

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Інститут математики НАН України

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Волинський національний університет імені Лесі Українки

XX МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

17–20 листопада 2025 р.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
м. Київ

**XX Міжнародна наукова конференція
імені академіка Михайла Кравчука**
<https://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf-2025/>

Почесний голова програмного комітету:

Вірченко Н.О. д.ф.-м.н., КПП ім. Ігоря Сікорського

Члени програмного комітету:

Клесов О.І.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Безущак О.О.	д.ф.-м.н., професор, КНУ ім. Тараса Шевченка
Буценко Ю.П.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Василик О.І.	д.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Гембарська С.Б.	к.ф.-м.н., доцент, ВНУ ім. Лесі Українки
Іванов О.В.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Романюк А.С.	д.ф.-м.н., професор, ІМ НАН України
Самусенко П.Ф.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Сердюк А.С.	д.ф.-м.н., професор, ІМ НАН України
Соколенко І.В.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Тимошенко О.А.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Торбін Г.М.	д.ф.-м.н., професор, УДУ ім. Михайла Драгоманова

Члени організаційного комітету:

Клесов О.І. (голова)	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Галганов О.А.	аспірант, КПП ім. Ігоря Сікорського
Задерей Н.М.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Нефьодова Г.Д.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Новікова Ю.В.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Погребіцька М.М.	асистент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Працьовитий М.В.	д.ф.-м.н., професор, УДУ ім. Михайла Драгоманова
Приходько Ю.Є.	к.ф.-м.н., асистент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Яцюк С.М.	к.п.н., доцент, ВНУ ім. Лесі Українки

Секції:

1. Математичний аналіз та застосування.
2. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування.
3. Теорія ймовірностей та математична статистика.
4. Інформаційні системи та технології в освіті.
5. Історія і методика викладання математики та інформатики.
6. Математичні методи у наукових дослідженнях

Міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука відбувається раз на два роки, починаючи з 1992 року.

<https://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf-2023/history/>

З 2020 року конференції здійснюються на платформі Zoot. Всі надіслані матеріали рецензуються та перевіряються на плагіат.

Пленарні доповіді	11
<i>A. Olenko</i> <i>On stochastic partial differential equations with random initial conditions</i>	12
<i>О.Л. Зуєв</i> <i>Теорія керування: класичні задачі та нові розв'язки</i>	13
Мінікурс 1.	
Апроксимаційні та гладкісні характеристики функціональних множин	14
<i>A.C. Сердюк</i> <i>Найкращі наближення і наближення сумами Фур'є на класах згортки</i>	15
<i>A.L. Shydlich</i> <i>Generalized Zernike polynomials, their properties and applications</i>	16
<i>S.Ya. Yanchenko</i> <i>Approximating characteristics of Nikol'skii–Besov classes of periodic functions in Lebesgue subspaces</i>	17
Мінікурс 2.	
Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь	19
<i>O.V. Kapustyan</i> <i>Attractors for infinite-dimensional impulsive systems</i>	20
<i>П.Ф. Самусенко</i> <i>Асимптотичні методи в теорії диференціально-алгебраїчних систем рівнянь</i>	22
<i>O.M. Stanzhytskyi</i> <i>Existence, uniqueness solution and invariant measure results for neutral FSDEs in Hilbert spaces</i>	24
Секція 1.	
Математичний аналіз та застосування	25
<i>K. Adegoke, R. Frontczak, T. Goy</i> <i>Alternating binomial series and related Catalan and harmonic identities</i>	26
<i>S.O. Chaichenko, V.V. Savchuk, A.L. Shydlich</i> <i>Best weighted approximation of some kernels on the real axis</i>	28
<i>V.M. Gorbachuk, Yu.V. Spivak</i> <i>On the exponential stability of solutions of differential equations in a Banach space</i>	30
<i>O.V. Kovalenko</i> <i>On discretization of some extremal problems</i>	32
<i>A.V. Lutsenko, A.I. Rodiuk</i> <i>Higher-Order Derivatives in Differential Cryptanalysis</i>	34
<i>N.V. Parfinovych, A.A. Selivanov</i> <i>Exact values of best approximations for classes of differentiable functions by splines of deficiency 2</i>	36
<i>K.V. Pozharska, A.S. Romanyuk</i> <i>Orders of the best sparse trigonometric approximations of the Nikol'skii–Besov function classes in the Lebesgue subspaces</i>	37

<i>V.V. Savchuk, M.V. Savchuk</i> <i>Generalization of the Schwarz–Pick Inequality and Its Applications to the Extremal Problems of Approximation of Holomorphic Functions</i>	39
<i>A.S. Serdyuk, T.A. Stepaniuk</i> <i>Approximation by Lagrange interpolation polynomials on the classes of convolutions</i>	40
<i>O.L. Shvai, K.V. Pozharska</i> <i>On the best m-term trigonometric approximations of Stepanets classes of functions of many variables</i>	42
<i>I. Ya. Spector'sky, V. M. Statkevych, O. V. Stus</i> <i>Matrix-graphic simulation of social network with external impact: ergodic properties</i>	43
<i>I.B. Алексеева, Я.М. Сатур</i> <i>Робастний підхід до розв'язання матричних ігор з невизначеностями</i>	45
<i>A.C. Александрова, В.О. Білий, О.Ю. Колесов</i> <i>$(k + 1)$-діагональні матриці та їх зв'язок з поворотними послідовностями k-го порядку</i>	47
<i>С.Б. Гембарська</i> <i>Ортопоперечники класів періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості</i>	49
<i>I.B. Денега</i> <i>Про добутки конформних радіусів областей відносно точок деякого відрізка</i>	51
<i>П.Ф. Жук, С.О. Карахім</i> <i>Аналіз необоротного механізму Боттса–Моралеса у квазістаціонарному наближенні</i> .	53
<i>М.П. Мороз</i> <i>Принцип фрактальної еквівалентності для розкладів Перрона</i>	55
<i>О.О. Нікорак</i> <i>Один приклад сингулярної функції, пов'язаної з ланцюговим зображенням чисел</i>	57
<i>О.В. Островська</i> <i>Клас зображень віківських алгебр, породжених ізометріями</i>	59
<i>С.П. Ратушняк</i> <i>Функції з фрактальними множинами рівнів</i>	60
<i>Д.М. Сергійко</i> <i>Марковське зображення чисел і фрактальні функції</i>	62
<i>A.C. Сердюк, I.B. Соколенко</i> <i>Оцінки поточкових відхилень інтерполяційних тригонометричних поліномів на класах Вейля–Надя $W_{\beta,1}^r$</i>	63
<i>К.В. Соліч</i> <i>Лінійні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова</i>	65
<i>М.В. Стефанчук</i> <i>Про експоненціальний ріст на нескінченності нижніх Q-гомеоморфізмів</i>	67
<i>О.В. Федунік-Яремчук</i> <i>Найкращі m-членні тригонометричні наближення ізотропних класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних</i>	69

А.Ю. Шумлянський, Л.Б. Федорова

Застосування вейвлет-аналізу для задач компресії графічних даних 71

Секція 2.

Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування 73

I.S. Chpurukhina, A.A. Murach

On properties of solutions to elliptic problems with rough data in boundary conditions 74

D. Doroshenko

On the Existence of Solutions to Nonlinear Boundary Value Problems 76

G. Kuduk

Problem with integral conditions for linear partial differential equations of third order in Sobolev space 77

G. Kuduk

Problem with integral conditions for nonhomogeneous partial differential equations of fourth order 79

D.D. Leshchenko, T.O. Kozachenko

Evolution of Motions of a Nearly Dynamically Spherical Gyrostat with a Moving Mass Subjected to Constant Body-Fixed Torques 81

D. Leshchenko, A. Rachinskaya, T. Kozachenko, K. Paly

Perturbed Motions of a Nearly Dynamically Spherical Gyrostat with a Moving Mass 82

A.O. Miliaev, A.N. Timokha

Differential equations of damped resonant sloshing 83

M.O. Nesterenko, M.S. Staryi

Differential equations invariant with respect to the algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ and its contractions 84

V.O. Soldatov

On d -characteristics of one-dimensional boundary problems in spaces of differentiable functions 86

A.O. Tsukanova

About Explicit Form of Multisoliton Solutions to the Korteweg-de Vries Equation 88

Б.О. Євдокименко, В.С. Герасимчук

Наближене розв'язання мішаної задачі 90

Т.О. Єршоміна, О.А. Поварова

Побудова неперервних обмежених розв'язків одного класу систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь 92

О.М. Башняков, В.Т. Матвієнко, В.В. Пічкур

Про умови екстремуму в задачі параметричної оптимізації пучка траєкторій 94

О.А. Волошин, М.І. Серов, О.О. Ванєєва

Класифікація лівських симетрій класу систем $(1 + 1)$ -вимірних нелінійних рівнянь дифузії 95

I.B. Гап'як

Поширення початкових кореляцій у відкритій системі пружних куль 97

Г.М. Губаль

Математичне дослідження величини ракової пухлини в умовах імунної реакції організму 98

<i>Г.В. Даниліна, М.О. Рашевський</i> <i>Дослідження системи автоматичного керування з повільною зміною параметрів об'єкта і регулятора</i>	100
<i>А.В.Заворотинський</i> <i>Інтегральні оцінки фундаментальної системи розв'язків нового класу еліптичних крайових задач з малим параметром</i>	101
<i>Є.С. Зозуля</i> <i>Верхня поточкова оцінка розв'язків рівняння пористого середовища з використанням потенціалу Рісса</i>	103
<i>Кириченко В.В., Лесіна Є.В., Новікова Ю.В.</i> <i>Неоднозначна розв'язність крайової задачі для безтипового диференціального рівняння в многокутнику</i>	105
<i>В.В. Кобеляцький, П.Ф. Самусенко</i> <i>Асимптотичне інтегрування крайових задач для сингулярно збурених диференціальних алгебраїчних систем</i>	107
<i>О.П. Козел</i> <i>Експоненціальний та логістичний ріст популяції</i>	108
<i>Ю.М. Кононов, О.В. Несмелова, Я.І. Святенко</i> <i>Про застосування функції стану С.Л. Соболева в задачах обертання твердих тіл з ідеальною рідиною</i>	110
<i>В.В. Листопада</i> <i>Проекційно-ітеративний метод розв'язання багатоточкової задачі для диференціально-різницевого рівняння з параметрами</i>	112
<i>О.О. Марченко, Т.А. Самойленко</i> <i>Дослідження математичної моделі взаємопов'язаних процесів у ґрунтового середовищі у випадку осової симетрії</i>	114
<i>В.В. Пічкур, М.С. Таїрова</i> <i>Про властивості оптимальної множини практичної напівстійкості</i>	116
<i>О.В. Пафук</i> <i>Асимптотика розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку сингулярної граничної в'язки матриць (одновимірний випадок). Частина 1</i>	117
<i>С.П. Пафук</i> <i>Асимптотичний аналіз загального розв'язку лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь вищого порядку з виродженнями у багатовимірному випадку. Частина 2</i>	119
<i>Б.А. Петренко, В.В. Пічкур</i> <i>Про властивості оптимальної множини практичної стійкості системи диференціальних рівнянь з правою частиною залежною від початкової умови</i>	121
<i>І.Я. Савка, М.А. Митрофанов</i> <i>Про коректність періодичної за часом задачі теплопровідності з крайовими умовами Діріхле та умовами лінійного спряження у двошаровій області</i>	122
<i>Н.В. Степаненко</i> <i>Функція гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди</i>	124

Секція 3.

Теорія ймовірностей та математична статистика

126

I. Bodnarchuk, Yu. Mishura

Gaussian stochastic processes and their projection coefficients 127

O.D. Borysenko, O.V. Borysenko

Dynamics of a non-autonomous stochastic mutualism model with jumps 129

I.I. Golichenko, M.P. Moklyachuk

Interpolation of periodically correlated stochastic processes with missing observations 131

K.H. Indlekofer, O.I. Klesov, J. Steinebach

On the theory of repeated records 133

I.H. Krykun

A limit theorem for stochastic equations with the local time 135

D.Y. Platonov

Weak convergence analysis of dynamic cutting for Lévy type processes 137

O.D. Prykhodko, K.V. Ralchenko

Almost sure bounds for increments of tempered fractional Brownian motion with statistical applications 138

D. Pumputis

Optimizing multivariate sample allocation using auxiliary variables in stratified sampling ... 140

Artem Storozhuk, Lyudmyla Sakhno

Distributional properties of Poisson processes of order k with time change 142

H.Ya. Tuluchenko

Dynamically weighted mixture of exponential and Erlang distributions with independent rate parameters 143

O.A. Tymoshenko

Optimal Control of Environmental Systems via PDE Games with Brownian Sheet 145

O. Volkov, Yu. Volkov

Methods of constructing multivariate power series distributions 147

R. Yamnenko, V. Levchenko

Sub-gaussian risk processes with heterogeneous timings of insurance claims and contract inception 149

V.F. Zrazhevskaya, G.M. Zrazhevsky

AI-Driven Multi-Stage Framework for Forecasting VaR and CVaR in Financial Time Series 151

A.B. Ільченко, О.І. Васи́лик

Застосування бутстреп-методу для оцінювання страхових резервів 153

O.A. Galganov

Граничні теореми для довговічних листків у випадкових рекурсивних деревах 155

B.B. Gladun, O.B. Ivanov

Асимптотична нормальність квазіперіодограмної оцінки параметрів чирпованого сигналу 156

Д.Д. Горбунов

Техніка крос-валідації для моделі регресійної суміші 158

<i>Н.В. Дивляш</i> <i>Властивості оцінки параметрів сингулярного розподілу, породженого Q_s-розкладами дійсних чисел</i>	160
<i>Н.В. Круглова, О.О. Диховичний</i> <i>Про оцінки точності моделювання звуження броунівського листа на експоненціальну криву</i>	162
<i>О.А. Лагода</i> <i>Граничні теореми для розв'язків абстрактних стохастичних різницевих рівнянь</i>	164
<i>Д.О. Логвинов</i> <i>Підсилений закон великих чисел для кількості рекордів у стохастичній моделі з трендом та альфа-схемою</i>	166
<i>А.А. Могилан, О.І. Васирик</i> <i>Узагальнені лінійні моделі в актуарній математиці</i>	167
<i>Р.Ф. Овчар, А.Ю. Поліщук</i> <i>Дослідження впливу дистанційного навчання на успішність студентів</i>	169
<i>М.В. Працьовитий</i> <i>Розподіли значень фрактальних функцій</i>	171
<i>В.В. Стаматієва</i> <i>Гранична теорема для багаторівневих точкових процесів в узагальненій задачі про дні народження</i>	172
<i>О.А. Тимошенко, О.О. Плугатор</i> <i>Декомпозиція ризику перспективного резерву у багатостанових моделях страхування життя</i>	174
<i>Д.В. Тихоненко</i> <i>Про уточнення характеристичної нерівності для норм φ-субгауссових випадкових величин</i>	176
<i>Г. Шевченко, А. Ярошевський</i> <i>Сумісні граничні теореми для адитивних функціоналів від випадкових блукань з неперервним часом</i>	177
Секція 4. Інформаційні системи та технології в освіті	179
<i>T. Hombosh, P. Mulesa</i> <i>Automated Llama-based generation of school test items: alignment and localization to Ukrainian educational standards</i>	180
<i>І.Л. Авдейчик</i> <i>Інтерактивні технології як інноваційний засіб навчання теми «Комбінаторика та теорія ймовірностей»</i>	182
<i>В.Ю. Бондарчук</i> <i>Многочлени Якобі в фільтрації сигналів</i>	184
<i>Г.М. Губаль</i> <i>Розширення функціональності системи $\text{\LaTeX}$ шляхом створення макросів для деяких математичних символів</i>	186
<i>А.М. Гурич</i> <i>Використання MathCad в процесі навчання теми «Похідна та її застосування»</i>	187

<i>І.М. Данилюк</i> <i>Використання інструментів статичного та динамічного аналізу під час навчання програмуванню мовою C</i>	189
<i>О.О. Диховичний, Н.В. Круглова, С.В. Кайдалов</i> <i>Застосування додатків, створених у середовищах Shiny та Wolfram, на заняттях з вищої математики та теорії ймовірностей</i>	191
<i>Н.В. Круглова, О.О. Диховичний, С.В. Кайдалов</i> <i>Застосування Штучного Інтелекту та інструментів Wolfram, Geogebra для створення шаблонів тестових завдань з вищої математики на платформі Moodle</i>	193
<i>Н.І. Мізирнюк</i> <i>Використання ІКТ та електронних журналів на уроках математики</i>	195
<i>О.І. Оласюк</i> <i>Інтерактивні методи та цифрові інструменти у викладанні тригонометрії в сучасній школі</i>	198
<i>І.В. Орловський, В.С. Микитенко</i> <i>Статистичний аналіз якості покрокових комп'ютерних тестів у системі STACK з математичних дисциплін</i>	200
<i>О.Г. Піскунов, н.п. Тупко</i> <i>Raise Specification Language як інструмент освіти в прикладній математиці</i>	202
Секція 5.	
Історія і методика викладання математики та інформатики	204
<i>О.В. Karupu, Т.А. Oleshko, V.V. Pakhnenko, V.K. Repeta</i> <i>From the experience of teaching mathematical disciplines in multinational academic groups of KAI</i>	205
<i>B.S. Tsyban, Н. Ya. Tuluchenko</i> <i>Didactic Potential of the Skew Lines Distance Problem in the Context of Training Engineering Specialists</i>	207
<i>О.І. Баліна, І.С. Безклубенко, О.В. Богданов, Ю.П. Буценко</i> <i>Виклики щодо фундаментальної підготовки студентів інженерних спеціальностей в Україні</i>	209
<i>К.Ю. Баранова</i> <i>Застосування перетворення Фур'є у математичному аналізі неперервних сигналів</i> ...	211
<i>Д.М. Бушев</i> <i>Розв'язання деяких класів функціональних рівнянь методом підстановок</i>	213
<i>Н.М. Задерей, Г.Д. Нефьодова, Т.Д. Стаднійчук, М.О. Хохотва</i> <i>Академік Михайло Кравчук — зачинатель олімпіадного руху з математики в Україні</i>	215
<i>Н.М. Задерей, Г.Д. Нефьодова, Т.Д. Стаднійчук, М.О. Хохотва</i> <i>Музей Михайла Кравчука у селі Човниця</i>	217
<i>С.О. Кіосова, А.В. Сиротенко</i> <i>Методологія викладання дисципліни «Квантове програмування» у сучасних університетах</i>	219
<i>О.М. Кравчук</i> <i>Ідеї М. П. Кравчука щодо вдосконалення професійної підготовки майбутніх учителів математики</i>	221

<i>О.М. Кравчук, О.В. Гнепа</i> <i>Ідея національної ідентичності в освітній діяльності М. Кравчука</i>	223
<i>О.М. Кравчук, О.С. Матящук</i> <i>Внесок М.П. Кравчука у вивчення кривих другого порядку в аналітичній геометрії</i> ...	224
<i>С.О. Кузарук</i> <i>Узагальнення та варіації інтерполяційних формул Ньютона</i>	225
<i>І.С. Ласкін, О.Г. Білий</i> <i>Інтегральні перетворення Гільберта та Френеля, їх застосування</i>	227
<i>Т.В. Маловічко</i> <i>Історія теорії ймовірностей в Іспанії</i>	229
<i>К.Ю. Мамса, М.М. Перестюк</i> <i>Інтелектуальний аналіз даних і синергетичний підхід до математичного моделювання еволюції знань у великих освітніх системах</i>	231
<i>Ю.А. Пожарський, О.Л. Швай</i> <i>Математичний вебквест як інноваційна форма оцінювання навчальних досягнень учнів</i>	233
<i>Л.С. Свиновей</i> <i>Михайло Пилипович Кравчук — гордість української математики</i>	234
<i>Н.П. Селезньова, Т.В. Авдеева, Т.О. Рудик</i> <i>Інваріанти в курсі аналітичної геометрії. Історія та методичні аспекти</i>	236
<i>О.П. Томащук, П.Ф. Самусенко, О.Л. Лециньський</i> <i>Методичні аспекти викладання теми «границя послідовності» у закладах вищої освіти</i>	238
Секція 6.	
Математичні методи у наукових дослідженнях	240
<i>М.Е. Dudkin, О.У. Dyuzhenkova, О.М. Dudkin</i> <i>Model of information dissemination within a network limited by a quadrant of the plane</i>	241
<i>Є.А. Булат, Р.Р. Андрієвський, О.В. Мулик</i> <i>Аналіз факторів що ймовірно сприяють виникненню ПТСР</i>	242
<i>Д.Ю. Короленко, О.О. Штофель, В.В. Головкин, Т.В. Авдеева</i> <i>Перетворення Гафа у питаннях аналізу орієнтації структурних компонент на прикладі структури металу</i>	244
<i>С.Д. Марковська, Ю.Ю. Бондаренко, О.О. Штофель, Г.В. Самар</i> <i>Вплив дискретизації та обмеженості масштабу на точність обчислення фрактальної розмірності зображень</i>	246
<i>Н.В. Рашевська</i> <i>Застосунки доповненої реальності у навчанні математики учнів закладів середньої освіти</i>	248
<i>Д.П. Рожченко, О.В. Мулик, Т.Г. Пригалинська</i> <i>Моніторинг факторів пов'язаних з ПТСР методами машинного навчання</i>	250
<i>Ю.В. Цівчик</i> <i>Диференційований підхід у навчанні математики в закладах середньої освіти</i>	252

ПЛЕНАРНІ ДОПОВІДІ

ON STOCHASTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM INITIAL CONDITIONS

A. OLENKO

This talk addresses two problems about solutions of stochastic partial differential equations with random initial conditions.

The first part focuses on the Cauchy problem for random fields generated by partial differential equations on the unit sphere. The exact solution as a series expansion in terms of spherical harmonics is given. An approximation to the solution is provided and analysed by finitely truncating the series expansion. We establish upper bounds for the convergence rates of approximation errors and investigate the smoothness of both the exact and truncated solutions. In particular, we show how the sample Hölder continuity of the resulting spherical fields is determined by the decay of the angular power spectrum.

The second part examines multiscaling limit theorems for renormalised solutions of higher-order heat equations with initial conditions given by random processes exhibiting cyclic long-range dependence. We derive the spectral and covariance representations of the corresponding limit fields and explain why analogous limit results are not valid in subordinated settings with Hermite rank greater than one. Numeric examples will be presented to illustrate the theoretical findings.

The talk is based on joint results in [1, 2, 3].

REFERENCES

- [1] Leonenko N., Olenko A., Vaz J. (2024) *On fractional spherically restricted hyperbolic diffusion random field*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 131, 107866.
- [2] Broadbridge P., Donhauzer I. Olenko A. (2024) *Stochastic diffusion within expanding space-time*. Z. Angew. Math. Phys. 75, 42.
- [3] Alghamdi M.M., Leonenko N., Olenko A. (2025) *Multiscaling limit theorems for stochastic FPDE with cyclic long-range dependence*. Braz. J. Probab. Stat. 39(2): 226-247

LA TROBE UNIVERSITY, MELBOURNE, VICTORIA, AUSTRALIA

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ: КЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ ТА НОВІ РОЗВ'ЯЗКИ

О.Л. ЗУЄВ

У доповіді висвітлено постановки основних задач теорії керування як математичної дисципліни, що поєднує результати варіаційного числення з алгебраїчними та геометричними методами опису множин траєкторій систем диференціальних рівнянь з урахуванням зовнішніх впливів, які задаються функціями керування. З історичної перспективи задачі програмного керування можна звести до праць відомого геометра та інженера античності — Герона Александрійського (І ст. н. е.); задачі оптимального керування — до задачі про брахістохрону І. Бернуллі (1696 р.); а задачу стабілізації — до праці Дж. Максвелла про регулятори (1868 р.) [1]. Поряд із цими історичними нарисами подано огляд основних математичних методів теорії оптимального керування — принципу максимуму Понтрягіна та принципу динамічного програмування Беллмана. З розмаїття сучасних проблем виділено вагомий напрям — якісну теорію, що пов'язує структурні властивості керованості та стабілізованості.

Для класичної задачі стабілізації в сенсі Р. Калмана та М.М. Красовського виділено особливі розв'язки з осцилюючими керуваннями зі зворотним зв'язком. Ці розв'язки є притаманними суттєво нелінійним диференціальним рівнянням, що описують рух неголономних механічних систем [2]. Наведено приклади застосування таких розв'язків у сучасних інженерних проблемах [1, 3].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Зуєв О.Л. *Математична теорія керування: нелінійна динаміка та інженерні застосування* // Вісн. НАН України. — 2020. — № 1. — С. 29–37.
- [2] Zuyev A. *Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls* // SIAM J. Control Optim. — 2016. — Vol. 54, No. 3. — P. 1678–1696.
- [3] Grushkovskaya V., Zuyev A. *Design of stabilizing feedback controllers for high-order nonholonomic systems* // IEEE Control Systems Letters. — 2024. — Vol. 8. — P. 988–993.

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ, СЛОВ'ЯНСЬК,
УКРАЇНА; MAX PLANCK INSTITUTE FOR DYNAMICS OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS,
MAGDEBURG, GERMANY

Email address: zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de

МІНІКУРС 1
Апроксимаційні та гладкісні характеристики
функціональних множин

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ І НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є НА КЛАСАХ ЗГОРТОК

А.С. СЕРДЮК

В першій частині доповіді буде дано короткий історичний огляд, який стосується розвитку теорії рівномірного наближення періодичних функцій частинними сумами Фур'є, а також довільними тригонометричними поліномами фіксованого порядку. Акцент буде зроблено на глибинному зв'язку між гладкісними (структурними) та апроксимаційними властивостями функцій. З цією метою наводяться класичні прямі та обернені теореми конструктивної теорії функцій, зокрема: критерій Чебишова, теорема Вейєрштрасса, Бореля, Бернштейна, Джексона, Лебега та ін. Велику увагу буде приділено результатам про точні значення найкращих рівномірних наближень класів диференційовних функцій (теореми Фавара, Ахієзера, Крейна, Дзядика, Корнейчука). Також будуть наведені дослідження доповідача, які стосуються найкращих наближень на класах періодичних функцій, що задаються узагальненими похідними в сенсі Степанця. У доповіді також будуть наведені нові результати про точні значення найкращих наближень класів функцій, що задаються згортками з твірними ядрами, які зображуються деякими лінійними комбінаціями ядер Пуассона чи ядер Бернуллі.

Друга частина доповіді висвітлює апроксимативні властивості сум Фур'є на класах періодичних функцій. Буде приділено увагу нерівностям типу Лебега, які оцінюють рівномірні норми відхилень сум Фур'є досліджуваної функції через її найкращі наближення або через найкращі наближення її узагальнених похідних. Обговорюватиметься питання про асимптотичну точність таких нерівностей як для індивідуальних функцій, так і на важливих функціональних компактах. Будуть наведені класичні результати з розв'язання задачі Колмогорова–Нікольського для сум Фур'є, зокрема, теореми Колмогорова, Нікольського, Стєчка, Теляковського, Степанця та ін. Також буде наведено і результати доповідача та його учнів стосовно наближення сумами Фур'є класів узагальнених інтегралів Пуассона в рівномірній метриці.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: serdyuk@imath.kiev.ua

Роботу підтримано грантом Фонду Саймонса (the Simons Foundation) (SFI-PD-Ukraine-00014586, ASS)..

GENERALIZED ZERNIKE POLYNOMIALS, THEIR PROPERTIES AND APPLICATIONS

A.L. SHYDLICH

Let $\mathbb{D} = \{z = \sin \theta e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ be the closed unit disc, $\alpha > 0$, and let $d\sigma_\alpha(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}(1 - z\bar{z})^\alpha dz = \frac{\alpha+1}{\pi} \cos(\theta)^{2\alpha+1} \sin \theta d\varphi d\theta$ be a probability measure on $\mathbb{D}$. Let also $L_\alpha^p := L_\alpha^p(\mathbb{D}, \sigma_\alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$, be the space of all functions f given on $\mathbb{D}$ such that

$$\infty > \|f\|_{p, \sigma_\alpha} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\sigma_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{esssup}_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

The generalized Zernike or disc polynomials $R_{m,n}^\alpha(z)$ are given by [1, 2]:

$$R_{m,n}^\alpha(z) = R_{m,n}^\alpha(z, \bar{z}) = \begin{cases} z^{m-n} R_n^{(\alpha, m-n)}(2z\bar{z} - 1), & m \geq n, \\ \bar{z}^{n-m} R_m^{(\alpha, n-m)}(2z\bar{z} - 1), & m < n, \end{cases}$$

where m and n are non-negative integers ($m, n \in \mathbb{N}_0$), $R_n^{(\alpha, \beta)}$ is the n -th Jacobi polynomial normalized such that $R_n^{(\alpha, \beta)}(1) = 1$.

If $M, N \in \mathbb{N}_0$ we will write $\Pi_{M,N}$ for the linear space of polynomials P spanned by disc polynomials for which $m \leq M, n \leq N$, that is

$$\Pi_{M,N} = \operatorname{span}\{R_{m,n}^\alpha : 0 \leq m \leq M, 0 \leq n \leq N\}, \quad \text{and} \quad \Pi_N := \Pi_{N,N}.$$

Denote by $\partial_\theta P(z) = \partial_\theta P(\sin \theta e^{i\varphi})$ and $\partial_\varphi P(z) = \partial_\varphi P(\sin \theta e^{i\varphi})$ the partial derivatives of P w.r.t θ and φ respectively.

Theorem 1. *Suppose that $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ and $n \in \mathbb{N}$. For any $P \in \Pi_n$,*

$$\|\partial_\theta P\|_{p, \sigma_\alpha} \leq 14(\alpha + 1)^{\frac{3}{2}} n \|P\|_{p, \sigma_\alpha} \quad \text{and} \quad \|\partial_\varphi P\|_{p, \sigma_\alpha} \leq n \|P\|_{p, \sigma_\alpha}.$$

REFERENCES

- [1] Koornwinder T.H. *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials*, in: R.A. Askey (Ed.), *Theory and Application of Special Functions*, Academic Press, New York, 1975, pp. 435–495.
- [2] Wünsche A. *Generalized Zernike or disc polynomials* // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2005. — 174. — P. 135–163.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: shidlich@gmail.com

APPROXIMATING CHARACTERISTICS OF NIKOL'SKII–BESOV CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS IN LEBESGUE SUBSPACES

A.S. ROMANYUK, S.YA. YANCHENKO

We study the approximating characteristics of the classes $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ (see, e.g., [2]) of periodic functions of many variables with dominating mixed smoothness in the space $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$, in which the norm is not weaker than the $L_q(\mathbb{T}^d)$ -norm. The investigation of the problems of approximation of functional classes in this space is motivated by the fact that some important problems in the space $L_q(\mathbb{T}^d)$ remain open (see [1]). We obtain exact-order estimates for the orthoprojection widths from the classes $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$ in the space $B_{1,1}(\mathbb{T}^d)$ [6].

