НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
____________ Олег КЛЕСОВ
«_____» грудень 2025 р.

«На правах рукопису»
УДК ____________

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика» зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Розв'язки лінійного операторного рівняння у просторі ℓ_p»

Виконала:
студентка II курсу, групи ОМ–41мп
Охремчук Анастасія Олександрівна ____________

Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук
Сиротенко Антон Володимирович ____________

Рецензент:
Кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математичної фізики
КНУ ім. Тараса Шевченка
Гап'як Ігор Васильович ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка ____________

Київ – 2025 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_________ Олег КЛЕСОВ
«____» грудень 2025 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентці
Охремчук Анастасії Олександрівні

1. Тема дисертації «Розв'язки лінійного операторного рівняння у просторі ℓ_p», науковий керівник дисертації Сиротенко Антон Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «06» листопада 2025 р. №4843-с

2. Терміни подання студентом дисертації 18 грудня 2025 року

3. Об'єктом дослідження є лінійні операторні рівняння в банаховому просторі.

4. Предметом дослідження є формули та методи отримання розв'язків лінійного операторного рівняння у банаховому просторі ℓ_p для різних класів лінійних операторів.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

   1. Охарактеризувати простір ℓ_p як типовий приклад нескінченновимірного банахового простору.
   2. Навести класичні результати щодо існування та єдиності розв'язків рівняння $AX - XB = Y$ у просторі ℓ_p.
   3. Дослідити умови розв'язності операторного рівняння для конкретних спектральних властивостей операторів A і B.
   4. Розглянути часткові випадки та отримати явні формули для розв'язків.
   5. Навести приклади обчислень для конкретних операторів у просторі ℓ_p.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: N слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

   - Тези доповіді XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків, Київ, 7 травня 2025 р.

8. Дата видачі завдання 03 вересня 2025 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Терміни виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з темою дослідження, консультації з науковим керівником	03.09.2025 – 10.09.2025	Виконано
2	Пошук, добір та опрацювання літературних джерел з теорії банахових просторів та операторних рівнянь	10.09.2025 – 25.09.2025	Виконано
3	Формування теоретичної бази: властивості простору ℓ_p, класи лінійних операторів, постановка задачі	25.09.2025 – 10.10.2025	Виконано
4	Дослідження умов існування та єдиності розв'язку лінійного операторного рівняння в просторі ℓ_p	10.10.2025 – 01.11.2025	Виконано
5	Перевірка теоретичних результатів на прикладах	01.11.2025 – 20.11.2025	Виконано
6	Оформлення основних розділів магістерської дисертації	20.11.2025 – 05.12.2025	Виконано
7	Внесення виправлень після консультацій з науковим керівником	05.12.2025 – 12.12.2025	Виконано
8	Підготовка презентації та доповіді для захисту; фінальне оформлення роботи	12.12.2025 – 16.12.2025	Виконано

Студент	Анастасія ОХРЕМЧУК
Науковий керівник	Антон СИРОТЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація: 71 сторінок, 16 першоджерела, 13 слайдів презентації. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У дисертаційній роботі досліджується лінійне операторне рівняння у банаховому просторі, розглянуте на прикладі конкретно заданого нескінченновимірного простору. Основна увага приділяється проблемі існування та єдиності розв'язку, а також підходам до отримання його явного вигляду залежно від структури операторів, що входять до рівняння. Предметом дослідження є методи та формули побудови єдиного розв'язку операторного рівняння в різних типових випадках.

Перший розділ містить теоретичні відомості з функціонального аналізу, необхідні для подальшого викладу: властивості простору ℓ_p, основні поняття спектральної теорії обмежених операторів, умови існування та єдиності розв'язку лінійного операторного рівняння, а також підхід до отримання явного вигляду такого розв'язку на основі інтегрального представлення. Розділ починається з переліку умовних позначень, що використовуються у дисертації.

Другий розділ присвячено отриманню основних результатів. Розглянуто окремі класи операторів у просторі ℓ_p, зокрема діагональні оператори та оператори зсуву. Для кожного з цих випадків встановлено умови існування розв'язку, наведено доведення відповідних тверджень і подано явні формули для побудови розв'язків. Окрему увагу приділено більш складному випадку вхідних операторів.

Дисертація завершується висновками, у яких узагальнено отримані результати, та списком використаних джерел.

Ключові слова: банаховий простір, простір ℓ_p, обмежений оператор, спектр оператора, операторне рівняння, існування та єдиність розв'язку.

Abstract

Master's thesis: 71 pages, 16 sources, 13 presentation slides. The thesis consists of an introduction, two chapters, conclusions, and a list of references.

The thesis investigates a linear operator equation in a Banach space, considered on a specifically defined infinite-dimensional setting. The main focus is on the existence and uniqueness of the solution, as well as on approaches for obtaining its explicit form depending on the structure of the operators involved. The subject of the study includes methods and formulas for constructing the unique solution of the operator equation in several typical cases.

The first chapter presents the theoretical background from functional analysis required for the subsequent results: properties of the space ℓ_p, fundamental concepts of the spectral theory of bounded operators, the conditions ensuring existence and uniqueness of the solution to a linear operator equation, and an integral representation used to derive its explicit form. The chapter begins with a list of notations employed throughout the thesis.

The second chapter contains the main results. Several classes of operators in ℓ_p are examined, including diagonal operators and shift operators. For each case, conditions for the existence of a solution are established, proofs of the corresponding statements are provided, and explicit formulas for constructing the solutions are given. Special attention is paid to a more complex case of input operators.

The thesis concludes with a summary of the obtained results and a list of references.

Keywords: Banach space, ℓ_p space, bounded operator, operator spectrum, operator equation, existence and uniqueness of the solution.

Зміст

Вступ

Одним з найбільших розділів сучасної математики є диференціальні рівняння. Запропоновані ще І. Ньютоном, диференціальні рівняння знайшли розвиток у роботах величезної кількості відомих математиків, одними з яких стали А. Пуанкаре [11], О. Перрон та О. Ляпунов, які серед перших підняли питання існування та єдиності обмеженого розв'язку диференціальних рівнянь. Пізніше дослідженнями цього питання якісної теорії диференціальних рівнянь займалися М. Г. Крейн, Ю. Л. Далецький, А. М. Самойленко, А. Я. Дороговцев та багато інших. Надзвичайно важливий результат отримав М. Г. Крейн, який встановив, що рівняння $AX + XB = Y$ та подібні до нього часто виникають при розв'язанні складних диференціальних рівнянь. Фундаментальне дослідження цього питання разом з Ю. Л. Далецьким завершилося виходом монографії [12]. Можемо зробити висновок, що знаходження розв'язків подібних рівнянь може бути корисним не лише окремо, а й у застосуванні до складних диференціальних рівнянь. Це можна вважати обґрунтуванням актуальності обраної теми наших досліджень.

Водночас варто зазначити, що навіть у найпростіших випадках скінченновимірних просторів (крім одновимірного, де все тривіально) питання знаходження явної формули розв'язку рівняння $AX + XB = Y$ потребує дослідження з використанням математичних методів з різних розділів. Для дво- та тривимірного випадку відповідні результати були продемонстровані в роботах [7], [8].

У цій магістерській дисертації обрано нескінченновимірний випадок, а саме — простори сумовних зі степенем p послідовностей. Залежно від вигляду операторів, що входять у рівняння, а також від структури множин їхніх власних чисел, можна отримати явний вигляд операторів-розв'язків і сформулювати результати у вигляді загальних теорем — саме такою є мета цієї роботи.

Перший розділ містить теоретичні відомості, що використовуються в дисертації, зокрема теорему, отриману М. Г. Крейном та Ю. Л. Далецьким, щодо умов єдиності обмеженого розв'язку, а також інтегральну формулу знаходження явного вигляду такого розв'язку.

Другий розділ складається з трьох частин. Перші дві досліджують діагональні оператори A та B, тоді як оператор Y розглядається як оператор зсуву. Обидві частини завершуються формулюванням загальних теорем про існування та явний вигляд розв'язку операторного рівняння.

Остання частина другого розділу досліджує більш складний випадок вхідних операторів і містить результат для часткового випадку таких операторів.

Дисертаційна робота завершується висновками і списком використаної літератури. Частина результатів, описаних у дисертаційній роботі, була опублікована в Збірнику тез Всеукраїнської конференції молодих математиків [16].

Розділ 1

Теоретичні відомості

1.1 Список умовних позначень

$\ell_p,\ 1 \le p < \infty$	простір послідовностей $x = (x_k)_{k \ge 1}$ з нормою $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$.
ℓ_∞	простір обмежених послідовностей з нормою $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k \ge 1} |x_k|$.
$\mathcal{B}(X)$	множина обмежених лінійних операторів на банаховому просторі X.
$\sigma(T)$	спектр оператора T.
$\rho(T)$	область регулярності оператора T, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.
$R(\lambda, T)$	резольвента, $R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$.
I	тотожний оператор.
$AX - XB = Y$	основне операторне рівняння, яке досліджується у роботі.
Γ_A, Γ_B	замкнені контури інтегрування на комплексній площині, що охоплюють спектри операторів A та B відповідно.

1.2 Вступ до функціонального аналізу

Функціональний аналіз

Функціональний аналіз — це розділ сучасної математики, який вивчає нескінченновимірні простори та відображення між ними. Його виникнення пов'язане з розвитком диференціальних рівнянь та математичної фізики, адже саме у таких задачах природно з'являються функції як елементи певних просторів, а також оператори, які на них діють.

На відміну від класичної лінійної алгебри, де розглядаються скінченновимірні простори та матриці, у функціональному аналізі головну роль відіграють нескінченновимірні простори, де вектори можуть бути нескінченними послідовностями або функціями. Саме тому тут доводиться працювати з новими поняттями, які узагальнюють звичні методи алгебри та геометрії.

Нормовані простори

Основним об'єктом дослідження функціонального аналізу є *нормований простір*. Це векторний простір X над полем дійсних або комплексних чисел, у якому для кожного елемента $x \in X$ визначено його "довжину", або *норму*, що позначається як $\|x\|$.

Норма повинна задовольняти такі умови:

$$\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ або } \mathbb{C},$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{(нерівність трикутника)}.$$

Завдяки цим властивостям ми можемо ввести поняття відстані між елементами простору, що дозволяє досліджувати збіжність послідовностей та неперервність відображень.

Банахові простори

Особливе значення мають простори, де будь-яка фундаментальна послідовність збігається до елемента простору. Такі простори називаються *банаховими*. Інакше кажучи, банахів простір — це повний нормований простір.

Приклади банахових просторів:

- простір неперервних функцій на відрізку з нормою максимуму;
- простори послідовностей ℓ_p, які будуть розглянуті далі.

Лінійні оператори

Нехай X і Y — два нормовані простори. Відображення $A : X \to Y$ називається *лінійним оператором*, якщо для всіх $x_1, x_2 \in X$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ виконується:

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2), \quad A(\alpha x) = \alpha A(x).$$

Лінійні оператори є узагальненням матриць, але на відміну від скінченновимірних випадків, вони можуть діяти на нескінченні послідовності або функції.

Норма оператора

Для оцінки “розміру” оператора вводять його норму:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Ця величина показує, наскільки оператор може збільшити довжину вектора. Якщо норма оператора скінченна, то оператор називається *обмеженим*. У функціональному аналізі основну увагу приділяють саме обмеженим операторам.

