних для резервування;

3) реалізація базового методу ланцюгових сходів;

4) проведення бутстреп-моделювання на основі отриманих залишків моделі;

5) порівняння результатів оцінювання резервів за допомогою методу ланцюгових сходів і бутстреп-методу;

6) аналіз отриманих результатів.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: формули розрахунків, таблиці, рисунки.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

Ільченко А., Василик О. Застосування Бутстреп-методу для оцінювання страхових резервів. Матеріали Двадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада 2025 року, Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, с.153-154.

8. Дата видачі завдання «03» вересня 2025 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Опрацювання літератури з тематики магістерської дисертації.	03.09.2025 – 26.09.2025	виконано
2.	Аналіз та опрацювання наданого трикутника збитків.	29.09.2025 – 03.10.2025	виконано
3.	Реалізація базового методу ланцюгових сходів.	06.09.2025 – 17.10.2025	виконано
4.	Проведення бутстреп-моделювання на основі отриманих залишків моделі.	20.10.2025 – 07.11.2025	виконано
5.	Порівняння результатів оцінювання резервів за допомогою методу ланцюгових сходів і бутстреп-методу.	10.11.2025 – 21.11.2025	виконано
6.	Аналіз отриманих результатів	24.11.2025 – 28.11.2025	виконано
7.	Оформлення магістерської дисертації	01.11.2025 – 16.12.2025	виконано

Студент Анастасія ІЛЬЧЕНКО

Науковий керівник Ольга ВАСИЛИК

Реферат

Магістерська дисертація: 54 сторінок, 23 першоджерела, 33 слайдів презентації.

Страхові резерви є одним із ключових елементів фінансової стійкості страхової компанії. Вони формуються для забезпечення майбутніх виплат страхових відшкодувань, виступаючи гарантією виконання зобов'язань перед страхувальниками. Раціональне управління резервами забезпечує платоспроможність, стабільність і конкурентоспроможність страховика. В Україні порядок формування та обліку технічних резервів регулюється Законом України «Про страхування» [1] та нормативно-правовими актами Національного банку України. Положення НБУ визначає перелік актуарних методів, дозволених для оцінки резерву збитків, що виникли, але не заявлені (IBNR), серед яких – метод ланцюгових сходів, метод Борнхюттера-Фергюсона, метод Кейп-Код та Мюнхенський ланцюговий метод. Однак класичні детерміновані підходи не здатні повною мірою відобразити стохастичну природу розвитку страхових збитків та притаманну їм варіативність. У сучасній актуарній практиці зростає потреба в методах, що дають змогу оцінити не лише точкове значення резерву, а й невизначеність, пов'язану з такою оцінкою. Саме тому дедалі частіше застосовуються стохастичні підходи, серед яких вагоме місце посідає Бутстреп-метод. У даній магістерській роботі розглядається застосування Бутстреп-методу для оцінки резерву збитків, що виникли, але не заявлені (IBNR), аналіз його властивостей, переваг, варіативності результатів та впливу кількості ітерацій на стабільність отриманих оцінок.

Мета та завдання роботи: застосування знань з теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики для дослідження та практичної реалізації Бутстреп-методу з метою оцінювання страхових резервів збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR). Теоретичний аналіз найпоширеніших методів оцінки резервів: метод ланцюгових сходів, метод Борнхюттера-Фергюсона та модель Мака, вивчення їхніх принципів роботи та обмежень. Самостійною частиною роботи є реалізація метода ланцюгових сходів для оцінювання страхових резервів та модифікація цього методу із застосуванням Бутстреп-методу, аналіз отриманих результатів та оцінка впливу кількості ітерацій на стабільність прогнозу резервів.

Ключові слова: страхування; резерв збитків, які виникли, але не заявлені; метод ланцюгових сходів; метод Борнхюттера-Фергюсона; модель Мака; Бутстреп-метод; стохастична оцінка; варіативність даних; прогноз резервів.

Abstract

Master's thesis contains 54 pages, 23 primary sources, 33 slides of presentation.

Insurance reserves are one of the key elements of a company's financial stability. They are established to ensure future claim payments and serve as a guarantee of fulfilling obligations to policyholders. Effective reserve management supports an insurer's solvency, stability, and competitiveness. In Ukraine, the procedure for forming and accounting technical reserves is regulated by the Law of Ukraine "On Insurance" [1] and by regulatory acts of the National Bank of Ukraine. The NBU regulations define the list of actuarial methods permitted for estimating incurred but not reported (IBNR) reserves, including the Chain-Ladder method, the Bornhuetter-Ferguson method, the Cape Cod method, and the Munich chain method. However, classical deterministic approaches cannot fully capture the stochastic nature of claims development and the inherent variability of insurance data. In modern actuarial practice, there is a growing need for methods that allow not only point estimation of reserves, but also quantification of the uncertainty associated with such estimates. For this reason, stochastic approaches have become increasingly widespread, among which the Bootstrap method holds a prominent place. This master's thesis examines the application of the Bootstrap method for estimating incurred but not reported (IBNR) reserves, including analysis of its properties, advantages, result variability, and the impact of the number of iterations on the stability of reserve estimates.

Purpose and objectives of the work: to apply knowledge from probability theory, mathematical statistics, and actuarial mathematics to investigate and implement the Bootstrap method for estimating incurred but not reported (IBNR) insurance reserves. The work includes a theoretical analysis of the most common reserving methods - the Chain-Ladder method, the Bornhuetter-Ferguson method, and the Mack model - examining their mechanisms and limitations. A separate part of the research involves implementing the Chain-Ladder method for reserve estimation and modifying it using the Bootstrap approach, followed by analysis of the obtained results and assessment of the influence of the number of iterations on reserve forecast stability.

Keywords: insurance; incurred but not reported (IBNR) reserve; Chain-Ladder method; Bornhuetter-Ferguson method; Mack model; Bootstrap method; stochastic estimation; data variability; reserve forecasting.

Зміст

Перелік умовних позначень та термінів

Терміни та позначення, що використовуються у цій роботі, наведено у значеннях, установлених Законом України «Про страхування» [1] та Положенням про порядок формування страховиками технічних резервів [2].

Актуарна діяльність у сфері страхування (перестрахування) - діяльність у сфері страхування щодо аналізу та оцінки ризиків та/або пов’язаних з ними фінансових зобов’язань, а також розроблення та оцінка методів управління фінансовими наслідками майбутніх випадкових подій з метою забезпечення реалізації актуарної функції страховика.

Вихідне перестрахування - правовідносини з передачі перестрахувальником (цедентом, ретроцедентом) перестраховику (цесіонеру, ретроцесіонеру) в перестрахування повністю або частково ризику.

Відповідальний актуарій - особа, відповідальна за виконання актуарної функції.

Заявлені збитки (вимоги) – вимоги (заяви) страхувальників та/або інших осіб, визначених законодавством України або договором, про здійснення страхової виплати (страхового відшкодування), включаючи звернення до суду щодо здійснення таких страхових виплат (страхових відшкодувань) страховиком, що надійшли страховику в установленому законодавством України та/або договором порядку (включаючи письмову заяву, телефонне чи електронне повідомлення) у зв’язку з настанням події, що має ознаки страхового випадку (випадків), та/або вимоги (заяви) страхувальників здійснити виплату викупної суми.

Звітний період – період I кварталу, першого півріччя, дев’яти місяців, року, за який страховик складає фінансову звітність. Кінцем звітного періоду є кінець останнього календарного дня звітного періоду.

КАСКО – страхування наземних транспортних засобів (включаючи залізничний рухомий склад).

Лінія бізнесу – сукупність зобов’язань страховика за договорами (компонентами договорів), за якими страховик приймає однорідні та схожі за природою страхові ризики.

Незаявлені збитки (вимоги) – вимоги (заяви) про здійснення страхової виплати (страхового відшкодування) / настання події, включаючи звернення до суду щодо здійснення таких страхових виплат (страхових відшкодувань) страховиком, що не надійшли страховику в установленому законодавством

України та/або договором порядку, але надходження яких може відбутися в майбутньому, у зв’язку з подією, що настала на дату розрахунку та має ознаки страхового випадку (випадків).

Пряме страхування - правовідносини з передачі ризику від страхувальника страховику за плату на умовах, визначених договором страхування або законодавством, з метою захисту страхового інтересу фізичних та юридичних осіб.

Регулятор - Національний банк України (НБУ).

Страхова виплата (страхове відшкодування) - грошові кошти, що виплачуються страховиком у разі настання страхового випадку відповідно до умов договору страхування та/або законодавства.

Страхова премія (страховий платіж, страховий внесок) - плата у грошовій формі за страхування, яку страхувальник зобов’язаний сплатити страховику згідно з договором страхування.

Страхова сума - грошова сума, в межах якої страховик відповідно до умов договору страхування та/або законодавства зобов’язаний провести страхову виплату в разі настання страхового випадку.

Страховий випадок - подія, передбачена договором страхування або законодавством, ризик виникнення якої застрахований, з настанням якої виникає обов’язок страховика здійснити страхову виплату страхувальнику або іншій особі, визначеній у договорі страхування або відповідно до законодавства.

Страховий портфель - сукупність прав та обов’язків страховика за договорами страхування (діючими та припиненими) за одним або кількома класами (ризиками) страхування та/або за всіма договорами перестрахування (діючими та припиненими), за якими такий страховик виступає перестраховиком та/або в межах окремого класу (ризику) страхування.

Страховик - фінансова установа або філія страховика-нерезидента, які мають право здійснювати діяльність із страхування на території України.

Страхувальник - особа, яка уклала із страховиком договір страхування або є страхувальником відповідно до законодавства.

Страхування - правовідносини щодо захисту страхових інтересів фізичних та юридичних осіб (страховий захист) при страхуванні ризиків, пов’язаних з життям, здоров’ям, працездатністю та пенсійним забезпеченням, з володінням, користуванням і розпорядженням майном, з відшкодуванням страхувальником заподіяної ним шкоди особі або її майну, а також шкоди, заподіяної юридичній особі, у разі настання страхових випадків, визначених договором страхування, за рахунок коштів фондів, що формуються шляхом сплати страхувальниками страхових премій (платежів, внесків), доходів від розміщення коштів таких фондів та інших доходів страховика, отриманих згідно із законодавством.

Вступ

Оцінювання резервів збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR), є одним із ключових елементів забезпечення фінансової стійкості страхової компанії. Ці резерви формуються для покриття майбутніх страхових виплат, інформація про які ще не надійшла, але ймовірність їх виникнення вже існує. Коректність їх оцінювання безпосередньо впливає на платоспроможність, стабільність та прозорість діяльності страховика. Саме тому процес формування технічних резервів належить до сфери відповідальності актуаріїв - фахівців, які застосовують математичні та статистичні методи для кількісного оцінювання страхових ризиків. У кожній страховій компанії має бути призначений відповідальний актуарій, який здійснює розрахунки сум резервів, контролює їх обґрунтованість та засвідчує правильність методологічного підходу.

Актуальність теми зумовлена тим, що сучасне страхування перебуває у стані трансформації, орієнтуючись на міжнародні стандарти ризик-орієнтованого нагляду, зокрема підходи, закладені у Solvency II (https://www.eiopa.europa.eu/browse/regulation-and-policy/solvency-ii_en). Ця система висуває підвищені вимоги до точності оцінки страхових зобов'язань, до врахування невизначеності та варіабельності збитків, а також до застосування стохастичних методів моделювання. У контексті гармонізації українського страхового ринку з європейськими стандартами зростає потреба у сучасних інструментах резервування, здатних відображати реальний ризиковий профіль компанії. Саме тому дослідження та впровадження стохастичних методів, таких як Бутстреп-метод, має практичне значення для підвищення точності та надійності актуарних оцінок.

Метою цієї магістерської роботи є дослідження можливостей застосування Бутстреп-методу для оцінювання резервів збитків, які виникли, але не заявлені, а також порівняння його результатів із класичними детермінованими методами. Для досягнення поставленої мети було проаналізовано теоретичні підходи до резервування, реалізовано алгоритм Бутстреп-методу та виконано порівняльний аналіз отриманих оцінок.

У першому розділі роботи висвітлено теоретичні основи оцінювання страхових резервів. Розглянуто значення технічних резервів у діяльності страхової компанії, подано загальну характеристику методів оцінювання страхових резервів. Особливу увагу приділено класичним підходам - методу ланцюгових сходів, моделі Мака та методу Борнхюттера-Фергюсона. Поряд із їх перевагами проаналізовано й основні недоліки, зокрема чутливість до викидів у даних та обмеженість у відображенні стохастичної природи збитків.

Другий розділ присвячено Бутстреп-методу як сучасному стохастичному інструменту оцінювання резервів. Описано історію виникнення методу, його сутність та ключові принципи, а також подано детальний алгоритм застосування бутстреп-процедури до трикутників збитків.

У третьому розділі наведено практичну реалізацію алгоритму в середовищі Excel. Спочатку було здійснено оцінювання резерву методом ланцюгових сходів для подальшого порівняння результатів. Далі детально описано виконання бутстреп-процедури, обчислення основних статистичних характеристик, а також проаналізовано, як зміна кількості бутстреп-ітерацій впливає на точність та стабільність отриманих оцінок резерву.