Let $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, be the d -dimensional Euclidean space with the elements $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ and $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$. Denote by $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, the space of functions $f(\mathbf{x})$ that are 2π -periodic in each variable, with a standard finite norm.

We now define the norm $\|\cdot\|_{B_{q,1}(\mathbb{T}^d)}$, $1 \leq q \leq \infty$, in the subspaces $B_{q,1}(\mathbb{T}^d)$ (denoted in what follows by $B_{q,1}$) of functions $f \in L_q^0(\mathbb{T}^d)$, where $L_p^0(\mathbb{T}^d) := \left\{ f: f \in L_p(\mathbb{T}^d), \int_0^{2\pi} f(\mathbf{x}) dx_j = 0, j = \overline{1, d}, \text{ a.e.} \right\}$.

For trigonometric polynomials t with respect to the multiple trigonometric system $\{e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$, the norm $\|t\|_{B_{q,1}}$ is defined by the formula $\|t\|_{B_{q,1}} := \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} \|A_{\mathbf{s}}(t)\|_q$ (see, e.g., [4]).

Similarly we define the norm $\|f\|_{B_{q,1}}$, $1 \leq q \leq \infty$, for any function $f \in L_q^0(\mathbb{T}^d)$ such that its series $\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d} \|A_{\mathbf{s}}(f)\|_q$ converges. Note that for $f \in B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$, the following relations hold $\|f\|_q \ll \|f\|_{B_{q,1}}$.

Let $\{u_i\}_{i=1}^M$ be a system of functions $u_i \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$, $i = \overline{1, M}$, orthonormal in the space $L_2(\mathbb{T}^d)$. We associate each function $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, with an approximating aggregate of the form $\sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i$, i.e., with the orthogonal projection of the function f onto the subspace generated by the system of functions $\{u_i\}_{i=1}^M$. Here and in what follows, $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) \bar{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

If $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$, then the quantity

This work was supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, A.Romanyuk, S.Yanchenko).

$$d_M^\perp(F, L_q(\mathbb{T}^d)) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty(\mathbb{T}^d)} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^M (f, u_i) u_i \right\|_{L_q(\mathbb{T}^d)}$$

is called the orthoprojection width (Fourier width) of the class F in the space $L_q(\mathbb{T}^d)$. The width $d_M^\perp(F, L_q(\mathbb{T}^d))$ was introduced by Temlyakov in [7].

The following statements are true.

Theorem 1. *Suppose that $d = 1$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, and $r_1 > 0$. Then the following estimate holds*

$$d_M^\perp(S_{p,\theta}^{r_1} B(\mathbb{T}), B_{1,1}) \asymp M^{-r_1}.$$

Theorem 2. *Suppose that $d \geq 2$, $1 < p \leq \infty$, and $1 \leq \theta \leq \infty$. Then for $r_1 > 0$ the following estimate holds*

$$d_M^\perp(S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d), B_{1,1}) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Unlike the one-dimensional case, in the many-dimensional case ($d = 2$), the obtained estimates for the analyzed approximating characteristics of the classes $S_{p,\theta}^r B(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq \theta < \infty$, in the space $B_{1,1}$ depend on the parameter θ .

The results of investigation of other approximating characteristics in Lebesgue subspaces (including $B_{q,1}$, $1 \leq q \leq \infty$ and space of quasi-continuous functions) can be found, in particular, in [3, 4, 5].

REFERENCES

- [1] Dũng D., Temlyakov V.N. and Ullrich T. *Hyperbolic Cross Approximation*. — Advanced Courses in Mathematics, CRM Barselona: Birkhäuser, 2019.
- [2] Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. *Function spaces of mixed smoothness from the decomposition point of view* // Proc. Steklov Inst. Math. — 1990. — V. 187. — P. 163–184.
- [3] Pozharska K.V., Romanyuk A.S. *Estimates for approximation characteristics of Nikol'skii–Besov classes of functions with mixed smoothness in the space $B_{q,1}$* // Math. Nachr. — 2025. — V. 298, No. 9. — 3114–3134.
- [4] Pozharska K.V., Romanyuk A.S., Yanchenko S.Ya. *Estimates of the characteristics of nonlinear approximation of classes of periodic functions of many variables* // Carpathian Math. Publ. — 2025. — V. 17, No. 2. — P. 447–460.
- [5] Romanyuk A.S., Yanchenko S.Ya. *Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii–Besov classes of functions with mixed smoothness in the space of quasi-continuous functions* // Math. Nachr. — 2023. — V. 296, No. 6. — 2575–2587.
- [6] Romanyuk A.S., Yanchenko S.Ya. *Estimates of approximating characteristics and the properties of the operators of best approximation for the classes of periodic functions in the space $B_{1,1}$* // Ukrainian Math. J. — 2022. — V. 73, No. 8. — P. 1278–1298.
- [7] Temlyakov V.N. *Widths of some classes of functions of several variables* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1982. — V. 267, No. 2. — P. 314–317.

THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE,
KYIV, UKRAINE

Email address: romanyuk2211@gmail.com

THE INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE,
KYIV, UKRAINE

Email address: yan.sergiy@gmail.com

МІНІКУРС 2
**Аналітичні методи в теорії диференціальних
рівнянь**

ATTRACTORS FOR INFINITE-DIMENSIONAL IMPULSIVE SYSTEMS

O.V. KAPUSTYAN

Existence of a globally attracting set of a dynamical system provides information about the long term behavior of the system which is rather valuable for design of practical systems in the framework of mathematical systems and control theory. The study of properties of this attracting set is of interest for applications and is a challenging problem from the mathematical viewpoint, especially in the case of nonlinear infinite dimensional systems. In particular its stability and robustness properties need to be studied for any practical system. It is known that in case of a finite dimensional system the dissipativity guarantees the existence of a global attractor, that is a an invariant and globally attracting compact set. The existence of such a set in the infinite dimensional case needs some additional conditions. It is known that a dissipative continuous dynamical system possess a global attractor if it is asymptotically compact. The global attractor has such important for applications properties like stability and robustness.

However in some practical situations the dynamics is not always continuous due to such effects as triggered events and other actions causing impulsive affects. The foundations of the theory of systems with impulsive perturbations were proposed in the works of outstanding mathematicians A.M. Samoilenko and M.O. Perestyuk. Qualitative analysis of impulsive systems has been studied by many authors during last decades. One of the most important in applications (and the least studied) class of such systems is impulsive dynamical systems (impulsive DS), i.e., autonomous systems whose trajectories undergo impulsive perturbations at the moments of intersection of the trajectories with a certain surface in the phase space. The main problem we face when we try to expand the theory of global attractors to impulsive DS

$$\frac{du}{dt} = Au + F(u), \quad u \notin M,$$

$$\Delta u|_{u \in M} = Iu - u,$$

where $\Delta u(t) = u(t+0) - u(t-0)$, is the lack of continuous dependence on the initial data. Our approach is based on the notion of uniform attractor,

This research was supported by NRFU project No. 2023.03/0074 “Infinite-dimensional evolutionary equations with multivalued and stochastic dynamics”.

commonly used for non-autonomous problems, in particular, for systems with impulses at fixed moments of time.

Definition. A compact set $\Theta \subset H$ is called uniform attractor of DS V if for every bounded $B \subset H$

$$\text{dist}(V(t, B), \Theta) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

and Θ is minimal among all closed uniformly attracting sets.

Sufficient conditions for existence of uniform attractors and investigation their properties for semilinear PDEs with impulsive perturbations are proposed. In particular, we consider the following problem

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + \varepsilon f(y), & (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \\ y|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\varepsilon > 0$ is a small parameter, f is continuous and bounded.

$$M = \left\{ y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in H \mid \forall i = \overline{1, p} \quad c_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i = a \right\}, \quad (2)$$

$$I : M \rightarrow H \text{ is continuous such that for } y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in M$$

$$Iy \in \left\{ \sum_{i=1}^p c'_i \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \psi_i \mid \forall i = \overline{1, p} \quad c'_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i c'_i = a(1 + \mu) \right\}. \quad (3)$$

Theorem 1 (*M. Perestyuk, O. K., 2015*). *For sufficiently small $\varepsilon > 0$ impulsive problem (1)-(3) generates impulsive DS $\bar{V}_\varepsilon$, which has uniform attractor Θ_ε and*

$$\text{dist}(\Theta_\varepsilon, \Theta) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

REFERENCES

- [1] Kapustyan O.V., Perestyuk M.O. *Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems* // Ukr. math. journ. — 2016. — V. 68, No 2. — P. 583–598.
- [2] Kapustyan O.V., Perestyuk M.O., Romaniuk I.V. *Stability of global attractors of impulsive infinite-dimensional systems* // Ukr. math. journ. — 2018. — V. 70, No 1. — P. 30–41.
- [3] Dashkovskiy S., Kapustyan O., Perestyuk Yu. *Stability of uniform attractors of impulsive multi-valued semiflows* // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems.— 2021. — V. 40.— 101025.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, UKRAINE
Email address: kapustyan@knu.ua

АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ В ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

П.Ф. САМУСЕНКО

Диференціально-алгебраїчні системи рівнянь (ДАС) інтенсивно досліджуються вже понад 50 років. Насамперед це пов'язано з численними застосуваннями в механіці, радіоелектроніці, теорії електричних кіл, біології, економіці, соціології. До таких систем приводять задачі, в яких описується динаміка системи в певний момент часу і розв'язки яких пов'язані деякими алгебраїчними співвідношеннями.

З теоретичної точки зору розв'язки ДАС мають ряд специфічних властивостей, які не притаманні розв'язкам систем диференціальних рівнянь. Наприклад, відсутня неперервна залежність розв'язків ДАС від вхідних даних, простір розв'язків лінійної ДАС може бути нескінченно вимірним, початкова задача для лінійної ДАС може мати нескінченну кількість розв'язків тощо.

У роботі проаналізовано алгоритми побудови розв'язків різноманітних задач для ДАС, вказано на принципові ускладнення, які виникають при реалізації зазначених алгоритмів. Так, для лінійної ДАС зі сталими коефіцієнтами найбільші труднощі викликає випадок сингулярної в'язки матриць, оскільки при цьому, наприклад, для сумісності лінійної неоднорідної системи на неоднорідність потрібно накласти специфічні умови, які до того ж мають не лише алгебраїчний характер.

Ще більше ускладнюється ситуація для випадку ДАС зі змінними коефіцієнтами. При виконанні достатньо жорстких умов таку систему можна розщепити на дві системи – диференціальну та алгебраїчну (наприклад, використовуючи поняття індексу системи) або звести до центральної канонічної форми. Лише після цього вдається з'ясувати структуру фундаментальної матриці відповідної лінійної ДАС і у подальшому навести необхідні та достатні умови сумісності початкової задачі, крайових задач тощо. Зазначені перетворення можливі лише коли певні характеристики системи (індекс, ранг матриці при похідних, довжина жорданового ланцюжка) зберігаються на всьому проміжку де розглядається відповідна задача.

Свою специфіку також мають сингулярно збудені задачі для ДАС. Зокрема, лінійна однорідна сингулярно збудена ДАС у випадку регулярної в'язки матриць має два типи асимптотичних розв'язків, які відповідають скінченним та нескінченим елементарним дільникам граничної в'язки матриць. Ці розв'язки будуються, взагалі кажучи, за дробовими степенями малого параметра, які визначаються структурою елементарних дільників та деякими співвідношеннями між збудовальними коефіцієнтами системи.

У випадку сингулярної в'язки матриць ситуація докорінно змінюється і крім визначення степенів малого параметра за якими слід будувати асимптотичні розв'язки системи, потрібно ще з певних алгебраїчних рівнянь визначити головні члени асимптотики.

Нелінійні сингулярно збудені ДАС інтенсивно досліджуються протягом останніх 20 років. У загальному, алгоритми розв'язування задач для сингулярно збудених ДАС складаються з двох етапів. На першому етапі, враховуючи специфіку задачі, будується її формальний розв'язок, на другому — доводиться асимптотичний характер побудованого раніше формального розв'язку. Зокрема, формальний розв'язок початкової задачі будується у вигляді суми двох розв'язків — регулярної та сингулярної частин асимптотики. Члени регулярної частини визначаються з алгебраїчних систем, а члени сингулярної частини — з лінійних ДАС. Зазначимо, що члени сингулярної частини асимптотики суттєві в околі певної точки та експоненціально прямують до нуля поза цим околom. Наявність сингулярної частини дозволяє врахувати початкові умови, тобто формально побудувати розв'язок заданої початкової задачі.

Аналогічний підхід використовується при розв'язуванні крайових задач для сингулярно збудених ДАС. При цьому залежно від типу крайових умов підбирається вигляд сингулярної частини асимптотики.

Зауважимо, що при доведенні асимптотичного характеру побудованого формального розв'язку суттєво використовуються результати асимптотичного інтегрування лінійних ДАС.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями* — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.
- [2] Campbell S.L. *Singular systems of differential equations* — San-Francisco: Pitman, 1980. — 176 p.
- [3] Vasileva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation* — Philadelphia: SIAM, 1995. — 221 p.
- [4] Самусенко П.Ф. *Асимптотичне інтегрування сингулярно збудених диференціально-алгебраїчних систем* — Київ: Політехніка, 2023. — 202 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: psamusenko@ukr.net

EXISTENCE, UNIQUENESS SOLUTION AND INVARIANT MEASURE RESULTS FOR NEUTRAL FSDES IN HILBERT SPACES

O.M. STANZHYTSKYI

We study the large time behaviour of the solutions of neutral type stochastic functional-differential equations of the form

$$\begin{aligned} d[u(t) + g(u_t)] &= [Au + f(u_t)]dt + \sigma(u_t)dW(t) \text{ for } t > 0; \\ u(t) &= \varphi(t), t \in [-h, 0), \quad h > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Here A is an infinitesimal generator of a strong continuous semigroup $\{S(t), t \geq 0\}$ of bounded linear operators in real separable Hilbert space H . The noise $W(t)$ is a Q -Wiener process on a separable Hilbert space K . For any $h > 0$ denote $C_h := C([-h, 0], H)$ to be a space of continuous H -valued functions $\varphi : [-h, 0] \rightarrow H$, equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{C_h} := \sup_{t \in [-h, 0]} \|\varphi(t)\|_H,$$

where $\|\cdot\|_H$ stands for the norm in H . The functionals f and g map C_h to H , and $\sigma : C_h \rightarrow \mathcal{L}_2^0$, where $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}(Q^{1/2}K, H)$ is the space of Hilbert-Schmidt operators from $Q^{1/2}K$ to H . In our studies, the maps f and g do not satisfy the Lipschitz condition. Therefore, it is important for applications.

Finally, $\varphi : [-h, 0] \times \Omega \rightarrow H$ is the initial condition, where $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ is the probability space.

We study the existence and uniqueness of the solution to the initial problem without the Lipschitz condition. Then we establish the Markov and Feller properties in the shift spaces for such equations, and using the compactness approach we establish the existence of invariant measures in the shift spaces for such equations. The obtained abstract results are applied to stochastic partial differential equations of the reaction-diffusion type. The issue of approximate control of such equations is also studied.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, UKRAINE
Email address: au_stanzhytskyi@knu.ua

СЕКЦІЯ 1
Математичний аналіз та застосування

ALTERNATING BINOMIAL SERIES AND RELATED CATALAN AND HARMONIC IDENTITIES

K. ADEGOKE, R. FRONTCHAK, T. GOY

This work was motivated by a challenging and intriguing identity stated without a formal proof by R. Sprugnoli in [1]. We evaluate in closed form several alternating infinite series whose denominators involve the binomial coefficients $\binom{4n}{2n}$ and $\binom{4n+2}{2n+1}$. In addition, we derive several related series involving Catalan numbers and second-order odd harmonic numbers.

Theorem 1. *For $|x| \leq 4$ and $y = y(x) = \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x}$, the following series identities hold:*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \binom{4n}{2n}} x^{2n} &= 8 \left(\operatorname{arctanh}^2 \sqrt{y} - \arctan^2 \sqrt{y} \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \binom{4n}{2n}} x^{2n} &= \frac{4\sqrt{y}(y^2-1)}{y^2+1} \left(\frac{\arctan \sqrt{y}}{y+1} + \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{y}}{y-1} \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{4n}{2n}} x^{2n} &= \frac{4y^2}{(y^2+1)^2} + \left(\frac{(y-1)^3}{(y^2+1)^2} - \frac{8(y-1)y^2}{(y^2+1)^3} \right) \sqrt{y} \arctan \sqrt{y} \\ &\quad + \left(\frac{(y+1)^3}{(y^2+1)^2} - \frac{8(y+1)y^2}{(y^2+1)^3} \right) \sqrt{y} \operatorname{arctanh} \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Theorem 2. *For $|x| \leq 4$, the following series identities hold*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \binom{4n+2}{2n+1}} x^{2n+1} &= 4 \operatorname{arctanh} \sqrt{y} \arctan \sqrt{y}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \binom{4n+2}{2n+1}} x^{2n+1} &= \frac{2\sqrt{y}(1-y^2)}{1+y^2} \left(\frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{y}}{1+y} + \frac{\arctan \sqrt{y}}{1-y} \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{4n+2}{2n+1}} x^{2n+1} &= \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{(1+y)(1-y)^2(y^2+4y+1)}{(1+y^2)^3} \sqrt{y} \arctan \sqrt{y} \\ &\quad + \frac{(1-y)(1+y)^2(y^2-4y+1)}{(1+y^2)^3} \sqrt{y} \operatorname{arctanh} \sqrt{y}. \end{aligned}$$

As particular cases of Theorems 1 and 2, we have the following series:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 16^n}{n^2 \binom{4n}{2n}} &= 2 \ln^2 \left(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2(\sqrt{2} + 1)} \right) - 8 \arctan^2 \sqrt{\sqrt{2} - 1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \binom{4n}{2n}} \left(\frac{16}{3} \right)^n &= \frac{\sqrt{6}}{2} \ln (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{4n}{2n}} \left(\frac{16}{3} \right)^n &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{8} \ln (\sqrt{2} + \sqrt{3}), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{(2n+1)^2 \binom{4n+2}{2n+1}} &= \frac{\pi}{9} \ln (2 + \sqrt{3}), \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{3})^n}{(2n+1)^2 \binom{4n+2}{2n+1}} &= \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \ln 3, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{\binom{4n+2}{2n+1}} &= \frac{4}{25} + \frac{22\pi}{375\sqrt{3}} - \frac{4}{125\sqrt{3}} \ln (2 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Let $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ denote the Catalan numbers, $O_k^{(2)} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{(2j+1)^2}$ for $k \geq 0$ the second-order odd harmonic numbers, and $z = z(x) = \frac{\sqrt{1+16x^2}-1}{4x}$.

Theorem 3. For $x \in \mathbb{C}$ with $|x| \leq 1/4$, the following series identities hold:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n+1}{4n+3} O_{2n}^{(2)} C_{2n} x^{2n} &= \frac{\arctan \sqrt{z} + \operatorname{arctanh} \sqrt{z}}{24\sqrt{2}x^3} \times \\ &\times \left(\arctan^2 \sqrt{z} - 4 \arctan \sqrt{z} \operatorname{arctanh} \sqrt{z} + \operatorname{arctanh}^2 \sqrt{z} \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n+3}{4n+5} O_{2n}^{(2)} C_{2n} x^{2n} &= \frac{\arctan \sqrt{z} - \operatorname{arctanh} \sqrt{z}}{24\sqrt{2}x^5} \times \\ &\times \left(\arctan^2 \sqrt{z} + 4 \arctan \sqrt{z} \operatorname{arctanh} \sqrt{z} + \operatorname{arctanh}^2 \sqrt{z} \right).\end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] Sprugnoli R. *Sums of reciprocals of the central binomial coefficients* // Integers. — 2006. — V. 6. — #A27.

OBAFEMI AWOLowo UNIVERSITY, ILE-IFE, NIGERIA
Email address: `adegoke00@gmail.com`

INDEPENDENT RESEARCHER, REUTLINGEN, GERMANY
Email address: `robert.frontczak@web.de`

VASYL STEFANYK CARPATHIAN NATIONAL UNIVERSITY, IVANO-FRANKIVSK, UKRAINE
Email address: `taras.goy@pnu.edu.ua`

BEST WEIGHTED APPROXIMATION OF SOME KERNELS ON THE REAL AXIS

S.O. CHAICHENKO, V.V. SAVCHUK, A.L. SHYDLICH

We calculate the exact value and find the polynomial of the best weighted polynomial approximation of kernels of the form

$$\mathcal{K}_{\lambda,s}(t, A, B) := \frac{A + Bt}{(t^2 + \lambda^2)^{s+1}}, \quad (1)$$

where A and B are fixed complex numbers, $\lambda > 0$, $s \in \mathbb{N}$, in the mean square metric.

Let us note, for $A = s = 0$ and $B = \frac{1}{\pi}$, the kernel (1) coincides with the Poisson kernel $P_t(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{\lambda^2 + t^2}$ as function of the variable λ . A special case of kernels (1) are integral kernels defined in the upper half-plane by the well-known biharmonic Poisson integrals

$$\mathcal{B}(f; t; \lambda) := \frac{2\lambda^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)}{(x^2 + \lambda^2)^2} dx.$$

which give the solution of the biharmonic equation

$$\nabla^2(\nabla^2 U) = 0, \quad \nabla := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2},$$

in the upper half-plane of the complex plane ($\lambda > 0$) under the boundary conditions

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} U(x, \lambda) = f(x), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{\partial}{\partial \lambda} U(x, \lambda) = 0.$$

Denote by P_{n-1} the set of all algebraic polynomials with complex coefficients of degree at most $n-1$ and consider the quantity

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{K}_{\lambda,s})_{2,\rho_n} := \inf_{p \in P_{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A + Bt}{(t^2 + \lambda^2)^{s+1}} - p(t) \right|^2 \frac{dt}{|\rho_n(t)|^2} \right)^{1/2}$$

of best weighted approximation of the kernel $\mathcal{K}_{\lambda,s}(t, A, B)$ by all possible polynomials from the set P_{n-1} in the mean square metric with the weight $\frac{1}{|\rho_n(t)|^2}$, $\rho_n(t) = \rho_0 \prod_{k=1}^n (t - a_k)$, where $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, and $\rho_0 \neq 0$ is a constant.

Theorem 1. *Let A, B be any fixed real numbers, $\lambda > 0$ and $s \in \mathbb{N}$. Then for any $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n^2(\mathcal{K}_{\lambda,s})_{2,\rho_n} = \frac{4\pi}{(2\lambda)^{2s+3}\mu_n(\lambda,\mathbf{a})|\rho_0|^2} \sum_{k=0}^s \sum_{l=0}^s \binom{l+k}{l} G_k \overline{G}_l,$$

where $\mu_n(\lambda,\mathbf{a}) = \prod_{k=1}^n \left[\alpha_k^2 + (\beta_k + \lambda)^2 \right]$, $a_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\beta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$G_k = G_k(\lambda,\mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{s-k} \frac{\binom{s+j}{s} i^{s-k-j} \nu_{s-k-j}(i\lambda,\bar{\mathbf{a}})}{(2\lambda)^{k+j}} \left(\frac{B\lambda(s(s+j)-2j)}{s(s+j)} - iA \right).$$

Similar extremal problems for the kernels (1) was solved: in the case of $s = 0$ in [1] (see, also [2]), in the case of $s = 1$ in [3].

REFERENCES

- [1] Voskanyan A.A. *On some extremal problems of approximation theory on the entire real axis* // *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoi SSR*. — 1979 — V. 14, No 2. — P. 107–123.
- [2] Ahiezer N.I. *Lectures on the theory of approximation*. — New York, 1956. — 326 p.
- [3] Savchuk V.V., Chaichenko S.O., Shydlich A.L. *Extreme problems of weight approximation on the real axis* // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2024. — No 2. P. 129–145.

DONBAS STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY, SLOVIANSK, UKRAINE
Email address: au_thor@kpi.ua

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: vicsavchuk@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, NATIONAL UNIVERSITY OF LIFE AND ENVIRONMENTAL SCIENCES OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: shidlich@gmail.com

ON THE EXPONENTIAL STABILITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A BANACH SPACE

V.M. GORBACHUK, YU.V. SPIVAK

We consider the equation

$$y'(t) - Ay(t) = 0, \quad t \in [0, \infty) \quad (1)$$

where A is the generator of a C_0 -semigroup of bounded linear operators $U(t), t \geq 0$, on a Banach space $\mathfrak{B}$.

By a weak solution of equation (1) we mean a vector function $y(t) : [0, \infty) \mapsto \mathfrak{B}$, strongly continuous on $[0, \infty)$ and such that for any functional $F \in \mathcal{D}(A^*)$, the scalar function $F(y(t))$ is continuously differentiable on $[0, \infty)$ and satisfies the equation

$$\frac{dF(y(t))}{dt} - A^*F(y(t)) = 0, \quad t \in [0, \infty).$$

As was shown [1] a vector function $y(t)$ is a weak solution of (1) iff $y(t)$ can be represented in the form

$$y(t) = U(t)f, \quad f \in \mathfrak{B}.$$

Equation (1) is said to be :

1) asymptotically stable, if for any weak solution $y(t)$,

$$\|y(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty;$$

2) exponentially stable, if there exists $\omega > 0$ such that for any weak solution $y(t)$

$$\exists C_y > 0 : \|y(t)\| \leq C_y e^{\omega t}.$$

In the case of $\dim \mathfrak{B} < \infty$ both concepts coincide. This will, generally, fall when $\dim \mathfrak{B} = \infty$. For instance, if $A \leq 0$ is a self-adjoint operator on a Hilbert space $\mathfrak{H}$, and $0 \in \sigma_c(A)$ ($\sigma_c(A)$ denotes the continuous spectrum of an operator), then equation (1) is asymptotically, not exponentially, stable.

We give a criterion for the exponential stability of equation (1).

Theorem 1. *Let A be the generator of a C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ in $\mathfrak{B}$. If there exists a continuous on $[0, \infty)$ function $\gamma(t) \geq 0, \gamma(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ and such that*

$$\exists c = c(y) > 0 : \|y(t)\| \leq c\gamma(t),$$

for every weak solution $y(t)$ of equation (1), then equation (1) is exponentially stable.

As a consequence from this theorem, we can obtain the following result (see [2]):

Corollary 1. *Let $\Phi(t), t \geq 0$, be a monotonically increasing continuous function such that for any $f \in \mathfrak{B}$*

$$\int_0^\infty \Phi(\|U(t)f\|)dt < \infty.$$

Then equation (1) is exponentially stable.

REFERENCES

- [1] Ball J.M. *Strongly continuous semigroups, and the variation of constants formula* // Proc. Amer. Math.Soc. — 1977. — V. 63, — P. 370–373.
- [2] Rolewicz S. *On uniform N - equistability* // J. Math. Anal.Appl. — 1986. — V. 115, — P. 434–441.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: v.m.horbach@gmail.com

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: spivak_julia@ukr.net

ON DISCRETIZATION OF SOME EXTREMAL PROBLEMS

O.V. KOVALENKO

We solve two continuous extremal problems on the classes of monotone functions: in the first problem we find extremal values for a line integral of a coordinate-wise monotone function of two variables from a rearrangement-invariant class of functions; in the second one we find extremal values for the expectation of a random process with monotone trajectories at a random time. In both cases we reduce the continuous problems to their discrete counterparts. The obtained discrete problems are on the one hand interesting on their own, and on the other hand give a natural explanation of the structure of the extremal functions for the continuous problems.

Recall that for a measurable function $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ defined on a measurable space (E, μ) with a finite measure μ , the function

$$m_f: [0, \infty) \rightarrow [0, \mu E], \quad m_f(t) = \mu\{x \in E: |f(x)| > t\}$$

is called the distribution function of f . The function

$$r_f: [0, \mu E] \rightarrow [0, \infty), \quad r_f(t) = \inf\{s: m_f(s) \leq t\}$$

is called the non-increasing rearrangement of f . A function $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is called coordinate-wise non-decreasing, if it is non-decreasing with respect to the partial order $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2$ and $y_1 \leq y_2$. Let $m: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an increasing bijection. Denote by $\mathcal{M}_m$ the class of all measurable (with respect to the two-dimensional Lebesgue measure μ) coordinate-wise non-decreasing functions $f: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ such that $m_f(t) \geq 1 - m(t)$, $t \in [0, 1]$.

Theorem 1 ([1]). *Let $m: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an increasing bijection. For each continuous non-decreasing function $t: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ one has*

$$\inf_{f \in \mathcal{M}_m} \int_0^1 f(t(s), s) ds = \int_0^1 m^{-1}(t(s) \cdot s) ds.$$

A natural analogue of the class $\mathcal{M}_m$ for functions of two variables that are monotone with respect to the partial order

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \text{ and } y_1 = y_2,$$

can be defined as follows. Assume an atomless probability space $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ is given. For a function m as above, let $\mathfrak{M}_m$ be the space of all measurable

random processes $\{\xi_t, t \in [0, 1]\}$ defined on $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ such that

$$s < t \implies 0 \leq \xi_s(\omega) \leq \xi_t(\omega) \leq 1 \text{ for almost all } \omega \in \Omega,$$

and

$$\mathbf{E}\mu\{t \in [0, 1]: \xi_t > s\} \geq 1 - m(s) \text{ for all } s \in [0, 1],$$

where $\mathbf{E}$ denotes the expectation of a random variable, and μ is the one-dimensional Lebesgue measure.