Перехід до просторів ℓ_p

Серед багатьох прикладів банахових просторів особливу роль відіграють простори ℓ_p. Вони є природним узагальненням звичайних евклідових просторів $\mathbb{R}^n$, але містять нескінченні послідовності, для яких можна визначити норму. Завдяки своїм властивостям простори ℓ_p широко застосовуються в аналізі, теорії операторів та чисельних методах. Саме з ними ми будемо працювати надалі.

1.3 Простір ℓ_p та його основні властивості

Одним із найважливіших прикладів нормованих просторів у функціональному аналізі є простір послідовностей ℓ_p. Його властивості детально вивчаються у класичних підручниках, зокрема у [6]. Ці простори можна розглядати як узагальнення звичних евклідових просторів $\mathbb{R}^n$, але вже для нескінченних послідовностей, що робить їх центральними об'єктами в аналізі та теорії операторів.

Означення 1.1. *Нехай X — векторний простір над $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.* Норма *на X — це відображення $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, що задовольняє аксіоми невід'ємності, однорідності та нерівності трикутника. Пару $(X, \|\cdot\|)$ називають* нормованим простором.

Означення 1.2. *Нормований простір X називається* банаховим, *якщо він повний відносно метрики $d(x, y) = \|x - y\|$.*

Приклади. Для $1 \le p < \infty$ простір

$$\ell_p = \Big\{x = (x_k)_{k\ge1} : \ \|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} < \infty\Big\}$$

є банаховим. Аналогічно,

$$\ell_\infty = \Big\{x = (x_k) : \ \|x\|_\infty = \sup_k |x_k| < \infty\Big\}$$

є також банаховим простором.

Простори ℓ_p для $1 \le p < \infty$ є *сепарабельними*, тобто містять щільну зліченну підмножину. Натомість простір ℓ_∞ не є сепарабельним.

Важливим фактом є опис двоїстих просторів: для $1 < p < \infty$ виконується ізометричний ізоморфізм

$$(\ell_p)^* \cong \ell_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

що відіграє ключову роль у спектральній теорії та функціональному аналізі.

Окремо слід відзначити випадок $p = 2$: простір ℓ_2 є *гільбертовим простором* з внутрішнім добутком

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Цей випадок має особливе значення, оскільки саме гільбертові простори найближчі до звичних евклідових просторів та широко застосовуються в математичній фізиці.

1.4 Лінійні оператори в ℓ_p. Резольвента та спектр

Нехай X — банахів простір (зокрема $X = \ell_p$) і $T \in \mathcal{B}(X)$ — обмежений лінійний оператор. Центральним поняттям спектральної теорії є спектр оператора.

Означення 1.3. *Спектром оператора T називається множина*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ не є оборотним у } \mathcal{B}(X)\}.$$

Оператор

$$R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T),$$

називається резольвентою *оператора T.*

Теорема 1.1 (див. [1])**.** *Для будь-якого $T \in \mathcal{B}(X)$ спектр $\sigma(T)$ є непорожньою компактною підмножиною $\mathbb{C}$ і задовольняє включення*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

У скінченновимірному випадку ($X = \mathbb{C}^n$) спектр збігається з множиною власних значень матриці T. У нескінченновимірному просторі ℓ_p спектр може мати складнішу структуру: він може містити не лише власні значення, але й інші точки, які виникають як границі спектра або внаслідок властивостей оператора.

Приклади

- Для діагонального оператора $D(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$ спектр має вигляд
$$\sigma(D) = \overline{\{\alpha_k : k \geq 1\}}.$$

- Для правого зсуву $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ у просторі ℓ_p $(1 \leq$

$p < \infty$) спектр дорівнює одиничному диску:

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Функціональне числення

Якщо f — аналітична функція, визначена на околі спектра $\sigma(T)$, то оператор $f(T)$ можна задати інтегральною формулою Коші

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(T - \lambda I)^{-1} \, d\lambda,$$

де Γ — замкнений контур, що охоплює $\sigma(T)$. Ця формула безпосередньо спирається на результати комплексного аналізу, зокрема на теорему про лишки. Саме тому в наступному розділі ми окремо зупинимося на потрібних фактах з комплексного аналізу.

1.5 Елементи комплексного аналізу: контурні інтеграли та теорема про лишки

У подальших розділах нашої роботи важливу роль відіграють методи комплексного аналізу, зокрема інтегрування по контуру та обчислення лишків. У цьому розділі наведемо основні факти, які будуть потрібні для дослідження спектральних властивостей операторів та формули функціонального числення.

Інтеграл по контуру

Нехай γ — кусочно-гладка крива у площині $\mathbb{C}$, що задається відображенням $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Для неперервної функції $f : \gamma \to \mathbb{C}$ інтеграл по контуру γ визначається як

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt.$$

Формула Коші

Нехай f — аналітична функція в області $\Omega \subset \mathbb{C}$, а Γ — замкнений контур, що цілком міститься в Ω та охоплює точку $z_0 \in \Omega$. Тоді

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Ця формула показує, що значення аналітичної функції можна відновити через її інтеграл по замкненому контуру.

Лишки

Нехай f — мероморфна функція, тобто аналітична в області Ω за винятком ізольованих особливих точок. Якщо a — ізольована особлива точка f, то *лишком* функції f у точці a називається коефіцієнт при $(z-a)^{-1}$ у розкладі Лорана функції f в околі точки a. Позначається

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z).$$

Теорема про лишки

Нехай f — мероморфна в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{C}$, межа $\partial\Omega$ складається зі скінченної кількості замкнених кривих Жордана, а всередині Ω знаходяться ізольовані особливі точки $a_1, \ldots, a_m$. Тоді

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

Формули для обчислення лишків

- Якщо a — полюс першого порядку, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

- Якщо a — полюс порядку $m \geq 2$, то

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right].$$

Приклади

1. Обчислимо інтеграл

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a}, \quad |a| < 1.$$

   Функція має полюс першого порядку у $z = a$, і її лишок дорівнює 1. За теоремою про лишки

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

2. Для інтеграла

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$$

   маємо два полюси: $z = i$ та $z = -i$, обидва всередині контуру. Лишки обчислюються як

$$\mathrm{res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}, \quad \mathrm{res}_{z=-i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{-2i}.$$

   Їхня сума дорівнює нулю, отже інтеграл дорівнює 0.

Зв'язок з функціональним численням

Розглянуті вище формули мають безпосереднє застосування в спектральній теорії операторів. Зокрема, інтеграл від резольвенти оператора по замкненому контуру використовується для означення $f(T)$, де f — аналітична функція, а T — обмежений оператор. Саме завдяки теоремі про лишки цей підхід дозволяє переходити від властивостей функцій до властивостей операторів.

Розділ 2

Практична частина

2.1 Постановка задачі

Розглянемо операторне рівняння

$$AX - XB = Y, \tag{2.1}$$

де $A, B, Y \in \mathcal{B}(\ell_p)$ — задані обмежені лінійні оператори, а $X \in \mathcal{B}(\ell_p)$ — шуканий оператор. Тут ℓ_p позначає класичний банахів простір усіх послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для яких $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

У найпростішому випадку, коли A і B — дійсні або комплексні числа, рівняння набуває вигляду

$$ax - xb = y,$$

і має єдиний розв'язок $x = \frac{y}{a-b}$ за умови $a \neq b$. Аналогічна ідея зберігається і для матриць: якщо A, B — діагональні матриці з власними значеннями

$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ та $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$, то рівняння має єдиний розв'язок тоді й лише тоді, коли $\lambda_i \neq \mu_j$ для всіх i, j. Це класичне *рівняння Сильвестра.*

У нескінченновимірному випадку центральною є умова, що спектри операторів A та B не перетинаються:

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Відомо, що тоді для будь-якого $Y \in \mathcal{B}(\ell_p)$ рівняння (2.1) має єдиний розв'язок X (теорема Сильвестра–Розенблюма, [3]).

Більш того, в цьому випадку розв'язок можна подати у вигляді інтегральної формули через резольвенти операторів:

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1}\, Y\, (B - \mu I)^{-1}}{\lambda - \mu}\, d\mu\, d\lambda, \tag{2.3}$$

де Γ_A та Γ_B — замкнені контури на комплексній площині, що охоплюють спектри $\sigma(A)$ та $\sigma(B)$ відповідно і не перетинаються.

У подальшій частині роботи ми розглянемо приклади в просторі ℓ_p, де оператори A та B задаються у вигляді діагональних операторів та Y у вигляді оператору зсуву. Ці приклади демонструють, як умова $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$ дозволяє не тільки гарантувати існування розв'язку, але й побудувати його в явному вигляді.

Варто зауважити, що аналогічні задачі раніше досліджувалися в скінченновимірних просторах: для $\mathbb{R}^2$ (див. [7]) та для $\mathbb{R}^3$ (див. [8]). У випадку $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$ формули для розв'язку стають надзвичайно громіздкими і не мають суттєвої теоретичної цінності. Саме тому подальший розвиток цього напряму досліджень здійснюється в нескінченновимірних просторах, зокрема в просторі ℓ_p, де вдається отримати більш узагальнені та конструктивні результати.

2.2 Операторне рівняння з діагональними операторами A і B та зваженим оператором зсуву праворуч Y

Постановка задачі

Розглянемо операторне рівняння (2.1) у просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$.

Оператори A та B є діагональними і задані таким чином:

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (2x_1,\ 3x_2,\ 2x_3,\ 3x_4,\ \ldots),$$
$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (7x_1,\ 11x_2,\ 7x_3,\ 11x_4,\ \ldots).$$

Оператор Y є зваженим зсувом вправо, тобто для будь-якого $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell_p$ маємо

$$Y(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0,\ x_1,\ \tfrac{1}{2}x_2,\ \tfrac{1}{3}x_3,\ \ldots),$$

або в координатній формі:

$$(Yx)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1}\, x_{n-1}, & n \ge 2. \end{cases}$$

Мета полягає у знаходженні обмеженого оператора $X : \ell_p \to \ell_p$, який задовольняє рівняння (2.1).

Спектри операторів і застосування інтегральної формули

Оскільки оператори A та B є діагональними, то їх спектри утворюються множинами власних значень, що стоять на діагоналі.

Для оператора A маємо:

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (2x_1,\, 3x_2,\, 2x_3,\, 3x_4,\, \ldots),$$

тому спектр оператора A складається з двох чисел:

$$\sigma(A) = \{2,\, 3\}.$$

Аналогічно, для оператора B:

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (7x_1,\, 11x_2,\, 7x_3,\, 11x_4,\, \ldots),$$

і, відповідно, його спектр має вигляд:

$$\sigma(B) = \{7,\, 11\}.$$

Таким чином,

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing,$$

тобто спектри операторів A та B не перетинаються.

Оскільки ця умова виконується, ми можемо скористатися інтегральною формулою (2.3) для знаходження розв'язку рівняння (2.1), де Γ_A та Γ_B — замкнені позитивно орієнтовані контури, які охоплюють спектри операторів A та B відповідно і не мають спільних точок.