Отримані результати дозволяють оцінити переваги та особливості стохастичного підходу до формування страхових резервів, а також продемонструвати актуальність застосування Бутстреп-методу в сучасній актуарній практиці.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОЦІНЮВАННЯ СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

1.1. Поняття технічних резервів у страхуванні

Страхові резерви є ключовим елементом фінансової стійкості страхової компанії. Їх основна мета - забезпечити можливість виконання страховиком своїх зобов'язань перед страхувальниками в майбутньому. Іншими словами, резерви виступають фінансовою гарантією того, що у разі настання страхових випадків страховик матиме достатній обсяг коштів для здійснення виплат.

Страхові резерви утворюються страховиками з метою забезпечення майбутніх виплат страхових сум і страхового відшкодування залежно від видів страхування (перестрахування). [3] Вони є обов'язковим елементом діяльності будь-якої страхової компанії та формуються відповідно до вимог чинного законодавства.

У загальному вигляді страхові резерви можна визначити як фонди, що утворюються страховими компаніями для забезпечення гарантій виплат страхового відшкодування і страхових сум. [4] Вони використовуються у випадках, коли сума виплат страхувальникам у певному періоді перевищує поточні надходження страхових премій. Таким чином, резерви виконують роль стабілізаційного механізму, який дозволяє уникнути фінансових дисбалансів у діяльності страховика.

Відповідно до світової практики, кожен вид зобов'язань страховика покривається відповідним видом страхового резерву. У ризикових видах страхування формуються технічні резерви, які включають резерв незароблених премій і резерви збитків. Вони є обов'язковими для формування. Створення страхових резервів регламентується Законом України «Про страхування» [1] та іншими нормативно-правовими актами Національного банку України.

Законодавство поділяє страхові резерви на дві основні групи:

- технічні резерви (для ризикових видів страхування);
- резерви зі страхування життя (математичні резерви).

Згідно із Законом України "Про страхування", *технічні резерви* - це величина, яка визначає грошову оцінку зобов'язань страховика за договорами, з метою забезпечення майбутніх страхових виплат (страхових відшкодувань). [1]

Страховики зобов'язані формувати та вести облік таких технічних резервів за видами страхування (крім страхування життя):

- резерв незароблених премій (РНП) - включає частку страхових платежів, яка відповідає страховим ризикам, що не минули на звітну дату;

- резерв збитків (РЗ) - включає зарезервовані несплачені страхові суми та страхові відшкодування за відомими вимогами страхувальників, рішення по яких ще не прийнято.

Для забезпечення належного виконання зобов'язань перед страхувальниками страховики можуть прийняти рішення про запровадження з початку календарного року таких технічних резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя:

1. Резерв незароблених премій (РНП) - це частина нарахованої страхової премії, яка належить до періоду дії договору, що виходить за межі звітного періоду. Вона призначена для виконання зобов'язань із майбутніх страхових виплат.

2. Резерв заявлених, але не виплачених збитків (RBNS) - це оцінка зобов'язань страховика за відомими вимогами страхувальників, включаючи витрати на врегулювання збитків (експертні, консультаційні, юридичні тощо), які на звітну дату ще не оплачені або оплачені частково. Цей резерв створюється у випадках, коли страховий випадок уже настав, але виплата ще не здійснена через уточнення розміру збитку чи очікування підтверджувальних документів.

3. Резерв збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR) - це оцінка обсягу зобов'язань страховика для здійснення страхових виплат, включаючи витрати на врегулювання збитків, що виникли у зв'язку зі страховими подіями у звітному або попередніх періодах, але про факт настання яких страховику ще не було повідомлено на звітну дату в установленому законодавством чи договором порядку.

Розрахунок резерву збитків, які виникли, але не заявлені здійснюється окремо за кожним класом страхування. Розмір такого резерву визначається як сума резервів, розрахованих за всіма класами страхування.

Питання формування та розрахунку технічних резервів у страхуванні в Україні врегульоване нормативними документами Національного банку України (НБУ), який виконує функції державного нагляду за страховим ринком. Зокрема, *Положення про порядок формування страховиками технічних резервів* [2], в якому пункт 82 містить офіційно затверджений перелік актуарних методів, що можуть використовуватися страховиками для оцінки резервів збитків, які виникли, але не заявлені.

82. До актуарних методів розрахунку резерву збитків, які виникли, але не заявлені, належать:

1) ланцюговий метод;

2) метод Борнхюттера-Фергюсона;

3) метод Кейп-Код;

4) Мюнхенський ланцюговий метод;

5) модифікація актуарних методів, наведених у підпунктах $1 - 4$ пункту 82 глави 14 розділу IV цього Положення.

Модифікацією актуарного методу є розрахунок резерву збитків, які виникли, але не заявлені, одним із методів, зазначених у підпунктах $1 - 4$ пункту 82 глави 14 розділу IV цього Положення, з урахуванням впливу інфляції, факторів розвитку збитків (тренду), зміни коефіцієнтів збитковості;

6) лінійна комбінація актуарних методів, зазначених у підпунктах $1 - 5$ пункту 82 глави 14 розділу IV цього Положення.

У сучасній актуарній практиці, окрім зазначених класичних підходів, для підвищення точності оцінки невизначеності резервів все частіше застосовуються стохастичні методи, зокрема Бутстреп-метод. Його сутність полягає у статистичному моделюванні варіації даних з метою отримання розподілу можливих значень резерву та оцінки ризику недостатності резервів.

Саме Бутстреп-метод для оцінювання технічних резервів, зокрема резерву IBNR, розглядатиметься у подальших розділах цієї роботи.

Таким чином, методи розрахунку технічних резервів можуть бути як детермінованими, так і стохастичними. Вибір конкретного методу залежить від доступності даних, типу страхового портфеля, а також вимог регулятора. У наступному підрозділі розглянемо основні методи оцінювання технічних резервів, які використовуються в актуарній практиці.

1.2. Методи оцінювання страхових резервів

У сучасній актуарній практиці для оцінки технічних резервів, зокрема резерву збитків, що виникли, але не заявлені (IBNR), застосовуються різні статистичні та стохастичні методи. Вибір конкретного підходу залежить від структури даних, стабільності історії збитків і прийнятих актуарієм припущень. Найбільш поширеними серед них є метод ланцюгових сходів (Chain-Ladder), метод

Борнхюттера-Фергюсона (Bornhuetter-Ferguson) та стохастична модель Мака (Mack Model).

1.2.1 Метод ланцюгових сходів (Chain-Ladder)

Одним із найпоширеніших методів оцінювання страхових резервів є *метод ланцюгових сходів (Chain-Ladder)*. Це класичний підхід, який широко використовується в актуарній практиці для оцінювання збитків у ризикових видах страхування, оскільки ґрунтується на аналізі історичних закономірностей розвитку збитків і не потребує складного статистичного моделювання. Суть методу полягає у використанні минулих даних для прогнозування майбутніх виплат за аналогічними тенденціями.

Історично цей метод було розроблено в період, коли комп'ютерні обчислення ще не були поширені, тому він мав форму простого алгоритму, що базувався на трикутниках збитків. Починаючи з 1990-х років, метод ланцюгових сходів отримав статистичне обґрунтування. Зокрема, Томас Мак (Mack, 1993) запропонував стохастичну інтерпретацію, у якій оцінка збитків розглядається як результат зваженої регресії. Це дозволило отримувати не лише точкові, а й дисперсійні оцінки, що підвищило надійність методу. Подальші дослідження, зокрема Мюнхенський метод ланцюгових сходів (Quarg & Mack, 2004), удосконалили підхід і розширили його застосування до комбінованих або неповних даних. [5]

Метод ланцюгових сходів базується на низці ключових припущень, дотримання яких забезпечує коректність результатів:

- у даних відсутні екстремальні впливи, такі як суттєві зміни законодавства чи високі темпи інфляції;
- розподіл збитків для всіх років настання подій є однаковим;
- структура страхового портфеля не зазнає суттєвих змін протягом періоду спостереження;
- часові інтервали між моментом настання події та її врегулюванням залишаються відносно стабільними.

Порушення цих припущень, зокрема наявність викидів або структурних зламів у даних, може суттєво знизити точність оцінок резервів. [6].

Для практичної реалізації методу дані про позови зазвичай подають у вигляді *трикутників розвитку* (run-off triangles).

Позначимо:

- i - рік настання збитку (рік події), тобто рік, у якому відбувся страховий випадок;
- j - період розвитку (запізнення), тобто кількість років до моменту виплати;
- S_{ij} - сума виплат у j-му році розвитку за збитками, що сталися у i-му році.

За n років відомими є значення S_{ij}, для яких $i + j \leq n + 1$. Вони утворюють трикутник розвитку. Загальна форма трикутника зображена в Таблиці 1 нижче:

Рік настання збитку	Рік розвитку збитків							
	1	$\dots$	k	$\dots$	$n-i+1$	$\dots$	$n-1$	n
1	S_{11}	$\dots$	S_{1k}	$\dots$	$S_{1,n-i+1}$	$\dots$	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
2	S_{21}	$\dots$	S_{2k}	$\dots$	$S_{2,n-i+1}$	$\dots$	$S_{2,n-1}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
i	S_{i1}	$\dots$	S_{ik}	$\dots$	$S_{i,n-i+1}$			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$				
$n-k+1$	$S_{n-k+1,1}$	$\dots$	$S_{n-k+1,k}$					
$\dots$	$\dots$	$\dots$						
n	$S_{n,1}$							

Таблиця 1

Сумарний збиток i-го року події становить $S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}$, але відома лише його частина $\sum_{j=1}^{n-i+1} S_{ij}$. [7].

Завдання актуарія - оцінити невідому частину

$$R_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} S_{ij},$$

яка відповідає резерву для i-го року події, тобто необхідно доповнити трикутник до прямокутника.

Трикутники можуть бути побудовані також в альтернативній формі - за накопиченими збитками.

Позначимо через C_{ij} суму сплачених збитків на кінець j-го року розвитку за збитками, що сталися у i-му році події.

Рік настання збитку	Рік розвитку збитків							
	1	…	k	…	$n-i+1$	…	$n-1$	n
1	C_{11}	…	C_{1k}	…	$C_{1,n-i+1}$	…	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
2	C_{21}	…	C_{2k}	…	$C_{2,n-i+1}$	…	$C_{2,n-1}$	
…	…	…	…	…	…	…		
i	C_{i1}	…	C_{ik}	…	$C_{i,n-i+1}$			
…	…	…	…	…				
$n-k+1$	$C_{n-k+1,1}$	…	$C_{n-k+1,k}$					
…	…	…						
n	$C_{n,1}$							

Таблиця 2

У такому разі трикутник накопичених збитків будується аналогічно до трикутника інкрементних виплат (Таблиця 2), причому $C_{ij} = \sum_{k=1}^{j} S_{ik}$ та між ними виконується співвідношення:

$$S_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1}, \tag{1}$$

а необхідний резерв виражається як

$$R_i = \sum_{j=n-i+2}^{n} S_{ij} = \sum_{j=n-i+1}^{n} (C_{ij} - C_{i,j-1}) = C_{in} - C_{i,n-i+1}.$$

Ланцюговий метод ґрунтується на кількох основних припущеннях, які дозволяють прогнозувати подальший розвиток збитків у часі.

Перше припущення полягає в тому, що розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події є однаковим. [7]

Розглянемо сумарний збиток для i-го року настання події $S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} = C_{in}$, який можна подати у вигляді добутку послідовних коефіцієнтів розвитку:

$$C_{in} = C_{i1} \times \prod_{j=1}^{n-1} F_{ij},$$

де $F_{ij} = C_{i,j+1} / C_{i,j}$ - це коефіцієнт (множник) зростання накопичених виплат від j-го до $(j+1)$-го року розвитку. Таке представлення можливе лише за умови, що всі $C_{ij} > 0$. У випадку, коли деякі значення дорівнюють нулю, розрахунок починають із першого додатного значення.

Передбачається, що математичне сподівання цих коефіцієнтів не залежить від року настання збитків i, тобто

$$\mathbb{E}\left(F_{ij}\right) = f_j \quad \text{для всіх} \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n-1,$$

де f_j - середній коефіцієнт розвитку між періодами j та $j+1$.

Ці коефіцієнти оцінюються як зважені середні:

$$\widehat{f_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} F_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j}}, 1 \le j \le n-1.$$

Таким чином, прогноз накопичених збитків для i-го року події здійснюється послідовним множенням поточних збитків на оцінені коефіцієнти розвитку:

$$\widehat{C}_{in} = C_{i,n-i+1} \times \widehat{f}_{n-i+1} \times \ldots \times \widehat{f}_{n-1}, \; 2 \le i \le n$$

Відповідно, резерв для i-го року події визначається як різниця між прогнозним кінцевим збитком і вже відомими виплатами:

$$\widehat{R}_i = \widehat{C_{i,n}} - C_{i,n-j+1}.$$

Таким чином, оцінка резерву ґрунтується на поточному рівні виплат та середніх коефіцієнтах розвитку, що отримані з історичних даних. Метод не враховує додаткової інформації з попередніх періодів, окрім наявного стану розвитку збитків.