Theorem 2 ([1]). *Let $m: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ be an increasing bijection, and τ be a random variable on $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ that takes values in $[0, 1]$. Then*

$$\inf_{\xi_t \in \mathfrak{M}_m} \mathbf{E}\xi_\tau = \int_0^1 m^{-1} \left(\int_{1-y}^1 r_\tau(s) ds \right) dy.$$

If in addition $m(t) = t$ for all $t \in [0, 1]$, then one has

$$\inf_{\xi_t \in \mathfrak{M}_m} \mathbf{E}\xi_\tau = \int_0^1 r_\tau(s) s ds.$$

Classes $\mathcal{M}_m$ and $\mathfrak{M}_m$ are examples of rearrangement-invariant classes, which appear in many extremal problems of approximation theory. Note that in the situation, when τ is not constant, the extremal random process for Theorem 2 that we construct in the proof can not be represented as a product $\xi_t(\omega) = x(t) \cdot \eta(\omega)$ of a function $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ and a random variable η .

We illustrate the discretization approach for Theorem 1 in the partial case when $m(s) = s$, $s \in [0, 1]$ and $t(s) = \alpha$, $s \in [0, 1]$ for some fixed number $\alpha \in [0, 1]$. For large $n \in \mathbb{N}$ divide the unit square $[0, 1]^2$ into n^2 equal squares, and approximate a function $f \in \mathcal{M}_m$ by a coordinate-wise non-decreasing piecewise-constant function $f_n: [0, 1]^2 \rightarrow \Xi_n := \left\{ \frac{1}{n^2}, \frac{2}{n^2}, \dots, \frac{n^2}{n^2} \right\}$. The function f_n can be identified with a bijection from $\{(i, j): 1 \leq i, j \leq n\}$ to Ξ_n . If $k = k(n)$ is the number of the column that contains the set $\{\alpha\} \times [0, 1]$, then $\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f_n(k, \nu)$ is an approximation of the integral $\int_0^1 f(\alpha, s) ds$, and we arrive at an extremal problem to find

$$\min \sum_{\nu=1}^n f_n(k, \nu)$$

over all non-decreasing bijections f_n .

REFERENCES

- [1] Kovalenko O.V., *On discretization of some extremal problems* // Ukr. Math. Bull. — 2025. — V. 22, No 3. — P. 377–393.

OLES HONCHAR DNIPRO NATIONAL UNIVERSITY, DNIPRO, UKRAINE
Email address: olegkovalenko90@gmail.com

HIGHER-ORDER DERIVATIVES IN DIFFERENTIAL CRYPTANALYSIS

A.V. LUTSENKO, A.I. RODIUK

Differential cryptanalysis remains one of the most powerful and widely used methods for evaluating the security of modern block ciphers. This method was originally proposed by Eli Biham and Adi Shamir [1] as an effective chosen-plaintext attack against the Data Encryption Standard (DES), and later became a fundamental tool for assessing the strength of modern block ciphers.

However, as cryptographic algorithms become more complex, there is a need to generalize the traditional approach and investigate higher-order derivatives as a means of improving cipher robustness. Such generalization was first systematically investigated by Xuejia Lai [2], who demonstrated the connection between higher-order derivatives, differential probabilities, and linear structures in cryptographic functions.

For a function $y = f(x)$, the derivative of y at point a is defined as

$$\Delta_a f(x) = f(x + a) - f(x).$$

The probability of the differential (a, b) of the function $y = f(x)$ is called the conditional probability that $\Delta y = b$ if $\Delta x = a$ when x is uniformly random. That is

$$P(\Delta y = b \mid \Delta x = a) = P(f(x + a) - f(x) = b) = P(\Delta_a = b).$$

The fact that many practical block ciphers are obtained by iterating a cryptographically weak round function is the basis for the success of differential cryptanalysis. If the input difference to the last round (Δx) can be predicted with high probability, then usually a pair of outputs (y, y^*) and the input difference Δx_0 are sufficient to obtain the secret key used in the last round.

The basic idea of differential cryptanalysis can be generalized to the case where more than two inputs are used simultaneously to obtain the secret key, using higher-order derivatives.

For a function $y = f(x)$, the i -th ($i > 0$) derivative of the y at $(a_1, a_2, \dots, a_i)$ is defined as

$$\Delta_{a_1, \dots, a_i}^{(i)} f(x) = \Delta_{a_i} (\Delta_{a_1, \dots, a_{i-1}}^{(i-1)} f(x)),$$

where $\Delta_{a_1, \dots, a_{i-1}}^{(i-1)} f(x)$ – the $(i - 1)$ -th derivative of the y at $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1})$.

It should be noted that for the computation of higher-order derivatives, the input differences $(a_1, a_2, \dots, a_i)$ must be linearly independent. Otherwise, the resulting derivative becomes trivial (equal to zero), and such cases are of no cryptanalytic interest.

Proposition 1. *If a (nontrivial) i -th derivative of $(r - 1)$ round function takes on a value with high probability, then it is possible to derive the key for the last round from the known 2^i outputs and from the anticipated derivative value.*

Preliminary studies indicated that higher-order differential cryptanalysis may not always be more powerful than the first-order one; however it provides a new way to measure cryptographic strength.

A function $y = f(x)$ is said to have a linear structure if there exists a nonzero a such that $f(x + a) - f(x)$ remains invariant for all x . It is evident that the function $y = f(x)$ has a linear structure if and only if it has a differential of probability one.

The connection between the concepts of differential, linear structure, and derivatives implies a new principle for designing cryptographic functions.

Proposition 2. *For any small i , the nontrivial i -th derivatives of the function must take on all possible values roughly uniformly.*

Thus, higher-order derivatives provide a generalized framework for evaluating the strength of cryptographic transformations. They reveal new relationships between the concepts of differential probability, linearity, and uniformity that are crucial for cryptographic design.

Future research may focus on the practical evaluation of high-order differential properties in specific block ciphers and on developing of design strategies that ensure uniform distribution of derivatives, thereby increasing resistance to both classical and high-order differential attacks.

REFERENCES

- [1] Biham E., Shamir A. *Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems* // Journal of Cryptology — 1991. — V. 4, No 1. — P. 3–72.
- [2] Lai X. *Higher Order Derivatives and Differential Cryptanalysis* // Communications and Cryptography — 1994. — P. 227–233.

VASYL' STUS DONETSK NATIONAL UNIVERSITY, VINNYTSIA, UKRAINE
Email address: lucenko.alla32@gmail.com

VASYL' STUS DONETSK NATIONAL UNIVERSITY, VINNYTSIA, UKRAINE
Email address: alina.rodruk@gmail.com

EXACT VALUES OF BEST APPROXIMATIONS FOR CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS BY SPLINES OF DEFICIENCY 2

N.V. PARFINOVYCH, A.A. SELIVANOV

Let L_p ($1 \leq p \leq \infty$) be the space of measurable functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ with norm $\|\cdot\|_p$. For $M, H \subset L_p$ the quantity

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} \inf_{u \in H} \|f - u\|_p$$

we will call the best approximation of class M by set H in L_p .

By W_p^r ($r \in \mathbb{N}$) we will denote the class of functions $f \in L_p$, such that $f^{(r-1)}$ is locally absolutely continuous and $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$. By $S_m^k(\theta, h)$ we will denote the set of polynomial splines of degree not greater than m with deficiency k and knots $\theta + jh$, $j \in \mathbb{Z}$.

In [1] it was proved, that for all $\theta \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq r - 1$:

$$E(W_1^r, S_m^1(\theta, h) \cap L_1) = K_r \left(\frac{h}{\pi} \right)^r,$$

where K_r are Favard constants.

We obtained the following theorem:

Theorem 1. For $\theta \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$:

$$E(W_1^r, S_m^2(\theta, h) \cap L_1) = K_r \left(\frac{h}{2\pi} \right)^r.$$

Theorem 1 is an analog of result [2] about approximation for classes of differentiable functions by splines of deficiency 2 in periodic case.

REFERENCES

- [1] Magaril-Il'yaev G.G. *On the best approximation of functional classes by splines on the real line..* Trudy MIAN. 1992, 194, 148-159.
- [2] Babenko V.F and Parfinovich N.V. *Exact values of best approximations for classes of periodic functions by splines of deficiency 2.* Math Notes. 2009, 85 (3-4), 515-527. <https://doi.org/10.1134/S0001434609030237>

OLES HONCHAR DNIPRO NATIONAL UNIVERSITY, DNIPRO, UKRAINE
Email address: `parfinovich@mmf.dnu.edu.ua`

OLES HONCHAR DNIPRO NATIONAL UNIVERSITY, DNIPRO, UKRAINE
Email address: `selivanov_a@365.dnu.edu.ua`

ORDERS OF THE BEST SPARSE TRIGONOMETRIC APPROXIMATIONS OF THE NIKOL'SKII–BESOV FUNCTION CLASSES IN THE LEBESGUE SUBSPACES

K.V. POZHARSKA, A.S. ROMANYUK

We will discuss our recent results on the order estimates for the best m -term (sparse) trigonometric approximations of Nikol'skii–Besov classes $B_{p,\theta}^{\mathbf{r}}$ (see, e.g., [1, 2]) of periodic multivariate functions of mixed smoothness in the space $B_{q,1}$ for the case $2 \leq p < q < \infty$.

The space $B_{q,1}$ is a so-called “zero” Besov space with the norm that is not weaker than the respective L_q -norm (see [3]). An interest in investigating errors of approximation in such a special norm is the fact that in some situations the question on the orders of respective characteristics in the L_q -space remains open, whereas one can get corresponding estimates in the $B_{q,1}$ -norm.

Let X be a normed space with the norm $\|\cdot\|_X$ and $\Theta_m := \{\mathbf{k}^1, \dots, \mathbf{k}^m\}$ be a set of vectors $\mathbf{k}^j \in \mathbb{Z}^d$, c_j be arbitrary complex numbers, $j = 1, \dots, m$. We consider trigonometric polynomials of the form

$$P(\Theta_m) := P(\Theta_m, \mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$$

and for the function $f \in X$ introduce the quantity

$$e_m(f)_X := \inf_{c_{\mathbf{k}}} \inf_{\Theta_m} \|f - P(\Theta_m)\|_X.$$

If $F \subset X$ is a function class, then we set

$$e_m(F)_X := \sup_{f \in F} e_m(f)_X. \quad (1)$$

The approximation characteristic (1) is called the best m -term trigonometric approximation of the class F in the space X . The quantity $e_m(f)_{L_2(\mathbb{T})}$ for functions of one variable was introduced by S.B. Stechkin [4].

Further we assume that $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$, where the coordinates are ordered such that $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. The following statement holds:

Theorem. *Let $d \geq 2$, $2 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Then for $r_1 > 1/2$ the following relation holds:*

$$e_m(B_{p,\theta}^{\mathbf{r}})_{B_{q,1}} \asymp m^{-r_1} (\log^{\nu-1} m)^{r_1+1-1/\theta}.$$

Note that the respective result for the univariate classes of functions ($d = 1$) was earlier obtained in the paper [5].

Comparing the estimates in the $B_{q,1}$ -norm with corresponding results for the L_q -norm [6], we conclude that in the case $d = 1$ it holds for $r_1 > 1/2$, $2 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, that

$$e_m(B_{p,\theta}^{r_1})_q \asymp e_m(B_{p,\theta}^{r_1})_{B_{q,1}} \asymp m^{-r_1}.$$

In the case $d \geq 2$ the situation is different. Namely, the orders of the best m -term trigonometric approximations of the class $B_{p,\theta}^r$ in the spaces $B_{q,1}$ and L_q for the considered parameter region coincide only for $\nu = 1$. For $\nu > 1$ we have that in the case $r_1 > 1/2$, $2 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ the following relation holds:

$$e_m(B_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}} \asymp e_m(B_{p,\theta}^r)_{L_q} (\log^{\nu-1} m)^{1/2}.$$

Besides, in the multivariate case (in contrast to the univariate) estimates of the quantities $e_m(B_{p,\theta}^r)_{B_{q,1}}$ depend on the parameter θ .

REFERENCES

- [1] Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. *Function spaces of mixed smoothness from the decomposition point of view* // Proc. Steklov Inst. Math. — 1990. — V. 187. — 163–184 pp.
- [2] Romanyuk A.S. *Approximative characteristics of classes of periodic multivariate functions*. — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2012. — V. 93. — 353 p.
- [3] Pozharska K.V., Romanyuk A.S. *The best m -term trigonometric approximations of the classes of periodic multivariate functions of mixed smoothness* // Res. Math. — 2025. — V. 33, No 2, to appear.
- [4] Stechkin S.B. *On absolute convergence of orthogonal series* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1955. — V. 102, No. 2. — 37–40 pp.
- [5] Pozharska K.V., Romanyuk A.S. *The best m -term trigonometric approximations of the classes of periodic functions of one and many variables in the space $B_{q,1}$* // Res. Math. — 2024. — V. 32, No. 2. — 137–154 pp.
- [6] Romanyuk A.S. *Best M -term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables* // Izv. Math. — 2003. — V. 67, No. 2. — 265–302 pp.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE; CHEMNITZ
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, CHEMNITZ, GERMANY
Email address: pozarska.k@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: romanyuk@imath.kiev.ua

GENERALIZATION OF THE SCHWARZ–PICK INEQUALITY AND ITS APPLICATIONS TO THE EXTREMAL PROBLEMS OF APPROXIMATION OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

V.V. SAVCHUK, M.V. SAVCHUK

The talk is devoted to a generalization of the well-known Schwarz–Pick inequality for bounded holomorphic functions, with an emphasis on its application to extremal problems in approximation theory.

Let H^∞ denote the space of bounded holomorphic functions in $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ equipped with the norm $\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|$.

For a function $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in H^\infty$, denote by $S_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$, $n \in \mathbb{N}$, ($S_0(f) = 0$), the n -partial sum of f . Let $\mathcal{P}_n$ be the set of all polynomials of degree at most $n - 1$ in the case of $n \in \mathbb{N}$, and the empty set for $n = 0$.

Theorem 1. *Suppose that $f \in H^\infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, and $z \in \mathbb{D}$. Then for any polynomial $P_n \in \mathcal{P}_n$ such that $P_n \not\equiv f$ and any $\rho \geq 0$, the following inequality holds:*

$$\left| \left(\frac{f(z) - S_n(f)(z)}{z^n} \right)' \right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \|f - P_n\| \left(1 - 2\rho \frac{|f(z) - P_n(z)|}{\|f - P_n\|} + \rho^2 \right).$$

For given $P_n \in \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, and $z \in \mathbb{D}$, equality is attained if and only if $\rho \in [0, 1]$ and

$$f(t) = P_n(t) + c \frac{t^n \frac{t-z}{1-t\bar{z}} - a}{1 - t^n \frac{t-z}{1-t\bar{z}}},$$

where $a, c \in \mathbb{C}$, $|a| = \rho$, and $|c| > 0$.

REFERENCES

- [1] Savchuk V.V., Savchuk M.V. *Generalization of the Schwarz–Pick Inequality and Its Applications to the Extreme Problems of Approximation of Holomorphic Functions* // Ukr. math. journ. — 2025. — V. 77, No 1. — P. 48–58.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: savchuk@imath.kiev.ua

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: ma.savchuk@kpi.ua

APPROXIMATION BY LAGRANGE INTERPOLATION POLYNOMIALS ON THE CLASSES OF CONVOLUTIONS

A.S. SERDYUK, T.A. STEPANIUK

Denote by $C_{\beta,1}^\psi$ (see, e.g., [1]) the set of 2π -periodic functions, which for all $x \in \mathbb{R}$ can be represented as convolutions of the form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \|\varphi\|_{L_1} \leq 1, \quad \varphi \perp 1, \quad (1)$$

with the generating kernel Ψ_β of the form

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \psi(k) \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty.$$

We study approximation properties of the sets $C_{\beta,1}^\psi$, where we use as approximation aggregate the classical interpolation trigonometric Lagrange polynomials, which are defined by odd number of uniformly distributed interpolation nodes.

For arbitrary function $f(x)$ from C by $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$, $n \in \mathbb{N}$, we will denote the trigonometric polynomial of the order $n-1$, which interpolates $f(x)$ in the nodes $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, namely, such that

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

The polynomial $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$ is called as Lagrange interpolation polynomial.

Denote by $\tilde{\rho}_n(f; x)$ the deviation of the function $f \in C$ from its interpolation Lagrange polynomial $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x).$$

and also denote

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi; x) = \sup_{f \in C_{\beta,1}^\psi} |\tilde{\rho}_n(f; x)|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

The following theorem takes place [2].

Theorem 1. Let $\sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k) < \infty$, $\psi(k) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then, for all $x \in \mathbb{R}$ the following equality holds

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) + \frac{\Theta}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k\psi(k+n) \right). \quad (2)$$

In (2) the quantity $\Theta = \Theta(n; \psi; \beta; x)$ is such that $-(1 + \pi) \leq \Theta \leq 1$.

The following corollaries take place.

Corollary 1. Let $\psi(k) = (k+2)^{-\ln \ln(k+2)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then for all $x \in \mathbb{R}$ as $n \rightarrow \infty$ the following asymptotic equality holds

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \frac{n}{\ln \ln(n+2)} \left(1 + \mathcal{O}(1) \frac{n}{\ln \ln(n+2)} \right).$$

Corollary 2. Let $\psi(k) = e^{-\ln^2(k+1)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then for all $x \in \mathbb{R}$ as $n \rightarrow \infty$ the following asymptotic equality holds

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{1}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \frac{\psi(n)n}{\ln(n+1)} \left(1 + \mathcal{O}(1) \frac{1}{\ln(n+1)} \right).$$

Corollary 3. Let $\psi(k) = e^{-\frac{k+2}{\ln(k+2)}}$, $k = 1, 2, \dots$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then for all $x \in \mathbb{R}$ as $n \rightarrow \infty$ the following asymptotic equality holds

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\psi}; x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \psi(n) \ln(n+2) \left(1 + \mathcal{O}(1) \frac{1}{\ln(n+2)} \right).$$

REFERENCES

- [1] Stepanets A.I., *Methods of Approximation Theory*. — VSP: Leiden, Boston, 2005.
- [2] Serdyuk A.S., Stepanyuk T.A. *Estimates of approximations by interpolation trigonometric polynomials on classes of convolutions of periodic functions of high smoothness*. // Journal of Mathematical Sciences. — 2025. — V. 291, No 6. — P. 1030–1055.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: sanatolii@ukr.net

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: stepaniuk.tet@gmail.com

ON THE BEST M -TERM TRIGONOMETRIC APPROXIMATIONS OF STEPANETS CLASSES OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

O.L. SHVAI, K.V. POZHARSKA

In the talk, we will make an overview of results on the order estimates for the quantity of the best m -term (sparse) trigonometric approximation of Stepanets classes of functions of many variables with bounded generalized derivatives in the Lebesgue spaces [1].

The best m -term trigonometric approximation of a function $f \in L_1$ is a quantity $e_m(f)_q$ that measures how good w.r.t. the norm of the Lebesgue space L_q can this function be approximated by trigonometric polynomials having m harmonics, i.e.,

$$e_m(f)_q := \inf_{c_{\mathbf{k}}} \inf_{\Theta_m} \left\| f - \sum_{\mathbf{k} \in \Theta_m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\|_q,$$

where Θ_m is a set of m arbitrary vectors $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$, $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$. For a class of functions $F \subset L_1$ one defines

$$e_m(F)_q := \sup_{f \in F} e_m(f)_q.$$

We investigate Stepanets classes $F = L_{\beta, p}^{\psi}$ [2] of 2π -periodic multivariate functions that, for a special choice of sequences ψ which define smoothness of functions, coincide with the well-known Sobolev (Weyl–Nagy) classes $W_{p, \alpha}^r$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Pozharska K.V., Shvai O.L. *Estimates of the best sparse approximations of the classes of periodic functions with bounded generalized derivative*, in preparation.
- [2] Stepanets A.I. *Methods of the theory of approximation* — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2002. — Vol. 40. — Part I. - 427 pp.

LESYA UKRAINKA VOLYN NATIONAL UNIVERSITY, LUTSK, UKRAINE
Email address: shvai.olga@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE; CHEMNITZ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, CHEMNITZ, GERMANY
Email address: pozharska.k@gmail.com

MATRIX-GRAPHIC SIMULATION OF SOCIAL NETWORK WITH EXTERNAL IMPACT: ERGODIC PROPERTIES

I. YA. SPECTORSKY, V. M. STATKEVYCH, O. V. STUS

Social network analysis is now one of most important methods for scientific investigation in sociology, social psychology and other areas (see, e.g., [1, 2]). A social network is defined by impact of network elements on other ones. For a social network simulating a lot of different toolkits can be used: graph theory methods [3], matrix analysis [1] etc. Usually, a social network is not a static structure. Behaviour of social networks are now intensively investigated, and steady states are of a special interest (see, e.g., [3]). In [4] certain sufficient conditions for social network ergodicity were obtained, using matrix and graph methods of network representation.

The purpose of this work is to extend the main results of [4] on networks with external impact.

Let the social network (hereinafter is referred to as the network) contain nm elements, arranged in n rows and m columns ($n, m \in \mathbb{N}^1$), position of each element is defined by a pair $(i, j) \in \Omega$, where $\Omega = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ is the set (area) of coordinates of network elements.

The current state of the element $(i, j) \in \Omega$ is defined by a number $A_{i,j}(t) \in [0, 1]$, hereinafter $t \in N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ denotes discrete time. Therefore, the current state of the network can be represented as a matrix $A(t) \in M_{n \times m}[0, 1]$ – matrix of dimension $n \times m$ with elements $A_{i,j}(t) \in [0, 1]$ ($(i, j) \in \Omega$).

Let $B \subsetneq \Omega^2$ be the bound of the coordinate area Ω , whose element states are described by the boundary condition matrix Δ of dimension $n \times m$, assuming $\Delta_{i,j} = 0$ for all $(i, j) \in \Omega \setminus B$. Elements $(i, j) \in \Omega \setminus B$ are called internal.

Network dynamics is simulated by a linear impact operator $T : M_{n \times m}[\mathbb{R}] \rightarrow M_{n \times m}[\mathbb{R}]$. The operator T is considered as 4-dimensional $n \times m \times n \times m$ array with elements from $\mathbb{R}$, its action on a matrix $X \in M_{n \times m}[\mathbb{R}]$ is defined point-wise:

$$(TX)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m T_{i,j,k,l} X_{k,l},$$

each element $T_{i,j,k,l}$ defines impact of the state of the network element (k, l) on the state of the network element (i, j) .

¹Hereinafter $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, +\infty\}$ denotes the set of positive integer.

²' $\subsetneq$ ' and ' $\subset$ ' are used for strict inclusion and non-strict inclusion respectively.

Assume for normalization reasons that

- $\forall i, j, k, l : T_{i,j,k,l} \geq 0$;
- $\forall (i, j) \in \Omega \setminus B : \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m T_{i,j,k,l} = 1$.

Since the states of elements on the bound B are defined by the matrix Δ , assume that $T_{i,j,k,l} = 0$ for all $(i, j) \in B, (k, l) \in \Omega$.

The operator T can be visualized as a labelled directed impact graph G_T with vertices corresponding to elements $(i, j) \in \Omega$: a directed edge leads from the vertex (k, l) to the vertex (i, j) if and only if $T_{i,j,k,l} > 0$, this edge is labelled by the number $T_{i,j,k,l}$. Note that the operator T in fact defines an adjacency matrix of the graph G_T , deployed in 4-dimensional array for convenience.

Define the network state $A(t+1)$ by the network state $A(t)$ via equation

$$A(t+1) = (1 - \gamma)TA(t) + \Delta + \gamma F,$$

where $F \in M_{n \times m}[0, 1]$ and $\gamma \in [0, 1]$ define external impact on the network, assuming $F_{i,j} = 0$ for all $(i, j) \in B$.

Theorem 1. *Let $\gamma \in (0, 1]$. Then there exists $\hat{A} \in M_{n \times m}[0, 1]$ such that $A(t)$ converges linearly to $\hat{A}$ as $t \rightarrow +\infty$ in the norm*

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} |X_{i,j}|, \quad (X \in M_{n \times m}[\mathbb{R}]).$$

Remark. Theorem 1 remains valid also in the case $\gamma = 0$ (no external impact), provided that the impact graph G_T is strong connective and reflexive; in detail it is described in [4].

REFERENCES

- [1] Wagner Alan R. *Creating and Using Matrix Representations of Social Interaction* // HRI09: International Conference on Human Robot Interaction. — 2009. — P. 125–132. — ISBN: 978-1-60558-404-1.
- [2] Yemelyanenko T.H., Domashych A.O. *Research of models of social networks* // Actual Problems of Automation and Information Technology. — 2017. — V. 21. — P. 74–86. — ISBN: 2312-119X. — In Ukrainian.
- [3] Breer V.V., Novikov D.A., Rogatkin A.D. *Mob Control: Models of Threshold Collective Behavior*. — Heidelberg, 2017. — 134 p. — (Studies in Systems, Decision and Control). — ISBN: 978-3-319-51864-0. — DOI: 10.1007/978-3-319-51865-7.
- [4] Sectorsky I.Ya., Statkevych V.M., Stus O.V. *Matrix-graphic simulation of social network: ergodic properties* // System Research and Information Technologies. — 2025. — No 4. To be printed.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: `sectorsky.igor@kpi.ua`

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: `mstatkevich@yahoo.com`

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: `o.stus@kpi.ua`

РОБАСТНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ІГОР З НЕВИЗНАЧЕНОСТЯМИ

І.В. АЛЕКСЄЄВА, Я.М. САТИР

На процес прийняття рішення суттєво впливає невизначеність ситуації, в якій це рішення приймається, і неточність даних. На практиці часто виявляється, що навіть невеликі збурення в даних роблять розв'язок оптимізаційної задачі не лише не оптимальним, а навіть недопустимим. Одним з підходів, який дозволяє знайти оптимальний розв'язок при неточності даних, є робастна оптимізація [1], [2].

Розглянемо матричну гру, яка описує антагоністичний конфлікт двох гравців, кожен з яких має скінченну кількість стратегій.

Нехай $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$, $j \in J = \{1, \dots, n\}$ — платіжна матриця гри. Перший гравець вибирає стратегію $x \in \Delta_m = \{x \geq 0, \mathbf{1}_m^T x = 1\}$, а другий — стратегію $y \in \Delta_n = \{y \geq 0, \mathbf{1}_n^T y = 1\}$.

Точка рівноваги в грі — це пара стратегій:

$$x^* = \arg \max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} x^T A y, \quad y^* = \arg \min_{y \in \Delta_n} \max_{x \in \Delta_m} x^T A y.$$

Відповідно до теореми Джона фон Неймана

$$\max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} x^T A y = \min_{y \in \Delta_n} \max_{x \in \Delta_m} x^T A y.$$

Розв'язання матричної гри можна звести до розв'язання пари двоїстих задач лінійного програмування:

$$\begin{aligned} \max_{x,v} \quad & v \\ \text{s.t.} \quad & A^T x \geq v \mathbf{1}_n, \\ & \mathbf{1}_m^T x = 1, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} \min_{y,w} \quad & w \\ \text{s.t.} \quad & A y \leq w \mathbf{1}_m, \\ & \mathbf{1}_n^T y = 1, \quad y \geq 0, \end{aligned}$$

де $\mathbf{1}_l, l \in \{m, n\}$ — вектор розмірності l , усі координати якого дорівнюють одиниці.

У звичайній матричній грі елементи a_{ij} матриці виграшів A відомі наперед. Але в реальних ситуаціях матриця A може містити помилки, випадкові або суб'єктивні дані. Тому замість матриці A будемо розглядати множину матриць $\tilde{A}(\xi)$, $\xi \in U$, де U — множина невизначеності.

Робастно допустимий розв'язок повинен задовольняти усім обмеженням задачі для усіх можливих матриць $\tilde{A}$ з множини невизначеності U .

Робастна рівновага — це набір стратегій для кожного гравця, які гарантують найкращий результат у найгіршому випадку:

$$x^* = \arg \max_{x \in \Delta_m} \min_{\xi \in U} \min_{y \in \Delta_n} x^T \tilde{A}(\xi) y, \quad y^* = \arg \min_{y \in \Delta_n} \max_{\xi \in U} \max_{x \in \Delta_m} x^T \tilde{A}(\xi) y.$$

Розв'язок робастної задачі залежить від геометрії множини невизначеності.

Позначимо через J_i множину індексів i -го рядка, для яких відповідні елементи матриці $\tilde{A}$ мають невизначеності.

Тоді кожен елемент $\tilde{a}_{ij}$, $j \in J_i$ матриці $\tilde{A}$ можна записати як $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \xi_{ij} \hat{a}_{ij}$, $\xi_{ij} \in [-1; 1]$, де $\hat{a}_{ij} > 0$ — збурення елемента a_{ij} номінальної матриці A .

В роботі [3] розглянуто розв'язок задачі лінійного програмування для прямокутної, еліпсоїдальної і поліедральної множин невизначеності. Розглянемо область невизначеності, що є перетином прямокутної і еліпсоїдальної областей: $U = \left\{ \xi \mid \sqrt{\sum_j \xi_j^2} \leq \varepsilon^2, |\xi_j| \leq \rho, \rho \leq \varepsilon \leq \rho \sqrt{|J_i|}, \forall j \in J_i \right\}$,

де $|J_i|$ — потужність множини J_i . Отримаємо пару двоїстих задач:

$$\begin{aligned} & \max v \\ & \sum_i a_{ij} x_i - \rho \sum_i \hat{a}_{ij} |x_i - z_{ij}| - \varepsilon \sqrt{\sum_i \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \geq v, \quad \forall j \\ & \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i, \\ & \min w \\ & \sum_j a_{ij} y_j + \rho \sum_j \hat{a}_{ij} |y_j - z_{ij}| + \varepsilon \sqrt{\sum_j \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} \leq w, \quad \forall i \\ & \sum_j y_j = 1, \quad y_j \geq 0, \quad \forall j. \end{aligned}$$

Зауважимо, що робастний аналог гри з нульовою сумою з невизначеністю вже не буде грою з фіксованою сумою, оскільки найгірші сценарії для кожного гравця можуть не збігатися [2].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ben-Tal, A., El Ghaoui A.L. and Nemirovski A. *Robust optimization*. — Princeton University Press, 2009. — 576 p.
- [2] Aghassi, M., Bertsimas, D. *Robust game theory* // Math. Program. — 2006. — V. 107, — С. 231–273.
- [3] Алексеева І.В., Перевознюк Т.І. *Застосування робастної оптимізації для лінійної моделі функціонування малого підприємства* // Mathematics in Modern Technical University. — 2018. — № 1, — С. 61–73.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexir1@ukr.net

(k + 1)-ДІАГОНАЛЬНІ МАТРИЦІ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК З ПОВОРОТНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ k-ГО ПОРЯДКУ

А.С. АЛЕКСАНДРОВА, В.О. БІЛИЙ, О.Ю. КОЛЕСОВ

Якщо поворотна послідовність k -го порядку задана своїм рекурентним співвідношенням $x_n = \sum_{p=1}^k a_p x_{n-p}$, то виникає необхідність для зручності обчислень або вивчення властивостей елементів даної послідовності та інших задач знайти альтернативний метод визначення загального члена x_n . Це або аналітична формула типу формули Біне, або вираження через біноміальні коефіцієнти, континуанти, матриці і т. д. У даній роботі для цього розглянемо $(k + 1)$ -діагональні матриці типу Тепліца–Гессенберга.