Резольвенти операторів

Оскільки оператори A та B є діагональними, обчислення їхніх резольвент не викликає труднощів. Для кожного комплексного числа λ, що не належить спектру оператора A, маємо:

$$(A-\lambda I)(x_1,x_2,x_3,\ldots)=((2-\lambda)x_1,\,(3-\lambda)x_2,\,(2-\lambda)x_3,\,(3-\lambda)x_4,\,\ldots).$$

Обертаючи цей оператор, одержуємо:

$$(A-\lambda I)^{-1}(x_1,x_2,x_3,\ldots)=\left(\tfrac{1}{2-\lambda}x_1,\,\tfrac{1}{3-\lambda}x_2,\,\tfrac{1}{2-\lambda}x_3,\,\tfrac{1}{3-\lambda}x_4,\,\ldots\right).$$

Аналогічно, для оператора B та будь-якого комплексного числа $\mu\notin\sigma(B)$:

$$(B-\mu I)(x_1,x_2,x_3,\ldots)=((7-\mu)x_1,\,(11-\mu)x_2,\,(7-\mu)x_3,\,(11-\mu)x_4,\,\ldots),$$

а тому

$$(B-\mu I)^{-1}(x_1,x_2,x_3,\ldots)=\left(\frac{1}{7-\mu}x_1,\,\frac{1}{11-\mu}x_2,\,\frac{1}{7-\mu}x_3,\,\frac{1}{11-\mu}x_4,\,\ldots\right).$$

Отже, обидві резольвенти також є діагональними операторами, що значно спрощує подальші обчислення при підстановці в інтегральну формулу (2.3).

Підстановка у формулу та послідовна дія операторів

Підставимо знайдені резольвенти операторів A та B у інтегральну формулу (2.3). Для довільного вектора $x=(x_n)_{n\geq 1}\in\ell_p$ розглянемо поетапну дію операторів у підінтегральному виразі.

Дія оператора $(B-\mu I)^{-1}$. Нехай

$$z = (B-\mu I)^{-1}x.$$

Тоді за означенням резольвенти маємо:

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{7-\mu}\, x_n, & n \text{ непарне}, \\ \dfrac{1}{11-\mu}\, x_n, & n \text{ парне}. \end{cases}$$

Дія оператора Y. Застосуємо оператор Y до вектора z:

$$(Yz)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1}\, z_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Підставивши значення z_{n-1}, одержуємо

$$(Yz)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{\beta_{n-1}-\mu}\, x_{n-1}, & n \geq 2, \end{cases}$$

де

$$\beta_{n-1} = \begin{cases} 7, & n-1 \text{ непарне}, \\ 11, & n-1 \text{ парне}. \end{cases}$$

Дія оператора $(A-\lambda I)^{-1}$. Тепер застосуємо $(A-\lambda I)^{-1}$ до отриманого вектора Yz:

$$\big((A-\lambda I)^{-1}Yz\big)_n = \frac{1}{\alpha_n - \lambda}\,(Yz)_n,$$

де

$$\alpha_n = \begin{cases} 2, & n \text{ непарне}, \\ 3, & n \text{ парне}. \end{cases}$$

Тоді

$$\big((A - \lambda I)^{-1} Y z\big)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1} \cdot \dfrac{1}{\alpha_n - \lambda} \cdot \dfrac{1}{\beta_{n-1} - \mu}\, x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Підінтегральний вираз. Після послідовного застосування операторів маємо:

$$(A-\lambda I)^{-1} Y (B-\mu I)^{-1} x = \left(0,\ \frac{1}{1 \cdot (\alpha_2 - \lambda)(\beta_1 - \mu)} x_1,\ \frac{1}{2 \cdot (\alpha_3 - \lambda)(\beta_2 - \mu)} x_2,\ \ldots\right).$$

Тоді підставляючи цей вираз у формулу (2.3), для кожного $n \geq 2$ одержуємо:

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n-1} \int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\beta_{n-1} - \mu)(\lambda - \mu)}\, d\lambda\, d\mu\, x_{n-1}. \quad (2.4)$$

Для зручності винесемо множник $\frac{1}{n-1}$ і позначимо сам подвійний інтеграл через I_n:

$$I_n = \int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\beta_{n-1} - \mu)(\lambda - \mu)}\, d\lambda\, d\mu. \quad (2.5)$$

Тоді формула (2.4) набуває вигляду:

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n-1}\, I_n\, x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Інтегрування за μ по контуру Γ_B

Фіксуємо $\lambda \in \Gamma_A$ і розглядаємо внутрішній інтеграл:

$$J_n = \oint_{\Gamma_B} \frac{1}{(\beta_{n-1} - \mu)(\lambda - \mu)}\, d\mu.$$

Полюси за змінною μ є простими й знаходяться в точках $\mu = \beta_{n-1}$ та $\mu = \lambda$. Оскільки контур Γ_B охоплює лише спектр оператора B і не має спільних точок із контуром Γ_A, усередині Γ_B міститься полюс $\mu = \beta_{n-1}$, а точка $\mu = \lambda$ лежить поза ним.

Обчислюємо лишок у точці $\mu = \beta_{n-1}$:

$$\mathrm{Res}_{\mu=\beta_{n-1}} \frac{1}{(\beta_{n-1} - \mu)(\lambda - \mu)} = \lim_{\mu \to \beta_{n-1}} \frac{\mu - \beta_{n-1}}{(\beta_{n-1} - \mu)(\lambda - \mu)} = -\frac{1}{\lambda - \beta_{n-1}}.$$

Застосовуючи формулу лишків для позитивно орієнтованого контуру, отримуємо

$$J_n = 2\pi i \cdot \Big(-\frac{1}{\lambda - \beta_{n-1}} \Big) = -\frac{2\pi i}{\lambda - \beta_{n-1}}.$$

Підставляючи знайдене J_n у вираз для I_n, маємо

$$I_n = -2\pi i \oint_{\Gamma_A} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n-1})}\, d\lambda.$$

Інтегрування за λ по контуру Γ_A

Маємо

$$I_n = -2\pi i \oint_{\Gamma_A} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n-1})}\, d\lambda.$$

Полюси за змінною λ: прості в точках $\lambda = \alpha_n$ та $\lambda = \beta_{n-1}$. Контур Γ_A охоплює спектр оператора A, тому всередині Γ_A лежить полюс $\lambda = \alpha_n$, а точка $\lambda = \beta_{n-1}$ розташована поза контуром.

Обчислюємо лишок у $\lambda = \alpha_n$:

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\alpha_n} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n-1})} = \lim_{\lambda \to \alpha_n} \frac{\lambda - \alpha_n}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n-1})} = -\frac{1}{\alpha_n - \beta_{n-1}}.$$

Застосовуючи формулу лишків,

$$\oint_{\Gamma_A} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n-1})}\, d\lambda = 2\pi i \cdot \Big(-\frac{1}{\alpha_n - \beta_{n-1}}\Big) = -\frac{2\pi i}{\alpha_n - \beta_{n-1}}.$$

Підставляючи це у вираз для I_n, одержуємо

$$I_n = -2\pi i \cdot \Big(-\frac{2\pi i}{\alpha_n - \beta_{n-1}}\Big) = \frac{4\pi^2\, i^2}{\alpha_n - \beta_{n-1}} = -\frac{4\pi^2}{\alpha_n - \beta_{n-1}},$$

оскільки $i^2 = -1$.

Підстановка у I_n та збірка результату для X

Повертаючись до визначення I_n, підставимо обчислене значення інтеграла:

$$I_n = -\frac{4\pi^2}{\alpha_n - \beta_{n-1}}.$$

Підставимо це у вираз для $(Xx)_n$:

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n-1}\, I_n\, x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Отже,

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \Big(-\frac{4\pi^2}{\alpha_n - \beta_{n-1}}\Big) x_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(\alpha_n - \beta_{n-1})}\, x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Таким чином, для дії оператора X на елемент $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ маємо:

$$(Xx)_1 = 0, \qquad (Xx)_n = \frac{1}{(n-1)(\alpha_n - \beta_{n-1})}\, x_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Парний та непарний випадки

Парний випадок. Якщо n — парне, то

$$\alpha_n = 3, \qquad \beta_{n-1} = 7.$$

Підставляючи ці значення у формулу для $(Xx)_n$, маємо

$$(Xx)_n = \frac{1}{(n-1)(3-7)}\, x_{n-1} = -\frac{1}{4(n-1)}\, x_{n-1}.$$

Непарний випадок. Якщо n — непарне, то

$$\alpha_n = 2, \qquad \beta_{n-1} = 11.$$

Підставляючи у формулу, одержуємо

$$(Xx)_n = \frac{1}{(n-1)(2-11)}\, x_{n-1} = -\frac{1}{9(n-1)}\, x_{n-1}.$$

Отже, остаточно:

$$(Xx)_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{4(n-1)}\, x_{n-1}, & \text{якщо } n \text{ парне}, \\ -\dfrac{1}{9(n-1)}\, x_{n-1}, & \text{якщо } n \text{ непарне}. \end{cases}$$

Розглянемо ще одне операторне рівняння (2.1)

Оператори A та B — діагональні:

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = \big(\alpha_1 x_1,\ \alpha_2 x_2,\ \alpha_3 x_3,\ \dots\big),$$
$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = \big(\beta_1 x_1,\ \beta_2 x_2,\ \beta_3 x_3,\ \dots\big).$$

де

$$\alpha_n = \frac{1}{n}, \qquad \beta_n = 2 + \frac{1}{n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Оператор Y є зваженим зсувом вправо, тобто для будь-якого $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_p$ маємо

$$Y(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0,\ x_1,\ \tfrac{1}{2}x_2,\ \tfrac{1}{3}x_3,\ \dots),$$

або в координатній формі:

$$(Yx)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1}\, x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Мета: знайти обмежений оператор $X : \ell_p \to \ell_p$, що задовольняє рівняння (2.1).

Спектри операторів і застосування інтегральної формули

Оскільки A та B є діагональними, їх спектри є замиканнями множин діагональних значень:

$$\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n : n \geq 1\}}, \qquad \sigma(B) = \overline{\{\beta_n : n \geq 1\}}.$$

У нашому випадку

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \sigma(A) = \left\{ \tfrac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\},$$

$$\beta_n = 2 + \frac{1}{n^2} \;\Rightarrow\; \sigma(B) = \left\{ 2 + \tfrac{1}{n^2} : n \geq 1 \right\} \cup \{2\}.$$

Маємо розділення спектрів:

$$\sigma(A) \subset (0, 1], \qquad \sigma(B) \subset (2, 3], \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$$

За цієї умови застосовується інтегральна формула (2.3) розв'язку рівняння (2.1), де Γ_A та Γ_B — замкнені позитивно орієнтовані контури, що охоплюють відповідно $\sigma(A)$ та $\sigma(B)$ і не мають спільних точок.