Додатково передбачається, що:

- роки настання збитків $\{C_{i1}, \ldots, C_{in}\}$ є незалежними;
- існують сталі коефіцієнти розвитку f_j, $1 \le j \le n-1$, такі що математичне сподівання майбутніх збитків залежить лише від поточного рівня:
$$\mathbb{E}\left(C_{i,j+1} | C_{i1}, \ldots, C_{in}\right) = C_{ij} f_j.$$

Тож, метод ланцюгових сходів є класичним детермінованим способом прогнозування майбутніх збитків на основі історичних закономірностей їх розвитку. Він є простим у реалізації, проте чутливий до змін у портфелі чи макроекономічних умовах. Отримані результати слугують базою для більш складних стохастичних моделей.

1.2.2. Модель Мака (Mack Model)

Далі доцільно розглянути *модель Мака (Mack model)* - стохастичне узагальнення методу ланцюгових сходів, запропоноване Томасом Маком у 1993 році. Модель зберігає основні властивості методу ланцюгових сходів (Chain-Ladder), проте доповнює його припущеннями щодо варіації накопичених збитків, що дозволяє кількісно оцінити невизначеність прогнозів резервів. Такий підхід робить можливим більш обґрунтоване встановлення страхових резервів і маржі платоспроможності, а також дозволяє перевіряти, чи залишаються припущення про резерви актуальними з часом [8].

Модель Мака ґрунтується на таких ключових припущеннях:

- Величини накопичених збитків $C_{i,j}$ і $C_{l,k}$ є незалежними для всіх $i \neq l$, для будь-яких j,k.
- Для кожного року настання збитку i, послідовність $\{C_{i,j}\}_{j=0,1,\dots}$ утворює ланцюг Маркова, тобто кожне наступне значення залежить лише від попереднього.
- Існують коефіцієнти розвитку f_j, такі що

$$\mathbb{E}[C_{i,j+1} \mid C_{i,j}] = f_j\, C_{i,j}.$$

  Це означає, що очікуване значення наступного кумулятивного збитку пропорційне попередньому.

- Існують параметри дисперсії σ_j^2, такі що

$$Var\left[C_{i,j+1} | C_{i,j}\right] = \sigma_j^2\, C_{i,j},$$

  тобто дисперсія збитків пропорційна їхньому поточному рівню.

Алгоритм моделі Мака можна подати у кілька етапів [9], наведених нижче.

1. Оцінка коефіцієнтів розвитку $\hat{f}_j$**:**

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}, j = 1,\dots,n-1,$$

де суми беруться по тих рядах, для яких існують обидва значення $C_{i,j}$ і $C_{i,j+1}$.

2. Прогноз кінцевих збитків для кожного року настання події i**:**

$$\widehat{C}_{i,n} = C_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j,$$

використовуючи поточну відому накопичену суму та добуток оцінених коефіцієнтів розвитку до кінця періоду.

3. Оцінка резерву для кожного року:

$$\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,n} - C_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}\left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j - 1\right).$$

4. Оцінка дисперсії прогнозу та середньоквадратичної похибки (MSEP):

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1}\sum_{i=1}^{n-j} \frac{(C_{i,j+1} - \widehat{f}_j C_{i,j})^2}{C_{i,j}}, j = 1,\dots,n-2,$$

та

$$\widehat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\widehat{\sigma}_{n-2}^4}{\widehat{\sigma}_{n-3}^2}, \widehat{\sigma}_{n-3}^2\right).$$

MSEP для $\widehat{C}_{i,n}$ та $\widehat{R}_i$ розраховується як сума двох компонент: похибки процесу та похибки параметра (Mack, 1993):

$$\mathrm{MSEP}_i \mid C_{g,h:g+h\le n+1} = \mathrm{Var}(C_{i,n} \mid C_{g,h:g+h\le n+1}) + (E(C_{i,n} \mid C_{g,h:g+h\le n+1}) - \widehat{C}_{i,n})^2.$$

5. Стандартна похибка прогнозу:

$$\mathrm{SE}\left(\widehat{C}_{i,n}\right) = \sqrt{\mathrm{MSEP}\left(\widehat{C}_{i,n}\right)}, \quad \mathrm{SE}(\widehat{R}_i) = \sqrt{\mathrm{MSEP}(\widehat{R}_i)}.$$

Таким чином, модель Мака поєднує метод ланцюгових сходів із можливістю кількісної оцінки невизначеності прогнозів, що робить її зручною для розрахунку обережних резервів та перевірки стабільності припущень.

1.2.3 Метод Борнхюттера-Ферґюсона (Bornhuetter-Ferguson)

Далі розглянемо ще один поширений підхід до оцінки резерву збитків, що виникли, але ще не заявлені (IBNR) - *метод Борнхюттера-Фергюсона*. Його розробили актуарії Ч. Борнхюттер і Р. Фергюсон, а вперше представили у 1972 році [7].

Метод поєднує статистичну основу ланцюгового методу (Chain-Ladder) з аналітичним використанням очікуваного рівня збитковості (*expected loss ratio*). Такий підхід дозволяє збалансувати історичну інформацію про розвиток збитків із попередніми експертними оцінками.

Метод Борнхюттера-Фергюсона особливо ефективний для видів страхування з низькою частотою, але високим рівнем збитків, де класичні моделі, засновані лише на історичних трендах, можуть бути менш надійними.

Коефіцієнт рівня збитковості визначається як відношення заявлених позовів до отриманих премій і зазвичай є стабільним для кожного року розвитку за відсутності значних змін, таких як коливання премій або катастроф. Його можна використовувати для оцінки остаточного обсягу збитків і, відповідно, резерву несплачених збитків. Для розрахунку цього коефіцієнта використовують попередні дані, тарифні припущення, експертні оцінки або ринкову статистику. Проте ці джерела потребують обережного застосування, адже навіть стабільні показники минулих років не гарантують аналогічних результатів у поточному періоді, що може призвести до помилок у визначенні резерву IBNR.

Цей метод також ґрунтується на ряді припущень, а саме:

- Незаявлені (або несплачені) збитки оцінюються на основі очікуваного рівня збитковості, тобто вже заявлені позови не містять додаткової інформації про майбутні.
- Накопичені виплати за кожним роком настання збитку зростають за однаковим законом, тобто стовпці у трикутнику розвитку є пропорційними, а коефіцієнти розвитку спільними для всіх років.
- Існують вектори $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - очікувані частки виплат, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, де $\gamma_n = 1$ - фактори розвитку, що описують середній профіль розвитку збитків:

$$\mathbb{E}C_{ij} = \gamma_j\, \alpha_k, \text{ для } 1 \le j \le n \text{ та } \le i \le n.$$

- Відомі оцінки очікуваних остаточних збитків $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_n)$, $\hat{\gamma}_n = 1$ і часток їх накопичення $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$ на різних етапах розвитку.

Покроково метод Борнхюттера-Фергюсона реалізується наступним чином [7]:

1. Визначення коефіцієнта рівня збитковості λ, що відображає очікувану частку збитків у заробленій премії.
2. Обчислення початкових оцінок остаточних збитків (benchmark ultimate loss) для кожного періоду настання збитків за формулою:

$$BUL_i = \lambda P_i,$$

де P_i - зароблена премія за i-й період.

3. Розрахунок коефіцієнтів розвитку збитків f_i, що характеризують очікувану динаміку виплат у часі. Ці коефіцієнти зазвичай визначаються на основі методу ланцюгових сходів:

$$f_i = \prod_{l=i}^{n} p(l),$$

де $p(l)$ - фактори розвитку між періодами l та $l+1$.

4. Оцінка приведених (оновлених) остаточних збитків для кожного періоду розвитку за формулою:

$$RUL_i = \frac{BUL_i}{f_i}.$$

5. Визначення розміру резерву для кожного періоду настання збитків як різниці між початковими та оновленими оцінками:

$$R_i = BUL_i - RUL_i = BUL_i(1 - \frac{1}{f_i}) = \lambda P_i(1 - \frac{1}{f_i}).$$

Отже, метод Борнхюттера-Фергюсона поєднує переваги ланцюгового методу та експертних оцінок очікуваної збитковості. Він зменшує вплив випадкових коливань у даних і забезпечує більш стабільні результати для нових або нестабільних страхових портфелів. Завдяки цьому метод часто використовується на практиці для обережної оцінки IBNR.

1.3 Обмеження класичних методів оцінки резервів

Незважаючи на те, що класичні методи оцінки резервів - такі як метод ланцюгових сходів (Chain-Ladder), модель Мака та метод Борнхюттера-Фергюсона - широко використовуються на практиці, вони мають низку суттєвих обмежень. Ці недоліки можуть призводити до того, що розраховані резерви виявляються завищеними або, навпаки, заниженими, особливо коли дані є нестабільними, ринкові умови швидко змінюються або спостерігається висока невизначеність у майбутніх виплатах. У цьому підрозділі розглянемо ключові обмеження традиційних підходів, щоб зрозуміти, чому Бутстреп-метод є корисним їхнім доповненням.

Передусім, метод ланцюгових сходів та інші класичні підходи ґрунтуються на припущенні, що коефіцієнти розвитку, темпи виплат і часові інтервали врегулювання збитків залишаються сталими в майбутньому. Проте на практиці ці параметри часто змінюються: час врегулювання справ може скорочуватись або збільшуватись, змінюються економічні фактори (інфляція, вартість матеріалів чи праці), відбуваються регуляторні реформи чи зміни судової практики. Усе це здатне суттєво впливати на точність оцінки резервів.

Крім того, більшість класичних методів надають лише точкові оцінки резервів, не враховуючи варіацію результатів і не формуючи довірчі інтервали. Хоча метод Борнхюттера-Фергюсона частково враховує очікуваний рівень збитковості, він теж залишається чутливим до помилок у припущеннях і не дає повної оцінки невизначеності.

Ще одним обмеженням є чутливість класичних методів до аномалій даних. Великі або нетипові позови, зміни у політиці врегулювання, помилки у звітності чи зміна принципів обліку можуть суттєво спотворити коефіцієнти розвитку. У результаті прогноз резервів може виявитися необ’єктивним або нестабільним.

Методи на кшталт метода ланцюгових сходів потребують також значного обсягу історичних даних. Якщо вибірка надто коротка або дані агреговані за календарними періодами, оцінки коефіцієнтів розвитку стають статистично ненадійними. Це, в свою чергу, знижує ефективність моделі для портфелів із малою кількістю спостережень або короткою історією розвитку збитків.

Окрім цього, класичні методи часто не враховують ризик параметричної невизначеності, тобто похибки, пов’язаної з тим, що самі оцінені параметри можуть бути неточними. Хоча модель Мака частково враховує цей ризик через оцінку середньоквадратичної помилки прогнозу (MSEP), більшість детермінованих моделей цього не роблять.

Не менш важливим є те, що частина припущень класичних моделей виглядає нереалістичною у сучасних умовах. Сталий розподіл збитковості, незмінна структура страхового портфеля чи фіксовані строки врегулювання збитків рідко спостерігаються в умовах сучасного ринку, який постійно змінюється під впливом нових ризиків, технологій, кліматичних чи регуляторних чинників.

Таким чином, хоча класичні методи залишаються базовими інструментами актуарного аналізу завдяки своїй простоті та інтерпретованості, вони не завжди забезпечують достатню точність в умовах високої невизначеності або нестабільності даних. Для підвищення надійності оцінок і врахування варіативності можливих сценаріїв доцільно використовувати стохастичні методи, зокрема Бутстреп-метод, який дає змогу оцінити не лише середній прогноз резерву, а й розподіл можливих результатів. У наступному розділі розглянемо детальніше сутність і переваги цього підходу.

РОЗДІЛ 2. БУТСТРЕП-МЕТОД ДЛЯ ОЦІНКИ СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

2.1. Історія та розвиток Бутстреп-методу в статистиці

Історія виникнення Бутстреп-методу - статистичного підходу повторного відбору, який дозволяє здійснювати висновки навіть на основі невеликих вибірок, бере початок ще з початку XX століття. Перші спроби побудови методів багаторазового вибіркового оцінювання належать до робіт Рональда Фішера, який у 1930-х роках розробив пермутаційні тести. Ці тести дозволяли оцінювати статистичну значущість результатів, порівнюючи всі можливі перестановки елементів вибірки.

Подальший розвиток отримала ідея повторної вибірки у методі “jackknife” - метод складного ножа, запропонованого Морісом Кенуїллем і розвинутому Джоном Тьюкі. Цей підхід передбачав систематичне виключення одного спостереження з вибірки з подальшим повторним розрахунком статистики, що дало змогу оцінювати її зсув та дисперсію.

Проте справжній прорив у статистиці відбувся у 1979 році, коли американський статистик Бредлі Ефрон представив свою роботу *“Bootstrap methods: Another look at the jackknife”* [10]. Саме він увів у статистичну практику термін *bootstrap*, що буквально означає «підтягнути себе за власні шнурки», тобто зробити висновки про генеральну сукупність, спираючись лише на наявну вибірку.