Розглянемо матрицю $A_n(a_0; a_1, a_2, \dots, a_k)$ та обчислимо її визначник методом рекурсивних співвідношень. Маємо, розкладаючи покроково за елементами першого стовпчика,

$$\begin{aligned} \Delta_n = \det A_n(a_0, a_1, \dots, a_k) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}_n \\ &= a_1 \Delta_{n-1} - a_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-3} & a_{k-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}_{n-1} \\ &= a_1 \Delta_{n-1} - a_0 a_2 \Delta_{n-2} + a_0^2 a_3 \Delta_{n-3} - a_0^3 a_4 \Delta_{n-4} + \dots + \\ &\quad + (-1)^{k-2} a_0^{k-2} a_{k-1} \Delta_{n-k-1} + (-1)^{k-1} a_0^{k-1} a_k \Delta_{n-k} = \\ &= \sum_{p=1}^k (-1)^{p-1} a_0^{p-1} a_p \Delta_{n-p}. \end{aligned}$$

Або, якщо $a_0 = -1$, то $\Delta_n = \det A_n(-1; a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{p=1}^k a_p \Delta_{n-p}$.
Для обчислення Δ_n складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - a_2 \lambda^{k-2} - \dots - a_{k-1} \lambda - a_k = 0.$$

Знайдемо корені цього многочлена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ та запишемо $\Delta_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \dots + C_k\lambda_k^n$, де константи $C_1, C_2, \dots, C_k$ знаходимо із початкових умов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$.

Відмітимо тепер, що для відповідної поворотної послідовності k -го порядку з $x_n = \sum_{p=1}^k a_p x_{n-p} = \sum_{p=1}^k a_p \Delta_{n-p}$ та узгодженими початковими умовами $x_1 = \Delta_1, x_2 = \Delta_2, \dots, x_k = \Delta_k$, алгоритм дій для знаходження x_n та Δ_n ідентичний. Тому робимо висновок, що

$$x_n = \det A_n(-1; a_1, a_2, \dots, a_k),$$

тобто маємо шукане представлення загального члена відповідної поворотної послідовності у вигляді визначника $(k+1)$ -діагональної матриці.

Приклад 1. При $a_1 = 2, a_2 = -2$, маємо $x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}$, з п. у. $x_0 = 1, x_1 = 2$. Тоді $\{x_n\} = \{1, 2, 2, 0, -4, \dots\}$; $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$; $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$,

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n, \text{ де } \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1(1+i) + C_2(1-i) = 2. \end{cases}$$

$$x_n = (1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1} = (\sqrt{2})^{n+1} \cos \frac{(n-1)\pi}{4}, \quad x_n = \det A_n(-1, 2, -2).$$

Приклад 2. Розглянемо $\det A_n(-1, 4, 1, -16, 12)$.

Відповідна послідовність задана таким рекурентним співвідношенням: $x_{n+1} = 4x_n + x_{n-1} - 16x_{n-2} + 12x_{n-3}$. Характеристичне рівняння: $\lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda-1)(\lambda^2-4)(\lambda-3) = 0$, $\lambda_{1-4} = \{1; -2; 2; 3\}$. Послідовність $x_n = \{0, 0, 0, 1, 4, 17, 56, 189, \dots\}$, $x_n = C_1 + C_2(-2)^n + C_32^n + C_43^n$, де $C_1 = \frac{1}{6}, C_2 = -\frac{1}{60}, C_3 = \frac{1}{4}, C_4 = \frac{1}{10}$, тобто $x_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{60}(-2)^n - \frac{1}{4}2^n + \frac{1}{10}3^n$. Таким чином, маємо формулу загального члена при $n \geq 1$: $x_{n+3} = \det A_n(-1, 4, 1, -16, 12)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] В.О. Білий, О.Г. Білий *Про послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності. Матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, - Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2018. — [інтернет-джерело], 28–29 грудня 2017р. — 201–208 с.
- [2] Taras Goy, Mark Shattuck, *Determinants of Toeplitz–Hessenberg Matrices with General Fibonacci Elements*, Faculty of Mathematics and Informatics, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine / Department of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, USA, 2019. — [online source], October 13, 2019, pp. 83–95.

КПП ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: alexandrova23042009@gmail.com

КПП ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: valeri_y@ukr.net

КПП ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: sanyakolesov348@gmail.com

ОРТОПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МІШАНОЇ ГЛАДКОСТІ

С.Б. ГЕМБАРСЬКА

Розглядаються ортопоперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ [1] періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{q,1}$ (див., наприклад, [2]), норма в якому є сильнішою, ніж L_q -норма. Надалі Ω — функція типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі–Стечка (S $^\alpha$) та (S $_l$) [3], і для певної функції Ω класи $B_{p,\theta}^\Omega$ збігаються з відомими класами Нікольського–Бєсова $B_{p,\theta}^r$.

Означимо апроксимативну характеристику, яка нами досліджується.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована у просторі $L_2(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, система функцій $u_i \in L_\infty(\mathbb{T}^d)$, $i = \overline{1, m}$. Кожній функції $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність агрегат вигляду $\sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i$, де $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \bar{u}_i(x) dx$.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$, то величина

$$d_m^\perp(F, L_q) := \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m \in L_\infty(\mathbb{T}^d)} \sup_{f \in F} \|f - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i\|_q$$

називається ортопоперечником класу F у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$.

Ортопоперечник $d_m^\perp(F, L_q)$ введений в роботі [4].

Наведемо отримані результати.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 < q \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S $^\alpha$) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S $_l$). Тоді для будь-якої послідовності $m = (m_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що $m \asymp 2^n n^{d-1}$ справедливе співвідношення*

$$d_m^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, B_{q,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (1)$$

Зауваження 1. Порівнявши (1) з відповідною оцінкою ортопоперечника $d_m^\perp(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ [1], бачимо, що, за винятком випадку $\theta = 1$, оцінки ортопоперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{q,1}$ і L_q є різними за порядком.

Інша ситуація спостерігається в одновимірному випадку.

Теорема 2. Нехай $d = 1$, $1 < q \leq p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ й умову (S_l) . Тоді справедлива оцінка

$$d_m^\perp(B_{p,\theta}^\omega, B_{q,1}) \asymp \omega(m^{-1}). \quad (2)$$

Зауваження 2. Зіставивши (2) з оцінкою ортопоперечника $d_m^\perp(B_{p,\theta}^\omega, L_q)$ [1], знаходимо, що виконуються співвідношення

$$d_m^\perp(B_{p,\theta}^\omega, B_{q,1}) \asymp d_m^\perp(B_{p,\theta}^\omega, L_q) \asymp \omega(m^{-1}).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Yongsheng S., Heping W. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness.*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 1997, Vol. 219, P. 356–377.
- [2] Катерина Пожарська, Анатолій Романюк, Сергій Янченко. *Найкращі наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою домінуючою мішаною похідною.* Укр. Мат. Журн., 2024., Т. 76, № 7, С. 1007–1023.
- [3] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.* Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, Т. 5, С. 483–522.
- [4] Темляков В.Н., *Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных.* Докл. АН СССР, 1982, Т. 267, № 2, С. 314–317.

ВНУ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: gembarskaya72@gmail.com

ПРО ДОБУТКИ КОНФОРМНИХ РАДІУСІВ ОБЛАСТЕЙ ВІДНОСНО ТОЧОК ДЕЯКОГО ВІДРІЗКА

І.В. ДЕНЕГА

Нехай функція $f(z)$, регулярна в крузі $U = \{z : |z| < 1\}$, однолисто відображає даний круг на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$ і $a \neq \infty$. Величина $|f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a .

Функцією Гріна $g_B(z, a)$ області B з полюсом в скінченній точці $a \in B$ називається дійсна функція, гармонічна по z в $B \setminus a$, яка прямує до нуля, коли z прямує до межі B , і для якої в деякому околі точки a правильний асимптотичний розклад

$$g_B(z, a) = -\ln |z - a| + \gamma + o(1), \quad z \rightarrow a.$$

Для довільної області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функція Гріна визначається як границя

$$g_B(z, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{B_n}(z, a),$$

де $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вичерпування області B областями, що мають класичну функцію Гріна, тобто $\overline{B_n} \subset B_{n+1}$, $a \in B_1$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Якщо ця границя дорівнює нескінченності, то говорять, що область B не має функції Гріна.

Внутрішнім радіусом $r(B, a)$ області B відносно скінченної точки a називається величина e^{γ} .

Нехай функція f регулярна в крузі $U = \{z : |z| < 1\}$ і приймає там значення w , що належать області D , яка має в точці $a \in D$ внутрішній радіус $r(D, a)$. Якщо $f(0) = a$, то справедлива нерівність (Хеймана) [1]:

$$|f'(0)| \leq r(D, a). \quad (1)$$

Рівність в (1) досягається тоді, коли f відображає круг U конформно і однолисто на D .

В роботі [2] сформульовано таку проблему.

Проблема. Знайти максимум добутку

$$\prod_{k=1}^n r(D_k, a_k) \quad (2)$$

для взаємно неперетинних областей $D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ і точок $a_k \in D_k \cap [-1, 1]$, $k = 1, \dots, n$, $n > 4$.

Наступна теорема дає оцінку добутку (2) для областей B_k і точок a_k , які належать деякому інтервалу.

Теорема 1. [3] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $l = \{z : z = z_0 + te^{i\varphi_0}\}$ – деяка пряма, $a_1 = z_0$, $a_n = z_0 + \rho e^{i\varphi_0}$, де ρ – деяке додатне дійсне число. Тоді для довільного набору точок $\{a_k\}$, $k = \overline{2, n-1}$, інтервала (a_1, a_n) і функцій f_k , $k = \overline{0, n}$, регулярних і однолистих у крузі $U = \{z : |z| < 1\}$, які попарно не приймають в ньому однакових значень $f_i(z_1) \neq f_j(z_2)$ для довільних натуральних $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, та довільних різних $z_1, z_2 \in U$, для яких $f_k(0) = a_k$, справедлива нерівність*

$$\prod_{k=1}^n |f'_k(0)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\rho k}{n-1} \right)^{\frac{2(n-k)}{n-1}}.$$

В роботі [4] одержано оцінки для максимуму добутку (2) для конфігурацій областей B_k і точок a_k ($k = \overline{1, n}$), які належать відрізку $[-1; 1]$.

Нехай M_n – максимум добутку (2) для всіх конфігурацій точок a_k і областей B_k ($k = \overline{1, n}$), які задовольняють всі умови вище наведеної проблеми.

Теорема 2. [4] *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $\{a_k\}$, $k = \overline{1, n}$, – довільна множина точок відрізка $[-1; 1]$ і $a_1 = -1$, $a_n = 1$. Тоді для будь-якої системи областей $\{B_k\}$, $k = \overline{1, n}$, таких, що $a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, справедливі наступні нерівності:*

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{n} \right)^n \prod_{k=1}^n \left(\tan^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cot^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n} + 1 \right) &\leq M_n \leq \\ &\leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k}{n-1} \right)^{\frac{2(n-k)}{n-1}}. \end{aligned}$$

The author was supported by budget program “Support for the development of priority areas of research” (КРКVK 6541230) and by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, I.V.D.).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Hayman W.K. *Multivalent functions*.— Cambridge Univ. Press, 1994.
- [2] Dubinin V.N. *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*.— Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.
- [3] Denega I., Zabolotnyi Y. *On products of the inner radii of the domains containing points of some straight line*// J. Math. Sci.— 2024. — V. 27, No. 3. — pp. 299–314.
- [4] Zabolotnyi Ya., Denega I. *On products of inner radii of non-overlapping domains containing certain segment points*// Complex Var. Elliptic Equ.— 2025. — V. 70, No. 9. — pp. 1584–1597.

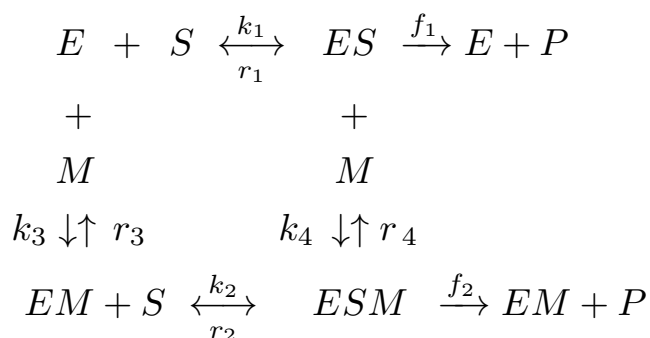
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: iradenega@gmail.com

АНАЛІЗ НЕОБОРОТНОГО МЕХАНІЗМУ БОТТСА–МОРАЛЕСА У КВАЗІСТАЦІОНАРНОМУ НАБЛИЖЕННІ

П.Ф. ЖУК, С.О. КАРАХІМ

Метод початкових швидкостей є одним з найважливіших методів, що знайшов широке застосування при дослідженні кінетики каталітичних та біохімічних реакцій. Але отримати рівняння початкової швидкості у аналітичному вигляді досить складно навіть у випадку відносно простих механізмів реакції. Тому часто використовують ще одне припущення: концентрація ензиму набагато менша, ніж концентрація субстрату. Нами розроблено метод аналізу кінетики реакцій у квазістаціонарному стані навіть у випадках, коли неможливо отримати рівняння початкової швидкості в аналітичному вигляді.

Цей метод застосовано для аналізу механізму Боттса–Моралеса (БМ), який широко використовується при дослідженні впливу оборотних інгібіторів і активаторів (модифікаторів) на ензиматичні реакції:



Вважають, що всі механізми, що містять реакційний цикл, мають підпорядковуватись принципу детального балансу, тобто, в стані рівноваги швидкості прямих і зворотних реакцій рівні на кожній стадії реакційного циклу. Тоді константи швидкості цих стадій не можуть бути довільними: добуток констант швидкостей реакцій, що протікають за напрямом годинникової стрілки, має бути рівним добутку констант швидкості реакцій, що протікають проти годинникової стрілки:

$$k_1 k_4 r_2 r_3 = k_2 k_3 r_1 r_4. \quad (1)$$

Рівність (1) була доведена для оборотних реакцій, в яких встановлюється рівновага при $t \rightarrow \infty$. Проте припускають, що вона виконується також і для необоротних циклічних реакцій (таких як реакція БМ), хоча в них не встановлюється рівноважний стан при $t \rightarrow \infty$. Натомість характерною рисою таких реакцій є квазістаціонарний стан.

Для механізму БМ нами було виведене алгебраїчне рівняння сьомого степеня відносно квазістаціонарної концентрації субстрату без припущення малості концентрації ензиму. Це рівняння дозволяє розрахувати квазістаціонарні концентрації учасників реакції та квазістаціонарну початкову швидкість при довільних константах швидкості й початкових концентраціях ензиму (E), субстрату (S) і модифікатора (M).

Квазістаціонарні концентрації учасників реакції були використані нами для обчислення потоків, щоб перевірити, чи будуть рівними швидкості прямих і зворотних реакцій на кожній стадії реакційного циклу при виконанні умови (1). Було встановлено, що різниця цих швидкостей не дорівнює нулю, а є однаковою для всіх стадій. Це свідчить про те, що в досліджуваній реакції встановилась не детальна, а циклічна рівновага. Тобто, умова (1) не є умовою детального балансу для необоротних циклічних реакцій, що протікають за механізмом БМ. Було доведено, що детальна рівновага встановлюється при виконанні іншої умови:

$$k_1 k_4 (r_2 + f_2) r_3 = k_2 k_3 (r_1 + f_1) r_4. \quad (2)$$

Ця умова містить константи швидкості всіх стадій, в тому числі необоротних. Тому у квазістаціонарному стані константи швидкості зворотних реакцій першої та другої стадій виражаються як $(r_1 + f_1)$ і $(r_2 + f_2)$ відповідно. Тобто, необоротні стадії включаються до складу оборотних.

Підкреслимо, що на відміну від умови (1), при виконанні умови (2) спрощується вказане вище алгебраїчне рівняння та рівняння початкової швидкості, а також кінетична крива є монотонною.

Умова (1) містить тільки константи швидкості оборотних стадій, а тому є умовою детального балансу тільки для оборотних циклічних реакцій. Умова (2) містить всі константи швидкості досліджуваного механізму, в тому числі й необоротних стадій, тому вона є умовою детального балансу для необоротного циклічного механізму БМ.

Зазначимо, що для того, щоб у квазістаціонарному стані встановилась детальна рівновага необхідно, щоб підтримувалось дві рівноваги одночасно: баланс по речовинах і баланс по стадіях — для забезпечення незмінності концентрацій і відсутності потоків на кожній стадії реакції відповідно.

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ", Київ, Україна
Email address: petro.zhuk@npp.kai.edu.ua

ІНСТИТУТ БІОХІМІЇ НАН УКРАЇНИ, Київ, Україна
Email address: karakhim@nas.gov.ua

ПРИНЦИП ФРАКТАЛЬНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ДЛЯ РОЗКЛАДІВ ПЕРРОНА

М.П. МОРОЗ

Означення 1. Розкладами Перрона числа $x \in (0, 1]$ називають такі його розклади в ряд:

- додатний розклад Перрона

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_n}{(p_1 - 1)p_1 \cdots (p_n - 1)p_n p_{n+1}}, \quad (1)$$

- знакозмінний розклад Перрона

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r_0 \cdots r_n}{(q_1 - 1)q_1 \cdots (q_n - 1)q_n (q_{n+1} - 1)}, \quad (2)$$

де $(r_n)_{n=0}^{\infty}$, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ та $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовності натуральних чисел, що задовольняють умови

$$p_n \geq r_{n-1} + 1 \quad \text{та} \quad q_n \geq r_{n-1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Нехай $P = (\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність функцій таких, що $\varphi_0 = \text{const} \in \mathbb{N}$ та $\varphi_n: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}$.

Означення 2. Якщо $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(p_1, \dots, p_n)$ для $n \in \mathbb{N}$, то додатний розклад Перрона (1) називають P -представленням числа x та позначають $\Delta_{p_1 p_2 \dots}^P$.

Означення 3. Якщо $r_0 = \varphi_0$ та $r_n = \varphi_n(q_1, \dots, q_n)$ для $n \in \mathbb{N}$, то знакозмінний розклад Перрона (2) називають P^- -представленням числа x та позначають $\Delta_{q_1 q_2 \dots}^{P^-}$.

Відомо [3, 4], що для кожної такої послідовності P кожен $x \in (0, 1]$ має єдине P -представлення та не більше одного P^- -представлення. Якщо $x = \Delta_{p_1 p_2 \dots}^P$, то число $p_n = p_n(x)$ називають n -ною P -цифрою числа x . Якщо $x = \Delta_{q_1 q_2 \dots}^{P^-}$, то число $q_n = q_n(x)$ називають n -ною P^- -цифрою числа x .

Для окремих послідовностей P розклади Перрона є додатними та знакозмінними розкладами Лյорота, класичними та модифікованими розкладами Енгеля, розкладами Остроградського–Серпінського–Пірса та Остроградського 2-го виду, розкладами Сильвестра, ДКВ-розкладами тощо.

Зауваження 1. Форми запису знакозмінних розкладів Лյорота, розкладів Остроградського–Серпінського–Пірса та Остроградського 2-го виду, що породжені рядом (2), дещо відрізняються від традиційних форм запису: P^- -цифри розкладу (2) на 1 більші за відповідні цифри цих розкладів у традиційній формі запису (див. [1, 5, 6]). Проте саме розклад (2) робить можливим одержаний нами результат.

Теорема 1 (Принцип фрактальної еквівалентності для розкладів Перрона [2]). *Нехай додатні та знакозмінні розклади Перрона визначені спільною послідовністю функцій P . Тоді для кожної множини $\mathfrak{M} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$*

$$\dim_H \{x \in (0, 1] : (p_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}\} = \dim_H \{x \in (0, 1] : (q_n(x))_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}\},$$

де $\dim_H$ — розмірність Гаусдорфа, а $p_n(x)$ та $q_n(x)$ — n -ні цифри додатних та знакозмінних розкладів Перрона числа x .

Зокрема, принцип фрактально еквівалентності застосовний до наступних відомих пар розкладів типу Перрона:

- додатні та знакозмінні розклади Лյорота (розклади Перрона при $\varphi_n \equiv 1$ для всіх $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$);
- модифіковані розклади Енгеля та розклади Остроградського–Серпінського–Пірса (розклади Перрона при $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $\varphi_0 = 1$);
- розклади Сильвестра та Остроградського 2-го виду (розклади Перрона при $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = x_n(x_n - 1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $\varphi_0 = 1$).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їх застосування*. — Київ: Наукова думка, 2013. — 288 с.
- [2] Moroz M. *Faithfulness and fractal (quasi-)equivalence principles for Perron, Engel, and Pierce expansions*, Preprint at arXiv:2510.03373 (2025).
- [3] Moroz M. *Representation of Real Numbers by Alternating Perron Series and Their Geometry* // Expositiones Mathematicae — 2025. — Vol. 43, Issue 1. — 125635.
- [4] Moroz M. *Representation of Real Numbers by Perron Series, Their Geometry, and Some Applications* // Journal of Mathematical Sciences. — 2024. — Vol. 279, Issue 3. — P. 384–399.
- [5] Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu. *Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements* // Random Operators and Stochastic Equations. — 2013. — Vol. 21, No. 4. — P. 385–401.
- [6] Torbin G., Pratsyovta I. *Singularity of the second Ostrogradskii random series* // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2010 — Vol. 81. — P. 187–195.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: moroznik22@gmail.com

ОДИН ПРИКЛАД СИНГУЛЯРНОЇ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНОЇ З ЛАНЦЮГОВИМ ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

О.О. НІКОРАК

Нехай $A_2 = \{\frac{1}{2}; 1\}$ – алфавіт, $L_2 = A_2 \times A_2 \times \dots \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді $[1, 3]$ для будь-якого $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ існує послідовність $(a_n) \in L_2$ така, що

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}, \text{ де } a_i \in A_2. \quad (1)$$

Розклад числа x в ланцюговий дріб (1) називається *ланцюговим A_2 -представленням*, а запис $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{A_2}$ – *ланцюговим A_2 -зображенням*.

Існують числа, що мають два різні ланцюгові A_2 -зображення (A_2 -бінарні). Це числа виду $\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \frac{1}{2} (\frac{1}{2} 1)}^{A_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 1 (1 \frac{1}{2})}^{A_2}$. Множина A_2 -бінарних чисел є зліченною і всюди щільною у $[\frac{1}{2}; 1]$ множиною. Решта чисел мають єдине A_2 -зображення. Їх називають A_2 -унарними.

Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n-1} \alpha_{2n} \dots}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{1-\alpha_1} (\frac{1}{2})^{\alpha_2} \dots (\frac{1}{2})^{1-\alpha_{2n-1}} (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n}} \dots}^{A_2}, \quad \alpha_n \in \{0, 1\},$$

де $[0; 1] \ni x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$ – класичне двійкове зображення числа.

Означення функції f є коректним, оскільки для двох формально різних зображень $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^2 = x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^2$ одного і того ж числа x має місце рівність $f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^2) = f(\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^2)$ для будь-якого набору $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ нулів та одиниць.

Теорема 1. *Функція f є строго спадною сингулярною функцією (неперервною функцією, відмінною від константи, похідна якої дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).*

Теорема 2. *Функція, означена рівністю*

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n} \alpha_{2n+1} \dots}^2) = \Delta_{(\frac{1}{2})^{\alpha_1} (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_2]} \dots (\frac{1}{2})^{[1-\alpha_{2n}]} (\frac{1}{2})^{\alpha_{2n+1}} \dots}^{A_2},$$

є неперервною строго зростаючою сингулярною функцією.

Зауваження 1. Функція, обернена до функції $\bar{f}$, є неперервною сингулярною функцією.

Зауваження 2. Для інверсора цифр ланцюгового зображення має місце рівність:

$$I(\Delta_{(\frac{1}{2})^{\alpha_1}(\frac{1}{2})^{\alpha_2}\dots(\frac{1}{2})^{\alpha_n}\dots})^{A_2} = \Delta_{(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_1]}(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_2]}\dots(\frac{1}{2})^{[1-\alpha_n]}\dots})^{A_2} = f(\bar{f}^{-1}(x)),$$

а тому інверсор I цифр ланцюгового A_2 -зображення чисел є сингулярною функцією.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, диференціальних та інтегральних властивостей функції f та $\bar{f}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Pratsiovytyi M.V. *A₂-continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>
- [2] Pratsiovytyi M.V., Goncharenko Y.V., Lysenko I.M., Ratushniak S. P. *Continued A₂-fractions and singular functions*. Matematychni Studii, 2022, 58(1), doi: 10.30970/ms.58.1.3-12.
- [3] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316 с.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: nikorak@imath.kiev.ua

КЛАС ЗОБРАЖЕНЬ ВІКІВСЬКИХ АЛГЕБР, ПОРОДЖЕНИХ ІЗОМЕТРІЯМИ

О.В. ОСТРОВСЬКА

Клас інволютивних алгебр з Віківським впорядкуванням був введений в [1] для вивчення загальних властивостей таких алгебр, як алгебри Кунца, CAR, CCR, їх квантових деформацій та ін. Віківська алгебра $W_d(T)$ — це асоціативна унітальна $*$ -алгебра над $\mathbb{C}$, породжена скінченним набором твірних a_j, a_j^* , $j = 1, \dots, d$, для яких виконуються наступні співвідношення

$$a_j^* a_k = \delta_{jk} I + \sum_{l,m=1}^d T_{jk}^{lm} a_m a_l^*, \quad \bar{T}_{jk}^{lm} = T_{kj}^{ml}, \quad j, k, l, m = 1, \dots, d.$$

Набір коефіцієнтів (T_{kj}^{ml}) природним чином визначає оператор T у просторі $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$. Кажуть, що цей оператор косовий, якщо у просторі $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ виконується співвідношення $(T \otimes I)(I \otimes T)(T \otimes I) = (I \otimes T)(T \otimes I)(I \otimes T)$. В роботі [2] доведено, що для косового оператора T , $\|T\| \leq 1$ фоківський скалярний добуток є невід’ємним, що дозволяє побудувати для відповідної алгебри $*$ -зображення Фока.

У даній роботі для віківської алгебри $W_d(T)$ з косовим оператором T , твірні якої є ізометріями, тобто $a_j^* a_j = I$, $j = 1, \dots, d$, ми будемо клас незвідних зображень, нееквівалентних фоківському зображенню. Відповідна конструкція є узагальненням відповідної конструкції для випадку ізометрій з умовами q_{ij} -комутовання [3].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Jorgensen P. E. T., Schmitt L. M., Werner R. F. *q-Canonical commutation relations and stability of the Cuntz algebra* // Pacific J. Math. — 1994. — Vol. 165, no. 1. — P. 131–151. — <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102621916>.
- [2] Bożejko M., Speicher R. *Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces* // Math. Ann. — 1994. — Vol. 300, no. 1. — P. 97–120. — <https://doi.org/10.1007/BF01450478>.
- [3] Ostrovska O., Ostrovskiy V., Proskurin D., Samoilenko Yu. *A class of representations of C^* -algebra generated by q_{ij} -commuting isometries* // Methods Funct. Anal. Topology. — 2022. — Vol. 28, no. 1. — P. 89–94. — <https://doi.org/10.31392/MFAT-npu26.1.2022.08>.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: olyushka.ostrovska@gmail.com

ФУНКЦІЇ З ФРАКТАЛЬНИМИ МНОЖИНАМИ РІВНІВ

С.П. РАТУШНЯК

Нехай $0 < e_0 < e_1$, $A_2 \equiv \{e_0, e_1\}$ – алфавіт, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту A_2 .

Теорема 1. [1] *Якщо $e_0 e_1 \leq \frac{1}{2}$, то для довільного числа $x \in [d_0; d_1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_2$ така, що*

$$x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad (1)$$

де $d_0 = [0; (e_1, e_0)]$, $d_1 = [0; (e_0, e_1)]$.

Розклад числа x в ланцюговий дріб виду (1) (ланцюговий A_2 -дріб) називається ланцюговим A_2 -представленням числа x , а скорочений запис виду $[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ – його ланцюговим A_2 -зображенням.

Якщо $e_0 e_1 < \frac{1}{2}$, то множиною значень усіх ланцюгових A_2 -дробів є відрізок $[d_0; d_1]$, при цьому майже всі числа цього відрізка мають нескінченну кількість різних розкладів у нескінченні ланцюгові A_2 -дробі.

Якщо $e_0 e_1 = \frac{1}{2}$, то числа з $[d_0; d_1]$ розкладаються у нескінченні A_2 -дробі не більш ніж двома способами, причому числа, що мають два представлення, утворюють зліченну всюди щільну множину в $[d_0; d_1]$. Це числа виду $[0; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, e_0, (e_0, e_1)] = [0; \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, e_1, (e_1, e_0)]$. Такі числа називаються A_2 -бінарні. Решта чисел (A_2 -унарні) мають єдине представлення.

Ланцюгове A_2 -зображення чисел можна перекодувати засобами класичного двійкового алфавіту за правилом:

$$[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^A, \text{ де } \alpha_n = 2a_n - 1, \alpha_n \in A = \{0; 1\}.$$

Розглядається функція f , означена рівністю

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}\right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_2}, \alpha_n \in A. \quad (2)$$

Теорема 2. *Якщо $e_0 e_1 < \frac{1}{2}$, то функція f є неперервною функцією з фрактальними множинами рівнів.*

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dmytrenko S.O., Kyurchev D.V., Prats'ovytyi M.V. *A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0236-7>

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `ratush404@gmail.com`

МАРКОВСЬКЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Д.М. СЕРГІЙКО

Нехай $A \equiv \{0, 1, 2\}$ – алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту, q_0, q_1, q_2 – набір додатних дійсних чисел такий, що $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $\|q_{ij}\|$ – стохастична матриця, тобто $q_{i0} + q_{i1} + q_{i2} = 1$ $\forall i \in A$, $q_{ij} > 0$; $\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \equiv q_{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\alpha_{k+1}-1} q_{\alpha_k i}$, $\beta_0 \equiv 0$, $\beta_1 \equiv q_0$, $\beta_2 \equiv q_0 + q_1$.