Резольвенти операторів

Оскільки A та B діагональні, їхні резольвенти також діагональні. Для будь-якого $\lambda \notin \sigma(A)$ та $\mu \notin \sigma(B)$ маємо:

$$(A - \lambda I)(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \big((\tfrac{1}{1} - \lambda)x_1,\; (\tfrac{1}{2} - \lambda)x_2,\; (\tfrac{1}{3} - \lambda)x_3,\; \ldots \big),$$

тобто покомпонентно

$$\big((A - \lambda I)x\big)_n = (\alpha_n - \lambda)x_n = \Big(\tfrac{1}{n} - \lambda\Big)x_n.$$

Звідси

$$(A - \lambda I)^{-1}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \Big(\tfrac{1}{\frac{1}{1} - \lambda}x_1,\; \tfrac{1}{\frac{1}{2} - \lambda}x_2,\; \tfrac{1}{\frac{1}{3} - \lambda}x_3,\; \ldots \Big),$$

або покомпонентно:

$$\big((A-\lambda I)^{-1}x\big)_n = \frac{1}{\frac{1}{n}-\lambda}\,x_n.$$

Аналогічно для B:

$$(B-\mu I)(x_1,x_2,x_3,\dots) = \big((2+\tfrac{1}{1^2}-\mu)x_1,\ (2+\tfrac{1}{2^2}-\mu)x_2,\ (2+\tfrac{1}{3^2}-\mu)x_3,\ \dots\big),$$

тобто

$$\big((B-\mu I)x\big)_n = (\beta_n-\mu)x_n = \Big(2+\tfrac{1}{n^2}-\mu\Big)x_n,$$

і

$$(B-\mu I)^{-1}(x_1,x_2,x_3,\dots) = \Big(\tfrac{1}{2+\frac{1}{1^2}-\mu}x_1,\ \tfrac{1}{2+\frac{1}{2^2}-\mu}x_2,\ \tfrac{1}{2+\frac{1}{3^2}-\mu}x_3,\ \dots\Big),$$

або покомпонентно:

$$\big((B-\mu I)^{-1}x\big)_n = \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}-\mu}\,x_n.$$

Отже, обидві резольвенти діагональні, що суттєво спростить підстановку в інтегральну формулу (2.3).

Підстановка у формулу та послідовна дія операторів

Підставимо знайдені резольвенти операторів A та B у інтегральну формулу (2.3), де Γ_A та Γ_B — замкнені контури, що охоплюють спектри $\sigma(A)$ і $\sigma(B)$ відповідно та не мають спільних точок.

Для довільного $x=(x_n)_{n\geq 1}\in \ell_p$ розглянемо послідовну дію операторів у підінтегральному виразі.

Дія оператора $(B-\mu I)^{-1}$. Нехай

$$z = (B-\mu I)^{-1}x.$$

Тоді за означенням резольвенти:

$$z_n = \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}-\mu}\,x_n, \qquad n \geq 1.$$

Дія оператора Y. Застосуємо Y до вектора z:

$$(Yz)_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ \dfrac{1}{n-1}\,z_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Підставляючи значення z_{n-1}, маємо:

$$(Yz)_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ \dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{2+\frac{1}{(n-1)^2}-\mu}\,x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Дія оператора $(A-\lambda I)^{-1}$. Застосовуємо $(A-\lambda I)^{-1}$ до отриманого вектора Yz:

$$\big((A-\lambda I)^{-1}Yz\big)_n = \frac{1}{\frac{1}{n}-\lambda}\,(Yz)_n.$$

Отже:

$$\big((A-\lambda I)^{-1}Yz\big)_n = \begin{cases} 0, & n=1, \\ \dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{n}-\lambda}\cdot\dfrac{1}{2+\frac{1}{(n-1)^2}-\mu}\,x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Підінтегральний вираз. Після послідовного застосування операторів одержуємо:

$$(A-\lambda I)^{-1}Y(B-\mu I)^{-1}x = \left(0,\ \frac{1}{1\cdot(\frac{1}{2}-\lambda)(2+\frac{1}{1^2}-\mu)}x_1,\right.$$
$$\left.\frac{1}{2\cdot(\frac{1}{3}-\lambda)(2+\frac{1}{2^2}-\mu)}x_2,\ \dots\right).$$

Тоді, підставляючи це у формулу для X, для кожного $n \geq 2$ отримаємо:

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{n-1}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}-\mu\right)(\lambda-\mu)}\,d\lambda\,d\mu\ x_{n-1}.$$

Позначимо:

$$I_n = \int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}-\mu\right)(\lambda-\mu)}\,d\lambda\,d\mu,$$

тоді

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{n-1}\,I_n\,x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Інтегрування за μ по контуру Γ_B

Фіксуємо $\lambda \in \Gamma_A$ та розглядаємо внутрішній інтеграл

$$J_n = \oint_{\Gamma_B}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}-\mu\right)(\lambda-\mu)}\,d\mu, \qquad n \geq 2.$$

Полюси за змінною μ прості: $\mu = 2+\frac{1}{(n-1)^2}$ та $\mu = \lambda$. Оскільки Γ_B охоплює лише спектр оператора B і не має спільних точок із Γ_A, всередині Γ_B лежить полюс $\mu = 2+\frac{1}{(n-1)^2}$, а точка $\mu = \lambda$ — поза контуром.

Лишок у $\mu = 2 + \frac{1}{(n-1)^2}$:

$$\operatorname{Res}_{\mu = 2+\frac{1}{(n-1)^2}} \frac{1}{\big(2 + \frac{1}{(n-1)^2} - \mu\big)(\lambda - \mu)} = \lim_{\mu \to 2+\frac{1}{(n-1)^2}} \frac{\mu - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)}{\big(2 + \frac{1}{(n-1)^2} - \mu\big)(\lambda - \mu)}$$
$$= -\frac{1}{\lambda - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)}.$$

Звідси за формулою лишків

$$J_n = 2\pi i \cdot \Big(-\frac{1}{\lambda - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)}\Big) = -\frac{2\pi i}{\lambda - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)}.$$

Підставляючи J_n у подвійний інтеграл, отримуємо

$$I_n = \oint_{\Gamma_A} \frac{1}{\frac{1}{n} - \lambda} J_n \, d\lambda = -2\pi i \oint_{\Gamma_A} \frac{1}{\big(\frac{1}{n} - \lambda\big)\,\big(\lambda - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)\big)} \, d\lambda.$$

Інтегрування за λ по контуру Γ_A

Маємо проміжний вираз:

$$I_n = -2\pi i \oint_{\Gamma_A} \frac{1}{\big(\frac{1}{n} - \lambda\big)\big(\lambda - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)\big)} \, d\lambda.$$

Полюси за змінною λ прості:

$$\lambda = \tfrac{1}{n}, \qquad \lambda = 2 + \tfrac{1}{(n-1)^2}.$$

Контур Γ_A охоплює лише спектр оператора A, тому всередині Γ_A міститься полюс $\lambda = \frac{1}{n}$, а точка $\lambda = 2 + \frac{1}{(n-1)^2}$ розташована поза контуром.

Обчислимо лишок у точці $\lambda = \frac{1}{n}$:

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)\left(\lambda-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)\right)} = \lim_{\lambda\to\frac{1}{n}} \frac{\lambda-\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)\left(\lambda-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)\right)}$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)}.$$

Тоді за формулою лишків:

$$\oint_{\Gamma_A} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}-\lambda\right)\left(\lambda-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)\right)}\,d\lambda = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)}\right) = -\frac{2\pi i}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)}.$$

Підставляючи у вираз для I_n, отримуємо:

$$I_n = -\,2\pi i\cdot\left(-\frac{2\pi i}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)}\right) = \frac{4\pi^2\, i^2}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)} = -\frac{4\pi^2}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)},$$

оскільки $i^2 = -1$.

Збірка результату для оператора X

За означенням

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{n-1}\, I_n\, x_{n-1}, \qquad n \geq 2, \quad (Xx)_1 = 0.$$

Із попереднього кроку маємо

$$I_n = -\frac{4\pi^2}{\frac{1}{n}-\left(2+\frac{1}{(n-1)^2}\right)}.$$

Підставляючи I_n, одержуємо

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \Big(-\frac{4\pi^2}{\frac{1}{n} - \big(2 + \frac{1}{(n-1)^2}\big)} \Big) x_{n-1}$$
$$= \frac{1}{(n-1)\Big(\frac{1}{n} - 2 - \frac{1}{(n-1)^2}\Big)} x_{n-1}, \qquad n \geq 2.$$

Отже, дія оператора X на $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$ задається формулами

$$(Xx)_1 = 0, \qquad (Xx)_n = \frac{1}{(n-1)\big(\frac{1}{n} - 2 - \frac{1}{(n-1)^2}\big)} x_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Компактна формула

З урахуванням дії оператора Y маємо:

$$(Xx)_n = \frac{1}{(n-1)(a_n - b_{n-1})} x_{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

де

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_{n-1} = 2 + \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Отже,

$$(Xx)_1 = 0, \qquad (Xx)_n = \frac{1}{(n-1)\big(a_n - b_{n-1}\big)} x_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Узагальнення результату

Отримана формула для оператора X у попередніх прикладах показує, що розв'язок рівняння (2.1) при діагональних операторах A і B та зсувному операторі Y має просту структуру. На основі проведених обчислень сформулюємо узагальнений результат.

Теорема 2.1 (Узагальнена теорема про зсувний оператор). Нехай A та B — діагональні обмежені оператори у просторі ℓ_p, $1 \le p < \infty$, з власними значеннями $\{a_n\}_{n\ge1}$ та $\{b_n\}_{n\ge1}$ відповідно. Припустимо, що їх спектри не перетинаються, тобто

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing, \qquad \text{еквівалентно} \qquad \inf_{m,n\ge1} |a_m - b_n| > 0.$$

Нехай $Y : \ell_p \to \ell_p$ — зважений оператор зсуву на одну позицію праворуч:

$$(Yx)_1 = 0, \qquad (Yx)_n = c_n x_{n-1}, \quad n \ge 2,$$

де $\{c_n\}$ — обмежена послідовність коефіцієнтів зсуву, тобто існує число $M > 0$ таке, що $|c_n| \le M$ для всіх $n \ge 1$.

Тоді рівняння (2.1) має єдиний обмежений лінійний розв'язок $X : \ell_p \to \ell_p$, який також є оператором зсуву

$$(Xx)_1 = 0, \qquad (Xx)_n = \frac{c_n}{a_n - b_{n-1}}\, x_{n-1}, \quad n \ge 2.$$

2.3 Операторне рівняння з діагональними операторами A і B та зваженим оператором зсуву ліворуч Y

Постановка задачі

Розглянемо операторне рівняння (2.1)

Оператори A, B та Y задані наступним чином:

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\alpha_1 x_1,\ \alpha_2 x_2,\ \alpha_3 x_3,\ \dots),$$

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\beta_1 x_1,\ \beta_2 x_2,\ \beta_3 x_3,\ \dots),$$

$$Y(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2,\ \tfrac{1}{2} x_3,\ \tfrac{1}{3} x_4,\ \dots).$$

тобто

$$(Yx)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n}\, x_{n+1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

Мета полягає у знаходженні обмеженого оператора $X : \ell_p \to \ell_p$, який задовольняє рівняння (2.1).