Бутстреп-метод Ефрона базується на ідеї багаторазового вибіркового відбору з поверненням з вихідних даних. У результаті формується велика кількість «псевдовибірок», в кожній з яких повторно обчислюється статистика (наприклад, середнє, дисперсія, квантилі). Це дозволяє оцінювати довірчі інтервали, стандартні помилки чи розподіл оцінки без необхідності робити припущення про нормальність чи інші форми теоретичного розподілу.

Завдяки простоті та універсальності цей метод швидко став одним із найважливіших інструментів сучасної статистики. Упродовж останніх десятиліть він набув широкого поширення у прикладних дослідженнях - від економетрики до медицини та страхування - де часто маємо справу з невеликими або неповними вибірками. Розвиток комп’ютерних технологій зробив Бутстреп-метод практично застосовним: з’явилася можливість генерувати тисячі або навіть мільйони псевдовибірок за короткий час.

Хоча Бутстреп-метод значно розширив можливості статистичних висновків і став базовим інструментом для оцінки невизначеності, дослідники відзначають, що він не завжди може повністю замінити класичні підходи - зокрема, коли вихідні дані не відповідають основним припущенням (наприклад, незалежності спостережень). Проте його гнучкість, мінімальна кількість припущень і висока адаптивність до різних типів даних роблять Бутстреп-метод одним із найважливіших методів сучасного статистичного аналізу. [11]

2.2. Сутність та принципи Бутстреп-методу

Бутстреп-метод є специфічним видом повторного відбору, який використовується для послідовної оцінки варіації параметрів статистичної моделі. Його суть полягає в тому, що замість класичних аналітичних підходів використовуються багаторазові повторні вибірки з наявних даних із поверненням. На основі таких псевдовибірок будуються емпіричні розподіли оцінок, що дозволяє отримувати статистичні висновки про невідомі параметри моделі без необхідності робити припущення про форму їх розподілу.

Важливо зазначити, що Бутстреп-метод не має універсальної форми - його потрібно адаптувати до конкретної ситуації та моделі. Для лінійних або узагальнених лінійних моделей зазвичай застосовуються два основні підходи:

- Парний бутстреп (Paired bootstrap) - повторний відбір проводиться безпосередньо з початкових спостережень, тобто з пар значень y та відповідних рядків матриці X у регресійній моделі.
- Бутстреп залишків (Residuals bootstrap) - повторний відбір виконується не з вихідних спостережень, а з залишків моделі, тобто різниць між фактичними та прогнозними значеннями.

Хоча парний бутстреп вважається більш надійним (менш чутливим до окремих відхилень у даних), у контексті оцінки страхових резервів найчастіше застосовують саме бутстреп залишків. Це пояснюється тим, що в задачах резервування деякі спостереження є залежними від оцінених параметрів, тому класичний парний підхід не забезпечує коректного відтворення стохастичної структури даних.

Реалізація Бутстреп-аналізу включає три основні етапи:

1. Вибір моделі, що адекватно описує дані;
2. Визначення типу залишків, які підлягатимуть повторній вибірці;
3. Виконання процедури бутстреп-прогнозування, тобто побудова великої кількості псевдовибірок та розрахунок статистик для кожної з них.

Під час вибору типу залишків необхідно пам'ятати два принципові моменти:

- багаторазова вибірка базується на припущенні, що залишки є незалежними та однаково розподіленими;
- неважливо, чи здійснюється багаторазова вибірка безпосередньо залишків, чи залишків, помножених на сталу - головне, щоб цей факт враховувався під час формування псевдоданих.

Таким чином, Бутстреп-метод дозволяє отримати надійні оцінки варіації параметрів і прогнозів навіть у складних моделях, де класичні аналітичні підходи не можуть бути застосовані через невідомий або складний розподіл даних.

2.3. Узагальнені лінійні моделі (УЛМ) як статистичне підґрунтя

Узагальнені лінійні моделі (УЛМ) відіграють ключову роль у стохастичних методах резервування збитків. Вони дозволяють описати залежність між очікуваною величиною виплат і факторами, що впливають на їх розвиток, у гнучкіший спосіб, ніж класичні методи. Як зазначають Renshaw і Verrall (1994) [19], більшість стохастичних моделей резервування можна подати у вигляді УЛМ.[12]

Структура УЛМ визначається як:

$$Y_{ij} \sim f(y_{ij};\mu_{ij},\phi), \tag{2}$$

де Y_{ij} - незалежні випадкові величини, $\mu_{ij} = E[Y_{ij}]$, а $f(\cdot)$ належить до експоненціальної сім'ї розподілів з масштабним параметром ϕ.

Зв'язок між середнім значенням та лінійним предиктором задається як:

$$\eta_{ij} = g(\mu_{ij}), \tag{3}$$

$$\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j, \tag{4}$$

де параметри $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ для уникнення перенормування.

У практиці резервування зазвичай використовують такі припущення щодо розподілу C_{ij}:

- Гамма-розподіл або Пуассонівський розподіл - співвідношення $(3) - (4)$ визначається з $Y_{ij} = C_{ij}$ та функцією зв'язку $\eta_{ij} = \ln\,(\mu_{ij})$.
- Логнормальний розподіл - застосовується $Y_{ij} = \ln\,(C_{ij})$ з нормальним розподілом. Тоді співвідношення, наведені у формулах $(3) - (4)$,

залишаються чинними й визначають УЛМ для логарифмів інкрементних виплат. У цьому випадку функція зв'язку має вигляд $\eta_{ij} = \mu_{ij}$, а параметр масштабу - дисперсія нормального розподілу $\phi = \sigma^2$.

Формула (4) означає, що оцінки деяких параметрів можуть залежати лише від одного спостереження, тобто для цих спостережень існує ідеальне наближення.

Параметри $(c, \alpha_i, \beta_j, \phi)$ оцінюються методом максимальної вірогідності або квазі-максимальної вірогідності (QMLE). При цьому припущення щодо форми розподілу можна замінити функцією дисперсії:

$$\text{Var}\,(Y_{ij}) = \phi V(\mu_{ij}),$$

де $V(\cdot)$ - функція дисперсії:

$$V(\mu_{ij}) = \begin{cases} 1, \text{ для нормального розподілу,} \\ \mu_{ij}, \text{ для пуассонівсього розподілу,} \\ \mu_{ij}^2, \text{ для гамма - розподілу.} \end{cases}$$

Добре відомо, що УЛМ із лінійною структурою (4) та $V(\mu_{ij}) = \mu_{ij}$ (тобто квазі-пуассонівський розподіл з надмірною дисперсією) приводить до еквівалентних прогнозів, що й метод ланцюгових сходів (Chain-Ladder) [19].

Прогнозні значення отримуються на основі оцінених середніх $\hat{\mu}_{ij}$,

а саме:

$$\hat{\mu}_{\bullet} = \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=n+2-i}^{n} \hat{\mu}_{ij}, \; \hat{\mu}_{i\bullet} = \sum_{j=n+2-i}^{n} \hat{\mu}_{ij}.$$

Таким чином, УЛМ створює математичну основу для стохастичного резервування, а Бутстреп-метод дозволяє розширити її, забезпечуючи оцінку варіації прогнозів і надійності резервів без спрощувальних припущень щодо розподілу помилок.

2.4. Алгоритм застосування Бутстреп-методу

В межах узагальненої лінійної моделі (УЛМ) можуть використовуватися різні типи залишків - залишки Пірсона, девіаційні залишки, залишки Анскомба тощо. У більшості задач оцінювання страхових резервів вихідною точкою є залишки Пірсона, які визначаються як:

$$r_{ij}^{(P)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\widehat{Var}(Y_{ij})}} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi}\,\hat{V}(\hat{\mu}_{ij})}}.$$

Параметр масштабу ϕ при цьому вважається сталим для всієї вибірки, тому на етапі побудови бутстреп-вибірок ним можна знехтувати:

$$r_{ij}^{(P^*)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\mu}_{ij})}},$$

де $\hat{\mu}_{ij}$ - оцінка математичного сподівання, а $V(\cdot)$ - функція дисперсії. У випадку нормальної моделі, коли $V(\mu_{ij}) = 1$, залишки Пірсона збігаються зі звичайними залишками $y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}$.

Оскільки у трикутниках збитків певні комірки мають детерміновані значення (наприклад, $y_{1,n} = \hat{\mu}_{1,n}$ або $y_{n,1} = \hat{\mu}_{n,1}$), деякі залишки дорівнюють нулю. Такі значення не є реалізаціями випадкової величини і виключаються з подальшого повторного відбору.

Для забезпечення коректності моделювання використовуються стандартизовані залишки Пірсона, які вважаються однаково розподіленими:

$$r_{ij}^{(P^{**})} = \frac{r_{ij}^{(P)}}{\sqrt{1 - h_{ij}}},$$

де h_{ij} - елемент діагоналі так званої «матриці капелюшка» (*hat matrix*).

Для класичної лінійної моделі ця матриця має вигляд:

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T,$$

а для УЛМ - узагальнену форму:

$$H = X(X^T W X)^{-1} X^T W,$$

де W - діагональна матриця ваг з елементами:

$$w_{ii} = \left(V(\mu_i) \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \mu_i} \right)^2 \right)^{-1}.$$

[13]

У моделях із логарифмічною функцією зв'язку та квазі-розподілами маємо:

$$w_i = \mu_i^{2-k},$$

де $k = 1$ для квазі-Пуассонівської моделі та $k = 2$ для квазі-гамма моделі. Аналогічну процедуру можна застосовувати й для інших типів залишків (наприклад, девіаційних).

Тепер можна коротко розглянути процедуру бутстреп-прогнозування.

Для отримання верхньої межі довірчого інтервалу прогнозів сукупних резервів застосовують два підходи.

Перший підхід базується на центральній граничній теоремі, згідно з якою розподіл резерву апроксимується нормальним розподілом із математичним сподіванням, рівним початковому прогнозу (на основі вихідних даних), і стандартним відхиленням, що дорівнює стандартній похибці прогнозу.

Основна відмінність між оцінкою стандартних похибок за допомогою Бутстреп-методу та теоретичним наближенням полягає в тому, що в Бутстреп-методі дисперсія оцінювача визначається емпірично, а не з теоретичних виразів. Детальний опис цього методу наведено в Efron і Tibshirani (1993) [14].

England і Verrall (1999) [15] застосували його до оцінки страхових резервів і запропонували корекцію зміщення для порівняння між бутстреп-стандартною похибкою та теоретичною оцінкою.

Стандартна похибка прогнозу за Бутстреп-методом визначається за формулою:

$$SEP_b(\mu) = \sqrt{\hat{\phi}\hat{\mu} + \frac{N}{N-p}(SE_b(\hat{\mu}))^2},$$

де

- μ - це сумарні значення за рядками $\hat{\mu}_{i\bullet}$ (для $i = 2,3,\ldots,n$) або сукупне значення $\hat{\mu}_{\bullet}$;

- $\widehat{\phi}$ і $\widehat{\mu}$ - це оцінки параметрів за методом квазі-максимальної правдоподібності;
- N - кількість спостережень,
- p - кількість параметрів (зазвичай $N = n(n-1)$, а $p = 2n - 1$);
- $SE_b(\widehat{\mu})$ - бутстреп-оцінка стандартного відхилення оцінки $\widehat{\mu}$, тобто:

$$SE_b(\widehat{\mu}) = \sqrt{\frac{1}{B}\sum_{k=1}^{B}(\mu_k^* - \widehat{\mu})^2},$$

де B - кількість бутстреп-реплікацій, а $\widehat{\mu}_k^*$ - бутстреп-оцінка у k-ій ітерації.

Другий підхід [16] є більш обчислювально складним, оскільки передбачає два етапи повторного відбору в межах кожної ітерації. Проте отримані результати є більш стійкими до відхилень від припущень моделі. Ідея полягає в тому, щоб визначити помилку прогнозу як функцію бутстреп-оцінки та бутстреп-симуляції майбутніх значень, а потім реєструвати значення цієї помилки для кожної ітерації. Використовуючи потрібний перцентиль цього розподілу помилок, його поєднують із початковим прогнозом, щоб отримати верхню межу довірчого інтервалу прогнозу.

Узагальнений алгоритм Бутстреп-методу [12]:

Етап 1 - Підготовчий

- Оцінювання параметрів моделі $\alpha_i, \beta_j, c, \phi$ (для $i, j = 1, 2, \ldots, n$);
- Обчислення підібраних значень $\widehat{\mu}_{ij}$ (для $i = 1, 2, \ldots, n$ та $j = 1, 2, \ldots, n + 1 - i$);
- Обчислення залишків $r_{ij} = h(y_{ij}, \widehat{\mu}_{ij})$;
- Формування прогнозів на основі вихідних даних: $\widehat{\mu}_{ij}, \widehat{\mu}_{i\bullet}, \widehat{\mu}_{\bullet}$ (для $i = 2, \ldots, n$ та $j = n + 2 - i, \ldots, n$).