Теорема 1. Для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує $(\alpha_n) \in L$ така, що має місце рівність

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$$

Розглядається функція f , означена рівністю

$$f_{\overline{\varphi}}(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}, \quad (1)$$

де $\beta_n = \varphi_n(\alpha_n, \alpha_{n+1})$, $\varphi_n : A \times A \rightarrow A$.

Теорема 2. Серед функцій $f_{\overline{\varphi}}$, що означуються рівністю (1), є неперервні та майже скрізь неперервні функції, сингулярні функції та кусково-лінійні, функції множини значень яких є множинами канторівського типу.

У доповіді пропонуються приклади функції з класу функцій f_{φ} , що належать до фрактальних функцій, а також результати дослідження їх тополого-метричних властивостей.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Маркітан В. П. Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Київ, Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 34-48.
- [2] Луцак В. В. Циліндричне марковське зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом та його застосування // Київ: Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова, серія 1: Фізико-математичні науки. — 2013. — №. 15. — С. 188-194.
- [3] Працьовитий О. М. Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування // Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2008. — №. 3. — С. 57-67.

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: 21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua

ОЦІНКИ ПОТОЧКОВИХ ВІДХИЛЕНЬ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ НА КЛАСАХ ВЕЙЛЯ–НАДЯ $W_{\beta,1}^R$

А.С. СЕРДЮК, І.В. СОКОЛЕНКО

Нехай L_p , $1 \leq p < \infty$ — простір 2π -періодичних сумовних в p -му степені на $[-\pi, \pi)$ функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

L_∞ — простір 2π -періодичних вимірних та істотно обмежених функцій φ , в якому норма задана рівністю

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |\varphi(t)|,$$

C — простір 2π -періодичних неперервних функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|.$$

Нехай надалі $W_{\beta,p}^r$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ — класи 2π -періодичних функцій f , що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = 0, \quad (1)$$

з ядрами Вейля–Надя $B_{r,\beta}(t)$ вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos \left(kt - \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

функцій φ , що задовольняють умову $\varphi \in B_p = \left\{ h \in L_p : \|h\|_p \leq 1 \right\}$.

Класи $W_{\beta,p}^r$ називають класами Вейля–Надя, а функцію φ в зображенні (1) позначають через f_β^r і називають (r, β) -похідною в сенсі Вейля–Надя функції f . При довільних $1 \leq p \leq \infty$, $r > 1/p$ і $\beta \in \mathbb{R}$ має місце вкладення $W_{\beta,p}^r \subset C$.

Для довільної неперервної функції $f(x)$ через $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n - 1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Дослідженням апроксимативних властивостей інтерполяційних тригонометричних поліномів $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ на класах періодичних функцій займалися С.Н. Берштейн, С.М. Нікольський, К.І. Осколков, О.І. Степанець та ін.

Розглядається задача про дослідження асимптотичної поведінки величини

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W_{\beta,1}^r; x) = \sup_{f \in W_{\beta,1}^r} |f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x)|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad r > 2, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

при $n \rightarrow \infty$ і $r \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Нехай $r > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W_{\beta,1}^r; x) = \left| \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right| \frac{1}{n^r} \left(\frac{2}{\pi(1 - e^{-r/n})} + \mathcal{O}(1)\delta_{r,n}^* \right),$$

де

$$\delta_{r,1}^* = \frac{r}{2^r(r-2)}, \quad \delta_{r,n}^* = \begin{cases} \frac{n}{r(r-2)}, & 2 < r \leq n+1, \\ \frac{r}{n^2} e^{-r/n}, & n+1 \leq r \leq n^2, \quad n \geq 2, \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}, & n^2 \leq r, \end{cases}$$

а $\mathcal{O}(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

Теорема 1 є інтерполяційним аналогом теореми 1 з [1] та теорем 1 і 2 з [2] про рівномірне наближення сумами Фур'є функцій з класів $W_{\beta,1}^r$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Serdyuk A.S., Sokolenko I.V. *Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness* // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2019. — Vol. 25, №4. — P. 381–387.
- [2] Serdyuk A.S., Sokolenko I.V. *Approximation by Fourier Sums in the Classes of Weyl–Nagy Differentiable Functions with High Exponent of Smoothness* // Ukrainian Mathematical Journal. — Vol. 74, № 5. — P. 783–800.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: serdyuk@imath.kiev.ua

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КПП ім. Ігоря Сікорського, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: sokol@imath.kiev.ua

ЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО–БЕСОВА

К.В. СОЛІЧ

Досліджуються лінійні поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ [1] періодичних функцій багатьох змінних ($d \geq 2$) у просторі $B_{q,1}$ (див., наприклад, [2]). Норма в цьому просторі є сильнішою ніж L_q -норма. Надалі $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна (S^α) та (S_l) [3].

Означимо апроксимативну характеристику, яка нами досліджується.

Нехай X — простір з $\|\cdot\|_X$, $Y_m(X)$ — сукупність підпросторів в X , розмірність яких не перевищує m , $L(X, L_m)$ — сукупність лінійних неперервних відображень X в $L_m \in Y_m(X)$ і W — центрально-симетрична множина в X . Величина

$$\lambda_m(W, X) := \inf_{\substack{L_m \in Y_m(X) \\ \Lambda \in L(X, L_m)}} \sup_{w \in W} \|\Lambda w - w\|_X,$$

де нижню межу взято по всіх підпросторах L_m в $Y_m(X)$ і всіх лінійних неперервних операторах, що діють з X в L_m , називається лінійним поперечником множини W у просторі X [4].

Нами отримано наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(q, p) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді для будь-якої послідовності $m = (m_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що $m \asymp 2^n n^{d-1}$ справедливе співвідношення*

$$\lambda_m(B_{p,\theta}^\Omega, B_{q,1}) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (1)$$

Зауваження 1. Зіставивши (1) з відповідною оцінкою лінійного поперечника $\lambda_m(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$, бачимо, що, за винятком випадку $\theta = 1$, оцінки лінійних поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{q,1}$ і L_q є різними за порядком.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Yongsheng S., Heping W. *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness.*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 1997, Vol. 219, P. 356–377.

- [2] Катерина Пожарська, Анатолій Романюк, Сергій Янченко. *Найкращі наближення класів періодичних функцій багатьох змінних з обмеженою домінуючою мішаною похідною*. Укр. Мат. Журн., 2024., Т. 76, № 7, С. 1007–1023.
- [3] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, Т. 5, С. 483–522.
- [4] Тихомиров В.М., *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений*. Успехи мат. наук, 1960, Т. 15, № 3, С. 81–120.

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

Email address: solichkatia@gmail.com

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИЙ РІСТ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ НИЖНІХ Q -ГОМЕОМОРФІЗМІВ

М.В. СТЕФАНЧУК

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ у комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ (пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$), якщо

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1 \quad (1)$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p -модулем сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \rho^p(z) dx dy.$$

Кажуть, що деяка властивість виконується для p -майже всіх кривих γ сім'ї Γ , якщо підсім'я кривих сім'ї Γ , для яких ця властивість порушується, має p -модуль нуль. Вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ називають *узагальнено p -допустимою* для сім'ї кривих Γ і позначають $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$, якщо нерівність (1) виконується для p -майже всіх $\gamma \in \Gamma$.

Для точки $z_0 \in \mathbb{C}$ покладемо

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) &= \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}, \\ S(z_0, r) &= \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}. \end{aligned}$$

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ називають *нижнім Q -гомеоморфізмом відносно p -модуля у точці $z_0 \in D$* , якщо нерівність

$$M_p(f\Sigma_{\mathbb{A}}) \geq \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma_{\mathbb{A}}} \int_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(z)}{Q(z)} dx dy$$

виконується для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$, де $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$ і $\Sigma_{\mathbb{A}}$ — сім'я всіх кіл $S(z_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Для точки $z_0 \in \mathbb{C}$ будемо позначати

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) = \left(\int_{S(z_0, t)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z) |dz| \right)^{p-1}.$$

У наступному твердженні знайдено достатню умову для експоненціального росту на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів відносно p -модуля при $1 < p < 2$, див. теорему 3.1 в [1].

Теорема 1. *Припустимо, що $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — нижній Q -гомеоморфізм відносно p -модуля у точці $z_0 \in \mathbb{C}$, $1 < p < 2$, та для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t}$$

для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} \geq (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}, \quad (2)$$

де $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$.

Зауваження 1. Оцінка (2) у теоремі 1 є точною і досягається на гомеоморфізмі

$$f(z) = \begin{cases} (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta|z-z_0|}{2-p}} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & |z-z_0| \geq 1, \\ (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0 \beta} \right)^{\frac{1}{2-p}} e^{\frac{\beta}{2-p}} (z-z_0), & |z-z_0| < 1. \end{cases}$$

Нижче наведено теорему про неіснування нижніх Q -гомеоморфізмів $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ відносно p -модуля при $1 < p < 2$, див. теорему 3.3 в [1].

Теорема 2. *Припустимо, що z_0 — деяка фіксована точка в $\mathbb{C}$, $1 < p < 2$. Нехай для деяких чисел $r_0 > 0$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leq C_0 e^{-\beta t}$$

для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. Тоді не існує нижнього Q -гомеоморфізму $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ відносно p -модуля в точці z_0 з асимптотичною умовою

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\beta R}{2-p}} = 0,$$

де $M_f(z_0, R) = \max_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Стефанчук М.В. Про експоненціальну асимптотику на нескінченності нижніх Q -гомеоморфізмів на комплексній площині // Праці ІПММ НАН України. — 2025. — **39**, № 1. — С. 53–66.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: stefanmv43@gmail.com

НАЙКРАЩІ m -ЧЛЕННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО–БЕСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

О.В. ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК

Досліджуються ізотропні класи $B_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних, де ω — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , що задовольняє умови (S^α) та (S_l) , які називаються умовами Барі–Стечка. Зазначимо, що при $\omega(t) = t^r$, $0 < r < l$, класи $B_{p,\theta}^\omega$ співпадають із відомими класами О.В. Бесова $B_{p,\theta}^r$, і, зокрема при $\theta = \infty$, $B_{p,\infty}^r \equiv H_p^r$ — класи введені С.М. Нікольським.

Нехай X — деякий нормований функціональний простір із нормою $\|\cdot\|_X$ і Θ_m — довільний набір із m d -вимірних векторів із цілочисельними координатами. Позначимо через

$$P(\Theta_m) := P(\Theta_m, x) = \sum_{k \in \Theta_m} c_k e^{i(k,x)},$$

де $c_k \in \mathbb{C}$, тригонометричний поліном з «номераами» гармонік із множини Θ_m .

Для $f \in X$ розглянемо величину

$$e_m(f)_X := \inf_{c_k} \inf_{\Theta_m} \|f - P(\Theta_m)\|_X,$$

яка називається найкращим m -членним тригонометричним наближенням функції f .

Для деякого функціонального класу $F \subset X$ покладемо

$$e_m(F)_X := \sup_{f \in F} e_m(f)_X.$$

Одержано точні за порядком оцінки найкращих m -членних тригонометричних наближень ізотропних класів типу Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^\omega$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах $B_{q,1}$ при $1 < p < q < \infty$, $q \geq 2$. Особливістю цих просторів, як лінійних підпросторів L_q , є те, що норма в них є сильнішою, ніж L_q -норма [1]. Сформулюємо одержані результати [2].

Теорема 1. *Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, а також умову $(S_{\min\{\frac{d}{p}; l\}})$. Тоді для*

будь-яких $m \in \mathbb{N}$ справедлива оцінка

$$e_m(B_{p,\theta}^\omega)_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{q}{2d}}) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Розглянемо інші значення гладкісного параметра α .

Теорема 2. Нехай $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > \frac{d}{p}$, а також умову (S_l) . Тоді для будь-яких $m \in \mathbb{N}$ справедлива оцінка

$$e_m(B_{p,\theta}^\omega)_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. Нехай $2 \leq p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, і $\omega(t)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > \frac{d}{2}$, а також умову (S_l) . Тоді для будь-яких $m \in \mathbb{N}$ справедлива оцінка

$$e_m(B_{p,\theta}^\omega)_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}).$$

Зауваження 1. Зіставляючи результати теорем 1–3 із відповідними оцінками розглянутої апроксимаційної характеристики класів $B_{p,\theta}^\omega$ у просторі L_q [3], приходимо до висновку, що вони мають однаковий порядок.

Зауваження 2. Зазначимо також, що при дослідженні величин найкращих m -членних тригонометричних наближень ізотропних класів типу Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^\omega$ у просторах $B_{q,1}$ було виявлено так зване явище «малої гладкості». Воно полягає в тому, що при переході параметра α через значення $\alpha = \frac{d}{p}$ відбувається стрибок в оцінці величини $e_m(B_{p,\theta}^\omega)_{B_{q,1}}$. Іншими словами, оцінки таких величини при $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < \alpha < \frac{d}{p}$ і $\alpha > \frac{d}{p}$ відрізняються за порядком.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гембарська С.Б., Романюк І.А., Федунік-Яремчук О.В. Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова // Укр. мат. вісник. — 2023. — Т. 20, № 2. — С. 161–185.
- [2] Fedunyk-Yaremchuk O.V., Nembars'ka S.B., Romanyuk I.A. Best m -term trigonometric approximations of the isotropic Nikol'skii-Besov-type classes of periodic functions of several variables // Carpathian Math. Publ. — 2025. — Т. 17, № 1. — С. 67–81.
- [3] Войтенко С.П. Найкращі M - членні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 27, № 61, № 9. — С. 1189–1199.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: fedunyk.o.v@gmail.com

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ДЛЯ ЗАДАЧ КОМПРЕСІЇ ГРАФІЧНИХ ДАНИХ

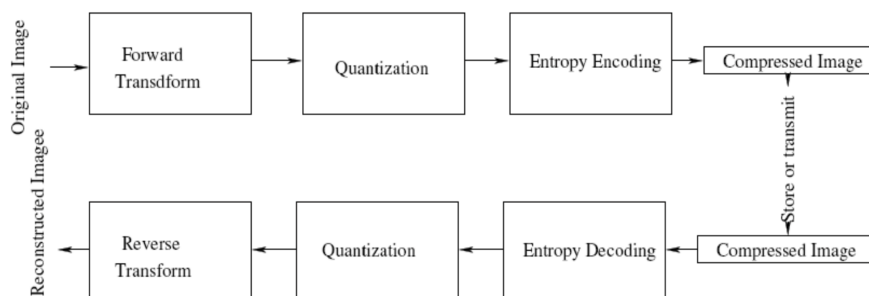
А.Ю. ШУМЛЯНСЬКИЙ, Л.Б. ФЕДОРОВА

Теоретичні основи. Термін *вейвлет* (від англ. *wavelet* — «маленька хвиля») введено на початку 1980-х років XX ст. Ж. Морле та А. Гроссманом, а перший базис такого типу запропонував ще 1909 року А. Хаар. Вейвлет — це функція $y_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} y\left(\frac{x-b}{a}\right)$, яка слугує «материнською» хвилею для побудови цілої сім'ї шляхом її масштабування та зсуву в часі, що утворюють ортонормований базис у просторі квадратично інтегрованих функцій $L^2(\mathbb{R})$. На відміну від гармонічних функцій Фур'є, що коливаються на всій осі, вейвлет має компактне представлення, тобто значна частина його енергії зосереджена локально. Це є сучасний математичний метод обробки сигналів, основна перевага якого полягає в здатності одночасно аналізувати сигнал як у часі, так і в частоті, на відміну від класичних методів (перетворення Фур'є). Вейвлети творять систему базисних функцій, які локалізовані у просторі (часі) — їх енергія зосереджена на скінченному інтервалі й швидко спадає за його межами. Така властивість дає змогу ефективніше працювати з нестационарними, короткочасними та різко змінними сигналами, зберігаючи інформацію про час і масштаб виникнення певних частотних компонентів.

Вейвлет-перетворення діляться на два типи: *неперервне вейвлет-перетворення* (*CWT*) сигналу визначається як інтегральне перетворення, що обчислює вейвлет-коефіцієнти $W(a, b)$ шляхом згортки сигналу з масштабованим і зсунутим вейвлетом. Але для роботи з цифровими сигналами (дискретних вибірок значень) частіше застосовують другий тип *дискретне вейвлет-перетворення* (*DWT*), яке реалізується через фільтрові смуги й має вигляд впорядкованого багаторівневого розкладу. Суть DWT — рекурсивний поділ сигналу на дві складові — апроксимацію (низькочастотний компонент) та деталі (високочастотний компонент). Спершу вихідний сигнал пропускається через цифровий *низькочастотний фільтр* ($g[n]$) та *високочастотний фільтр* ($h[n]$), після чого результати *дискретизуються* з пониженням частоти у 2 рази (*даунсемплінг*). Математично операцію можна описати так:

$$y_{\text{low}}[n] = \sum_k x[k] g[2n - k], \quad y_{\text{high}}[n] = \sum_k x[k] h[2n - k].$$

Застосування на прикладі JPEG2000. Одним з найбільш широко відомих застосувань вейвлет-аналізу у сфері стиснення даних є формат JPEG 2000. *JPEG 2000 (JP2)* — це стандарт стиснення зображень і система кодування, який був розроблений у 1997—2000 роках комітетом *Joint Photographic Experts Group* під керівництвом *Touradj Ebrahimi* з метою замінити оригінальний стандарт *JPEG* (створений у 1992 році), який базується на дискретному косинусному перетворенні (DCT), на більш сучасний метод на основі вейвлет-перетворення (DWT). У цьому методі застосовується розклад з використанням спеціальних біортогональних вейвлетів (наприклад, *Daubechies 9/7* — для режиму з втратами та *Le Gall 5/3* — без втрат) для отримання багаторівневого представлення зображення, а потім виконується квантування й ентропійне кодування коефіцієнтів. Роботу цієї системи можна описати за допомогою наступної блок-схеми:



Використання вейвлет-перетворень дозволило забезпечити наступні переваги: *покращену якість* за високих ступенів стиснення; можливість *прогресивного відновлення* (завантаження зображення спочатку в погкій якості з поступовим поліпшенням при отриманні додаткових даних); а також підтримку *режиму стиснення з втратами*, так і *без втрат*. Натомість можливі *кільцеві артефакти* — розмитість або слабкі ореоли біля контрастних границь, обумовлені вейвлет-фільтрацією.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Wavelet Analysis: Part I — Theoretical Background.* // EViews Blog. — 2020. — URL: <https://blog.eviews.com/2020/11/wavelet-analysis-part-i-theoretical.html>
- [2] Marcellin M. *JPEG 2000.* // Stanford University, EE398A Handouts. — URL: <https://web.stanford.edu/class/ee398a/handouts/papers/Marcellin%20-%20JPEG2000.pdf>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: shumlianskyi.artem@l11.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: fedova.lb@gmail.com

СЕКЦІЯ 2
Диференціальні та інтегральні рівняння, їх
застосування

ON PROPERTIES OF SOLUTIONS TO ELLIPTIC PROBLEMS WITH ROUGH DATA IN BOUNDARY CONDITIONS

I.S. CHEPURUKHINA, A.A. MURACH

Let Ω be a bounded Euclidean domain of dimension $n \geq 2$ and of class C^∞ , with $\Gamma := \partial\Omega$. We consider an elliptic boundary-value problem of the form

$$Au = f \text{ in } \Omega, \quad B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \text{ on } \Gamma, \quad j = 1, \dots, q + \varkappa. \quad (1)$$

Here, A is a linear partial differential operator (PDO) on $\bar{\Omega}$; every B_j is a boundary linear PDO on Γ , and each $C_{j,k}$ is a tangent linear PDO on Γ , with $\text{ord } A = 2q$, $\text{ord } B_j \leq m_j$ and $\text{ord } C_{j,k} \leq m_j + r_k$ for some integers $q \geq 1$, $m_1, \dots, m_{q+\varkappa}$, and $r_1, \dots, r_\varkappa$. All coefficients of these PDOs are complex-valued C^∞ -functions on $\bar{\Omega}$ and Γ , resp. The distribution u in Ω , and distributions $v_1, \dots, v_\varkappa$ on Γ are unknown in the problem, with $0 \leq \varkappa \in \mathbb{Z}$. Put $v := (v_1, \dots, v_\varkappa)$ and $g := (g_1, \dots, g_{q+\varkappa})$.

Let $m := \max\{m_1, \dots, m_{q+\varkappa}\}$, and assume that $m \geq -r_k$ whenever $1 \leq k \leq \varkappa$. Since the case $m \geq 2q$ is possible, put $\mu := \max\{2q, m + 1\}$.

We assume that f belongs to the Sobolev space $H_p^\lambda(\Omega)$ for certain $p \in (1, \infty)$ and $\lambda > \mu - 2q - 1 + 1/p$. We also suppose that each g_j is an arbitrary distribution on Γ ; i.e. the boundary data g_j can be rough. Since Ω is bounded, there exists $s \in \mathbb{R}$ such that each g_j belongs to the Besov space $B_p^{s-m_j-1/p}(\Gamma)$. We consider the low regularity case where $s < \mu - 1 + 1/p$.

Put

$$H_{p,A}^{s,\lambda}(\Omega) := \{u \in H_p^s(\Omega) : Au \in H_p^\lambda(\Omega)\}.$$

This space is complete with respect to the norm $\|u, H_p^s(\Omega)\| + \|Au, H_p^\lambda(\Omega)\|$. The set $C^\infty(\bar{\Omega})$ is dense in this space.

Theorem 1. *The mapping $(u, v) \mapsto (f, g)$, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ and $v \in (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$, induced by elliptic problem (1) extends uniquely (by continuity) to a bounded linear operator*

$$\Lambda : H_{p,A}^{s,\lambda}(\Omega) \times \prod_{k=1}^{\varkappa} B_p^{s+r_k-1/p}(\Gamma) \rightarrow H_p^\lambda(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q+\varkappa} B_p^{s-m_j-1/p}(\Gamma).$$

This operator is Fredholm. Its kernel lies in $C^\infty(\bar{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^\varkappa$ and together with the finite index does not depend on s , λ , and p .

We say that a vector (u, v) from the domain of Λ is a generalized solution to problem (1) if $\Lambda(u, v) = (f, g)$.

We discuss local (up to a part Γ_0 of the boundary Γ) lifting properties of such solutions. Let U be an open subset of $\mathbb{R}^n$ such that $\Omega_0 := \Omega \cap U \neq \emptyset$ and $\Gamma_0 := \Gamma \cap U \neq \emptyset$. Then $H_{\beta, \text{loc}}^\sigma(\Omega_0, \Gamma_0)$, with $\sigma \in \mathbb{R}$ and $\beta \in (1, \infty)$, denotes the linear space of all distributions u on Ω such that $\chi u \in H_\beta^\sigma(\Omega)$ for every $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ subject to $\text{supp } \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Similarly, $B_{\beta, \text{loc}}^\sigma(\Gamma_0)$ denotes the linear space of all distribution h on Γ such that $\chi h \in B_\beta^\sigma(\Gamma)$ for every $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ subject to $\text{supp } \chi \subset \Gamma_0$. Our assumption $f \in H_p^\lambda(\Omega)$ implies only that $u \in H_{p, \text{loc}}^{\lambda+2q}(\Omega, \emptyset)$.

Theorem 2. *Let $\ell \geq s$ and $\beta \geq p$. Suppose that a vector (u, v) from the domain of Λ is a generalized solution to the problem (1) whose right-hand sides satisfy the additional conditions $f \in H_{\beta, \text{loc}}^{\ell-2q}(\Omega_0, \Gamma_0)$ and $g_j \in B_{\beta, \text{loc}}^{\ell-m_j-1/\beta}(\Gamma_0)$ for each $j \in \{1, \dots, q+\varkappa\}$. Then $u \in H_{\beta, \text{loc}}^\ell(\Omega_0, \Gamma_0)$ and $v_k \in B_{\beta, \text{loc}}^{\ell+r_k-1/\beta}(\Gamma_0)$ for each $k \in \{1, \dots, \varkappa\}$.*

We supplement this theorem with the following *a priori* estimate of the generalized solution:

Theorem 3. *Let $\ell \geq s$ and $\beta \geq p$. Suppose that a vector (u, v) from the domain of Λ satisfies the hypotheses of Theorem 2. We arbitrary choose a number $\alpha < s$ and functions $\chi, \eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ such that $\text{supp } \chi \subset \text{supp } \eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ and that $\eta = 1$ in a neighbourhood of $\text{supp } \chi$. Then*

$$\begin{aligned} & \|\chi u, H_\beta^\ell(\Omega)\| + \sum_{k=1}^{\varkappa} \|\chi v_k, B_\beta^{\ell+r_k-1/\beta}(\Gamma)\| \leq \\ & \leq c \left(\|\eta f, H_p^\lambda(\Omega)\| + \|\eta f, H_\beta^{\ell-2q}(\Omega)\| + \sum_{k=1}^{q+\varkappa} \|\eta g_j, B_\beta^{\ell-m_j-1/\beta}(\Gamma)\| \right) + \\ & + c \left(\|\eta u, H_p^\alpha(\Omega)\| + \sum_{k=1}^{\varkappa} \|\eta v_k, B_p^{\alpha+r_k-1/p}(\Gamma)\| \right). \end{aligned}$$

Here, c is a certain positive number that does not depend on (u, v) and (f, g) .

These theorems supplement [1, 2, 3].

REFERENCES

- [1] Murach A.A., Chepurukhina I.S. Elliptic problems with rough boundary data in Nikol'skii spaces // Dopov. Nac. Akad. Nauk Ukr. – 2021. – no. 3. – P. 3–10 (*Ukrainian*).
- [2] Chepurukhina I.S., Murach A.A. Elliptic problems in Besov and Sobolev–Triebel–Lizorkin spaces of low regularity // Dopov. Nac. Akad. Nauk Ukr. – 2021. – no 6. – P. 3–11.
- [3] Chepurukhina I., Murach A. Distribution spaces associated with elliptic operators // arXiv: 2406.08150. – 42 p.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: chepurukhina@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: murach@imath.kiev.ua

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS TO NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

D. DOROSHENKO

Nonlinear boundary value problems appear in physics and mechanics when modeling systems with nonlinear effects. Proving the existence of their solutions is a key task of modern analysis.

We study the nonlinear problem

$$-u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (1)$$

where $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and satisfies growth conditions.

Let $H_0^1(0, 1)$ denote the Sobolev space equipped with the norm

$$\|u\| = \left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Define the energy functional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx - \int_0^1 F(x, u(x)) dx,$$

where $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$. The critical points of J correspond to weak solutions of the problem (1).

Theorem 1. *Suppose $f(x, u)$ is continuous and satisfies the Carathéodory condition*

$$|f(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{p-1}, \quad a \in L^2(0, 1), \quad b > 0, \quad 1 < p < 2^*.$$

Then there exists at least one weak solution $u \in H_0^1(0, 1)$ to the boundary value problem (1).

The proof uses the Palais–Smale condition that extends to systems and nonlocal or nonlinear boundary conditions.

REFERENCES

- [1] Da Prato G. *Abstract differential equations and extrapolation spaces* // In *Infinite-Dimensional Systems, Retzhof 1983*. Lecture Notes in Math. Berlin: 1984. — P. 53–61.

OLES HONCHAR DNIPRO NATIONAL UNIVERSITY, DNIPRO, UKRAINE
Email address: dsniil2727@gmail.com

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THIRD ORDER IN SOBOLEV SPACE

G. KUDUK

Let $\Pi(T) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$. Let us denote $E_{\alpha, \beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$ the space of functions $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, with the finite norm [2]

$$\|\varphi\|_{E_{\alpha, \beta}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2\alpha} \exp(2\beta|\xi|) d\xi},$$

where $\hat{\varphi}(\xi)$ is the Fourier transform of the function $\varphi(x)$. In the strip $\Pi(T)$ we consider nonlocal-integral problem

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t, x) = \\ = \frac{\partial^3 U(t, x)}{\partial t^3} + a_1 \frac{\partial^3 U(t, x)}{\partial t^2 \partial x} + a_2 \frac{\partial^3 U(t, x)}{\partial t \partial x^2} + a_3 \frac{\partial^3 U(t, x)}{\partial x^3} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_0^T U(t, x) dt = \varphi_1(x), \quad \int_0^T t U(t, x) dt = \varphi_2(x), \quad \int_0^T t^2 U(t, x) dt = \varphi_3(x). \quad (2)$$

Assuming that the real parts of roots of polynomial $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$ are nonzero and different, the correctness of the problem (1)-(2) in the space of functions $C^2([0, T], E_{\alpha, \beta})$ is established. Obtained results continue the research of the works [3, 4, 7]. Problem with integral condition for partial differential equations has been studied in the work [1, 2, 5, 6, 8, 9].

REFERENCES

- [1] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method*. Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002 p. (in Ukrainian).
- [2] Yu. A. Dubinskii. *The algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and its applications to mathematical physicals*, Russian Mathematical Surveys (1982), 37(5): 109-153.
- [3] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kuduk G., Symotyuk M.M., *Integral problem for partial differential equation of higher order in unbounded layer* // Methods and Phys.- Mech. Polia., 59 (4), (2016), P. 19-28.

- [4] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kuduk G., Symotyuk M.M., *Integral problem for partial differential equation of second order in unbounded layer* // Bukovinian Mathematical Journal., - Vol. 4, No 3-4. (2016): Chernivtsi Nat. Univ., P. 69-74.
- [5] Kuduk G., *Problem with integraf conditions for evolution equations of higher order* // International Conference of Young Mathematicians, 3–6 June, 2015, Kyiv, Ukraine, P. 124.
- [6] Kuduk G. *Problem with integral conditions for system of partial differential equations of third order* // International Scientific Conference "Current problems of Mechanics and Mathematics - 2023" dedicated to 95th birth anniversary of Yaroslav Pidstryhach and 45th anniversary of the Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics. May 23 - 25, 2023, Lviv, Ukraine, P. 331-332.
- [7] Kuduk G., Symotyuk M.M., *Nonlocal problem with integral conditions for homogeneous system of partial differential equations of second order* // MADEA - 9 International Conference Mathematical Analysis, Differential Equations and Applications, June 21–25, 2021, Bishkek, Kyrgyz Republic Kyrgyzstan-Turkey-Ukraine, P. 52.
- [8] Kuduk G., *Integral problem for system of partial differential equations of higher order* // The Conference Differential Equations and Data Analysis, Lviv, 2025. DEDAL-2025, P. 36.
- [9] Kuduk G., *Problem with integral conditions for system of partial differential equations of fourth order* // The Conference of Young Scientists "Pidstryhach Readings" National Academy of Sciences of Ukraine Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics The Council of Young Scientists and Specialists-2025 Lviv, May 27-29, 2025, <http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2025>.
- [10] Kuduk G., *Problem with integral condition for nonhomogeneous partial differential equations of third order* // 12-th International Skorobohatko Mathematical Conference, September 23-25, 2025, Lviv, Ukraine, P 46.