Спектри діагональних операторів і умова застосовності формули

Лема 2.1 (Спектри діагональних операторів)**.** *Нехай A і B — діагональні оператори на ℓ_p,*

$$A(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots), \qquad B(x_1, x_2, \dots) = (\beta_1 x_1, \beta_2 x_2, \dots),$$

де (α_n) *і* (β_n) *— обмежені послідовності. Тоді*

$$\sigma(A) = \overline{\{\alpha_n : n \geq 1\}}, \qquad \sigma(B) = \overline{\{\beta_n : n \geq 1\}}.$$

Припущення 2.2 (Розділення спектрів)**.** *Надалі припускаємо, що спектри* A *і* B *не перетинаються, тобто*

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing,$$

еквівалентно

$$\inf_{m,n \geq 1} |\alpha_m - \beta_n| > 0.$$

Наслідок 2.3 (Інтегральна формула розв'язку)**.** *За припущенням 2.2 розв'язок рівняння* (2.1) *має вигляд* (2.3)*, де* Γ_A *та* Γ_B *— позитивно орієнтовані контури, що охоплюють* $\sigma(A)$ *та* $\sigma(B)$ *відповідно.*

Приклад 2.4 (Перевірка умови на конкретних послідовностях)**.** *Нехай, наприклад,*

$$\alpha_{2k-1} = 2,\ \alpha_{2k} = 3 \quad (k \geq 1), \qquad \beta_{2k-1} = 7,\ \beta_{2k} = 11 \quad (k \geq 1).$$

Тоді $\sigma(A) = \{2, 3\}$*,* $\sigma(B) = \{7, 11\}$ *і* $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$*, причому*

$$\inf_{m,n} |\alpha_m - \beta_n| = \min\{\, |2-7|, |2-11|, |3-7|, |3-11| \,\} = 4 > 0.$$

Отже, умова 2.2 виконується і формулу (2.3) *можна застосувати.*

Резольвенти операторів A і B

Оскільки A та B діагональні, їх резольвенти також діагональні. Для $\lambda \notin \sigma(A)$ та $\mu \notin \sigma(B)$:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)^{-1}(x_1,x_2,\dots) &= \bigl(\tfrac{1}{\alpha_1-\lambda}x_1,\ \tfrac{1}{\alpha_2-\lambda}x_2,\ \dots\bigr),\\
(B-\mu I)^{-1}(x_1,x_2,\dots) &= \bigl(\tfrac{1}{\beta_1-\mu}x_1,\ \tfrac{1}{\beta_2-\mu}x_2,\ \dots\bigr).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Зокрема, покомпонентно:

$$\bigl((A-\lambda I)^{-1}x\bigr)_n = \frac{1}{\alpha_n-\lambda}\,x_n, \qquad \bigl((B-\mu I)^{-1}x\bigr)_n = \frac{1}{\beta_n-\mu}\,x_n.$$

Підстановка у формулу

Підставимо резольвенти операторів A і B у інтегральну формулу (2.3). Для довільного $x=(x_n)_{n\ge1}\in\ell_p$ розглянемо поетапну дію операторів у підінтегральному виразі.

Дія оператора $(B-\mu I)^{-1}$. Нехай

$$z=(B-\mu I)^{-1}x.$$

Тоді за означенням резольвенти маємо

$$z_n=\frac{1}{\beta_n-\mu}\,x_n, \qquad n\ge1.$$

Дія оператора Y. Застосовуємо Y до вектора z:

$$(Yz)_n=\frac{1}{n}\,z_{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\beta_{n+1}-\mu}\,x_{n+1}, \qquad n\ge1.$$

Дія оператора $(A-\lambda I)^{-1}$. Далі застосуємо $(A-\lambda I)^{-1}$ до Yz. Отже,

$$\big((A-\lambda I)^{-1}Yz\big)_n = \frac{1}{\alpha_n-\lambda}\,(Yz)_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\alpha_n-\lambda}\cdot\frac{1}{\beta_{n+1}-\mu}\,x_{n+1}.$$

Підінтегральний вираз. Після послідовної дії операторів підінтегральна частина формули (2.3) набуває вигляду:

$$(A-\lambda I)^{-1}Y(B-\mu I)^{-1}x = \left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(\alpha_n-\lambda)(\beta_{n+1}-\mu)}\,x_{n+1}\right)_{n\geq 1}.$$

Підставляючи це в (2.3), отримаємо:

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}\frac{1}{(\alpha_n-\lambda)(\beta_{n+1}-\mu)(\lambda-\mu)n}\,d\lambda\,d\mu\cdot x_{n+1}. \tag{2.7}$$

Для зручності винесемо множник $\frac{1}{n}$ і позначимо сам подвійний інтеграл через I_n:

$$I_n = \int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}\frac{1}{(\alpha_n-\lambda)(\beta_{n+1}-\mu)(\lambda-\mu)}\,d\lambda\,d\mu, \tag{2.8}$$

тоді формула (2.7) набуває компактного вигляду:

$$(Xx)_n = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{n}\,I_n\cdot x_{n+1}, \qquad n\geq 1.$$

Інтегрування за μ по контуру Γ_B

Починаємо з подвійного інтеграла (2.8). Фіксуємо $\lambda\in\Gamma_A$ і обчислюємо внутрішній інтеграл за μ:

$$J_n = \int_{\Gamma_B}\frac{1}{(\beta_{n+1}-\mu)\,(\lambda-\mu)}\,d\mu.$$

Розклад на прості дроби по μ. Шукаємо коефіцієнти A, B такі, що

$$\frac{1}{(\beta_{n+1}-\mu)(\lambda-\mu)} = \frac{A}{\beta_{n+1}-\mu} + \frac{B}{\lambda-\mu}.$$

Приводимо до спільного знаменника і порівнюємо чисельники:

$$1 = A(\lambda-\mu) + B(\beta_{n+1}-\mu) = \lambda A + \beta_{n+1}B - \mu(A+B).$$

Звідси система

$$\begin{cases} A+B=0, \\ \lambda A + \beta_{n+1}B = 1, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{\lambda-\beta_{n+1}}, \quad B = -\frac{1}{\lambda-\beta_{n+1}}.$$

Отже,

$$\frac{1}{(\beta_{n+1}-\mu)(\lambda-\mu)} = \frac{1}{\lambda-\beta_{n+1}}\left(\frac{1}{\beta_{n+1}-\mu} - \frac{1}{\lambda-\mu}\right). \tag{2.9}$$

Інтегрування кожного дробу окремо. Оскільки полюс $\mu = \beta_{n+1}$ лежить всередині Γ_B, а $\mu = \lambda$ — поза Γ_B, маємо

$$\int_{\Gamma_B} \frac{1}{\beta_{n+1}-\mu}\,d\mu = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{\mu=\beta_{n+1}} \frac{1}{\beta_{n+1}-\mu} = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i,$$

$$\int_{\Gamma_B} \frac{1}{\lambda-\mu}\,d\mu = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{\mu=\lambda} \frac{1}{\lambda-\mu} = 0,$$

бо точка $\mu = \lambda$ не охоплюється контуром Γ_B.

Тому з (2.9) дістаємо

$$J_n = \int_{\Gamma_B} \frac{1}{(\beta_{n+1}-\mu)(\lambda-\mu)}\,d\mu = \frac{1}{\lambda-\beta_{n+1}}\Big((-2\pi i) - 0\Big) = -\frac{2\pi i}{\lambda-\beta_{n+1}}. \tag{2.10}$$

Проміжний підсумок для I_n. Повертаємося до (2.8). Виносимо множник, що не залежить від μ, та підставляємо (2.10):

$$I_n = \int_{\Gamma_A} \left[\frac{1}{\alpha_n - \lambda} \underbrace{\int_{\Gamma_B} \frac{1}{(\beta_{n+1} - \mu)(\lambda - \mu)}\, d\mu}_{J_n} \right] d\lambda = \int_{\Gamma_A} \frac{1}{\alpha_n - \lambda} \Big(- \frac{2\pi i}{\lambda - \beta_{n+1}} \Big) d\lambda.$$

Тобто після інтегрування по Γ_B маємо

$$I_n = -\,2\pi i \int_{\Gamma_A} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n+1})}\, d\lambda. \tag{2.11}$$

Далі в наступній підсекції проінтегруємо (2.11) за λ по контуру Γ_A (з детальним розкладом на прості дроби).

Інтегрування за λ по контуру Γ_A

Маємо проміжний вираз

$$I_n = -\,2\pi i \int_{\Gamma_A} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n+1})}\, d\lambda.$$

Розклад на прості дроби по λ. Шукаємо A, B такі, що

$$\frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n+1})} = \frac{A}{\alpha_n - \lambda} + \frac{B}{\lambda - \beta_{n+1}}.$$

Прирівнюючи чисельники,

$$1 = A(\lambda - \beta_{n+1}) + B(\alpha_n - \lambda) = \lambda(A - B) + \big(B\alpha_n - A\beta_{n+1}\big),$$

звідси

$$A - B = 0, \qquad B\alpha_n - A\beta_{n+1} = 1.$$

Отже $A = B$ і $A(\alpha_n - \beta_{n+1}) = 1$, тобто

$$A = B = \frac{1}{\alpha_n - \beta_{n+1}}.$$

Тому

$$\frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n+1})} = \frac{1}{\alpha_n - \beta_{n+1}} \left(\frac{1}{\alpha_n - \lambda} + \frac{1}{\lambda - \beta_{n+1}} \right). \tag{2.12}$$

Інтегрування кожного дробу окремо. Полюс $\lambda = \alpha_n$ лежить усередині Γ_A, а $\lambda = \beta_{n+1}$ — поза контуром. Тому

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{\alpha_n - \lambda} \, d\lambda = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{\lambda=\alpha_n} \frac{1}{\alpha_n - \lambda} = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i,$$

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{\lambda - \beta_{n+1}} \, d\lambda = 0.$$

З (2.12) маємо

$$\int_{\Gamma_A} \frac{1}{(\alpha_n - \lambda)(\lambda - \beta_{n+1})} \, d\lambda = -\frac{2\pi i}{\alpha_n - \beta_{n+1}}. \tag{2.13}$$

Підстановка у I_n. Повертаючись до визначення I_n, одержуємо

$$I_n \;=\; -2\pi i \cdot \left(-\frac{2\pi i}{\alpha_n - \beta_{n+1}} \right) \;=\; \frac{4\pi^2\, i^2}{\alpha_n - \beta_{n+1}} \;=\; -\frac{4\pi^2}{\alpha_n - \beta_{n+1}}, \qquad \text{оскільки } i^2 = -1.$$

Збірка результату для X

Повертаємось до формули

$$(Xx)_n \;=\; -\frac{1}{4\pi^2}\, \frac{1}{n}\, I_n\, x_{n+1}, \qquad n \geq 1,$$

та підставляємо обчислений вище інтеграл

$$I_n \;=\; -\,\frac{4\pi^2}{\alpha_n - \beta_{n+1}}.$$

Отримуємо

$$(Xx)_n \;=\; \frac{1}{n\,(\alpha_n - \beta_{n+1})}\,x_{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Узагальнення результату

Таким чином, отримані результати дають змогу сформулювати наступну теорему.

Теорема 2.2 (Узагальнена теорема про зсувний оператор). Нехай A та B — діагональні обмежені оператори у просторі ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, з власними значеннями $\{a_n\}_{n\geq 1}$ та $\{b_n\}_{n\geq 1}$ відповідно. Припустимо, що їх спектри не перетинаються, тобто

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing, \quad \text{еквівалентно} \quad \inf_{m,n\geq 1} |a_m - b_n| > 0.$$

Нехай $Y : \ell_p \to \ell_p$ — зважений оператор зсуву на одну позицію ліворуч, тобто

$$(Yx)_n = c_n x_{n+1}, \qquad n \geq 1,$$

де $\{c_n\}_{n\geq 1}$ — обмежена послідовність коефіцієнтів зсуву.