Етап 2 - Бутстреп-цикл (повторюється B разів)

Підетап 2.1 - Бутстреп-оцінки

- Повторна вибірка залишків, отриманих на етапі 1 (з поверненням) $\rightarrow r_{ij}^*$;

- Формування псевдоданих y_{ij}^* шляхом розв'язання рівняння $r_{ij}^* = h(y_{ij}^*, \hat{\mu}_{ij})$;
- Оцінювання моделі за псевдоданими та отримання бутстреп-прогнозів $\hat{\mu}_{ij}^*, \hat{\mu}_{i\bullet}^*, \hat{\mu}_{\bullet}^*$;
- Збереження бутстреп-прогнозів $\hat{\mu}_{i\bullet}^{(b)} = \hat{\mu}_{i\bullet}^*$ і $\hat{\mu}_{\bullet}^{(b)} = \hat{\mu}_{\bullet}^*$, де b - номер ітерації.

Підетап 2.2 - Псевдорепрезентація реальності (тільки для процедури 2)

- Повторна вибірка залишків, отриманих на етапі 1, із вибіркою (з поверненням) стільки разів, скільки потрібно для прогнозів $\rightarrow r_{ij}^{**}$ (для $i = 2,\ldots,n$ і $j = n + 2 - i,\ldots,n$);
- Формування псевдорепрезентації реальності y_{ij}^{**}, розв'язуючи рівняння $r_{ij}^{**} = h(y_{ij}^{**}, \hat{\mu}_{ij})$ (для $i = 2,\ldots,n$ і $j = n + 2 - i,\ldots,n$), де $\hat{\mu}_{ij}$ - прогнози, отримані на етапі 1;
- Обчислення помилок прогнозу $r_{i\bullet}^{(b)} = h(y_{i\bullet}^{**}, \hat{\mu}_{i\bullet}^*)$ та $r_{\bullet}^{(b)} = h(y_{\bullet}^{**}, \hat{\mu}_{\bullet}^*)$;
- Повторення з початку етапу 2 до завершення B ітерацій.

Етап 3 - Аналіз результатів бутстрепу

Підетап 3.1 - (для процедури 1)

- Оцінювання бутстреп-дисперсії $\mathrm{var}(\hat{\mu}_{i\bullet})$ і $\mathrm{var}(\hat{\mu}_{\bullet})$ через емпіричну дисперсію відповідних B бутстреп-оцінок. England і Verrall (1999) [15] пропонують скоригувати зміщення таких оцінок, помноживши їх на коефіцієнт $n/n - p$, де n - кількість спостережень у трикутнику даних, а p - кількість параметрів лінійної структури.
- Використання теоретичних виразів стандартної похибки прогнозу на основі цих оцінок.

Підетап 3.2 - (для процедури 2)

- Використання k%-го перцентиля бутстреп-розподілу помилок прогнозу, наприклад $r_{\bullet,k}^*$ для загальної суми, та обчислення відповідного перцентиля резервів шляхом розв'язання рівняння

$h(y^*_{\bullet,k}, \hat{\mu}_{\bullet}) = r^*_{\bullet,k}$,

де $\hat{\mu}_{\bullet}$ - прогноз, отриманий за вихідними даними (етап 1).

Отже, Бутстреп-метод у поєднанні з узагальненими лінійними моделями забезпечує гнучкий та обґрунтований підхід до оцінки страхових резервів, який дозволяє отримати як точкові, так і інтервальні оцінки з урахуванням стохастичної природи даних. Завдяки своїй невимушеності щодо розподілу залишків та емпіричному оцінюванню похибок, метод показує високу ефективність у практичних задачах актуарної математики.

2.5. Алгоритм бутстреп-процедури для оцінки страхових резервів

У задачах страхового резервування необхідно оцінити помилку прогнозу (prediction error), тобто невизначеність майбутніх виплат. Бутстреп-метод є природним і статистично обґрунтованим підходом для цього завдання.

Зазвичай використовується трикутник збитків, який містить дані про накопичені або інкрементні виплати за роками настання збитків та роками розвитку. До залишків, отриманих з верхнього трикутника, застосовується Бутстреп-метод, після чого на їхній основі формуються псевдодані.

У більшості застосувань як базову модель використовують метод ланцюгових сходів для побудови прогнозованих значень, хоча в деяких випадках застосовують узагальнену лінійну модель. Результати цих двох методів збігаються для пуассонівської моделі з надмірною дисперсією (over-dispersed Poisson GLM).

Нехай маємо верхній трикутник спостережень інкрементних виплат X_{ij} та відповідні підігнані значення $\hat{\mu}_{ij}$, отримані методом ланцюгових сходів. Для кожного елемента трикутника обчислюються *залишки Пірсона*:

$$r_{ij} = \frac{X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\mu}_{ij}}}. \quad (5)$$

Оскільки залишки не містять параметра масштабу, вони вважаються нормованими. Оцінка цього параметра ϕ може бути знайдена за формулою:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum r_{ij}^2}{n - p}, \quad (6)$$

де n - кількість елементів у верхньому трикутнику, а p - кількість параметрів моделі.

Далі здійснюється повторна вибірка з поверненням із множини залишків, утворюючи новий набір r^*_{ij}, на основі якого формуються псевдодані:

$$X^*_{ij} = r^*_{ij}\sqrt{\hat{\mu}_{ij}} + \hat{\mu}_{ij}. \quad (7)$$

Таким чином утворюється новий верхній трикутник інкрементних виплат. Отримані псевдодані X^* використовуються для повторного застосування методу ланцюгових сходів із метою оцінки прогнозованих резервів та побудови емпіричного розподілу прогнозів.

Відповідно, оцінки дисперсій мають вигляд:

$$Var(X_{ij})_B = \hat{\phi}R,$$

$$Var(\hat{X}_{ij})_B = \frac{n}{n-p}(SE(R))^2,$$

де R - оцінка резерву для року збитку, $SE(R)$ - стандартна похибка за бутстреп-вибіркою.

Загальна бутстреп-оцінка похибки прогнозу резервів визначається як:

$$PE_B = \sqrt{\hat{\phi}R + \frac{n}{n-p}(SE(R))^2}.$$

Покроковий алгоритм виконання бутстреп-процедури [17]:

1. Обчислити коефіцієнти розвитку для кумулятивних виплат.
2. Отримати підігнані кумулятивні значення верхнього трикутника.
3. Обчислити інкрементні виплати як різниці між послідовними накопиченими (кумулятивними) виплатами.
4. Обчислити залишки Пірсона для кожного елемента верхнього трикутника.
5. Повторити цикл бутстрепу N разів:
    a) виконати вибірку з поверненням із залишків та сформувати новий трикутник;
    b) сформувати псевдодані інкрементних виплат;
    c) обчислити відповідні кумулятивні виплати;
    d) застосувати метод ланцюгових сходів для оцінки майбутніх виплат;

e) обчислити прогнозовані інкрементні виплати як різниці між послідовними кумулятивними виплатами;

f) підсумувати прогнозовані інкрементні виплати за роками для отримання оцінки резервів;

g) зберегти результати.

Отримані N оцінок утворюють емпіричний розподіл прогнозованих резервів, який використовується для побудови довірчих інтервалів та ризиків відхилення.

В England (2002) [20] було запропоновано удосконалити Бутстреп-метод, враховуючи ступені свободи. Для цього залишки масштабуються перед повторним відбором:

$$r'_{ij} = r_{ij}\sqrt{\frac{n}{n-p}} = \sqrt{\frac{n}{n-p}}\frac{X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\mu_{ij}}},$$

після чого саме ці скориговані залишки використовуються для багаторазової вибірки. Також було введено етап симуляції випадкових спостережень із розподілу процесу, наприклад, пуассонівського розподілу з надмірною дисперсією або гамма-розподілу, із середнім μ_{ij} та дисперсією $Var(X_{ij}) = \hat{\phi}\hat{\mu}_{ij}^2$.

Перевага гамма-розподілу полягає у тому, що він неперервний, тоді як пуассонівський породжує лише значення, кратні ϕ. Таким чином, гамма-процес забезпечує більш реалістичне відтворення неперервних страхових збитків.

2.6. Бутстреп-прогнозування

Подальше розширення класичної бутстреп-процедури було запропоновано у роботах Pinheiro P., Silva J., Centeno M. [18]. Модифікований підхід передбачає використання не лише підігнаних і прогнозованих значень, отриманих методом ланцюгових сходів, але й тих, що оцінені з використанням узагальнених лінійних моделей.

Метою такого вдосконалення є підвищення точності оцінки похибки прогнозу. Для цього до бутстреп-циклу додається додатковий етап. Новий крок відбуватиметься всередині бутстреп-циклу після кроку f):

g) повторна вибірка залишків, але цього разу для формування нижнього трикутника;

h) створення псевдореальності інкрементних прогнозованих значень, використовуючи вибіркові залишки та прогнозовані значення нижнього трикутника;
i) обчислення похибок прогнозу на основі отриманих псевдоданих прогнозованих значень;
j) збереження результатів і повернення до початку циклу.

Цей підхід передбачає, що залишки є незалежними та однаково розподіленими, тому їх можна використовувати для повторного заповнення нижнього трикутника. Важливо, що повторна вибірка не впливає на самі прогнозовані оцінки резервів - вона використовується виключно для моделювання розподілу похибок прогнозу.

Однак у подальших роботах було запропоновано змінити логіку циклу. Замість додавання кроків $(g)-(j)$ до стандартної бутстреп-процедури, пропонується замінити попередні кроки $(a)-(f)$, тобто зосередитись не на оцінці похибок наявних прогнозів, а на безпосередньому відтворенні прогнозного трикутника шляхом симуляції нижньої частини матриці.

Алгоритм виконання бутстреп-прогнозування

1. Обчислити оцінені інкрементні значення для верхнього трикутника за допомогою УЛМ або методу ланцюгових сходів.
2. Отримати прогнозовані інкрементні значення для нижнього трикутника.
3. Розрахувати залишки Пірсона для кожної клітинки верхнього трикутника, використовуючи спостережувані та підібрані значення приросту.
4. Запустити ітераційний бутстреп-цикл, який повторюється N разів:
   a) виконати повторну вибірку з поверненням залишків r_{ij} для формування нового нижнього трикутника залишків r_{ij}^*;
   b) створити псевдодані інкрементних виплат, використовуючи повторно вибрані залишки та прогнозовані значення приросту;
   c) підсумувати прогнозовані інкрементні виплати за роком виникнення збитку для отримання оцінки резерву.
   d) зберегти результати та повернутися до початку циклу.

2.7. Переваги та обмеження Бутстреп-методу для актуарних розрахунків

Бутстреп-метод посідає особливе місце серед стохастичних підходів в актуарній практиці, оскільки дозволяє оцінювати невизначеність страхових резервів без необхідності робити жорсткі припущення щодо розподілу збитків чи параметрів моделі. На відміну від класичних параметричних методів, він базується на емпіричному підході - багаторазовому повторному вибірковому відтворенні структури наявних даних. Це робить його надзвичайно корисним у ситуаціях, коли аналітична формалізація варіації резервів є складною або неможливою.

Отже, Бутстреп-метод характеризується низкою суттєвих переваг.

Однією з головних переваг методу є мінімальна кількість припущень про розподіл даних. Бутстреп-метод не потребує знання теоретичної форми розподілу збитків, що особливо важливо у страхуванні, де емпіричні розподіли часто мають асиметрію, важкі хвости або містять цензуровані значення.

Ще однією вагомою перевагою є можливість отримання повного емпіричного розподілу прогнозованих величин, а не лише точкових оцінок резервів. Це дає змогу будувати довірчі інтервали, визначати стандартні похибки та оцінювати ризик недостатності резервів.

Метод також вирізняється гнучкістю застосування - його можна використовувати для будь-яких підходів до оцінки резервів, зокрема у поєднанні з класичним методом ланцюгових сходів (Chain-Ladder). Завдяки цьому він дозволяє емпірично оцінювати варіацію прогнозів і підтверджувати стабільність отриманих результатів.

Крім того, багаторазовий відбір залишків допомагає виявити вплив аномальних спостережень, перевірити чутливість результатів і за потреби здійснити корекцію зміщення стандартних похибок [15]. Бутстреп-метод також дає змогу побудувати розподіл ризику резервів і використовувати його для подальших розрахунків капітальних вимог, наприклад, у межах регуляторних підходів типу Solvency II.

Разом із перевагами, метод має і певні обмеження. По-перше, він залежить від якості вихідної моделі. Бутстреп-метод не виправляє помилки специфікації - якщо вихідна модель погано описує структуру даних, навіть численні бутстреп-реплікації не забезпечать достовірних результатів.

По-друге, метод спирається на припущення незалежності залишків, яке у реальних даних часто порушується через автокореляцію чи залежність між діагоналями трикутника збитків. Це може призвести до недооцінки варіації прогнозів.

Ще одним недоліком є висока обчислювальна складність. Для отримання стабільних результатів необхідна значна кількість реплікацій ($B = 1000 - 10\,000$), що вимагає суттєвих обчислювальних ресурсів, особливо при роботі з великими трикутниками даних.

Крім того, метод є чутливим до малих вибірок. Якщо спостережень недостатньо, багаторазовий відбір залишків може не забезпечити репрезентативного відтворення стохастичної структури.