GRZEGORZ KUDUK, FACULTY OF MATHEMATICAL OF NATURE SCIENCES UNIVERSITY
OF RZESZOW, GRADUATE OF UNIVERSITY OF RZESZOW, POLAND
Email address: gkuduk@onet.eu

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR NONHOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FOURTH ORDER

G. KUDUK

Let $K_{\mathbb{C},M}$ is the class of quasipolynomials of the form

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^m P_j(t, x) \exp[\alpha_j x + \beta_j], \quad (1)$$

where $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$, for $k \neq j$, $\beta_j \in \mathbb{C}$, $\beta_j \neq \beta_k$, for $k \neq j$, $x \in \mathbb{R}$, $P_j(t, x)$ are polynomials with complex coefficients $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, where $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$, for $j \neq k$, $k, j = \{1, 2, \dots\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Each quasipolynomial $f(t, x)$ of the form (1) defines a differential operator $f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$ of finite order on the class entire function $\Phi(\nu, \lambda)$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) = \sum_{j=1}^m P_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \Phi(\lambda, \nu) \Big|_{\nu=0, \lambda=\alpha_j}.$$

In the strip $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in (T_1, T_2) \cup (T_3, T_4), x \in \mathbb{R}^n\}$ we consider nonlocal mixed problem with integral condition in the form

$$\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + \sum_{i=1}^4 a_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^{4-i} U}{\partial t^{4-i}} = f(t, x), \quad (2)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} U(t, x) dt + \int_{T_3}^{T_4} U(t, x) dt = 0, \quad \int_{T_1}^{T_2} t U(t, x) dt + \int_{T_3}^{T_4} t U(t, x) dt = 0, \quad (3)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} t^2 U(t, x) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^2 U(t, x) dt = 0, \quad \int_{T_1}^{T_2} t^3 U(t, x) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^3 U(t, x) dt = 0,$$

where $f(t, x)$ is the given function, $(T_1, T_2) \cup (T_3, T_4) \subset \mathbb{R}$, $T_1, T_2, T_3, T_4 > 0$, $U(t, x)$ is an unknown function, $a_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ differential expression, which is entire symbol $a_i(\lambda) \neq \text{const}$. Denote by P is set $P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Delta(\lambda) = 0\}$.

Theorem 1. *Let $f(t, x)$ in equation (2) be entire function in from (1) belongs $K_{M, \mathbb{C} \setminus P}$. Then in class $K_{M, \mathbb{C} \setminus P}$ there exists a unique solution of the problem*

(2)-(3) which can be represented in the form

$$U(t, x) = f \left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \left\{ G(t, \nu, \lambda) \exp[\lambda x] \right\} \Big|_{\lambda=0, \nu=0}, \quad (4)$$

where $G(t, \nu, \lambda)$ is solution of the problem

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^4}{dt^4} - \sum_{i=1}^4 a(\lambda) \frac{d^{4-i}}{dt^{4-i}} \right] G(t, \nu, \lambda) &= e^{\nu t}, \\ \int_{T_1}^{T_2} G(t, \nu, \lambda) dt + \int_{T_3}^{T_4} G(t, \nu, \lambda) dt &= \int_{T_1}^{T_2} t G(t, \nu, \lambda) dt + \int_{T_3}^{T_4} t G(t, \nu, \lambda) dt = 0, \\ \int_{T_1}^{T_2} t^2 G(t, \nu, \lambda) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^2 G(t, \nu, \lambda) dt &= 0, \\ \int_{T_1}^{T_2} t^3 G(t, \nu, \lambda) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^3 G(t, \nu, \lambda) dt &= 0. \end{aligned}$$

By means of the differential-symbol method [1, 2], we construct a solution of the problem (2)-(3). This problem is a continuation of works [3, 4, 5, 6].

REFERENCES

- [1] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method* Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2002. — 292 p. (in Ukrainian).
- [2] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V., Kuduk G., *Problem for nonhomogeneous second order evolution equation with homogeneous integral conditions* // Math. Methods and Phys.-Mech. Polia. — 2015. Vol. 58, No 1. — P. 7-19.
- [3] Kuduk G. *Problem with integral conditions for evolution equations of higher order* // International Conference of Young Mathematicians, 3-6 June, 2015, Kyiv, P.124.
- [4] Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I.V., Nytrebych Z.M., *Problem with integral condition for differential-operator equations* // Math. Methods and Phys.- Mech. Polia. — 2013. — 56, No 4. — P. 7-15.
- [5] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V., Kuduk G., P. Ta. Pukach., *Problem with homogeneous integral condition for nonhomogeneous evolution equation* // Journal of National University "Lvivska Politechnika". Physical and Mathematical sciences. — 2014. — No 804. — P. 16-20.
- [6] Kalenyuk P.I., Kuduk G., Kohut I.V., Nytrebych Z.M., *Problem with integral condition for evolution equation* // Journal of Mathematics and Applications. — 2015. No 38. — P. 71-76.

FACULTY OF MATHEMATICAL OF NATURE SCIENCES UNIVERSITY OF RZESZOW, GRADUATE OF UNIVERSITY OF RZESZOW, POLAND

Email address: gkuduk@onet.eu

EVOLUTION OF MOTIONS OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL GYROSTAT WITH A MOVING MASS SUBJECTED TO CONSTANT BODY-FIXED TORQUES

D.D. LESHCHENKO, T.O. KOZACHENKO

We examine the motion of a nearly dynamically spherical rigid body rotating about its center of mass, where the body subjected to constant body-fixed torques and contains a cavity filled with a highly viscous fluid and includes a viscoelastic element. The system of motion equations is derived in standard form and further refined using a quadratic approximation with respect to a small parameter. The averaging method is applied to the nonlinear equations of motion. The Cauchy problem for the system determined after averaging is investigated. The evolution of angular motion is described using averaged equations and numerical simulation. The advantage of this problem is that it offers solutions that describe the evolution of a rigid body motion over infinite time interval with an asymptotically small error. Graphical representations of the solutions are provided and discussed.

The objective of this study is to investigate the combined influence of a viscous fluid inside a cavity, a moving mass and constant body-fixed torques on the motion of nearly dynamically spherical rigid body. This interaction represents a novel element of the current work. The main goal of work is to extend the results of previous similar investigations for the problem of the perturbed motion of nearly dynamically spherical rigid body.

We present the input equations of motions, conduct an averaging procedure and receive the averaged equations which, being simpler than the original ones, describe the body motion over the large time interval. We establish qualitative and quantitative properties of motion and provide a description of the evolution of the body motion.

The importance of the gained results is due to its applications such as analyzing angular motions in artificial satellites, spacecraft, onboard crew dynamics, moving mass control systems, spinning projectiles, and reentry vehicles.

ODESA STATE ACADEMY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE, ODESA, UKRAINE
Email address: leshchenkodmytro@gmail.com

ODESA STATE ACADEMY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE, ODESA, UKRAINE
Email address: kushpil.t.a@gmail.com

PERTURBED MOTIONS OF A NEARLY DYNAMICALLY SPHERICAL GYROSTAT WITH A MOVING MASS

D. LESHCHENKO, A. RACHINSKAYA, T. KOZACHENKO, K. PALY

The study focuses on the motion of an almost dynamically spherical rigid body about its center of mass, which contains a cavity filled with a highly viscous fluid and incorporates a viscoelastic component. The equations of motion are derived in a standard form and further refined using a second-order approximation with respect to a small parameter. The averaging method is applied to the nonlinear system of motion equations, and the Cauchy problem for the averaged system is examined. The asymptotic approach allows for obtaining qualitative insights and describing the evolution of the body's angular motion through simplified averaged equations supported by numerical analysis. As a result, solutions are obtained that characterize the rigid body's motion over an infinite time interval with an asymptotically small error. Graphical representations of these solutions are provided and analyzed. The research contributes to the understanding of spacecraft and satellite dynamics, as well as the motion of crew members within the vehicle. The findings are significant for advancing the control of moving masses and analyzing the motion of spinning bodies with distributed mass.

ODESA STATE ACADEMY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE, ODESA, UKRAINE
Email address: leshchenkodmytro@gmail.com

ODESA I.I. MECHNIKOV NATIONAL UNIVERSITY, ODESA, UKRAINE
Email address: rachinskaya@onu.edu.ua

ODESA STATE ACADEMY OF CIVIL ENGINEERING AND ARCHITECTURE, ODESA, UKRAINE
Email address: ktakushpil@gmail.com

ODESA I.I. MECHNIKOV NATIONAL UNIVERSITY, ODESA, UKRAINE
Email address: KSPalii@onu.edu.ua

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DAMPED RESONANT SLOSHING

A.O. MILIAEV, A.N. TIMOKHA

A [machine] learning of the single-dominant nonlinear “inviscid” differential equations [1] on resonant sloshing (the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency) in a clean rigid rectangular tank is developed [2] to restore *a priori* unknown viscous damping terms. The procedure is realised by using the measured phase-lags [3] between the harmonic horizontal tank excitation and the steady-state resonant wave. A good consistency for liquid-mass centre motions is shown. This confirms that the free-surface nonlinearity (energy flow from the primary-excited to higher natural sloshing modes) and viscous damping of higher natural sloshing modes matter; damping rates depend on the steady-state wave amplitude. The results are generalised in [4] to the steady-state swirling waves in an upright circular tank which moves longitudinally. The steady-state solution of the corresponding differential equations are firstly constructed. Based on these solutions and the cost function expressing the “distance” between measured and theoretical phase-lags for the swirling surface wave amplitude, a satisfactory agreement with experiments [5] is demonstrated.

REFERENCES

- [1] Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Lukovsky I.A., Timokha A.N. *Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth* // J. fluid mech.— 2000.— V. 407.— P. 201–234.
- [2] Miliaev A., Timokha A. *Viscous damping of steady-state resonant sloshing in a clean rectangular tank* // J. fluid mech.— 2023.— V. 965, R1.— P. 1–11.
- [3] Bäuerlein B., Avila K. *Phase lag predicts nonlinear response maxima in liquid-sloshing experiments* // J. fluid mech.— 2021.— V. 925, A22.— P. 1–29.
- [4] Miliaev A., Timokha A. *Damping of the swirling wave mode* // J. math. sciences.— 2025.— V. 295, No 6.— P. 1–13.
- [5] Royon-Lebeaud A., Hopfinger E., Cartellier A. *Liquid sloshing and wave breaking in circular and square-base cylindrical containers* // J. fluid mech.— 2007.— V. 577.— P. 467–494.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: amilyaev@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: atimokha@gmail.com

DIFFERENTIAL EQUATIONS INVARIANT WITH RESPECT TO THE ALGEBRA $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ AND ITS CONTRACTIONS

M.O. NESTERENKO, M.S. STARYI

In 1953 [1] E. Inönü and E. Wigner showed that different physical theories are connected through contractions of their underlying symmetry algebras. The construction of contractions of realizations is a necessary step for establishing limiting relations between differential equations and physical theories. In this work, we explicitly construct the contractions between rank-three vector fields of the algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ and their differential invariants.

Let $\mathcal{L}_n$ be the set of all possible Lie brackets on V . We identify a Lie product $\mu \in \mathcal{L}_n$ with the Lie algebra $g = (V, \mu)$. $\mathcal{L}_n$ is an algebraic subset of the variety $V^* \otimes V^* \otimes V$ of bilinear maps from $V \times V$ to V .

The group $GL(V)$ acts on $\mathcal{L}_n$ in the following way:

$$(U \cdot \mu)(x, y) = U(\mu(U^{-1}x, U^{-1}y)) \quad \text{for all } U \in GL(V), \mu \in \mathcal{L}_n, x, y \in V.$$

Fixing the basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ of V we can use the one-to-one correspondence between Lie bracket $\mu \in \mathcal{L}_n$ and a structure constant tensor (c_{ij}^k) . In this case the notion of a contraction matrix U_ε ($U: (0, 1] \rightarrow GL(V)$) and a parameterized family of new Lie brackets $[x, y]_\varepsilon$ is determined by

$$[x, y]_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] \quad \text{for all } \varepsilon \in (0, 1], x, y \in V,$$

and the contraction is defined as follows.

If the limit $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [x, y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] =: [x, y]_0$ exists for any $x, y \in V$, then $[\cdot, \cdot]_0$ is a well-defined Lie bracket and $g_0 = (V, [\cdot, \cdot]_0)$ is called a *contraction* of the Lie algebra g .

Consider complex three-dimensional special linear Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ with the basis elements $\{e_i : i = 1, \dots, 3\}$ and nonzero commutation relations

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 2e_2. \quad (1)$$

We also fix the representatives of the other necessary Lie algebras specifying their nonzero commutation relations

$$\mathfrak{g}_{3.4}^{-1}: [e_1, e_3] = e_1, [e_2, e_3] = -e_2; \quad \mathfrak{g}_{3.1}: [e_2, e_3] = e_1.$$

Theorem 1 (Nesterenko M., Popovych R. [2]). *The Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ can be contracted only to the three-dimensional Poincaré algebra $p(1, 1) \sim \mathfrak{g}_{3.4}^{-1}$, to the Heisenberg algebra $\mathfrak{g}_{3.1}$, and to the three-dimensional abelian Lie algebra $3\mathfrak{g}_1$.*

This sequence of contractions is performed in the following diagram

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}_{3.4}^{-1} \rightarrow \mathfrak{g}_{3.1} \rightarrow 3\mathfrak{g}_1.$$

The Inönü-Wigner contraction from $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ to the Poincaré algebra $p(1, 1)$ is provided by the contraction matrix $U_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

The structure constants c_{ij}^k of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ transform as $c_{ij}^k \rightarrow (c_\varepsilon)_{ij}^k \rightarrow \tilde{c}_{ij}^k$, where $\tilde{c}_{ij}^k$ are structure constants of $p(1, 1)$. The first arrow implies the application of the contraction matrix $U(\varepsilon)$ and the second arrow implies the limit process $\varepsilon \rightarrow 0$. More precisely, $\tilde{c}_{ij}^k(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U_{\varepsilon i}^\alpha U_{\varepsilon j}^\beta c_{\alpha\beta}^\gamma (U_\varepsilon^{-1})_\gamma^k$, $i, j, k, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$.

Let $M \subseteq \mathbb{C}^m$ be a complex domain and $\mathfrak{g}$ a Lie algebra. Denote by $\text{Vect}(M)$ the Lie algebra of analytic vector fields on M , endowed with the Lie bracket of vector fields $[\cdot, \cdot]$. A Lie algebra homomorphism $R: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(M)$ is called a *realization* of the Lie algebra $\mathfrak{g}$.

To find the contraction of a realization, we need to construct a realization for the parameterized structure constants $(c_\varepsilon)_{ij}^k$ of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. For this, one can apply either the direct method from the previous section or the Shirokov's method. We constructed the maximal rank-three parameterized realization of the form (below $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$)

$$e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \varepsilon x_1^2 \partial_1 + (1 - 2\varepsilon x_1 x_2) \partial_2 + 2\varepsilon x_1 \partial_3, \quad e_3 = x_1 \partial_1 - x_2 \partial_2 + \partial_3.$$

Taking the limit as ε tends to zero, we obtain a well-defined exact realization of rank three for the three-dimensional Poincaré algebra

$$e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \partial_2, \quad e_3 = x_1 \partial_1 - x_2 \partial_2 + \partial_3.$$

Similarly, we can construct the Inönü-Wigner contraction from the Poincaré algebra to the Heisenberg algebra, as well as their composition.

Our interest in contractions of realizations of the algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ is motivated by the fact that it is the symmetry algebra of the Ermakov system, and to study its limiting cases we constructed differential invariants of the limiting realizations.

REFERENCES

- [1] Inonu E., Wigner E.P. *On the contraction of groups and their representations* // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.— 1953. —V. 39 — P. 510–524.
- [2] Nesterenko M., Popovych R. *Contractions of low-dimensional Lie algebras* // Journal of Mathematical Physics — 2006. — V. 47, 123515. — 45 p.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE AND UNIVERSITY "KYIV SCHOOL OF ECONOMICS", KYIV, UKRAINE

Email address: maryna.nesterenko@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE

Email address: staryimath@gmail.com

ON D-CHARACTERISTICS OF ONE-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEMS IN SPACES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

V.O. SOLDATOV

Let numbers $m, l, n \in \mathbb{N}$ be arbitrarily chosen. On the finite interval (a, b) , we present some results on d-characteristics of the following linear boundary-value problem

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$By = c. \quad (2)$$

Here the matrix function $A \in (C^{(n-1)})^{m \times m}$, the vector function $f \in (C^{(n-1)})^m$, the numerical vector $c \in \mathbb{C}^l$ and the linear continuous operator $B: (C^{(n)})^m \rightarrow \mathbb{C}^l$ are arbitrarily chosen.

We also let boundary condition (2) to be *overdetermined* ($l > m$) or *undetermined* ($l < m$) with respect to the differential system (1).

Using the linear continuous operator

$$(L, B): (C^{(n)})^m \rightarrow (C^{(n-1)})^m \times \mathbb{C}^l, \quad (3)$$

we rewrite the boundary-value problem (1), (2) in the form of the equation

$$(L, B)y = (f, c).$$

Theorem 1. *Operator (3) is Fredholm with index $m - l$.*

By $Y \in (C^{(n)})^{m \times m}$ we denote a unique solution of the following matrix Cauchy problem:

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y(a) = I_m, \quad (4)$$

where O_m and I_m denote the null and identity $m \times m$ matrices, respectively.

Definition 1. We call a complex numerical $l \times m$ matrix *characteristic* for the boundary-value problem (1), (2) if each column of this matrix is the result of the action of the operator B upon the column with the same number of the matrix function Y . We denote this characteristic matrix by $M(L, B)$.

Theorem 2. *For d-characteristics of the Fredholm operator (3), the relations*

$$\dim \ker(L, B) = m - \text{rank } M(L, B), \quad (5)$$

$$\dim \text{coker}(L, B) = l - \text{rank } M(L, B). \quad (6)$$

are true.

Corollary 1. *Operator (3) is invertible (i.e., a topological isomorphism) if and only if $l = m$ and the square matrix $M(L, B)$ is nonsingular.*

Together with the problem (1), (2), consider a sequence of boundary-value problems of the form

$$(L_k y)(t) := y'(t) + A_k(t)y(t) = f_k(t), \quad t \in (a, b), \quad (7)$$

$$B_k y = c_k. \quad (8)$$

Here, $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in (C^{(n-1)})^{m \times m}$, $f_k \in (C^{(n-1)})^m$, $c_k \in \mathbb{C}^l$, and B_k is a linear continuous operator on the pair of the spaces $(C^{(n)})^m$ and $\mathbb{C}^l$.

Let associate the boundary-value problems (7), (8) with the sequence of linear continuous operators $(L_k, B_k): (C^{(n)})^m \rightarrow (C^{(n-1)})^m \times \mathbb{C}^l$ and the sequence of their characteristic matrices $M(L_k, B_k) \in \mathbb{C}^{l \times m}$. As usual, $(L_k, B_k) \xrightarrow{s} (L, B)$ denotes the convergence of the sequence of operators (L_k, B_k) to (L, B) in the strong operator topology. Here, all limits are considered as $k \rightarrow \infty$.

Theorem 3. *If $(L_k, B_k) \xrightarrow{s} (L, B)$, then $M(L_k, B_k) \rightarrow M(L, B)$ (as $k \rightarrow \infty$).*

Theorem 4. *Suppose that*

$$(L_k, B_k) \xrightarrow{s} (L, B) \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad (9)$$

$$\text{Then} \quad \dim \ker(L_k, B_k) \leq \dim \ker(L, B) \quad \text{for all } k \gg 1,$$

$$\dim \operatorname{coker}(L_k, B_k) \leq \dim \operatorname{coker}(L, B) \quad \text{for all } k \gg 1.$$

Assuming that condition (9) is satisfied, we obtain the following.

Corollary 2. *If operator (3) is invertible, then operators (L_k, B_k) are also invertible for all $k \gg 1$.*

Corollary 3. *If the boundary-value problem (1), (2) has a solution for any given right-hand sides, then this is also true for the boundary-value problems (7), (8) for all $k \gg 1$.*

Corollary 4. *If the boundary-value problem (1), (2) has only a trivial solution in the case of zero right-hand sides, then this is also true for the boundary-value problems (7), (8) for all $k \gg 1$.*

This result was published in [1].

REFERENCES

- [1] Soldatov V. *Solvability of Linear Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Systems in the Space C^n* // Ukr. Math. J. — 2025. — V. 77, No 3. — P. 360–368. DOI:10.1007/s11253-025-02451-x

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: soldatovvo@ukr.net, soldatov@imath.kiev.ua

ABOUT EXPLICIT FORM OF MULTISOLITON SOLUTIONS TO THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

A.O. TSUKANOVA

Truly serious theory, concerning solitary waves, was published in 1895 by two Netherlandish mathematicians: Dutch scientist Diederik Johannes Korteweg and his student Gustav de Vries. Research into solitary waves picked up in 1965, when Martin Krustal and Norman Zabusky studied the Korteweg-de Vries equation in more details. Thereby in late 1960's it was discovered that one method, given by Jean Gaston Darboux a century ago, can be extended to some important soliton equations, including the Korteweg-de Vries equation

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1)$$

With the help of this method explicit form of N -soliton, $N \geq 1$, solution has been obtained only for the simplest case $N = 1$, spread in soliton-dedicated literature. After analysis of number of references, both classical old (see, for example, [1] and references therein) and more modern, we have found out that explicit form of multisoliton solutions is unknown. Our goal was to find explicit form of multisoliton solution to (1) with the help of the next formula

$$u[N] = u - 2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N])_{xx}$$

from the Darboux transformation apparatus (see, for instance, [2] for details). Since this task is non-trivial, we have considered two cases: $N = 2$ and $N = 3$.

We have put for $\alpha \leq \beta$

$$u = 0, \quad \Psi_1 = \text{ch}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t], \quad \Psi_2 = \text{sh}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t],$$

and have obtained two-soliton solution $u[2]$ to (1) of the form

$$\begin{aligned} u[2] &= u - 2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2])_{xx} = -2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2])_{xx} = \\ &= -2 \frac{W_{xx}[\Psi_1, \Psi_2]W[\Psi_1, \Psi_2] - (W_x[\Psi_1, \Psi_2])^2}{W^2[\Psi_1, \Psi_2]} = \\ &= -2(\beta \text{ch}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \text{ch}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t] - \\ &\quad - \alpha \text{sh}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \text{sh}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t])^{-2} \times \\ &\quad \times (\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 \text{ch}^2[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] + \alpha^2 \text{sh}^2[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t]), \end{aligned}$$

where

$$W[\Psi_1, \Psi_2] = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_{1x} & \Psi_{2x} \end{vmatrix}, \quad W_x[\Psi_1, \Psi_2] = \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_{1xx} & \Psi_{2xx} \end{vmatrix},$$

$$W_{xx}[\Psi_1, \Psi_2] = \begin{vmatrix} \Psi_{1x} & \Psi_{2x} \\ \Psi_{1xx} & \Psi_{2xx} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_{1xx} & \Psi_{2xx} \end{vmatrix},$$

thus,

$$\begin{aligned} W[\Psi_1, \Psi_2] &= \beta \operatorname{ch}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \operatorname{ch}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t] - \\ &\quad - \alpha \operatorname{sh}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \operatorname{sh}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t], \\ W_x[\Psi_1, \Psi_2] &= (\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{ch}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \operatorname{sh}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t], \\ W_{xx}[\Psi_1, \Psi_2] &= (\beta^2 - \alpha^2) (\alpha \operatorname{sh}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \operatorname{sh}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t] + \\ &\quad + \beta \operatorname{ch}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t] \operatorname{ch}[\beta(x - x_2) - 4\beta^3 t]). \end{aligned}$$

We have put for $\alpha \leq \beta$

$$u = 0,$$

$$\Psi_1 = \operatorname{ch}[\alpha(x - x_1) - 4\alpha^3 t], \quad \Psi_2 = \operatorname{sh}[\alpha(x - x_2) - 4\alpha^3 t],$$

$$\Psi_3 = \operatorname{ch}[\beta(x - x_3) - 4\beta^3 t],$$

and have obtained three-soliton solution $u[3]$ to (1) of the form

$$\begin{aligned} u[3] &= u - 2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3])_{xx} = -2(\ln W[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3])_{xx} = \\ &= -2 \frac{W_{xx}[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3] W[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3] - (W_x[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3])^2}{W^2[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3]} = \\ &= -\frac{2\beta^2}{\operatorname{ch}^2[\beta(x - x_3) - 4\beta^3 t]}, \end{aligned}$$

where

$$W[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3] = \alpha(\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{ch}[\beta(x - x_3) - 4\beta^3 t] \operatorname{ch}[\alpha(x_2 - x_1)],$$

$$W_x[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3] = \alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{sh}[\beta(x - x_3) - 4\beta^3 t] \operatorname{ch}[\alpha(x_2 - x_1)],$$

$$W_{xx}[\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3] = \alpha\beta^2(\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{ch}[\beta(x - x_3) - 4\beta^3 t] \operatorname{ch}[\alpha(x_2 - x_1)].$$

As far as we see, for $N = 3$ we have obtained the solution, coinciding with the solution from the case $N = 1$. It might be true for any odd value of N .

Using the Darboux transformation, we are able to obtain all N -soliton, $N \geq 1$, solutions of the Korteweg-de Vries equation. We have obtained explicit form of N -soliton, $N \geq 1$, solutions for the simplest cases $N = 2$ and $N = 3$. These results are supposed to become in future sort of foundation in finding general formula for N -soliton, $N \geq 1$, solutions to (1).

REFERENCES

- [1] Ablowitz M.J., Segur H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. — SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1981. — 425 p.
- [2] Matveev V.B., Salle M.A. *Darboux Transformations and Solitons*. — Berlin: Springer, 1991. — 120 p.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: ponochka2511@ukr.net

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ

Б.О. ЄВДОКИМЕНКО, В.С. ГЕРАСИМЧУК

Ставиться мішана задача для диференціального рівняння у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами:

$$u_{tt} = \frac{c^2}{r^2/r_0^2 - 1} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right],$$

$$u(r_1, t) = 0, \quad u(r_2, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(r, 0) = -4h \frac{(r - r_1)(r - r_2)}{(r_2 - r_1)^2}, \quad u_t(r, 0) = 0, \quad r_1 < r < r_2.$$

За методом відокремлення змінних Фур'є: $u(r, t) = R(r)T(t)$.

Звідси маємо, що функція $T(t)$ задовольняє рівняння

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad (1)$$

а функція $R(r)$ — задачу Штурма–Ліувілля

$$R'' - \frac{1}{r} R' + \lambda^2 \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) R = 0, \quad R(r_1) = 0, \quad R(r_2) = 0. \quad (2)$$

Загальний розв'язок (1) відомий: $T(t) = A \cos c\lambda t + B \sin c\lambda t$.

Точний розв'язок (2) невідомий, тому шукаємо розв'язок за наближенням Ліувілля–Гріна. Для $r > r_0$ рівняння (2) має наближений розв'язок

$$\tilde{R}(r, \lambda) = A(\lambda) \sqrt[4]{\frac{r^2}{r^2 - r_0^2}} \sin \left[\frac{\lambda r_0}{2} w(r) + \delta(\lambda) \right],$$

$$w(r) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r - \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}} \right) + \frac{r \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0^2}.$$

Знаходимо власні значення та власні функції задачі (2)

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{2\pi k}{r_0[w(r_2) - w(r_1)]}, \quad (3)$$

$$\tilde{R}(r, \tilde{\lambda}_k) = \sqrt[4]{\frac{r^2}{r^2 - r_0^2}} \sin \left[\frac{w(r) - w(r_1)}{w(r_2) - w(r_1)} \pi k \right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Варто показати, що знайдені за наближеним розв'язком власні функції $\tilde{R}(r, \tilde{\lambda}_k)$ дійсно є власними функціями задачі (2), тобто, утворюють повну систему ортогональних функцій.

Доведено, що оператор $L = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right]$ для розв'язків крайової задачі (2) є самоспряженим, тому власні функції $R(r, \lambda_k)$, відповідні різним власним значенням λ_n та λ_m , ортогональні з вагою $\frac{r^2 - r_0^2}{r}$, а система $\{R(r, \lambda_k), k \in \mathbb{N}\}$ є повною.

Твердження. Наближені власні функції $\tilde{R}(r, \tilde{\lambda}_k)$, відповідні різним власним значенням $\tilde{\lambda}_n$ та $\tilde{\lambda}_m$, ортогональні з вагою $\frac{r^2 - r_0^2}{r}$ та нормою $\|\tilde{R}(r, \tilde{\lambda}_k)\|^2 = \frac{r_0^2[w(r_2) - w(r_1)]}{4}$.

Твердження. Система наближених власних функцій $\{\tilde{R}(r, \tilde{\lambda}_k), k \in \mathbb{N}\}$ є повною.