Тоді операторне рівняння (2.1) має єдиний обмежений лінійний розв'язок $X : \ell_p \to \ell_p$, який також є зваженим оператором зсуву ліворуч і задається формулою

$$(Xx)_n = \frac{c_n}{a_n - b_{n+1}}\,x_{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

2.4 Операторне рівняння з недіагональними операторами A і B

Розглянемо частковий випадок рівняння (2.1) з операторами A та B , що мають складнішу структуру.

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, \dots),$$
$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (4x_1 + x_2,\ -2x_1 + x_2,\ 4x_3 + x_4,\ -2x_3 + x_4, \dots).$$

Оператор Y є зваженим зсувом вправо, тобто для будь-якого $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_p$ маємо

$$Y(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \dots),$$

або в координатній формі:

$$(Yx)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1}\, x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Мета полягає у знаходженні обмеженого оператора $X : \ell_p \to \ell_p$, який задовольняє рівняння (2.1).

Спектри операторів і застосування інтегральної формули

Зазначимо, що оператор A переставляє координати попарно: для кожного $n \geq 1$ пара (x_{2n-1}, x_{2n}) переходить у (x_{2n}, x_{2n-1}). На підпросторі

$$H_n = \mathrm{span}\{e_{2n-1}, e_{2n}\}$$

дія оператора A задається матрицею

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A_n^2 = I$, то спектр матриці A_n складається з чисел $\{-1, 1\}$. Звідси спектр оператора A має вигляд

$$\sigma(A) = \{-1, 1\}.$$

Аналогічно, оператор B діє попарно на кожному підпросторі H_n:

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (4x_1 + x_2,\ -2x_1 + x_2,\ 4x_3 + x_4,\ -2x_3 + x_4, \dots),$$

тому в базисі $\{e_{2n-1}, e_{2n}\}$ він має матрицю

$$B_n = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо її власні значення:

$$\det(B_n - \mu I) = \det \begin{pmatrix} 4-\mu & 1 \\ -2 & 1-\mu \end{pmatrix} = (4-\mu)(1-\mu) + 2 = \mu^2 - 5\mu + 6 = (\mu-2)(\mu-3).$$

Отже, спектр матриці B_n дорівнює $\{2, 3\}$, і тому

$$\sigma(B) = \{2, 3\}.$$

Таким чином,

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \{-1, 1\} \cap \{2, 3\} = \varnothing,$$

тобто спектри операторів A та B не перетинаються.

Оскільки ця умова виконується, ми можемо скористатися інтегральною формулою (2.3) для знаходження розв'язку рівняння (2.1), де Γ_A та Γ_B — замкнені позитивно орієнтовані контури, які охоплюють спектри операторів A та B відповідно і не мають спільних точок.

Резольвенти операторів

Резольвента оператора A. Для довільного комплексного числа $\lambda \notin \sigma(A)$, тобто $\lambda \neq \pm 1$, розглянемо дію оператора $A - \lambda I$ на вектор $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$:

$$(A - \lambda I)(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2 - \lambda x_1,\ x_1 - \lambda x_2,\ x_4 - \lambda x_3,\ x_3 - \lambda x_4, \dots).$$

Нехай

$$(A - \lambda I)x = y, \qquad x = (x_n)_{n\geq 1}, \quad y = (y_n)_{n\geq 1}.$$

Тоді для кожної пари координат (x_{2n-1}, x_{2n}) маємо систему

$$\begin{cases} x_{2n} - \lambda x_{2n-1} = y_{2n-1}, \\ x_{2n-1} - \lambda x_{2n} = y_{2n}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо

$$\Delta_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda) = 1 - \lambda^2,$$

і

$$x_{2n-1} = \frac{y_{2n} + \lambda y_{2n-1}}{(1-\lambda)(1+\lambda)},$$

$$x_{2n} = \frac{y_{2n-1} + \lambda y_{2n}}{(1-\lambda)(1+\lambda)}.$$

Отже, резольвента оператора A має вигляд

$$\big((A - \lambda I)^{-1} y\big)_{2n-1} = \frac{y_{2n} + \lambda y_{2n-1}}{(1-\lambda)(1+\lambda)}, \qquad \big((A - \lambda I)^{-1} y\big)_{2n} = \frac{y_{2n-1} + \lambda y_{2n}}{(1-\lambda)(1+\lambda)}, \quad n \geq 1.$$

Резольвента оператора B. Аналогічно, для довільного комплексного числа $\mu \notin \sigma(B) = \{2,3\}$ розглянемо

$$(B-\mu I)(x_1,x_2,x_3,\dots) = \big((4-\mu)x_1 + x_2,\ -2x_1 + (1-\mu)x_2,\\ (4-\mu)x_3 + x_4,\ -2x_3 + (1-\mu)x_4,\dots\big).$$

Нехай

$$(B-\mu I)x = y, \qquad x = (x_n)_{n\geq 1}, \quad y = (y_n)_{n\geq 1}.$$

Тоді для кожної пари координат (x_{2n-1}, x_{2n}) маємо систему

$$\begin{cases} (4-\mu)x_{2n-1} + x_{2n} = y_{2n-1}, \\ -2x_{2n-1} + (1-\mu)x_{2n} = y_{2n}. \end{cases}$$

Її визначник дорівнює

$$\Delta_B(\mu) = (4-\mu)(1-\mu) + 2 = \mu^2 - 5\mu + 6 = (\mu-2)(\mu-3),$$

і розв'язок має вигляд

$$x_{2n-1} = \frac{(1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)},$$
$$x_{2n} = \frac{2y_{2n-1} + (4-\mu)y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)}.$$

Отже,

$$\big((B-\mu I)^{-1}y\big)_{2n-1} = \frac{(1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)},$$

$$\big((B-\mu I)^{-1}y\big)_{2n} = \frac{2y_{2n-1} + (4-\mu)y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)}, \qquad n \geq 1.$$

Підстановка у формулу та послідовна дія операторів

Дія оператора $(B-\mu I)^{-1}$.

Нехай

$$y=(y_1,y_2,y_3,\dots),\qquad z=(z_1,z_2,z_3,\dots):=(B-\mu I)^{-1}y.$$

Тоді для кожного $n\ge 1$ маємо

$$z_{n-1}=\frac{(1-\mu)y_{2n-1}-y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)},\qquad z_n=\frac{2y_{2n-1}+(4-\mu)y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)}.$$

Дія оператора Y на z.

Нехай

$$z=(z_1,z_2,z_3,\dots),\qquad \omega=Yz=(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\dots).$$

За означенням оператора Y:

$$Y(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,\ x_1,\ \tfrac{1}{2}x_2,\ \tfrac{1}{3}x_3,\dots).$$

Звідси координатно отримуємо:

$$\omega_1=0,\qquad \omega_2=z_1,\qquad \omega_k=\frac{1}{k-1}\,z_{k-1},\quad k\ge 3.$$

Для зручності введемо позначення

$$s_n=\frac{1}{2n-2},\qquad t_n=\frac{1}{2n-1},$$

тоді

$$\omega_{2n-1}=s_n\,z_{2n-2},\qquad \omega_{2n}=t_n\,z_{2n-1}.$$

Дія оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ на ω.

Нехай

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots), \qquad v = (v_1, v_2, v_3, \ldots) := (A-\lambda I)^{-1}\omega.$$

Тоді дія оператора на парних та непарних координатах задається формулами:

$$v_{2n-1} = \frac{\lambda\,\omega_{2n-1} + \omega_{2n}}{1-\lambda^2}, \qquad v_{2n} = \frac{\omega_{2n-1} + \lambda\,\omega_{2n}}{1-\lambda^2}.$$

Підстановка явних значень для ω.

Випадок $n=1$.

$$v_1 = \frac{z_1}{1-\lambda^2}, \qquad v_2 = \frac{\lambda z_1}{1-\lambda^2}.$$

Випадок $n \geq 2$.

$$v_{2n-1} = \frac{\lambda\, s_n\, z_{2n-2} + t_n\, z_{2n-1}}{1-\lambda^2}, \qquad v_{2n} = \frac{s_n\, z_{2n-2} + \lambda\, t_n\, z_{2n-1}}{1-\lambda^2}.$$

Підстановка у інтегральну формулу для першої пари координат $(n=1)$

Розглянемо випадок $n=1$. Маємо вже знайдені координати вектора $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots)$:

$$z_1 = \frac{(1-\mu)y_1 - y_2}{(\mu-2)(\mu-3)}, \qquad z_2 = \frac{2y_1 + (4-\mu)y_2}{(\mu-2)(\mu-3)}.$$

Відомо, що дія оператора Y задає:

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = z_1.$$

Тому після застосування резольвенти оператора A маємо:

$$v_1 = \frac{z_1}{1-\lambda^2}, \qquad v_2 = \frac{\lambda z_1}{1-\lambda^2}.$$

Підставляючи z_1, отримуємо

$$v_1 = \frac{(1-\mu)y_1 - y_2}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)},$$

$$v_2 = \frac{\lambda\big((1-\mu)y_1 - y_2\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)}.$$

Підстановка у підінтегральну формулу

Для першої пари координат операторного рівняння отримуємо:

$$(Xy)_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{(1-\mu)y_1 - y_2}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

$$(Xy)_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{\lambda\big((1-\mu)y_1 - y_2\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu.$$

Підстановка для другої та наступних пар координат ($n \geq 2$)

Для другої та кожної наступної пари координат підставимо всі отримані раніше вирази в одну систему.

Спершу запишемо координати вектора $z = (z_k)_{k\geq 1}$:

$$z_{2n-2} = \frac{2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}}{(\mu-2)(\mu-3)}, \qquad z_{2n-1} = \frac{(1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}}{(\mu-2)(\mu-3)}.$$

За означенням оператора Y та введеними позначеннями

$$s_n = \frac{1}{2n-2}, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1},$$

маємо

$$\omega_{2n-1} = s_n\, z_{2n-2}, \qquad \omega_{2n} = t_n\, z_{2n-1}.$$

Після застосування резольвенти оператора A:

$$v_{2n-1} = \frac{\lambda\,\omega_{2n-1} + \omega_{2n}}{1-\lambda^2}, \qquad v_{2n} = \frac{\omega_{2n-1} + \lambda\,\omega_{2n}}{1-\lambda^2}.$$

Підставимо ω через z та y.

Для v_{2n-1} маємо:

$$v_{2n-1} = \frac{1}{1-\lambda^2}\big(\lambda\,\omega_{2n-1} + \omega_{2n}\big) = \frac{1}{1-\lambda^2}\big(\lambda s_n z_{2n-2} + t_n z_{2n-1}\big).$$

Підставляючи вирази для z_{2n-2} та z_{2n-1}, отримаємо

$$v_{2n-1} = \frac{1}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)}\Big[\lambda s_n\big(2y_{2n-3}+(4-\mu)y_{2n-2}\big)+t_n\big((1-\mu)y_{2n-1}-y_{2n}\big)\Big].$$

Аналогічно для v_{2n}:

$$v_{2n} = \frac{1}{1-\lambda^2}\big(\omega_{2n-1} + \lambda\,\omega_{2n}\big) = \frac{1}{1-\lambda^2}\big(s_n z_{2n-2} + \lambda t_n z_{2n-1}\big),$$

тому

$$v_{2n} = \frac{1}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)}\Big[s_n\big(2y_{2n-3}+(4-\mu)y_{2n-2}\big)+\lambda t_n\big((1-\mu)y_{2n-1}-y_{2n}\big)\Big].$$

Підстановка у підінтегральну формулу.