Тож, Бутстреп-метод є ефективним інструментом для емпіричного оцінювання невизначеності страхових резервів. Його ключова перевага полягає у врахуванні стохастичної природи даних без потреби в аналітичному описі розподілу. Попри наявні обмеження, метод забезпечує гнучкий та інтуїтивний підхід до моделювання варіації резервів, дозволяючи будувати довірчі інтервали, оцінювати ризики та порівнювати результати з класичними методами, зокрема методом ланцюгових сходів. У сучасній актуарній практиці Бутстреп-метод дедалі частіше використовується як стандарт для перевірки надійності оцінок резервів і визначення діапазону можливої похибки прогнозу.

РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ БУТСТРЕП-МЕТОДУ В EXCEL

У цьому розділі представлено практичну частину роботи, що присвячена реалізації та порівнянню методів оцінки страхових резервів.

Для ілюстрації підходу використано трикутники розвитку нарахованих збитків, змодельовані на основі реальних даних страхової компанії. Модифікація первинних даних здійснена з метою забезпечення конфіденційності комерційної інформації, при цьому збережено основні статистичні властивості реальної вибірки.

Дослідження проводиться для лінії бізнесу КАСКО, яка характеризується високою частотою страхових випадків та часто трапляються великі збитки.

На першому етапі буде здійснено оцінку IBNR із використанням методу ланцюгових сходів, який виступає базовим у практиці актуарних розрахунків. Далі результати цього методу буде порівняно з оцінками, отриманими за допомогою Бутстреп-методу, що дозволяє оцінити невизначеність прогнозу та побудувати емпіричний розподіл можливих значень резервів.

Усі розрахунки виконано в програмному середовищі Microsoft Excel, що забезпечує наочність обчислень та можливість покрокового аналізу отриманих результатів.

3.1. Реалізація методу ланцюгових сходів в Excel

Для практичної реалізації методу ланцюгових сходів використано трикутник розвитку нарахованих збитків за останні три роки, сформований з поквартальним розподілом періодів - від 4 кварталу 2022 року до 3 кварталу 2025 року.

У цьому трикутнику кожен елемент Y_{ij} відображає суму нарахованих страхових виплат, що відповідає:

- i - кварталу настання збитку (квартал, у якому сталася страхова подія),
- j - кварталу розвитку (квартал, у якому здійснено відповідну виплату або нарахування).

Таким чином, діагональні елементи трикутника представляють виплати, здійснені в тому ж кварталі, у якому сталася подія.

Період настання збитків	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	24 642,20	27 203,92	27 360,62	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40
2023_1	20 650,35	27 221,93	27 906,04	27 906,04	27 970,54	27 989,94	27 989,94	28 002,97	28 002,97	28 002,97	28 002,97	
2023_2	26 206,56	32 212,19	32 534,89	36 307,40	36 273,15	36 659,33	36 659,33	36 659,33	36 808,79	36 808,79		
2023_3	23 458,62	32 178,03	32 744,03	32 852,08	32 852,08	32 852,08	33 149,41	33 149,41	33 474,50			
2023_4	22 604,63	35 112,21	36 536,43	37 233,93	37 233,93	37 351,20	37 628,90	37 628,90				
2024_1	22 948,30	28 107,28	28 856,66	28 949,56	28 949,56	28 989,09	28 989,09					
2024_2	25 657,02	34 775,00	35 005,73	35 537,90	35 579,27	36 224,81						
2024_3	26 775,94	39 252,53	41 117,82	41 524,05	42 091,23							
2024_4	34 095,87	44 219,79	44 476,25	44 580,20								
2025_1	32 639,39	41 118,32	41 550,82									
2025_2	32 098,54	42 678,64										
2025_3	26 497,34											

Таблиця 3

Після побудови трикутника розвитку нарахованих збитків далі розрахуємо фактори розвитку (коефіцієнти розвитку) та прогнозовані кумулятивні витрати. Розрахунки виконуються за формулами, які були описані у попередніх розділах.

Для ілюстрації наведемо приклад обчислення перших трьох факторів розвитку та трьох прогнозованих кумулятивних виплат.

Фактори розвитку:

$$f_1 = \frac{42678{,}64+41118{,}32+44219{,}79+39252{,}53+34775{,}00+28107{,}28+35112{,}21+32178{,}03+32212{,}19+27221{,}93+24642{,}20}{3298{,}54+32639{,}39+34095{,}87+26775{,}94+25657{,}02+22948{,}30+22604{,}63+23458{,}62+26206{,}56+20650{,}35+19053{,}39} = 1{,}33$$

$$f_2 = \frac{41550{,}82+44476{,}25+41117{,}82+35005{,}73+28856{,}66+36536{,}43+32744{,}03+32534{,}89+27906{,}0427203{,}92}{41118{,}32+44219{,}79+39252{,}53+34775{,}00+28107{,}28+35112{,}21+32178{,}03+32212{,}19+27221{,}93+24642{,}20} = 1{,}03$$

$$f_3 = \frac{44580{,}20+41524{,}05+35537{,}90+28949{,}56+37233{,}93+32852{,}08+36307{,}40+27906{,}04+27360{,}62}{44476{,}25+41117{,}82+35005{,}73+28856{,}66+36536{,}43+32744{,}03+32534{,}89+27906{,}0427203{,}92} = 1{,}02$$

Прогнозовані кумулятивні виплати:

$$Y_{12,1} = 26\,497{,}34 \times 1{,}33 = 35\,323{,}61$$

$$Y_{11,2} = 42\,678{,}64 \times 1{,}03 = 43\,823{,}96$$

$$Y_{10,3} = 41\,550{,}82 \times 1{,}02 = 43\,823{,}96$$

Таким чином можна оцінити весь нижній трикутник з Таблиці 3.

Після цього за допомогою Microsoft Excel було обчислено всі інші значення факторів розвитку та прогнозованих сум нарахованих збитків. Отримані результати представлено нижче в Таблиці 4.

Період настання збитків	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	24 642,20	27 203,92	27 360,62	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40
2023_1	20 650,35	27 221,93	27 906,04	27 906,04	27 970,54	27 989,94	27 989,94	28 002,97	28 002,97	28 002,97	28 002,97	28 002,97
2023_2	26 206,56	32 212,19	32 534,89	36 307,40	36 273,15	36 659,33	36 659,33	36 659,33	36 808,79	36 808,79	36 808,79	36 808,79
2023_3	23 458,62	32 178,03	32 744,03	32 852,08	32 852,08	32 852,08	33 149,41	33 149,41	33 474,50	33 474,50	33 474,50	33 474,50
2023_4	22 604,63	35 112,21	36 536,43	37 233,93	37 233,93	37 351,20	37 628,90	37 628,90	37 771,53	37 771,53	37 771,53	37 771,53
2024_1	22 948,30	28 107,28	28 856,66	28 949,56	28 949,56	28 989,09	28 989,09	28 991,41	29 101,29	29 101,29	29 101,29	29 101,29
2024_2	25 657,02	34 775,00	35 005,73	35 537,90	35 579,27	36 224,81	36 333,74	36 336,65	36 474,37	36 474,37	36 474,37	36 474,37
2024_3	26 775,94	39 252,53	41 117,82	41 524,05	42 091,23	42 315,94	42 443,19	42 446,58	42 607,46	42 607,46	42 607,46	42 607,46
2024_4	34 095,87	44 219,79	44 476,25	44 580,20	44 691,88	44 930,48	45 065,59	45 069,19	45 240,01	45 240,01	45 240,01	45 240,01
2025_1	32 639,39	41 118,32	41 550,82	42 346,90	42 452,99	42 679,64	42 807,97	42 811,40	42 973,66	42 973,66	42 973,66	42 973,66
2025_2	32 098,54	42 678,64	43 823,96	44 663,59	44 775,48	45 014,53	45 149,89	45 153,50	45 324,64	45 324,64	45 324,64	45 324,64
2025_3	26 497,34	35 323,61	36 271,56	36 966,50	37 059,10	37 256,95	37 368,98	37 371,98	37 513,62	37 513,62	37 513,62	37 513,62
f	***1,33***	***1,03***	***1,02***	***1,00***	***1,01***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***

Таблиця 4

На основі прогнозованих значень визначено резерв незаявлених збитків (IBNR), який становить: $R_{CL} = 16\,765{,}56$.

3.2. Реалізація Бутстреп-методу в Excel

У даному розділі наведено покрокову реалізацію Бутстреп-методу для оцінки резерву збитків, які виникли, але не заявлені у середовищі Excel. Кумулятивний трикутник виплат та фактори розвитку взяті з попереднього розділу Таблиці 4 і використані як базові для побудови моделей.

На першому етапі на основі кумулятивного трикутника обчислено трикутник інкрементних виплат. Розрахунок здійснювався шляхом послідовного віднімання кумулятивних значень згідно формули (1) з попередніх розділів. У результаті отримано трикутник інкрементних виплат, який наведено в Таблиці 5:

Період настання	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	5 588,81	2 561,72	156,70	31,77	-	-	-	-	-	-	-
2023_1	20 650,35	6 571,57	684,11	-	64,50	19,40	-	13,03	-	-	-	
2023_2	26 206,56	6 005,63	322,70	3 772,51	- 34,25	386,18	-	-	149,46	-		
2023_3	23 458,62	8 719,41	566,00	108,05	-	-	297,33	-	325,09			
2023_4	22 604,63	12 507,58	1 424,22	697,50	-	117,27	277,70	-				
2024_1	22 948,30	5 158,98	749,39	92,90	-	39,53	-					
2024_2	25 657,02	9 117,98	230,73	532,18	41,37	645,54						
2024_3	26 775,94	12 476,59	1 865,29	406,24	567,17							
2024_4	34 095,87	10 123,92	256,46	103,95								
2025_1	32 639,39	8 478,93	432,50									
2025_2	32 098,54	10 580,10										
2025_3	26 497,34											

Таблиця 5

Далі для кожного елементу верхнього трикутника обчислені підігнані кумулятивні значення. Це здійснювалось використовуючи фактори розвитку, отримані у класичному методі ланцюгових сходів, зворотним розрахунком від останньої відомої діагоналі.

Для ілюстрації наведемо приклад розрахунку трьох підігнаних кумулятивних значень:

$$Y_{11,0} = \frac{42\,678{,}64}{1{,}333 \times 1{,}027 \times 1{,}019 \times 1{,}003 \times 1{,}005 \times 1{,}003 \times 1 \times 1{,}004 \times 1 \times 1 \times 1} = 30\,145{,}59$$

$$Y_{10,1} = \frac{41\,550{,}82}{1{,}027 \times 1{,}019 \times 1{,}003 \times 1{,}005 \times 1{,}003 \times 1 \times 1{,}004 \times 1 \times 1 \times 1} = 39\,125{,}13$$

$$Y_{10,0} = \frac{39\,125{,}13}{1{,}333 \times 1{,}027 \times 1{,}019 \times 1{,}003 \times 1{,}005 \times 1{,}003 \times 1 \times 1{,}004 \times 1 \times 1 \times 1} = 27\,635{,}61$$

Такий підхід гарантує відповідність фактичним значенням на останній діагоналі та дозволяє отримати узгоджені підігнані значення для всіх попередніх періодів. Отриманий підігнаний трикутник кумулятивних значень наведено в Таблиці 6.

Період настання	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	16 901,28	23 927,99	25 411,49	26 281,67	26 670,65	26 997,76	27 183,75	27 288,97	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40
2023_1	17 278,01	24 461,34	25 977,91	26 867,48	27 265,14	27 599,54	27 789,67	27 897,23	28 002,97	28 002,97	28 002,97	
2023_2	22 711,25	32 153,46	34 146,92	35 316,23	35 838,93	36 278,49	36 528,42	36 669,80	36 808,79	36 808,79		
2023_3	20 653,98	29 240,87	31 053,76	32 117,15	32 592,50	32 992,24	33 219,53	33 348,10	33 474,50			
2023_4	23 305,27	32 994,44	35 040,04	36 239,93	36 776,31	37 227,36	37 483,82	37 628,90				
2024_1	18 023,73	25 517,11	27 099,13	28 027,09	28 441,91	28 790,74	28 989,09					
2024_2	22 677,65	32 105,89	34 096,40	35 263,98	35 785,91	36 224,81						
2024_3	26 673,35	37 762,80	40 104,04	41 477,33	42 091,23							
2024_4	28 668,75	40 587,79	43 104,17	44 580,20								
2025_1	27 635,61	39 125,13	41 550,82									
2025_2	30 145,59	42 678,64										
2025_3	26 497,34											
f	***1,333***	***1,027***	***1,019***	***1,003***	***1,005***	***1,003***	***1,000***	***1,004***	***1,000***	***1,000***	***1,000***	***1,000***

Таблиця 6

Використовуючи отримані підігнані кумулятивні значення, визначено очікувані інкрементні виплати знову використовуючи формулу (1). Цей трикутник також наведено в Таблиці 7.