Отже, розв'язок (3), отриманий за наближенням Ліувілля–Гріна, дійсно є розв'язком задачі Штурма–Ліувілля (2). Функція

$$\tilde{u}(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos c\tilde{\lambda}_k t \tilde{R}(r, \tilde{\lambda}_k),$$

$$A_k = -\frac{16h}{r_0^2[w(r_2) - w(r_1)](r_2 - r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(x - r_1)(x - r_2)(x^2 - r_0^2)}{x} \tilde{R}(x, \tilde{\lambda}_k) dx$$

є наближеним розв'язком поставленої мішаної задачі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Frank W. J. Olver. *Asymptotics and special functions*. — Academic Press, 1974. — 572 p.
- [2] Arsenin V. Ya. *Basic equations and special functions of mathematical physics*. — Iliffe Books Ltd., London, 1968. — 361 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yevdokymenko.bogdan@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: viktor.gera@gmail.com

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНИХ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т.О. ЄРЬОМІНА, О.А. ПОВАРОВА

Побудовано неперервні обмежені розв'язки систем нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f(t, x(t), x(t+1)), \quad (1)$$

де $t \in \mathbb{R}$, Λ — дійсна $(n \times n)$ -матриця вигляду $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, q — деяка дійсна стала. При цьому будемо припускати виконаними наступні умови:

- (1) $|\lambda_i| \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $q > 0$;
- (2) вектор-функція $f(t, x, y)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ і $f(t, 0, 0) \equiv 0$;
- (3) для довільних $t \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}} \in \mathbb{R}^n$ виконується співвідношення

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})| \leq l(|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + |\bar{y} - \bar{\bar{y}}|), \quad (2)$$

де l — деяка додатна стала.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (1)–(3) і умови:*

- (4) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$;
- (5) $\Delta = \frac{2l}{\bar{\lambda} - \lambda^*} < 1$, де $1 > \bar{\lambda} > \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \quad (3)$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$ — деякі неперервні обмежені при $t \geq T > 0$ вектор-функції, які задовольняють умову $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (1)–(3) і умови:*

- (6) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$;
- (7) $\Delta = \frac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, де $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \quad (4)$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$ — деякі неперервні обмежені при $t \geq T > 0$ вектор-функції, які задовольняють умові $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$.

Розглянуто систему нелінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду (1) при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$ у випадках, коли виконуються умови:

- а) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$;
- б) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови (1)–(3) і умови:

- (8) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i < 0$, $0 < q < 1$;
- (9) $\Delta = \frac{2l}{\lambda_* - \underline{\lambda}} < 1$, де $1 < \underline{\lambda} < \lambda_* = \min \{|\lambda_i|, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної вектор-функції $\omega(\tau)$, такої що $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Теорема 4. Нехай виконуються умови (1)–(3) і умови:

- (10) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i < 0$, $q > 1$,
- (11) $\Delta = \frac{l}{1 - \lambda^*} < 1$, де $1 > \lambda^* > \max \{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $x(t) = x\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної вектор-функції $\omega(\tau)$, такої що $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Agarwal R.P. *Difference Equations and Inequalities. Theory. Methods and Applications*. — Revised and Expanded. 2000. — 972 p.
- [2] Пелюх Г.П., Сивак О.А. Неперервні розв'язки нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості // Нелінійні коливання. — 2009. — 12, №4 — С. 515-529.
- [3] Er'omina T.O. *On the Solutions of Systems of Nonlinear Functional Equations Continuous in $t \in \mathbb{R}$* . // Journal of Mathematical Sciences (United States). — 2017. — 222(3). — P. 237–254.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: ierominat@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: olena_sivak@ukr.net

ПРО УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ В ЗАДАЧІ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ПУЧКА ТРАЄКТОРІЙ

О.М. БАШНЯКОВ, В.Т. МАТВИЄНКО, В.В. ПІЧКУР

В доповіді розглядаються задачі параметричної оптимізації пучка траєкторій системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p, t), \quad t \in [t_0, T] \quad (1)$$

з такими негладкими критеріями якості

$$I_1(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p)), \quad (2)$$

$$I_2(p) = \max_{x_0 \in M_0} \left\{ \int_{t_0}^T f_0(x(s), p, s) ds + \Phi(x(T, x_0, p)) \right\}. \quad (3)$$

Тут $x \in R^n, p \in R^m$ – вектори стану та параметрів системи відповідно, $f(x, p, t)$ – n -вимірний вектор-функція, яка є неперервно диференційованою за x і p , а також неперервною за t , $f_0(x, p, t)$ є неперервно диференційованою функцією за змінними x, p і неперервною за t , $x(t) = x(t, x_0, p)$, $t \in [t_0, T]$, функція $\Phi : R^n \rightarrow R$ є неперервно диференційованою, $M_0 \subset R^n$ – компакт, $x(t_0) = x_0 \in M_0$.

Для задач параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (1) з функціоналами (2) і (3) побудовано похідну за напрямком та одержано необхідні умови локального мінімуму, зокрема при обмеженнях на параметри. Для задачі (1)–(2) у випадку, коли функція $\Phi(x)$ є опуклою, а права частина системи (1) є лінійною функцією за x та p , отримано також достатні умови оптимальності.

Розроблено обчислювальні методи розв'язування задачі (1)–(2).

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: `oleksandr.bashniakov@knu.ua`

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: `matvienko.vt@knu.ua`

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: `volodymyr.pichkur@knu.ua`

КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІЇВСЬКИХ СИМЕТРІЙ КЛАСУ СИСТЕМ $(1 + 1)$ -ВИМІРНИХ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ

О.А. ВОЛОШИН, М.І. СЕРОВ, О.О. ВАНЄЄВА

Система нелінійних рівнянь дифузії для двовимірного векторного поля $U \in \mathbb{R}^2$ у загальному випадку записується у вигляді

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x], \quad (1)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $f^{ab} = f^{ab}(u^1, u^2)$ — коефіцієнти дифузії, $u^a = u^a(t, x)$ — функції концентрації (або щільності) двох різних речовин, які взаємодіють між собою, t — часова, x — просторова незалежні змінні, $F(U)$ — матриця з $\text{tr } F \cdot \det F \neq 0$.

У роботі [1] виконано задачу попередньої групової класифікації класу (1), зокрема, знайдено групу еквівалентності цього класу, а також ядро максимальних алгебр ліївської інваріантності систем з класу (1), що є тривимірною алгеброю Лі

$$A^\cap = \langle \partial_t, \partial_x, D = 2t\partial_t + x\partial_x \rangle.$$

У процесі групового аналізу класу систем рівнянь дифузії (1) було виокремлено дев'ять нееквівалентних підкласів, які допускають розширення ліївської симетрії. Ці підкласи визначаються такими умовами на довільні елементи f^{ab} :

- 1) $f^{ab} = e^{nu^1} \varphi^{ab}$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^2$;
- 2) $f^{11} = e^{n \frac{u^1}{u^2}} (\varphi^{11} + \frac{u^1}{u^2} \varphi^{21})$, $f^{12} = e^{n \frac{u^1}{u^2}} (\varphi^{12} + \frac{u^1}{u^2} (\varphi^{22} - \varphi^{11}) - (\frac{u^1}{u^2})^2 \varphi^{21})$,
 $f^{21} = e^{n \frac{u^1}{u^2}} \varphi^{21}$, $f^{22} = e^{n \frac{u^1}{u^2}} (\varphi^{22} - \frac{u^1}{u^2} \varphi^{21})$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^2$;
- 3) $f^{11} = (u^1)^n \varphi^{11}$, $f^{12} = (u^1)^{n+1} \varphi^{12}$, $f^{21} = (u^1)^{n-1} \varphi^{21}$, $f^{22} = (u^1)^n \varphi^{22}$,
 $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^2$;
- 4) $f^{11} = (u^2)^n \varphi^{11}$, $f^{12} = (u^2)^{n-1} \varphi^{12}$, $f^{21} = (u^2)^{n+1} \varphi^{21}$, $f^{22} = (u^2)^n \varphi^{22}$,
 $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^1 - \ln u^2$;
- 5) $f^{11} = e^{nu^1} (\varphi^{11} - u^1 \varphi^{12})$, $f^{12} = e^{nu^1} \varphi^{12}$, $f^{22} = e^{nu^1} (\varphi^{22} + u^1 \varphi^{12})$,
 $f^{21} = e^{nu^1} (\varphi^{21} + u^1 (\varphi^{11} - \varphi^{22}) - (u^1)^2 \varphi^{12})$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^2 - 1/2(u^1)^2$;

Ця робота була підтримана грантом від Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, О. О. В. та О. А. В.).

- 6) $f^{11} = (u^1)^n \varphi^{11}$, $f^{12} = (u^1)^{n-m} \varphi^{12}$, $f^{21} = (u^1)^{n+m} \varphi^{21}$, $f^{22} = (u^1)^n \varphi^{22}$,
 $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = (u^1)^{-1-m} u^2$;
- 7) $f^{ab} = (u^1)^n \varphi^{ab}$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^2/u^1$;
- 8) $f^{11} = (u^2)^n (\varphi^{11} + \varphi^{21} \ln u^2)$, $f^{12} = (u^2)^n (\varphi^{12} + (\varphi^{22} - \varphi^{11}) \ln u^2 - \varphi^{21} \ln^2 u^2)$, $f^{21} = (u^2)^n \varphi^{21}$, $f^{22} = (u^2)^n (\varphi^{22} - \varphi^{21} \ln u^2)$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(\omega)$, $\omega = u^1/u^2 - \ln u^2$;
- 9) $f^{1a} = e^{-n\theta} (2\rho^{-2} u^a \vec{u} \vec{\varphi} + \psi^a)$, $f^{2a} = e^{-n\theta} (2\rho^{-2} u^a \vec{u} \vec{\varphi}^\perp + \psi^{a^\perp})$, $\vec{u} = (u^1, u^2)$, $\vec{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2)$, $\vec{\psi} = (\psi^1, \psi^2)$, $\vec{\varphi}^\perp = (-\varphi^2, \varphi^1)$, $\vec{\psi}^\perp = (-\psi^2, \psi^1)$,
 $\varphi^a = \varphi^a(\omega)$, $\psi^a = \psi^a(\omega)$, $\varphi^1 \neq -\psi^1$, $\vec{\psi}^2 + 2\vec{\varphi} \cdot \vec{\psi} \neq 0$, $\rho = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}$,
 $\theta = \arctg u^2/u^1$, $\omega = \rho e^{m\theta}$.

У роботі [1] виконано вичерпну групову класифікацію класу систем рівнянь дифузії з першого підкласу, результати щодо класифікації інших восьми підкласів з'являться у подальших публікаціях.

У цій доповіді основну увагу буде приділено дослідженню ліївських симетрій систем з третього підкласу, а саме результатам групової класифікації такого класу систем $(1+1)$ -вимірних рівнянь дифузії:

$$\begin{aligned} u_t^1 &= \partial_x [(u^1)^n \varphi^{11} u_x^1 + (u^1)^{n+1} \varphi^{12} u_x^2], \\ u_t^2 &= \partial_x [(u^1)^{n-1} \varphi^{21} u_x^1 + (u^1)^n \varphi^{22} u_x^2], \end{aligned}$$

де n — довільна дійсна стала, а $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(u^2)$ — такі довільні гладкі функції, що $(\varphi^{11} + \varphi^{22})(\varphi^{11} \varphi^{22} - \varphi^{12} \varphi^{21}) \neq 0$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Волошин О.А., Сєров М.І., Ванєєва О.О. (2026). Групова класифікація класу систем нелінійних рівнянь дифузії. *І. Укр. мат. журн.*, прийнято до друку.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: voloshyn@imath.kiev.ua

ПОЛТАВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Г. КОРОЛЕНКА, ПОЛТАВА, УКРАЇНА
Email address: mserov4@gmail.com

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: vaneeva@imath.kiev.ua

ПОШИРЕННЯ ПОЧАТКОВИХ КОРЕЛЯЦІЙ У ВІДКРИТІЙ СИСТЕМІ ПРУЖНИХ КУЛЬ

І.В. ГАП'ЯК

У більшості класичних підходів до опису еволюції відкритих систем вважається, що на початковому етапі частинки некорельовані. Однак у реальних фізичних системах це припущення часто не виконується — частинки можуть бути спочатку взаємопов'язані через попередні зіткнення або спільну історію. Також опис еволюції початкових кореляцій має визначальне значення у квантових системах, зокрема, вони мають важливе значення для квантової телепортації.

В даній роботі розглянуто проблему опису кінетичної еволюції відкритої системи виділеної частинки в оточенні нескінченної кількості частинок, які взаємодіють як тверді кулі з пружним зіткненням за наявності початкових кореляцій. Встановлено, що еволюція стану виділеної твердої кулі описується узагальненим кінетичним рівнянням Фоккера–Планка з початковими кореляціями [1], [2]. За допомогою нескінченної послідовності явно визначених функціоналів від розв'язку побудованого кінетичного рівняння описано процеси поширення початкових кореляцій і зародження кореляцій в процесі еволюції.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гал'як І.В., Герасименко В.І. Узагальнене рівняння Фоккера–Планка для газу Енскоґа // Математичний вісник НТШ. — 2012. — Т.9. — С. 23–43.
- [2] Гал'як І.В., Герасименко В.І. Рівняння Фоккера–Планка з початковими кореляціями в кінетичній теорії зіткнень // Буковинський математичний журнал. — 2015. — Т. 3, № 3-4. — С. 52-58.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: ihapiak@knu.ua

МАТЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЕЛИЧИН РАКОВОЇ ПУХЛИНИ В УМОВАХ ІМУННОЇ РЕАКЦІЇ ОРГАНІЗМУ

Г.М. ГУБАЛЬ

Причиною летальних випадків великої кількості хворих в усьому світі є рак, оскільки про наявність раку багато пацієнтів дізнаються вже на пізній стадії його розвитку. Для подолання цієї хвороби дуже важливі й актуальні наукові дослідження (в тому числі й математичні). Багато науковців світу при дослідженнях і лікуванні ракових хворих відмітили особливо важливу роль Т-лімфоцитів у знищенні ракових клітин [1, 2].

У дослідженнях [3, 4] показано новий принцип терапії онкозахворювань, новий вид лікування раку — імунотерапію. Ця імунотерапія працює за рахунок блокування білків-тормозів імунної системи, в яку входить особлива різновидність білих кров'яних тілець — Т-лімфоцитів. Т-лімфоцити розпізнають і знищують чужорідні і мутуючі клітини. Імунна реакція організму людини полягає в тому, що виробляються Т-лімфоцити, які знищують ракові клітини. Однак, при послабленому імунітеті організм людини виробляє недостатню кількість Т-лімфоцитів. Тоді при інтенсивному переродженні клітин в ракові внаслідок різних причин, ракові клітини можуть призвести до появи і росту ракової пухлини.

У даному дослідженні розглядаємо реакцію імунної системи людини на сторонню тканину (у даному випадку — ракову пухлину).

Клітини ракових пухлин містять особливі речовини (антигени), які викликають різку імунну реакцію у більшості людей. Ця реакція полягає в виробленні Т-лімфоцитів, які атакують і знищують клітини ракової пухлини.

Математично аналізуємо процес зміни величини ракової пухлини при атаках ракових клітин Т-лімфоцитами. Це дає можливість визначати умови знищення ракових пухлин.

Процес знищення ракових клітин описується побудованою в даному дослідженні системою диференціальних рівнянь.

При певних умовах розв'язки цієї системи диференціальних рівнянь покажуть зменшення величини ракової пухлини з плином часу, аж до повного її зникнення. Це доведено в багатьох випадках при лікуванні онкохворих імунотерапією для деяких видів раку [3, 4].

Дане математичне дослідження дає можливість:

- аналізувати процес зміни величини ракової пухлини, коли ракові клітини знищуються Т-лімфоцитами;
- визначати, при яких умовах Т-лімфоцити знищують ракову пухлину.

Отже, це математичне дослідження є важливе й актуальне. Воно робить внесок до можливості подолання ракових хвороб, які є причиною летальних випадків великої кількості пацієнтів в усьому світі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Leko V. and Rosenberg S.A. *Identifying and targeting human tumor antigens for T cell-based immunotherapy of solid tumors* // Cancer Cell. — 2020. — Vol. 38, no. 4. — pp. 454–472.
- [2] Peggs K.S., Quezada S.A., and Allison J.P. *Cancer immunotherapy: co-stimulatory agonists and co-inhibitory antagonists* // Clinical and Experimental Immunology. — 2009. — Vol. 157, no. 1. — pp. 9–19.
- [3] Mok S., Duffy C.R., and Allison J.P. *Effects of anti-ctla-4 and anti-pd-1 on memory T-cell differentiation and resistance to tumor relapse* // Cancer Research. — 2018. — Vol. 78, no. 13_Supplement. — pp. 2984–2984.
- [4] Chamoto K., Chowdhury P.S., Kumar A., Sonomura K., Matsuda F., Fagarasan S., and Honjo T. *Mitochondrial activation chemicals synergize with surface receptor PD-1 blockade for T cell-dependent antitumor activity* // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2017. — Vol. 114, no. 5. — pp. 761–770.

ЛУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: halynahbl@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ З ПОВІЛЬНОЮ ЗМІНОЮ ПАРАМЕТРІВ ОБ'ЄКТА І РЕГУЛЯТОРА

Г.В. ДАНИЛІНА, М.О. РАШЕВСЬКИЙ

У лінійному наближенні рівняння, що описують рух системи автоматичного керування при повільній зміні параметрів об'єкта та регулятора є такими [1]:

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = B(t, \varepsilon)x(t, \varepsilon) + H(t, \varepsilon)u(t, \varepsilon) + v(t), \quad (1)$$

де $x(t, \varepsilon)$ – двовимірний вектор, що складається із збурень параметрів руху керованого об'єкта; $u(t, \varepsilon) = (u_1, u_2)$ – вектор керування; $v(t) = (v_1, v_2)$ – вхідний сигнал, що формується як лінійна комбінація координат.

Матриці $B(t, \varepsilon)$, $H(t, \varepsilon)$, $G(t, s, \varepsilon)$ – матриці порядку 2 з неперервними елементами; $G(t, s, \varepsilon)$ – матриця імпульсних перехідних функцій регулятора. Оскільки коефіцієнти системи (1) є функціями повільного часу ε , то для побудови розв'язку системи необхідно скористатися наближеними методами. Найбільш ефективними є асимптотичні методи, які дають можливість аналітичного запису розв'язку.

У доповіді розглядається питання побудови розв'язку системи (1) залежно від спектра матриці $B(t, 0)$. Припускається, що матрицю $B(t, \varepsilon)$ можна подати у вигляді збіжного ряду за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon > 0$. Для дослідження системи (1) використовуються методи, розроблені в [2]. Наведено асимптотичні оцінки різниці між точним розв'язком та побудованим m -наближенням.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Лейфура В.М., Менько Я.П. *Асимптотичний аналіз нестационарних систем автоматичного керування* // Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях: Зб. наук. праць. — Київ: Вища шк., 1993.— С. 93–101.
- [2] Leifura V.N. On One Problem of Automatic Control with Turning Points *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics: Proceedings of the Second International Conference* — Kyiv, 1997. — V. 2. — P. 488–491.

КРИВОРІЗЬКИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ ДНП «ДУ»КАІ», КРИВИЙ РІГ, УКРАЇНА
Email address: danilina@ukr.net

КРИВОРІЗЬКИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ ДНП «ДУ»КАІ», КРИВИЙ РІГ, УКРАЇНА
Email address: rashevskiy@krfk.kai.edu.ua

ІНТЕГРАЛЬНІ ОЦІНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РОЗВ'ЯЗКІВ НОВОГО КЛАСУ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

А.В.ЗАВОРОТИНСЬКИЙ

Робота присвячена дослідженню інтегральних оцінок фундаментальної системи розв'язків модельної задачі, що належить до нового класу еліптичних крайових задач з малим параметром. У цьому класі параметр $\varepsilon > 0$ входить не лише до еліптичного та крайових диференціальних операторів, а й до дотичних операторів, які діють на додаткові невідомі функції, задані на межі області. Метою роботи є встановлення ε -незалежних інтегральних оцінок для цих розв'язків, що становлять основу подальших апріорних оцінок у загальному випадку.

Нехай Ω — обмежена відкрита область у $\mathbb{R}^n$ класу C^∞ , де $n \geq 2$, та $\Gamma := \partial\Omega$. Виберемо цілі числа m, μ та $\varkappa$ такі, що $m > \mu \geq 1$ і $\varkappa \geq 1$. Нехай цілі числа $b_1, \dots, b_{m+\varkappa}$ та $\beta_1, \dots, \beta_{m+\varkappa}$ такі, що $b_j \geq \beta_j$ при $1 \leq j \leq m+\varkappa$, і виконується умова $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{\mu+\varkappa} < \beta_{\mu+\varkappa+1} \leq \dots \leq \beta_{m+\varkappa}$. Крім того, $\alpha_1, \dots, \alpha_\varkappa \in \mathbb{Z}$.

Розглядається така крайова задача, залежна від малого параметра:

$$A(x; D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$B_j(x; D; \varepsilon)u(x; \varepsilon) + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}(x; D_\tau; \varepsilon)\varrho_k(x; \varepsilon) = g_j(x), \quad (2)$$

$$x \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa.$$

Тут функція $u(x; \varepsilon)$, аргументу $x \in \overline{\Omega}$, і функції $\varrho_1(x; \varepsilon), \dots, \varrho_\varkappa(x; \varepsilon)$, аргументу $x \in \Gamma$ є шуканими, а праві частини задачі задані й (для спрощення) не залежать від параметра ε . Розглядаються комплекснозначні функції.

Диференціальні оператори з частинними похідними, які містяться в лівій частині задачі, залежать від малого параметра $\varepsilon > 0$ поліномі-

альним чином: $A(x; D; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A_{2m-i}(x; D)$, $B_j(x; D; \varepsilon) :=$

$$\sum_{i=0}^{b_j-\beta_j} \varepsilon^{b_j-\beta_j-i} B_{j;b_j-i}(x; D), \quad C_{j,k}(x; D_\tau; \varepsilon) := \sum_{i=0}^{b_j-\beta_j} \varepsilon^{b_j-\beta_j-i} C_{j,k;b_j-i+\alpha_k}(x; D_\tau).$$

Тут A_{2m-i} , $B_{j;b_j-i}$ і $C_{j,k;b_j-i+\alpha_k}$ — лінійні диференціальні оператори з C^∞ -коефіцієнтами відповідних порядків на $\overline{\Omega}$ і Γ .

Загальна теорія еліптичних крайових задач із малим параметром була започаткована в роботі М. І. Вішика та Л. А. Люстерника [1], а її подальший розвиток у контексті еліптичності з малим параметром подано в роботі Л. Р. Волевича [2]. Розглянута задача належить до нового класу еліптичних крайових задач, у яких малий параметр входить також до дотичних операторів, що діють на додаткові невідомі функції $\varrho_1, \dots, \varrho_\kappa$, задані на межі області Γ , що узагальнює результати [3].

Техніка доведення ґрунтується на аналізі модельної задачі в півпросторі, для якої побудовано фундаментальну систему розв'язків крайового символу та отримано ε -незалежні інтегральні оцінки, що відображають залежність від порядків операторів і параметра ε та формулюються в основній теоремі.

Теорема. *Нехай для задачі (1), (2) виконуються умови еліптичності з малим параметром. Тоді для кожного $q \in \{1, \dots, m + \kappa\}$ існує єдиний розв'язок $v_q(t) = v_q(\xi', t; \varepsilon)$, $\sigma_{q,k} = \sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon)$, $k = 1, \dots, \kappa$, крайового символу модельної задачі на півосі*

$$A^{(0)}(\xi', D_t; \varepsilon)v_q(t) = 0, \quad t > 0, \quad B_j^{(0)}(\xi', D_t)v_q(0) + \sum_{k=1}^{\kappa} C_{j,k}^{(0)}(\xi')\sigma_{q,k} = \delta_{q,j},$$

де $v_q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Крім того, існує константа $C > 0$, що не залежить від $\varepsilon \in (0, 1]$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ і номерів q, k , така що для всіх цілих $l \geq 0$ виконуються інтегральні оцінки

$$\left(\int_0^\infty |D_t^l v_q(\xi', t; \varepsilon)|^2 dt \right)^{1/2} \leq C |\xi'|^{l - \beta_q - \frac{1}{2}} \Phi_q, \quad |\sigma_{q,k}(\xi'; \varepsilon)| \leq C |\xi'|^{-\beta_q - \alpha_k} \Psi_q,$$

де Φ_q і Ψ_q описують залежність оцінок від параметрів ε та ξ' .

Отримані результати становлять аналітичний фундамент для встановлення ε -незалежних апріорних оцінок розв'язків цієї задачі у відповідних функціональних просторах.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Vishik M.I., Lusternik L.A. *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter* // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. — 1957. — Vol. 12, No. 5. — P. 3–122.
- [2] Volevich L.R. *The Vishik–Lyusternik method in elliptic problems with a small parameter* // Trans. Moscow Math. Soc. — 2006. — Vol. 67. — P. 95–126.
- [3] Zavorotynskyi A.V. *On elliptic boundary-value problems with a small parameter and additional functions on the boundary of a domain* // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — Vol. 66, No. 9. — P. 1423–1430.

КНУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: zavorotynskyi@knu.ua

ВЕРХНЯ ПОТОЧКОВА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА З ВИКОРИСТАННЯМ ПОТЕНЦІАЛУ РІССА

Є.С. ЗОЗУЛЯ

Узагальнюємо представлення Пуассона на випадок рівняння пористого середовища з вагою

$$v(x)u_t - \operatorname{div}(w(x)u^{m-1}\nabla u) = f(x, t), \quad u \geq 0, \quad m > 1. \quad (1)$$

Розглядаємо рівняння (1), вважаючи, що Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Будемо також вважати, що $f \in L^1(\Omega_T)$, а вагові коефіцієнти $v, w \geq 0$ належать до відповідних класів $v \in A_\infty$, $w \in A_2$. Нагадаємо тут, що w належить до класу Маккенхаупта A_p , $1 < p < \infty$, якщо $w(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}^n$ та існує стала $K_{p,w} > 0$ така, що

$$\frac{w(B)}{|B|} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} = K_{p,w} < +\infty, \quad \text{де } w(B) = \int_B w dx,$$

для всіх куль $B \subset \mathbb{R}^n$. Тут ми говоримо, що $v(x) \in A_\infty$, якщо існує $p_0 > 1$ таке, що $v \in A_{p_0}$.

Далі будемо вважати, що для будь-яких $y \in \mathbb{R}^n$ і r і ρ таких, що $0 < r < \rho$, правильні нерівності:

$$K_4^{-1} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\nu_1} \leq \frac{v(B_\rho(y))}{v(B_r(y))} \leq K_4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\nu}, \quad (2)$$

$$K_4^{-1} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\mu_1} \leq \frac{w(B_\rho(y))}{w(B_r(y))} \leq K_4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\mu}, \quad (3)$$

з деякими додатними сталими $K_4, \nu_1, \mu_1, \nu, \mu$.

Наступне наше припущення — це співвідношення між v та w . Тобто введемо функцію, яка пов'язує ці функції. Фіксуємо $y \in \Omega$ та R так, що $B_{8R}(y) \subset \Omega$ і покладемо $\psi_y(r) := r^2 \frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))}$, $0 < r \leq R$. Припускаємо, що $\psi_y(r)$ зростає для $r \in (0, R]$ і існують дві додатні константи α, K_5 такі, що $\frac{\psi_y(r)}{\psi_y(\rho)} \leq K_5 \left(\frac{r}{\rho} \right)^\alpha$.

Основний результат, отриманий для розв'язків (1) міститься у наступній теоремі (доведення наведено у [7]).

Теорема 1. *Нехай структурні умови рівняння задовольняються деякими додатними сталими (детальніше [7]) та виконуються умови (2),*

(3). Тоді, для довільного невід'ємного слабкого розв'язку u рівняння (1) існують залежні лише від вхідних даних додатні сталі $\lambda_0 \in (0, 1)$, c_1 , такі, що для всіх $\lambda \in (0, \lambda_0)$, майже для всіх $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ і будь-якого циліндра $Q_{R,\theta}(x_0, t_0) \subset \Omega_T$ наступна нерівність має місце

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) \leq & c_1 \left(\frac{1}{v(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)} \iint_{Q_{R,\theta}(x_0, t_0)} v u^{m+\lambda} dx dt \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} + \\ & + c_1 \left(\frac{1}{w(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)} \iint_{Q_{R,\theta}(x_0, t_0)} w u^{m+\lambda} dx dt \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} + \\ & + c_1 \left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta} \right)^{\frac{1}{m-1}} + c_1 I_{v,w,f} \left(x_0, t_0, c_1 R, \frac{\theta}{\psi_{x_0}(R)} \right), \end{aligned}$$

де ваговий потенціал Рісса визначається як

$$I_{v,w,f}(x_0, t_0, R, \theta) := \int_0^R \frac{1}{v(B_\rho(x_0))} \iint_{Q_{\rho, \theta\psi_{x_0}(\rho)}(x_0, t_0)} |f(x, t)| dx dt \frac{d\rho}{\rho}.$$

Тут для $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ та для будь-яких $\rho, \theta > 0$ визначаємо

$$Q_{\rho, \theta\psi_{x_0}(\rho)}(x_0, t_0) := B_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta\psi_{x_0}(\rho), t_0).$$

Доведення теореми ґрунтується на відповідних модифікаціях ітераційної техніки Де Джорджі [1], метода внутрішнього масштабування (intrinsic scaling) Ді Бенедетто [2], після адаптації техніки Кіппелайнен–Мали [4], [3] до параболічних рівнянь сумісно з ідеями [5].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] De Giorgi E., Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1957, 3, P. 25-43.
- [2] Di Benedetto E., Gianazza U., Vespri V., Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012.
- [3] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, in: Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.
- [4] Kilpeläinen T., Malý J., The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations, Acta Math., 1992, 172, P. 137-161.
- [5] Liskevich V., Skrypnik I.I., Pointwise estimates for solutions to the porous medium equation with measure as a forcing term, Israel J. Math. 2013, V. 194, pp. 259-275.
- [6] Vazquez J. L., The porous medium equation, Oxford Math. monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, UK, 2007, 648.
- [7] Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials, Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 248(2), pp. 233 - 254.

ДДМА, КРАМАТОРСЬК-ТЕРНОПІЛЬ, УКРАЇНА
Email address: albelgen27@gmail.com

НЕОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БЕЗТИПОВОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В МНОГОКУТНИКУ

КИРИЧЕНКО В.В., ЛЕСІНА Є.В., НОВІКОВА Ю.В.

Серед питань, що постають при обговоренні коректності певної крайової задачі, істотним є питання порушення єдиності її розв'язку. Водночас на окрему увагу заслуговують задачі для безтипових рівнянь з частинними похідними.

Дане дослідження присвячено порушенню єдиності розв'язку однорідної крайової задачі для безтипового диференціального рівняння з частинними похідними в області з кутовими точками, а саме — в многокутнику [1]. Доведення результату базується на принципі двоїстості рівняння-область [2].

Нижче наводяться постановка задачі та критерій неоднозначної розв'язності, сформульований у вигляді рівності нулю визначника, залежного від коефіцієнтів рівняння.