Тоді для координат $(Xy)_{2n-1}$ та $(Xy)_{2n}$, $n \geq 2$, маємо

$$(Xy)_{2n-1} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{\lambda s_n\big(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}\big) + t_n\big((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

$$(Xy)_{2n} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{s_n\big(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}\big) + \lambda t_n\big((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

де

$$s_n = \frac{1}{2n-2}, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Обчислення інтегралів для першої пари координат

Переходимо до обчислення інтегралів. Маємо:

$$(Xy)_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{(1-\mu)y_1 - y_2}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu.$$

Позначимо

$$Q(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda^2}.$$

Позначимо

$$f(\mu) = \frac{(1-\mu)y_1 - y_2}{(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}.$$

Тоді внутрішній інтеграл за змінною μ має вигляд

$$\int_{\Gamma_B} f(\mu)\, d\mu = 2\pi i\big(\mathrm{Res}_{\mu=2}\, f(\mu) + \mathrm{Res}_{\mu=3}\, f(\mu)\big).$$

Обчислимо лишки:

$$\mathrm{Res}_{\mu=2}\, f(\mu) = \frac{(1-2)y_1 - y_2}{(2-3)(\lambda-2)} = \frac{y_1 + y_2}{\lambda - 2},$$

$$\operatorname{Res}_{\mu=3} f(\mu) = \frac{(1-3)y_1 - y_2}{(3-2)(\lambda-3)} = \frac{-2y_1 - y_2}{\lambda - 3}.$$

Тоді

$$(Xy)_1 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A} Q(\lambda)\, 2\pi i \left[\frac{y_1+y_2}{\lambda-2} - \frac{2y_1+y_2}{\lambda-3}\right] d\lambda,$$

або

$$(Xy)_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} \frac{1}{1-\lambda^2} \left[\frac{y_1+y_2}{\lambda-2} - \frac{2y_1+y_2}{\lambda-3}\right] d\lambda.$$

Позначимо

$$f(\lambda) = \frac{y_1+y_2}{\lambda-2} - \frac{2y_1+y_2}{\lambda-3}, \qquad g_1(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda^2} f(\lambda).$$

Полюси в $\lambda = \pm 1$.

$$\operatorname{Res}_{\lambda=1}\ g_1 = -\frac{1}{2} f(1), \qquad \operatorname{Res}_{\lambda=-1}\ g_1 = \frac{1}{2} f(-1).$$

Отже,

$$(Xy)_1 = \operatorname{Res}_{\lambda=1} g_1 + \operatorname{Res}_{\lambda=-1} g_1 = \frac{1}{2}\big(f(-1) - f(1)\big).$$

Підставимо значення:

$$f(1) = \frac{y_1+y_2}{1-2} - \frac{2y_1+y_2}{1-3} = -(y_1+y_2) + \frac{2y_1+y_2}{2} = -\frac{y_2}{2},$$

$$f(-1) = \frac{y_1+y_2}{-1-2} - \frac{2y_1+y_2}{-1-3} = -\frac{y_1+y_2}{3} + \frac{2y_1+y_2}{4} = \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{12}y_2.$$

Тоді

$$(Xy)_1 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{12}y_2\right) + \frac{y_2}{2}\right) = \frac{1}{12}y_1 + \frac{5}{24}y_2.$$

Обчислення для другої координати

Аналогічно:

$$(Xy)_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{\lambda\big((1-\mu)y_1 - y_2\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\,d\lambda\,d\mu.$$

Внутрішній інтеграл:

$$\int_{\Gamma_B} \frac{\lambda\big((1-\mu)y_1 - y_2\big)}{(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\,d\mu = \lambda 2\pi i\left(\frac{y_1+y_2}{\lambda-2} - \frac{2y_1+y_2}{\lambda-3}\right).$$

Отже

$$(Xy)_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\left[\frac{y_1+y_2}{\lambda-2} - \frac{2y_1+y_2}{\lambda-3}\right]d\lambda.$$

Позначимо

$$f(\lambda) = \frac{y_1+y_2}{\lambda-2} - \frac{2y_1+y_2}{\lambda-3}, \qquad g_2(\lambda) = \frac{\lambda}{1-\lambda^2}f(\lambda).$$

Полюси $\lambda = \pm 1$:

$$\mathrm{Res}_{\lambda=1}\, g_2(\lambda) = -\frac{1}{2}f(1), \qquad \mathrm{Res}_{\lambda=-1}\, g_2(\lambda) = -\frac{1}{2}f(-1).$$

Тоді

$$(Xy)_2 = -\frac{1}{2}(f(1) + f(-1)).$$

Підставимо значення:

$$f(1) = \frac{y_1+y_2}{1-2} - \frac{2y_1+y_2}{1-3} = -\frac{y_2}{2},$$

$$f(-1) = -\frac{y_1+y_2}{3} + \frac{2y_1+y_2}{4} = \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{12}y_2.$$

Тоді

$$(Xy)_2 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{y_2}{2} + \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{12}y_2\right) = -\frac{1}{12}y_1 + \frac{7}{24}y_2.$$

Отже, для $n = 1$ маємо

$$\begin{pmatrix} (Xy)_1 \\ (Xy)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{24} \\ -\frac{1}{12} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обчислення інтегралу для $(Xy)_{2n-1}$

З попередніх міркувань маємо для $n \geq 2$:

$$(Xy)_{2n-1} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{\lambda\, s_n\big(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}\big) + t_n\big((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

де

$$s_n = \frac{1}{2n-2}, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Інтегрування за μ по контуру Γ_B. Фіксуємо $\lambda \in \Gamma_A$ і розглянемо внутрішній інтеграл

$$J_n(\lambda) = \int_{\Gamma_B} \frac{\lambda s_n(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}) + t_n((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n})}{(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\mu.$$

Позначимо підінтегральну функцію

$$F_n = \frac{\lambda s_n(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}) + t_n((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n})}{(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}.$$

Полюси за змінною μ прості й знаходяться в точках $\mu = 2$ та $\mu = 3$. Застосовуючи формулу лишків, одержуємо

$$J_n(\lambda) = 2\pi i\big(\operatorname{Res}_{\mu=2} F_n + \operatorname{Res}_{\mu=3} F_n\big).$$

Лишок у точці $\mu = 2$.

$$\operatorname{Res}_{\mu=2} F_n = \frac{\lambda\, s_n\big(2y_{2n-3} + (4-2)y_{2n-2}\big) + t_n\big((1-2)y_{2n-1} - y_{2n}\big)}{(2-3)(\lambda-2)}.$$

Спрощуючи,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mu=2} F_n &= \frac{\lambda s_n(2y_{2n-3} + 2y_{2n-2}) + t_n(-y_{2n-1} - y_{2n})}{-1(\lambda-2)}\\ &= \frac{-2\lambda s_n y_{2n-3} - 2\lambda s_n y_{2n-2} + t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{\lambda-2}.\end{aligned}$$

Лишок у точці $\mu = 3$.

$$\operatorname{Res}_{\mu=3} F_n = \frac{\lambda\, s_n\big(2y_{2n-3} + (4-3)y_{2n-2}\big) + t_n\big((1-3)y_{2n-1} - y_{2n}\big)}{(3-2)(\lambda-3)}.$$

Маємо

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{\mu=3} F_n &= \frac{\lambda\, s_n\big(2y_{2n-3} + y_{2n-2}\big) + t_n(-2y_{2n-1} - y_{2n})}{1(\lambda-3)}\\ &= \frac{2\lambda\, s_n y_{2n-3} + \lambda\, s_n y_{2n-2} - 2t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{\lambda-3}.\end{aligned}$$

Отже,

$$J_n(\lambda) = 2\pi i\left(\frac{-2\lambda s_n y_{2n-3} - 2\lambda s_n y_{2n-2} + t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{\lambda-2} + \right.$$

$$
+\frac{2\lambda s_n y_{2n-3} + \lambda s_n y_{2n-2} - 2t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{\lambda - 3}\Bigg).
$$

Інтегрування за λ по контуру Γ_A. Повертаємося до формули для $(Xy)_{2n-1}$ і підставляємо $J_n(\lambda)$:

$$
(Xy)_{2n-1} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A} \frac{1}{1-\lambda^2}\, J_n(\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} \frac{1}{1-\lambda^2}\, g(\lambda)\, d\lambda,
$$

де

$$
\begin{aligned}
g(\lambda) = {} & \frac{-2\lambda\, s_n y_{2n-3} - 2\lambda\, s_n y_{2n-2} + t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{\lambda - 2} \\
& + \frac{2\lambda\, s_n y_{2n-3} + \lambda\, s_n y_{2n-2} - 2t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{\lambda - 3}.
\end{aligned}
$$

Оскільки $1-\lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda)$, полюси інтегранта за змінною λ знаходяться в точках $\lambda = 1$ та $\lambda = -1$, і

$$
(Xy)_{2n-1} = \mathrm{Res}_{\lambda=1}\, g(\lambda) + \mathrm{Res}_{\lambda=-1}\, g(\lambda).
$$

Лишки за $\lambda = 1$ та $\lambda = -1$.

Маємо

$$
\mathrm{Res}_{\lambda=1}\, g(\lambda) = \lim_{\lambda\to 1} \frac{\lambda - 1}{1-\lambda^2}\, g(\lambda) = -\frac{1}{2}\, g(1),
$$
$$
\mathrm{Res}_{\lambda=-1}\, g(\lambda) = \lim_{\lambda\to -1} \frac{\lambda + 1}{1-\lambda^2}\, g(\lambda) = \frac{1}{2}\, g(-1).
$$

Обчислимо $g(1)$ та $g(-1)$.