Період настання	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	16 901,28	7 026,71	1 483,50	870,18	388,99	327,11	185,99	105,22	103,43	-	-	-
2023_1	17 278,01	7 183,34	1 516,56	889,57	397,66	334,40	190,14	107,56	105,74	-	-	
2023_2	22 711,25	9 442,21	1 993,46	1 169,31	522,70	439,56	249,93	141,38	138,99	-		
2023_3	20 653,98	8 586,90	1 812,89	1 063,39	475,35	399,74	227,29	128,58	126,40			
2023_4	23 305,27	9 689,17	2 045,60	1 199,89	536,37	451,05	256,46	145,08				
2024_1	18 023,73	7 493,37	1 582,02	927,97	414,82	348,83	198,34					
2024_2	22 677,65	9 428,24	1 990,51	1 167,58	521,93	438,90						
2024_3	26 673,35	11 089,45	2 341,23	1 373,30	613,89							
2024_4	28 668,75	11 919,04	2 516,38	1 476,03								
2025_1	27 635,61	11 489,52	2 425,70									
2025_2	30 145,59	12 533,04										
2025_3	26 497,34											

Таблиця 7

На основі спостережуваних та очікуваних інкрементних виплат для всіх елементів верхнього трикутника (окрім першого стовпчика та першого рядка) обчислено залишки Пірсона за формулою (5). Перший стовпчик виключається, оскільки він містить початкові виплати, для яких неможливо коректно визначити очікувані значення за моделлю розвитку (відсутній попередній період). Перший рядок також виключається, оскільки всі коефіцієнти розвитку оцінюються саме на його основі.

Залишки подано в Таблиці 8. Ці значення формують базову вибірку для бутстреп-процедури.

Період	Період розвитку											
настання	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4												
2023_1		- 7,22	- 21,38	- 29,83	- 16,71	- 17,23	- 13,79	- 9,11	- 10,28	-	-	
2023_2		- 35,37	- 37,42	76,13	- 24,36	- 2,55	- 15,81	- 11,89	0,89	-		
2023_3		1,43	- 29,28	- 29,30	- 21,80	- 19,99	4,65	- 11,34	17,67			
2023_4		28,63	- 13,74	- 14,50	- 23,16	- 15,72	1,33	- 12,05				
2024_1		- 26,97	- 20,93	- 27,41	- 20,37	- 16,56	- 14,08					
2024_2		- 3,20	- 39,44	- 18,60	- 21,03	9,86						
2024_3		13,17	- 9,84	- 26,10	- 1,89							
2024_4		- 16,44	- 45,05	- 35,71								
2025_1		- 28,09	- 40,47									
2025_2		- 17,44										
2025_3												

Таблиця 8

Параметр масштабу ϕ обчислено відповідно до формули (6), наведеної у попередньому розділі.

$\hat{\phi}$	1 017,71

Таблиця 9

Отримане значення використане у подальших розрахунках.

Для переходу до моделювання випадкових реалізацій сформовано вибірку зі всіх отриманих залишків Пірсона. Саме з цієї вибірки проводилась вибірка з поверненням під час виконання кожної ітерації.

Нижче наведено процес покрокового виконання однієї бутстреп-ітерації.

На першому кроці згенеровано випадкову вибірку з поверненням із сформованої вибірки залишків, після чого отримані значення були розміщені у структурі трикутника. Отриманий випадковий трикутник залишків наведено в Таблиці 10.

Період настання	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4												
2023_1		- 11,89	- 29,30	- 18,60	- 16,71	- 17,23	- 40,47	- 11,89	- 16,44	- 16,44	- 10,28	
2023_2		- 17,23	- 40,47	- 16,56	- 10,28	- 20,37	- 9,84	- 28,09	1,33	- 1,89		
2023_3		- 29,30	1,43	- 16,56	- 12,05	- 14,08	76,13	- 2,55	- 21,80			
2023_4		- 7,22	- 15,81	- 17,44	- 13,79	- 23,16	0,89	- 17,44				
2024_1		- 3,20	- 2,55	- 20,93	- 23,16	- 9,84	- 9,11					
2024_2		- 3,20	1,33	- 13,74	- 37,42	- 9,11						
2024_3		28,63	- 1,89	- 20,93	- 3,20							
2024_4		- 17,23	- 9,11	- 39,44								
2025_1		- 13,79	- 3,20									
2025_2		- 24,36										
2025_3												

Таблиця 10

На наступному кроці, використовуючи матеріал попереднього розділу та формулу (7), побудовано псевдотрикутник інкрементних виплат. Його наведено в Таблиці 11.

Період настання	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	5 588,81	2 561,72	156,70	31,77	-	-	-	-	-	-	-
2023_1	20 650,35	6 175,56	375,68	334,95	64,50	19,40	- 367,90	- 15,76	- 63,34	-	-	
2023_2	26 206,56	7 768,37	186,56	603,01	287,61	12,55	94,42	- 192,58	154,62	-		
2023_3	23 458,62	5 872,16	1 873,77	523,35	212,74	118,16	1 375,00	99,71	- 118,72			
2023_4	22 604,63	8 978,67	1 330,58	595,62	217,02	- 40,81	270,69	- 65,04				
2024_1	22 948,30	7 216,77	1 480,76	290,27	- 56,88	165,12	69,98					
2024_2	25 657,02	9 117,98	2 049,68	698,12	- 332,97	247,95						
2024_3	26 775,94	14 104,65	2 250,00	597,53	534,72							
2024_4	34 095,87	10 038,44	2 059,15	- 39,36								
2025_1	32 639,39	10 011,48	2 268,32									
2025_2	32 098,54	9 805,81										
2025_3	26 497,34											

Таблиця 11

Шляхом кумулятивного підсумовування для кожного рядка отримано відповідний трикутник кумулятивних виплат.

Період настання	Період розвитку											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	24 642,20	27 203,92	27 360,62	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40
2023_1	20 650,35	26 825,91	27 201,60	27 536,55	27 601,05	27 620,45	27 252,55	27 236,79	27 173,45	27 173,45	27 173,45	
2023_2	26 206,56	33 974,93	34 161,48	34 764,49	35 052,10	35 064,65	35 159,08	34 966,50	35 121,12	35 121,12		
2023_3	23 458,62	29 330,77	31 204,55	31 727,90	31 940,64	32 058,80	33 433,80	33 533,51	33 414,78			
2023_4	22 604,63	31 583,31	32 913,89	33 509,51	33 726,53	33 685,72	33 956,41	33 891,37				
2024_1	22 948,30	30 165,08	31 645,83	31 936,10	31 879,22	32 044,34	32 114,32					
2024_2	25 657,02	34 775,00	36 824,68	37 522,81	37 189,83	37 437,78						
2024_3	26 775,94	40 880,59	43 130,59	43 728,12	44 262,84							
2024_4	34 095,87	44 134,30	46 193,46	46 154,09								
2025_1	32 639,39	42 650,87	44 919,19									
2025_2	32 098,54	41 904,35										
2025_3	26 497,34											

Таблиця 12

До отриманого псевдотрикутника кумулятивних значень застосовується класична процедура метода ланцюгових сходів. Тобто, обчислено нові фактори розвитку та отримано прогнозні кумулятивні значення. Розрахунки наведено в Таблиці 13.

Період	Період розвитку											
настання	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	24 642,20	27 203,92	27 360,62	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40	27 392,40
2023_1	20 650,35	26 825,91	27 201,60	27 536,55	27 601,05	27 620,45	27 252,55	27 236,79	27 173,45	27 173,45	27 173,45	27 173,45
2023_2	26 206,56	33 974,93	34 161,48	34 764,49	35 052,10	35 064,65	35 159,08	34 966,50	35 121,12	35 121,12	35 121,12	35 121,12
2023_3	23 458,62	29 330,77	31 204,55	31 727,90	31 940,64	32 058,80	33 433,80	33 533,51	33 414,78	33 414,78	33 414,78	33 414,78
2023_4	22 604,63	31 583,31	32 913,89	33 509,51	33 726,53	33 685,72	33 956,41	33 891,37	33 883,82	33 883,82	33 883,82	33 883,82
2024_1	22 948,30	30 165,08	31 645,83	31 936,10	31 879,22	32 044,34	32 114,32	32 078,84	32 071,69	32 071,69	32 071,69	32 071,69
2024_2	25 657,02	34 775,00	36 824,68	37 522,81	37 189,83	37 437,78	37 725,18	37 683,50	37 675,11	37 675,11	37 675,11	37 675,11
2024_3	26 775,94	40 880,59	43 130,59	43 728,12	44 262,84	44 365,70	44 706,28	44 656,89	44 646,94	44 646,94	44 646,94	44 646,94
2024_4	34 095,87	44 134,30	46 193,46	46 154,09	46 319,12	46 426,76	46 783,16	46 731,47	46 721,06	46 721,06	46 721,06	46 721,06
2025_1	32 639,39	42 650,87	44 919,19	45 463,20	45 625,75	45 731,78	46 082,85	46 031,94	46 021,68	46 021,68	46 021,68	46 021,68
2025_2	32 098,54	41 904,35	43 936,28	44 468,39	44 627,38	44 731,09	45 074,47	45 024,68	45 014,64	45 014,64	45 014,64	45 014,64
2025_3	26 497,34	35 263,36	36 973,27	37 421,05	37 554,85	37 642,12	37 931,09	37 889,18	37 880,74	37 880,74	37 880,74	37 880,74
Sum	***286 188,60***	***338 962,96***	***310 480,00***	***268 086,10***	***224 781,78***	***187 866,36***	***157 194,23***	***123 129,19***	***89 686,97***	***54 565,85***	***27 392,40***	**-**
Sum-1	***380 867,31***	***355 399,20***	***314 240,20***	***269 044,62***	***225 304,15***	***189 308,55***	***157 020,56***	***123 101,75***	***89 686,97***	***54 565,85***	***27 392,40***	**-**
f	***1,33***	***1,05***	***1,01***	***1,00***	***1,00***	***1,01***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***	***1,00***

Таблиця 13

На основі прогнозних кумулятивних значень, використовуючи формулу (1), було також отримано прогнозні інкрементні виплати за кожен рік розвитку.

Період	Період розвитку											
настання	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2022_4	19 053,39	5 588,81	2 561,72	156,70	31,77	-	-	-	-	-	-	-
2023_1	20 650,35	6 175,56	375,68	334,95	64,50	19,40	-367,90	-15,76	-63,34	-	-	-
2023_2	26 206,56	7 768,37	186,56	603,01	287,61	12,55	94,42	-192,58	154,62	-	-	-
2023_3	23 458,62	5 872,16	1 873,77	523,35	212,74	118,16	1 375,00	99,71	-118,72	-	-	-
2023_4	22 604,63	8 978,67	1 330,58	595,62	217,02	-40,81	270,69	-65,04	-7,55	-	-	-
2024_1	22 948,30	7 216,77	1 480,76	290,27	-56,88	165,12	69,98	-35,48	-7,15	-	-	-
2024_2	25 657,02	9 117,98	2 049,68	698,12	-332,97	247,95	287,40	-41,68	-8,40	-	-	-
2024_3	26 775,94	14 104,65	2 250,00	597,53	534,72	102,86	340,58	-49,39	-9,95	-	-	-
2024_4	34 095,87	10 038,44	2 059,15	-39,36	165,02	107,64	356,40	-51,69	-10,41	-	-	-
2025_1	32 639,39	10 011,48	2 268,32	544,01	162,55	106,03	351,07	-50,91	-10,26	-	-	-
2025_2	32 098,54	9 805,81	2 031,93	532,11	158,99	103,71	343,39	-49,80	-10,03	-	-	-
2025_3	26 497,34	8 766,02	1 709,91	447,78	133,80	87,27	288,97	-41,91	-8,44	-	-	-

Таблиця 14

Підсумувавши їх за відповідними роками настання збитків, для даної ітерації отримано оцінку резерву незаявлених збитків (IBNR), яка становить:

$$R_{B1} = 16\,734{,}37\ .$$

Згідно з описаним алгоритмом було виконано 1000 бутстреп-ітерацій, у результаті чого сформовано емпіричний розподіл прогнозованих резервів.

Після цього були розраховані основні статистичні характеристики цього розподілу. Зокрема, обчислено:

- R_B - середнє значення прогнозованих резервів отриманих Бутстреп-методом;
- $SE(R)$ - стандартна похибка оцінки резерву;
- $Var(X_{ij})_B$ - емпірична дисперсія інкрементних виплат;
- $Var(\widehat{X}_{ij})_B$ - дисперсія очікуваних інкрементних виплат;
- PE_B - загальна бутстреп-оцінка похибки прогнозу резервів;
- Персентилі (75%, 95%, 99%) - значення прогнозованого резерву, що відповідають заданим рівням довіри.

Отримані значення зведені у відповідну таблицю (Таблиця 15).

$\hat{\phi}$	1 017,71
R_B	16 365,60
$SE(R)$	2 344,81
$Var(X_{ij})_B$	16 655 511,12
$Var(\hat{X}_{ij})_B$	8 915 903,24
PE_B	5 056,82
75%	17 721,00
95%	20 172,63
99%	20 427,36

Таблиця 15

Крім того, побудовано 95 –відсотковий довірчий інтервал для резерву, який рівний (6 454,23; 26 276,96), що дає змогу оцінити можливу варіацію величини резерву та рівень невизначеності прогнозу.

Для візуалізації прогнозованих резервів побудовано гістограму, що також подана нижче (Рисунок 1).

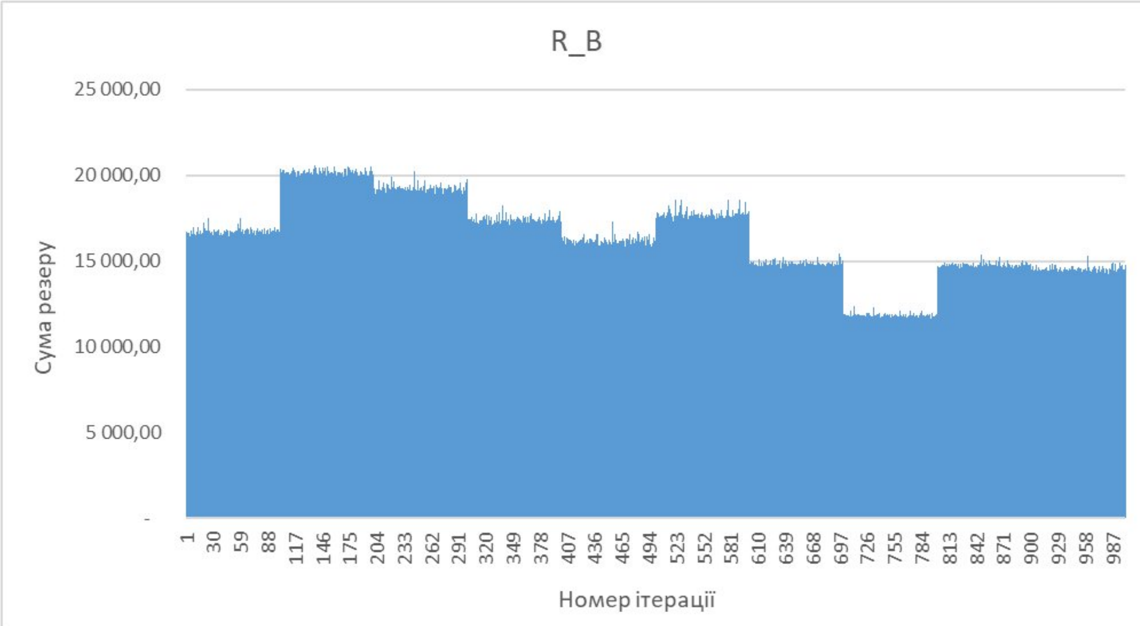

Рисунок 1

За потреби в Excel можна реалізувати також макрос, який автоматично генеруватиме повний бутстреп-цикл, що значно пришвидшує обчислення при великій кількості ітерацій.

3.3. Аналіз отриманих результатів

Після виконання 1000 бутстреп-ітерацій було отримано емпіричний розподіл оцінок загального резерву збитків. На основі цього розподілу обчислено основні статистичні характеристики, які наведено в Таблиці 15. Середнє значення прогнозованого резерву за Бутстреп-методом становить $R_B = 16\,365{,}60$, що близьке до оцінки, отриманої методом ланцюгових сходів (16 765,56). Це підтверджує узгодженість оцінки отриманої Бутстреп-методом з класичним підходом методу ланцюгових сходів.

Стандартна похибка оцінки резерву становить $SE(R) = 2\,344{,}81$, що вказує на помітну варіативність прогнозів між окремими ітераціями.

Загальна бутстреп-оцінка похибки прогнозу становить $PE_B = 5\,056{,}82$, що демонструє сумарний рівень невизначеності, закладений у оцінку резервів через випадковість збитків та варіативність факторів розвитку.

Для аналізу розподілу прогнозованого резерву були також розраховані персентилі:

- 75% – 17 721,00;

- 95% – 20 172,63;
- 99% – 20 427,36.

Ці значення демонструють асиметричність розподілу, характерну для страхових збитків, та дозволяють отримати оцінки резерву на заданих рівнях надійності. Додатково було побудовано 95 –відсотковий довірчий інтервал для прогнозованого резерву, який становить:

(6 454,23; 26 276,96).

Ширина інтервалу свідчить про значну невизначеність у прогнозах, що є очікуваним, зважаючи на обмежений обсяг даних та стохастичну природу збитків.

Порівнюючи отримані результати з точковою оцінкою методу ланцюгових сходів, можна зробити висновок, що класичний метод дає значення, яке потрапляє у центральну частину бутстреп-розподілу. Однак метод ланцюгових сходів не враховує варіативність даних та ризик екстремальних значень, тоді як Бутстреп-метод дозволяє оцінити повний розподіл резервів. Саме тому оцінки, отримані Бутстреп-методом, є більш інформативними з точки зору ризик-орієнтованого підходу та управління капіталом.

Додатково, аналіз графічного відображення розподілу отриманого Бутстреп-методом (Рисунок 1) показує наявність окремих локальних стрибків та нерівномірностей між сусідніми значеннями. Такі коливання є природними та відображають високу варіативність інкрементних виплат, притаманну реальним страховим даним. Подібні скачки можуть бути пов’язані з низкою чинників, таких як сезонність збитків, наявність окремих великих виплат, які суттєво впливають на структуру залишків, відмінності у характері розвитку збитків між періодами або ж обмеженість обсягу даних, що підсилює випадкові коливання.

Важливо зазначити, що Бутстреп-метод не згладжує штучно ці особливості, а навпаки - відтворює їх у тій пропорції, у якій вони присутні у вихідних даних. Це одна з ключових переваг методу: він дозволяє зберегти реальну структурну невизначеність, притаманну портфелю збитків, і тим самим моделює можливі сценарії розвитку резервів значно точніше, ніж детерміністичний метод ланцюгових сходів.

Таким чином, наявність коливань на графіку підтверджує, що Бутстреп-метод коректно відтворює усю статистичну мінливість, яка могла б проявитися у майбутніх виплатах, і дозволяє актуарію оцінити не лише базовий рівень резерву, але й повний спектр можливих результатів, включно з екстремальними сценаріями.

3.4. Аналіз впливу кількості бутстреп-ітерацій на стабільність оцінки резерву

Однією з ключових характеристик Бутстреп-методу є залежність точності результатів від кількості виконаних ітерацій. Оскільки метод базується на випадковому відборі залишків Пірсона, невелика кількість симуляцій може призводити до суттєвої варіативності оцінки резерву. Тому доцільно проаналізувати, як змінюються статистичні характеристики прогнозованих резервів при різних обсягах бутстреп-вибірки.

На першому етапі було виконано 100 бутстреп-ітерацій. Отримані результати наведено в Таблиці 16:

R_B	16 746,35
$SE(R)$	179,30
$Var(X_{ij})_B$	17 043 006,13
$Var(\hat{X}_{ij})_B$	52 134,89
PE_B	4 134,63
75%	16 810,98
95%	16 980,82
99%	17 517,86

Таблиця 16

Отримані значення є відносно близькими до результатів, отриманих з 1000 ітерацій, що свідчить про певну початкову стабільність оцінки.

Проте подальше моделювання, проведене на наступних 100 ітераціях (ітерації 101 – 200), продемонструвало значно більшу варіативність результатів. Зокрема, було отримано такі значення (Таблиця 17):

R_B	20 194,22
$SE(R)$	161,26
$Var(X_{ij})_B$	20 551 959,26
$Var(\hat{X}_{ij})_B$	42 171,48
PE_B	4 538,08
75%	20 288,39
95%	20 473,27
99%	20 542,19

Таблиця 17

Помітно, що для другого набору зі 100 ітерацій середня оцінка резерву змінилася майже на 3 500, а відповідні персентилі - на понад 3 000, що є суттєвим зсувом.

Такі значні коливання між вибірками однакового розміру свідчать про те, що 100 ітерацій є недостатньо, оскільки результати в цьому випадку значною мірою залежать від випадкового набору залишків, який потрапляє у симуляцію. Це підкреслює важливість виконання великої кількості ітерацій (не менше 1000), що дозволяє згладити випадкові флуктуації, стабілізувати оцінку резерву та отримати надійний бутстреп-розподіл.

Таким чином, проведений аналіз показує, що збільшення кількості бутстреп-ітерацій значно підвищує стійкість, точність і репрезентативність отриманих результатів, що має критично важливе значення для актуарної практики та прийняття рішень щодо достатності страхових резервів.

Висновки

У ході дослідження було підтверджено, що формування резервів збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR), є критичним елементом забезпечення фінансової стабільності страхової компанії. Коректність їх оцінювання визначає рівень платоспроможності та прозорості діяльності страховика, а також відповідає сучасним тенденціям переходу до ризик-орієнтованого нагляду, зокрема принципам Solvency II.

Проаналізовані у першому розділі класичні методи оцінювання резервів - метод ланцюгових сходів, модель Мака та метод Борнхюттера-Фергюсона - підтвердили свою практичну значущість, але одночасно виявили низку обмежень. Зокрема, їх чутливість до аномалій у даних і детермінований характер не дають змоги повною мірою врахувати стохастичну природу збитків та пов'язану з ними невизначеність.

Дослідження Бутстреп-методу показало, що цей підхід є ефективним інструментом стохастичного моделювання, який дозволяє не лише обчислити точкову, оцінку резерву, а й отримати емпіричну інформацію про розподіл резерву і його характеристики. Це дає можливість актуарію оцінювати варіативність результату, визначати рівень ризику та будувати довірчі інтервали, що є важливим у контексті підвищених вимог до якості оцінок за міжнародними стандартами.

Практична реалізація алгоритму в Excel продемонструвала застосовність бутстреп-процедури на реальних даних та дала змогу провести порівняльний аналіз із класичним методом ланцюгових сходів. Отримані результати показали, що стохастичний підхід забезпечує ширшу інформаційну базу для прийняття управлінських рішень і дозволяє краще врахувати невизначеність майбутніх збитків.

Таким чином, дослідження підтверджує, що використання бутстреп-методу є доцільним і актуальним у сучасній актуарній практиці. Він підвищує надійність оцінювання резервів, підтримує впровадження ризик-орієнтованих підходів та відповідає вимогам розвитку українського страхового ринку в напрямку інтеграції з європейськими стандартами.

Список використаної літератури

[1] Про страхування: Закон України поточна редакція від 01.01.2025.

ULR: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1909-20#Text

[2] Положення про порядок формування страховиками технічних резервів: Постанова Правління Національного банку України № 203 від 29.12.2023.

ULR: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/v0203500-23#Text

[3] Страхування. Навчальний посібник. - Київ: Ліра-К, 2007. – 376.

[4] Компанієць М. В., Кисільова І. Ю. Особливості формування та оцінки страхових резервів. Економічний дискурс. 2021. № 3.

URL: https://doi.org/10.32840/2522-4263/2021-3-21

[5] Dina A. E. Chain Claims Reserving Methods in Non-Life Insurance. The International Conference on Applied Statistics - 2019.

[6] Шундер В. О., Василик О. І. Оцінювання страхових резервів за даними з викидами. Магістерська робота. КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. 43 с.

[7] В.П. Зубченко, Р.Є. Ямненко. Статистичні методи у ризиковому страхуванні. Навчальний посібник. - КНУ імені Тараса Шевченка. - 2023.

[8] Understanding Mack’s Stochastic Model for Claim Reserving.

URL:https://www.cliffsnotes.com/study-notes/24926106

[9] Li J. Comparison of Stochastic Reserving Methods. Centre for Actuarial Studies, University of Melbourne.

[10] Efron B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. Annals of Statistics, 1979.

[11] The History of Bootstrapping: Tracing the Development of Resampling with Replacement.

URL:https://scispace.com/papers/the-history-of-bootstrapping-tracing-the-development-of-2ooonz99na

[12] Pinheiro P. J. R., Silva J. M. A., Centeno M. L. Bootstrap Methodology in Claim Reserving. 2000.

[13] McCullagh P., Nelder J. A. Generalized Linear Models. 2nd ed. Chapman & Hall, 1989.

[14] Efron B., Tibshirani R. An Introduction to the Bootstrap. Chapman & Hall, 1993.

[15] England P., Verrall R. Stochastic Claims Reserving in General Insurance. British Actuarial Journal, 1999.

[16] Davison A. C., Hinkley D. V. Bootstrap Methods and Their Application. Cambridge University Press, 1997.

[17] Chase T. R. Analysis of Bootstrap Techniques for Loss Reserving. Master's thesis, 2005.

[18] Pinheiro P., Silva J., Centeno M. Bootstrap methodology in claim reserving // ASTIN Bulletin. – 2003. – Vol. 33, No. 2. – P. 211–243.

[19] Renshaw A., Verrall R. A Stochastic Model Underlying the Chain-Ladder Technique. British Actuarial Journal, 1994.

[20] England P. Addendum to Stochastic Claims Reserving. 2002.

[21] Mack T. Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. ASTIN Bulletin, 1993.

[22] Quarg G., Mack T. Munich Chain Ladder. 2004.

[23] Ільченко А., Василик О. Застосування Бутстреп-методу для оцінювання страхових резервів. Матеріали Двадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 17–20 листопада 2025 року, Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, с.153-154.