Підставляючи $\lambda = 1$, одержуємо:

$$g(1) = \frac{-2s_n y_{2n-3} - 2s_n y_{2n-2} + t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{1-2} + \frac{2s_n y_{2n-3} + s_n y_{2n-2} - 2t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{1-3},$$

тобто

$$g(1) = s_n y_{2n-3} + \frac{3}{2} s_n y_{2n-2} - \frac{1}{2} t_n y_{2n}.$$

Аналогічно при $\lambda = -1$:

$$g(-1) = \frac{2s_n y_{2n-3} + 2s_n y_{2n-2} + t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{-1-2} + \frac{-2s_n y_{2n-3} - s_n y_{2n-2} - 2t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{-1-3},$$

звідки

$$g(-1) = -\frac{1}{6} s_n y_{2n-3} - \frac{5}{12} s_n y_{2n-2} + \frac{1}{6} t_n y_{2n-1} - \frac{1}{12} t_n y_{2n}.$$

Тоді

$$(Xy)_{2n-1} = \mathrm{Res}_{\lambda=1}\, g(\lambda) + \mathrm{Res}_{\lambda=-1}\, g(\lambda) = -\frac{1}{2} g(1) + \frac{1}{2} g(-1).$$

Підставляючи $g(1)$ та $g(-1)$ та зводячи подібні доданки, одержуємо

$$(Xy)_{2n-1} = -\frac{7}{12} s_n y_{2n-3} - \frac{23}{24} s_n y_{2n-2} + \frac{1}{12} t_n y_{2n-1} + \frac{5}{24} t_n y_{2n}, \qquad n \geq 2,$$

де, нагадаємо,

$$s_n = \frac{1}{2n-2}, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Обчислення інтегралу для $(Xy)_{2n}$

Переходимо до обчислення інтегралу

$$(Xy)_{2n} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B} \frac{s_n(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}) + \lambda t_n((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n})}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

де

$$s_n = \frac{1}{2n-2}, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Позначимо

$$P_n = \frac{s_n(2y_{2n-3} + (4-\mu)y_{2n-2}) + t_n\big((1-\mu)y_{2n-1} - y_{2n}\big)}{(1-\lambda^2)(\mu-2)(\mu-3)(\lambda-\mu)}.$$

Тоді внутрішній інтеграл за змінною μ дорівнює

$$\int_{\Gamma_B} P_n\, d\mu = 2\pi i\big(\operatorname{Res}_{\mu=2} P_n + \operatorname{Res}_{\mu=3} P_n\big).$$

Обчислення залишків за змінною μ

Лишок при $\mu = 2$.

$$\operatorname{Res}_{\mu=2} P_n = \frac{s_n(2y_{2n-3} + (4-2)y_{2n-2}) + \lambda t_n((1-2)y_{2n-1} - y_{2n})}{(2-3)(\lambda-2)}$$

$$= \frac{s_n(2y_{2n-3} + 2y_{2n-2}) + \lambda t_n(-y_{2n-1} - y_{2n})}{-(\lambda-2)}$$

$$= \frac{-2s_n y_{2n-3} - 2s_n y_{2n-2} + \lambda t_n y_{2n-1} + \lambda t_n y_{2n}}{\lambda-2}.$$

Лишок при $\mu = 3$.

$$\operatorname{Res}_{\mu=3} P_n = \frac{s_n(2y_{2n-3} + (4-3)y_{2n-2}) + \lambda t_n((1-3)y_{2n-1} - y_{2n})}{(3-2)(\lambda-3)}$$

$$= \frac{2s_n y_{2n-3} + s_n y_{2n-2} - 2\lambda t_n y_{2n-1} - \lambda t_n y_{2n}}{\lambda - 3}.$$

Тоді

$$(Xy)_{2n} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{1-\lambda^2}\int_{\Gamma_A}\left[\frac{-2s_n y_{2n-3} - 2s_n y_{2n-2} + \lambda t_n y_{2n-1} + \lambda t_n y_{2n}}{\lambda-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2s_n y_{2n-3} + s_n y_{2n-2} - 2\lambda t_n y_{2n-1} - \lambda t_n y_{2n}}{\lambda-3}\right] d\lambda.$$

Інтегрування за змінною λ

Записуємо інтеграл у вигляді

$$(Xy)_{2n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A} \frac{g(\lambda)}{1-\lambda^2}\, d\lambda,$$

де функція

$$g(\lambda) = \frac{-2s_n y_{2n-3} - 2s_n y_{2n-2} + \lambda t_n y_{2n-1} + \lambda t_n y_{2n}}{\lambda-2}$$

$$+ \frac{2s_n y_{2n-3} + s_n y_{2n-2} - 2\lambda t_n y_{2n-1} - \lambda t_n y_{2n}}{\lambda-3}.$$

Оскільки

$$1 - \lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda),$$

то маємо два полюси: $\lambda = 1$ і $\lambda = -1$.

Лишок при $\lambda = 1$.

$$\operatorname{Res}_{\lambda=1} g(\lambda) = -\frac{1}{2} g(1).$$

Обчислюємо $g(1)$:

$$g(1) = \frac{-2s_n y_{2n-3} - 2s_n y_{2n-2} + t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{1-2}$$
$$+ \frac{2s_n y_{2n-3} + s_n y_{2n-2} - 2t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{1-3}$$
$$= s_n y_{2n-3} + \frac{3}{2} s_n y_{2n-2} - \frac{1}{2} t_n y_{2n}.$$

Лишок при $\lambda = -1$.

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-1} g(\lambda) = \frac{1}{2} g(-1),$$

$$g(-1) = \frac{-2s_n y_{2n-3} - 2s_n y_{2n-2} - t_n y_{2n-1} - t_n y_{2n}}{-3}$$
$$+ \frac{-2s_n y_{2n-3} - s_n y_{2n-2} + 2t_n y_{2n-1} + t_n y_{2n}}{-4}$$
$$= \frac{7}{6} s_n y_{2n-3} + \frac{11}{12} s_n y_{2n-2} - \frac{1}{6} t_n y_{2n-1} + \frac{1}{12} t_n y_{2n}.$$

Маємо

$$(Xy)_{2n} = \operatorname{Res}_{\lambda=1} g(\lambda) + \operatorname{Res}_{\lambda=-1} g(\lambda).$$

З попередніх обчислень:

$$\operatorname{Res}_{\lambda=1} g(\lambda) = -\frac{1}{2} s_n y_{2n-3} - \frac{3}{4} s_n y_{2n-2} + \frac{1}{4} t_n y_{2n},$$

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-1} g(\lambda) = \frac{7}{12} s_n y_{2n-3} + \frac{11}{24} s_n y_{2n-2} - \frac{1}{12} t_n y_{2n-1} + \frac{1}{24} t_n y_{2n}.$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{\lambda=1} g(\lambda) + \operatorname{Res}_{\lambda=-1} g(\lambda) &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\right) s_n y_{2n-3} + \left(-\frac{3}{4}+\frac{11}{24}\right) s_n y_{2n-2} \\
&\quad + \left(0-\frac{1}{12}\right) t_n y_{2n-1} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right) t_n y_{2n} \\
&= \frac{1}{12} s_n y_{2n-3} - \frac{7}{24} s_n y_{2n-2} - \frac{1}{12} t_n y_{2n-1} + \frac{7}{24} t_n y_{2n}.
\end{aligned}
$$

Отже, для $n \geq 2$:

$$
(Xy)_{2n} = \frac{1}{12} s_n y_{2n-3} - \frac{7}{24} s_n y_{2n-2} - \frac{1}{12} t_n y_{2n-1} + \frac{7}{24} t_n y_{2n}, \qquad \begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2n-2}, \\ t_n &= \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}
$$

Загальний результат

Нехай A та B — обмежені лінійні оператори у просторі ℓ_p, задані покоординатно формулами

$$
A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, \dots),
$$

$$
B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (4x_1 + x_2,\ -2x_1 + x_2,\ 4x_3 + x_4,\ -2x_3 + x_4, \dots),
$$

а Y — зважений оператор зсуву вправо:

$$
Y(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, \tfrac{1}{2} x_2, \tfrac{1}{3} x_3, \dots), \qquad (Yx)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n-1} x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}
$$

Тоді єдиний обмежений розв'язок операторного рівняння (2.1) можна записати покоординатно у такому вигляді:

Випадок $n = 1$.

$$(Xy)_1 = \frac{1}{12}y_1 + \frac{5}{24}y_2, \qquad (Xy)_2 = -\frac{1}{12}y_1 + \frac{7}{24}y_2.$$

Випадок $n \geq 2$.

$$(Xy)_{2n-1} = -\frac{7}{12}s_n y_{2n-3} - \frac{23}{24}s_n y_{2n-2} + \frac{1}{12}t_n y_{2n-1} + \frac{5}{24}t_n y_{2n},$$

$$(Xy)_{2n} = \frac{1}{12}s_n y_{2n-3} - \frac{7}{24}s_n y_{2n-2} - \frac{1}{12}t_n y_{2n-1} + \frac{7}{24}t_n y_{2n}.$$

де

$$s_n = \frac{1}{2n-2}, \qquad t_n = \frac{1}{2n-1}.$$

Висновки

У магістерській роботі було розглянуто операторне рівняння $AX - XB = Y$ у просторі ℓ_p для класу операторів, що мають спеціальну структуру та дозволяють отримати розв'язок у явному вигляді. Дослідження охоплювало випадки, коли оператори A і B є діагональними, а оператор Y задається у вигляді зваженого зсуву. Це дало можливість простежити, як вибір напрямку зсуву та властивості власних чисел впливають на існування та форму розв'язку.

Окрім діагональних операторів, було проаналізовано окремий випадок, у якому оператори діють на координати попарно. Це дало можливість показати, що використані методи застосовні не лише до діагональних операторів, а й до операторів зі структурованою дією на підпростори.

У роботі сформульовано та доведено умови існування єдиного обмеженого розв'язку рівняння $AX - XB = Y$ та отримано явні формули для цього розв'язку з урахуванням власних значень операторів A і B та коефіцієнтів зсуву. Наведені приклади продемонстрували застосування теоретичних результатів і підтвердили коректність одержаних формул.

Здобуті результати показують, що операторні рівняння з чітко визначеною структурою вхідних операторів можуть бути розв'язані аналітичними методами, а запропонований підхід може бути використаний і для ширшого класу лінійних операторів у нескінченновимірних просторах.

Список використаних джерел

[1] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part II: Spectral Theory.* Wiley, 1988.

[2] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, 1995.

[3] R. Bhatia, P. Rosenthal, How and why to solve $AX - XB = Y$. *Bull. London Math. Soc.*, 1997.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis.* Springer, 1990.

[5] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory.* Wiley, 1988.

[6] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1978.

[7] В. Ю. Матлаш, А. В. Сиротенко, Розв'язки лінійного операторного рівняння в просторі $\mathbb{R}^2$. *Збірник тез X Всеукраїнської наукової конференсії молодих математиків*, 2021, pp. 31–32.

[8] Н. О. Антонюк, А. В. Сиротенко, Розв'язки лінійного операторного рівняння в просторі $\mathbb{R}^3$. *Збірник тез XI Всеукраїнської наукової конференсії молодих математиків*, 2023.

[9] Збірник задач з функціонального аналізу (розділи: «Банахові простори», «Гільбертові простори», «Спряжені простори», «Теорія операторів») / Упорядники: О. Ю. Константінов, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. К.: ВПЦ «Київський університет», 2004. — 124 с.

[10] Newton I., Colson J., *The Method of Fluxions and Infinite Series; With Its Application to the Geometry of Curve-Lines*. London: Printed by Henry Woodfall, 1736.

[11] Poincare H., Sur les equations linéaires aux différentielles ordinaire et aux différences finies. *Amer. J. Math.*, 1885, **7**, 203–258.

[12] Далецький Ю. Л., Крейн М. Г., *Стійкість рішень диференціальних рівнянь в банахових просторах*. М.: Наука, 1970. — 536 с.

[13] Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Ф., *Функціональний аналіз: курс лекцій*. Львів: Видавець І. Є. Чижиков, 2014. — 559 с.

[14] Horodnii M. F., Syrotenko A. V., PTH Power Integrable Solutions of an Operator-Differential Equation. *Journal of Mathematical Sciences*, Jan 2016, Vol. 212, Issue 4, pp. 371–379.

[15] Мельник Т. А., *Комплексний аналіз: підручник*. К.: ВПЦ «Київський університет», 2015. — 192 с.

[16] А. О. Охремчук,А. В. Сиротенко, Розв'язки лінійного операторного рівняння у просторі ℓ_p. *Збірник тез XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків*, 2025 р.