Нехай

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : H^1 \cdot x + d_1 > 0, H^2 \cdot x + d_2 > 0, \dots, H^n \cdot x + d_n > 0\}$$

— многокутник на площині, обмежений прямими $H^j \cdot x + d_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, з нормальними векторами $H^j = (H_1^j, H_2^j)$.

Для рівняння

$$Lu \equiv (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla) \dots (a^n \cdot \nabla)u = 0, \quad (1)$$

де

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad a^k = (a_1^k, a_2^k) \in \mathbb{C}^2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$u = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)),$$

розглянемо наступну крайову задачу:

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Відзначимо, що порядок розглянутого рівняння збігається з кількістю сторін многокутника Ω . Відповідь на питання щодо порушення єдиності розв'язку задачі (1), (2) міститься в наступній теоремі.

Теорема. Задача (1), (2) має нетривіальний розв'язок в просторі $C^n(\overline{\Omega})$ тоді і лише тоді, коли в послідовності визначників $\{\Delta_M\}$, $M \geq n$, де

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^1)^M & (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^1)^M & \dots & (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^1)^M \\ (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^2)^M & (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^2)^M & \dots & (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^2)^M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^n)^M & (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^n)^M & \dots & (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^n)^M \end{vmatrix}, \quad (3)$$

є хоча б один нуль. Якщо деякий визначник $\Delta_M = 0$, то M — мінімальне число, для якого виконується рівність:

$$\Delta_n \neq 0, \Delta_{n+1} \neq 0, \dots, \Delta_{M-1} \neq 0, \Delta_M = 0.$$

В рівності (3) $\tilde{H}^j$ і $\tilde{a}^k$ — вектори, ортогональні відповідно векторам H^j і a^k .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kirichenko, V.V., Lesina, E.V. (2022). On the uniqueness violation of boundary value problem in polygon. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series Mathematics and Informatics*, 2022, Vol. 40(1), 60–68.
- [2] Burskii, V.P. (2002). Methods for studying boundary value problems for general differential equations. Kyiv: Naukova dumka. [in Russian]

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ,
Київ, Україна

Email address: v.kyrychenko@nubip.edu.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: eugenia.lesina.17@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: yuliia.novikova.kpi@gmail.com

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

В.В. КОБЕЛЯЦЬКИЙ, П.Ф. САМУСЕНКО

Розглядається двоточкова крайова задача

$$\varepsilon A(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad \varepsilon \in (0; \varepsilon_0], \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

де $x(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A(t, \varepsilon)$, M та N — квадратні матриці порядку n , $f(x, t, \varepsilon)$ та $d(\varepsilon)$ — n -вимірні вектори, ε — малий параметр.

Формальний розв'язок крайової задачі (1), (2) шукається у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon) + Qx(\xi, \varepsilon),$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{x}_k(t)$ — регулярна частина асимптотики, а $Px(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k x(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ і $Qx(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k x(\xi)$, $\xi = \frac{t-T}{\varepsilon}$, — сингулярна частина асимптотики. Зазначимо, що наявність примежевих рядів дозволяє побудувати рівномірну асимптотику розв'язку заданої крайової задачі на відрізку $[0; T]$.

Члени регулярної частини асимптотики визначаються з алгебраїчних систем, а члени сингулярної частини — з лінійних диференціально-алгебраїчних систем.

У роботі доведено асимптотичний характер побудованого формального розв'язку крайової задачі (1), (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Vasileva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V. *The Boundary Function Method for Singular Perturbation* — Philadelphia: SIAM, 1995. — 221 p.
- [2] Самусенко П.Ф. *Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем* — Київ: Політехніка, 2003. — 202 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: kobelyatskiyvlad@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: psamusenko@ukr.net

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИЙ ТА ЛОГІСТИЧНИЙ РІСТ ПОПУЛЯЦІЇ

О.П. КОЗЕЛ

Людство протягом багатьох віків перебуває у нескінченних пошуках можливих пояснень різноманітних процесів та явищ навколишнього світу. Проте серед них можна виділити найяскравіші, наприклад, спонтанні виникнення часових, просторових чи просторово-часових структур. Тобто стихійні утворення високовпорядкованих систем, які сформувалися у наслідок взаємодії великої кількості об'єктів. Задля того, щоб ефективно розкрити загальні закономірності самоорганізації, вчені у своїх дослідженнях використовують складні математичні апарати.

Математичне моделювання є ключовим інструментом для аналізу як природно біологічних, так і соціально-економічних ресурсів. Адже застосування динамічних систем не обмежується описом закономірності зміни популяції, але й прогнозує її подальший розвиток. Найвідомішими моделями даного типу є експоненціальна та логістична модель росту.

Якщо x означити як щільність популяції у момент часу t і ввести деяку сталу a то отримаємо найпростіше диференціальне рівняння, яке описує зростання популяції:

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Розв'язавши це рівняння, матимемо функцію $x = x_0 e^{at}$ де x_0 позначає щільність популяції в момент часу при $t = 0$ [1]. Функція дає змогу характеризувати коливання чисельності колонії бактерій, доки не настане повне виснаження ресурсів поживного середовища. З диференціального рівняння випливає, що частка особин у великій вибірці, які продовжували розмножуватись протягом деякого короткого періоду Δt буде еквівалентною значенню $a\Delta t$. Винятковість застосування даного рівняння полягає у обмеженості періоду часу та незалежності зростання кількості особин популяції від резерву поживного середовища.

Найчастіше для опису колоній, де стабілізація чисельності відбувається через зовнішні обмеження, використовують логістичні рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2.$$

або

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{\frac{a}{b}}\right) = ax \left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

де a — істинна швидкість зростання, а k — місткість середовища [2]. Дана динамічна система опише S -подібну криву.

Під терміном місткість середовища слід розглядати максимальну кількість особин, яку даний субстрат може підтримувати. На відміну від експоненціальної моделі, яка припускає, що приріст популяції завжди пропорційний її розміру, логістичне рівняння вводить коригувальний фактор. Слід зазначити, що у такій динамічній системі зі зростанням t величина x монотонно наближається до сталого значення.

При малих значеннях змінної x рівняння зводиться до найпростішого, що дозволяє прослідкувати експоненціальний характер зростання, відповідно дана культура стрімко збільшується у розмірах. Це так звані фази затримки та прискорення. Однак при збільшенні чисельності бактерій, коли $x \rightarrow k$, то значення коригувального фактора прямує до нуля. Після чого починається фаза уповільнення, на графіку це зображується точкою перегину S -подібної кривої. Коли значення x максимально наблизилось до k , швидкість зростання $\frac{dx}{dt}$ прямує до нуля. Популяція досягає рівноваги: народжуваність приблизно дорівнює смертності, її чисельність збалансовується навколо k . Це кульмінація фази плато. Саме ця здатність передбачати стабілізацію робить логістичну модель ефективним інструментом для досліджень, які пов'язані з екологією, соціологією та економікою.

Отже, експоненціальна та логістична моделі росту є фундаментальними прикладами застосування диференціальних рівнянь у природничих науках. Перша математична структура описує ідеалізовані умови необмеженого зростання, тоді як друга передбачає вплив різних чинників. Їхнє вивчення розвиває не лише математичну компетентність, а й уміння аналізувати реальні процеси за допомогою математики.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Лошицький П.П., Ніколов М.О. *Моделювання біофізичних процесів. Вступ до синергетики*. — Навч. посібник. Електронне видання. — 2014. — 412 с. — URL: <https://lnk.ua/1V9kj0M4g>.
- [2] Кагадій Т.С., Сушко Л.Ф., Щербина І.В., Онопрієнко О.Д., Шпорта А.Г. *Диференціальні рівняння: теорія, приклади, розв'язання*. — Навч. посібник. Електронне видання. — 2022. — 192 с. — URL: <https://lnk.ua/QV0k625eg>.

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
 Email address: k.oksanapetrivna4@gmail.com

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЇ СТАНУ С.Л. СОБОЛЕВА В ЗАДАЧАХ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДИХ ТІЛ З ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

Ю.М. КОНОНОВ, О.В. НЕСМЕЛОВА, Я.І. СВЯТЕНКО

Функція стану С.Л. Соболева знаходиться з наступної крайової задачі:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_2^2} + (1 - \kappa_n^2) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x_3^2} = 0 \text{ у } \tau,$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} n_2 + (1 - \kappa_n^2) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_3} = i \kappa_n \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_3} n_1 - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} n_2 \right) \text{ на } \Sigma,$$

де власні числа κ_n всюди щільно заповнюють область $|\kappa_n| \geq 1$ дійсної осі, Σ — границя області τ , $\mathbf{n}$ — зовнішня нормаль до неї, векторні функції $\mathbf{v}_n$ $\mathbf{v}_n = \frac{\kappa_n}{2\omega_{02}(\kappa_n^2 - 1)} [\kappa_n \mathbf{e}_3^2 \times \nabla \varphi_n - i \nabla \varphi_n + i \kappa_n^2 \mathbf{e}_3^2 (\mathbf{e}_3^2 \cdot \nabla \varphi_n)]$ зберігають властивість ортогональності в області τ .

На підставі відомих рівнянь П.В. Харламова і функції стану С.Л. Соболева у роботах [1, 2] розглянуто задачу про стабілізацію нестійкого обертання в середовищі з опором невільного [1] та вільного [2] гіроскопів Лагранжа з осесиметричними порожнинами за рахунок обертання частини його твердого тіла. Передбачається, що на тверді тіла діють дисипативні й постійні моменти. З урахування основного тону коливання рідини отримані умови стабілізації. Ці умови досліджені відносно кінетичного моменту другого гіроскопа та відносно коефіцієнту пружності сферичного шарніра. Показано, що коли перший тон коливання рідини більше одиниці, а центр мас першого гіроскопа з рідиною або другого не збігається з їх загальною точкою, то при достатньо великих значеннях кутової швидкості другого гіроскопа або коефіцієнта пружності сферичного шарніра завжди буде можлива стабілізація нестійкого обертання гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною. Для еліпсоїдальної порожнини це означає, що вона повинна бути стиснута вздовж осі обертання. У роботі [3] розглянуто задачу про моделювання обертання в середовищі з опором вільного пружного твердого тіла з порожнинами, які містять ідеальну рідину, у вигляді системи двох пружно зв'язаних твердих тіл з рідиною. У

випадку двох гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами з ідеальною рідиною виведено трансцендентне характеристичне рівняння і, з урахуванням основного тону коливання рідини, досліджені умови асимптотичної стійкості. Показано відсутність внутрішнього резонансу при збігу перших тонів коливання рідини у порожнинах, а також те, що коли перші тони коливання більші одиниці, то при зростанні коефіцієнта пружності завжди буде можлива асимптотична стійкість. Проведені дослідження дозволяють оцінити вплив рідини, пружності та опір середовища на умови асимптотичної стійкості обертання пружного твердого тіла з рідиною. Слід зазнати, що отримані умови асимптотичної стійкості є точними для еліпсоїдальних та софокусно-еліпсоїдальних порожнин, а для усіх інших порожнин тільки наближеними, для уточнення яких треба враховувати додаткові тони коливання ідеальної рідини. Стаття [4] узагальнює відомі результати обертання на підвісі твердого тіла з рідиною на випадок довільної осесиметричної порожнини з ідеальною рідиною, масових й інерційних характеристик підвісу, пружності сферичних шарнірів, а також на випадок дисипативних і постійних моментів. Доведено, що коли основний тон коливання рідини більше одиниці, то, при зростанні пружності в сферичних шарнірах, завжди буде можлива асимптотична стійкість для довільної кутової швидкості та для довільних параметрів механічної системи. Зроблено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості за відсутності дисипації.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. *Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium* // International Applied Mechanics. – 2023. – Vol. 59, № 2. – P. 207–217.
- [2] Kononov Yu.M. *On stabilization of unstable rotation of a free rigid body with fluid in a resisting medium by rotating its rigid part* // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 292, № 4. – P. 470–482.
- [3] Kononov Yu.M. *On stabilization of unstable rotation of a free rigid body with fluid in a resisting medium by rotating its rigid part* // Journal of Mathematical Sciences. – 2024. – Vol. 284, № 3. – P. 345–356.
- [4] Кононов Ю.М., Несмелова О.В., Святенко Я.І. *Про стійкість обертання на підвісі у середовищі з опором гіроскопа Лагранжа з ідеальною рідиною* // Прикладна механіка. – 2026. – Т. 62, № 2 (пройшла рецензування).

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ, СЛОВ'ЯНСЬК, УКРАЇНА

Email address: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ, СЛОВ'ЯНСЬК, УКРАЇНА

Email address: star-o@ukr.net

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ НАН УКРАЇНИ, СЛОВ'ЯНСЬК, УКРАЇНА

Email address: filioeee@gmail.com

ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

В.В. ЛИСТОПАДОВА

Нехай необхідно знайти функцію $y(x) \in W_2^2(a, b)$ і параметри $\lambda \in R^l$, які задовольняють рівняння:

$$y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^m g_{\tau}(x)y^{(m-\tau)}(x) + \sum_{\tau=1}^m d_{\tau}(x)y^{(m-\tau)}(x-\Delta) = f(x) + c(x)\lambda + \varepsilon q(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x), y(x-\Delta), y'(x-\Delta), \dots, y^{(m-1)}(x-\Delta), \lambda), \quad (1)$$

для $x \in (a, b)$ і додаткові умови

$$y(x_s) = \alpha_s, \quad \alpha_s \in R, \quad s = \overline{1, p}, \quad a = x_1 < x_2 < \dots < x_s < \dots < x_p = b, \quad (2)$$

$$y(x-\Delta) = y'(x-\Delta) = \dots = y^{(m-1)}(x-\Delta) = 0, \quad x \in (a, a+\Delta), \quad (3)$$

де Δ — постійне запізнення, $\Delta > 0$, $c(x)\lambda$ — скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ і неперервної на $(a; b)$ вектор функції

$$c(x) = (c_1(x), c_2(x), \dots, c_l(x)),$$

$l = p - m$, ε — малий параметр.

Припустимо, що коефіцієнти $g_{\tau}(x)$, $d_{\tau}(x)$, $\tau = \overline{1, m}$, $c(x)$ визначені й неперервні на $[a, b]$, $f \in L_2(a, b)$, а функція

$$q(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_{2m}(x), \lambda)$$

в області $D = \{a \leq x \leq b, -\infty < u_i < \infty, i = \overline{1, 2m}, \lambda \in R^l\}$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\begin{aligned} & \left| q(x, u_1, u_2, \dots, u_{2m}, \lambda) - q(x, \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_{2m}}, \overline{\lambda}) \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{2m} \beta_i(x) |u_i - \overline{u_i}| + \sum_{s=1}^l \gamma_s(x) |\lambda_s - \overline{\lambda_s}|, \end{aligned}$$

де $\beta_i(x)$, $\gamma_s(x)$ — відомі функції, для яких

$$\beta_i \in C(a, b), \quad i = \overline{1, 2m}, \quad \gamma_s \in L_2(a, b), \quad s = \overline{1, l}.$$

В повідомленні доведено, що при зроблених припущеннях дослідження існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(3) зведеться до дослідження сумісності рівносильного інтегрального рівняння з малою нелінійністю. Зокрема, при $\varepsilon = 0$ задача (1)–(3) перетворюється в багатоточкову задачу для лінійного диференціально-різницевого рівняння з параметрами, яка детально розглянута в [1], [2].

В даній роботі обґрунтовано застосування до задачі (1)–(3) проекційно-ітеративного методу, теоретичні основи якого викладені в роботах [3], [4]. Доведено зведення проекційно-ітеративного методу для даної задачі до проекційно-ітеративного методу розв'язання інтегрального рівняння з малою нелінійністю та одержано достатні умови збіжності методу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Листопадова В.В. *Про одну багатоточкову задачу для диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу і параметрами* // Доп. НАН України. — 2012. — № 4. — С. 30–33.
- [2] Листопадова В.В. *Застосування проекційно-ітеративного методу до багатоточкових задач для диференціальних рівнянь з параметрами та запізненням* // Доп. НАН України. — 2012. — № 5. — С. 26–31.
- [3] Лучка А.Ю. *Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. — Київ: Наук. думка, 1980. — 264 с.
- [4] Лучка А.Ю. *Проекционно-итеративные методы*. — Київ: Наук. думка, 1993. — 288 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: listopadovavv@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ПРОЦЕСІВ У ҐРУНТОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ У ВИПАДКУ ОСЬОВОЇ СИМЕТРІЇ

О.О. МАРЧЕНКО, Т.А. САМОЙЛЕНКО

Пропонується алгоритм розрахунку динаміки неізотермічних процесів ущільнення неоднорідних за структурою слабких водонасичених ґрунтів у випадку осьової симетрії. Ця проблема є актуальною при дослідженні стану ґрунтів навколо вертикальних дрен, свердловин в процесі промислової експлуатації нафто- та водоносних горизонтів, запасів геотермальних вод тощо. Сформульовано початково-крайову задачу для системи нестационарних рівнянь фільтрації, теплоперенесення та пружної деформації [1,2] для ізотропного ґрунтового масиву в циліндричній системі координат з неоднорідними змішаними крайовими умовами, включно з умовами теплообміну із зовнішнім середовищем та з урахуванням зовнішнього навантаження, а також за наявності тонких слабопроникних та слаботривких включень:

$$\begin{aligned} r\tilde{\mu}(h)\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(rk(u_r, u_z, T)\frac{\partial h}{\partial r} \right) + r\frac{\partial}{\partial z} \left(k(u_r, u_z, T)\frac{\partial h}{\partial z} \right), \\ c_T r \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial r} - c_w v_r(h)T \right) + r\frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\lambda}\frac{\partial T}{\partial z} - c_w v_z(h)T \right), \\ \rho r \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + r\mu\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \lambda\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - r\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\ \rho r \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \left(\lambda\frac{\partial}{\partial z} \left(r\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial z} \left(r\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial u_r}{\partial z} + r\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - r\frac{\partial p}{\partial z} = -r\rho g, \end{aligned}$$

де $(r, z, t) \in \Omega_{\tilde{T}} = \Omega \times (0, \tilde{T}]$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $0 < r_0 \leq r \leq r_1 < \infty$, $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$, h — п'єзометричний напір, $T(r, z, t)$ — температура, $k(u_r, u_z, T)$ — коефіцієнт вологоперенесення, $\tilde{\mu}(h)$ — вологоемність, $\tilde{\lambda}$ — коефіцієнт теплопровідності, c_T , c_w — об'ємні теплоємності ґрунту і рідини в порах, $v(h) = (v_r(h), v_z(h))^T$ — швидкість вологоперенесення-фільтрації, $p = \rho_B g(h - z)$ — гідростатичний тиск, ρ_B — щільність рідини,

$(u_r(r, z, T), u_z(r, z, T))^T$ — вектор зміщень скелета ґрунту, ρ — щільність ґрунту, λ, μ — коефіцієнти Ламе.

Умови спряження на ділянці контакту $\gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$, $\gamma = \{(r, z) : r = r_2, r_0 < r_2 < r_1, z_0 \leq z \leq z_2\}$:

$$\left\{ k(u_r, u_z, T) \frac{\partial h}{\partial r} \right\}^{\pm} = R_1(z, t)[h], \quad \left\{ (\tilde{\lambda} - c_w v_r T) \frac{\partial T}{\partial r} \right\}^{\pm} = R_2(z, t)[T],$$

$$[u_n] = 0, \quad [\sigma_n] = 0, \quad [\tau_s] = 0, \quad \{\tau_s\}^{\pm} = R_3(z, t)[u_s],$$

де $(r, z, t) \in \gamma_{\tilde{T}} = \gamma \times (0, \tilde{T}]$, n — зовнішня нормаль до $\partial\Omega_1$ на γ , $[\chi]$ — стрибок функції, σ_n, τ_s — нормальна та дотична складові вектора напружень.

Крайові умови задаються наступним чином:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \tilde{T}],$$

$$h = \tilde{h}(r, z, t), \quad \tilde{\lambda} \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha(T(r, z, t) - T_{cp}), \quad (r, z, t) \in \Gamma_2 \times (0, \tilde{T}],$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad (r, z, t) \in \Gamma_4 \times (0, \tilde{T}],$$

$$u_r = 0, \quad \tau_s = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \tilde{T}],$$

$$\sigma_n = S(r, z, t), \quad \tau_s = \hat{S}(r, z, t), \quad (r, z, t) \in \Gamma_2 \times (0, \tilde{T}],$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega \setminus \gamma$, $\Gamma_1 = \{(r, z) : r = r_0, 0 \leq z \leq z_1\}$, $\Gamma_2 = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, z = z_1\}$, $\Gamma_3 = \{(r, z) : r = r_1, 0 \leq z \leq z_1\}$, $\Gamma_4 = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, z = 0\}$; $\alpha = \text{const} > 0$ — коефіцієнт теплообміну, T_{cp} — температура зовнішнього середовища, n — зовнішня нормаль до контуру, σ_n, τ_s — нормальна та дотична складові вектора напружень, $S(r, z, t), \hat{S}(r, z, t)$ — задані функції достатньої гладкості.

Для поставленої задачі отримано оцінки швидкості збіжності неперервного за часом та дискретного наближених узагальнених розв'язків Галльоркіна, побудованих на базі методу скінченних елементів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Марченко О.О., Самойленко Т.А. *Побудова наближеного розв'язку осесиметричної задачі динаміки неізотермічного вологопереносу* // Кібернетика та комп'ютерні технології. — 2020. — № 1. — С. 41–52.
- [2] Marchenko O.O., Samoilenko T.A. *Analyzing an approximate solution to a quasilinear parabolic-hyperbolic problem* // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — Vol.48., № 5. — С. 762–773.

ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМ. В.М.ГЛУШКОВА НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: march64@ukr.net

КПІ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: tsamoil@i.ua

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОПТИМАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ПРАКТИЧНОЇ НАПІВСТІЙКОСТІ

В.В. ПІЧКУР, М.С. ТАІРОВА

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор стану, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — обмежена область. Вважаємо, що відображення f є неперервним за змінною t і локально ліпшицевим за x . Крім того, вважаємо, що $f(t, 0) = 0$. Ми позначатимемо як $x(t, x_0, t_0)$ розв'язок системи (1) з умовою Коші $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$.

Нехай $G_0 \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n$ — деякі множини, які містять початок координат, $t \in [t_0, T]$ [1, 2].

Означення 1. Нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) називають $\{G_0, \tau, \Phi(t), t_0, T\}$ -стійким, якщо для довільного $x_0 \in G_0$ розв'язок $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$ для всіх $t \in [\tau, T]$.

Розглядається множина G_*^τ , що складається з усіх точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для яких $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$ для всіх $t \in [\tau, T]$.

Для множини G_*^τ була доведена компактність і умови належності точки до границі та внутрішності. Для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь була отримана функція Мінковського, обернена функція Мінковського та опорна функція множини G_*^τ .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. *Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь*. — Київ: Київський університет, 2023. — 367 с.
- [2] Pichkur V.V., Linder Y.M. and Tairova M.S. *On the Practical Stability of Discrete Inclusions with Spatial Components*// Journal of Mathematical Sciences.— 2021.— 254(2).— P. 280-286.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: vpichkur@gmail.com

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна
Email address: mason@onu.edu.ua

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ СИНГУЛЯРНОЇ ГРАНИЧНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ (ОДНОВИМІРНИЙ ВИПАДОК). ЧАСТИНА 1

О.В. ПАФИК

Розглянуто двоточкову крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t; \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x + f(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right), \quad (1)$$

$$Mx(0; \varepsilon) + Nx(T; \varepsilon) = p(\varepsilon), \quad (2)$$

в який $x(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A(t; \varepsilon), B(t; \varepsilon)$ — квадратні матриці n -го порядку, коефіцієнти яких є дійсні або комплекснозначні функції; M, N — квадратні матриці n -го порядку зі сталими коефіцієнтами; $f(t; \varepsilon)$ — задана n -вимірна вектор-функція, коефіцієнти якої є дійсні або комплекснозначні функції; $\alpha(t)$ — скалярна функція; $p(\varepsilon)$ заданий n -вимірний вектор; $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $\varepsilon_0 \ll 1$, $h \in \mathbb{N}$, $t \in [0; T]$.

Крайову задачу (1), (2) було розглянуто при виконанні наступних умов:

1°. Матриці $A(t; \varepsilon), B(t; \varepsilon)$ та вектор $f(t; \varepsilon)$ допускають на відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε :

$$A(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad B(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k B_k(t), \quad f(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t).$$

2°. Коефіцієнти матриць $A_k(t) = \|a_{ij}^{(k)}(t)\|_1^n$, $B_k(t) = \|b_{ij}^{(k)}(t)\|_1^n$, $k = 0, 1, \dots$, та векторів $f_k(t) = (f_1^{(k)}(t); f_2^{(k)}(t); \dots; f_n^{(k)}(t))^T$, $k = 0, 1, \dots$, нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$:

$$a_{ij}^{(k)}(t) \in C^\infty[0; T]; b_{ij}^{(k)}(t) \in C^\infty[0; T], f_i^{(k)}(t) \in C^\infty[0; T], \\ i, j = \overline{1, n}, k = 0, 1, \dots$$

3°. Гранична в'язка матриць

$$L(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t)$$

є сингулярною $\forall t \in [0; T]$ і зберігає сталу кронекерову структуру на відрізку $[0; T]$, причому в'язка матриць $L(t, \lambda)$ має по одному мінімальному індексу для стовпців та рядків: $p \geq 0$ для стовпців та $q = n - p - 1$ для рядків.

4°. Вектор $p(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного ряду:

$$p(\varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k p_k.$$

5°. $(B_1(t)\tilde{\varphi}(t); \tilde{\psi}(t)) \neq 0$, $\forall t \in [0; T]$, де $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)$ — елементи нуль-простору матриць $B_0(t)$ і $B_0^*(t)$ відповідно.

При виконанні умов 1°–5° та деяких інших додаткових умов, використовуючи результати робіт [1–4], побудовано асимптотичний розв'язок двоточної крайової задачі (1), (2) у випадку, коли гранична в'язка матриць $L(t, \lambda)$ є сингулярною та має по одному мінімальному індексу для стовпців та рядків:

1. Побудовано формальний розв'язок задачі (1), (2).
2. Доведено, що побудований формальний розв'язок задачі (1), (2), є асимптотичним розвиненням точного розв'язку цієї задачі при $\varepsilon \rightarrow 0$, наведено відповідні асимптотичні оцінки.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Vira M.B., Yakovets' V.P. (2010). On the construction of asymptotic solutions of two-point boundary-value problems for degenerate singularly perturbed systems of differential equations *Nonlinear Oscillations*, vol. 13, no.2, pp. 295–309.
- [2] Samusenko P.F., Vira M.B. (2022). Asymptotic solutions of boundary value problem for singularly perturbed system of differential-algebraic equations. *Carpathian Mathematical Publications*, vol. 14, no.1, pp. 49–60.
- [3] Pafyk S.P., Yakovets' V.P. (2016). Asymptotic analysis of the general solution of a linear singularly perturbed system of higher-order differential equations with degenerations. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, no.3, pp. 350–375.
- [4] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. (2000). Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями Київ: Вища школа, 294 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: o.v.pafyk@udu.edu.ua

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМИ У БАГАТОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ. ЧАСТИНА 2

С.П. ПАФИК

Досліджена система диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^{kh} A_k(t, \varepsilon) \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \quad (1)$$

в який $x(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, — $(n \times n)$ -матриці, коефіцієнти яких є дійсні або комплекснозначні функції, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in N$, $t \in [0; T]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Систему (1) було розглянуто при виконанні наступних умов:

1°. Матриці $A_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{0, m}$, допускають на відрізку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε :

$$A_i(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), i = \overline{0, m}.$$

2°. Коефіцієнти матриць $A_i^{(k)}(t)$, $i = \overline{0, m}$, $k = 0, 1, \dots$, — нескінченно диференційовані на відрізку $[0; T]$.

3°. $\det A_m^{(0)}(t) = 0, \forall t \in [0; T]$.

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t, \lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda^i A_i^{(0)}(t)$$

системи (1) регулярна при всіх $t \in [0; T]$ і має кратне власне значення $\lambda_0(t)$, якому відповідає r_i скінченних елементарних дільників кратності p_i ($i = \overline{1, \alpha}$) кожний, а також s_j нескінченних елементарних дільників кратності q_j ($j = \overline{1, \beta}$) кожний, причому: $p_1 > p_2 > \dots > p_\alpha$; $q_1 > q_2 > \dots > q_\beta$; $r_1 + r_2 + \dots + r_\alpha = r$; $s_1 + s_2 + \dots + s_\beta = s$; $r_1 p_1 + r_2 p_2 + \dots + r_\alpha p_\alpha + s_1 q_1 + s_2 q_2 + \dots + s_\beta q_\beta = mn$.

При виконанні умов 1°–4°, використовуючи метод діаграм Ньютона, здійснено асимптотичний аналіз структури загального розв'язку системи (1) у багатовимірному випадку, коли гранична в'язка матриць $P(t, \lambda)$ має

кілька скінченних та нескінченних елементарних дільників як однакової, так і різної кратностей:

1. Виведено рівняння розгалуження для розв'язків першої та другої груп, що відповідають скінченним та нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць $P(t, \lambda)$ відповідно.
2. Здійснено аналіз отриманих рівнянь розгалуження.
3. Розроблено алгоритм побудови розв'язків першої та другої груп системи (1) із рівнянь розгалуження.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Pafyk S.P., Yakovets' V.P. (2016). Asymptotic analysis of the general solution of a linear singularly perturbed system of higher-order differential equations with degenerations. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, no.3, pp. 350–375.
- [2] Samusenko P.F. (2015). Asymptotic integration of singularly perturbed linear system of differential-algebraic equations. *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 17, no.2, pp. 1033–1047.
- [3] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. (2000). Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями *Київ: Вища школа*, 294 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

НТУУ «КПІ» ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: s.p.pafyk@udu.edu.ua

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОПТИМАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ ЗАЛЕЖНОЮ ВІД ПОЧАТКОВОЇ УМОВИ

Б.А. ПЕТРЕНКО, В.В. ПІЧКУР

Проблеми практичної стійкості систем диференціальних рівнянь є особливою областю теорії динамічних систем. Вони пов'язані з задачами моделювання та керування систем за наявних фазових обмежень. На відміну від стійкості за Ляпуновим, яка аналізує поведінку траєкторій у нескінченно малих околах рівноважних станів на необмеженій півосі, практична стійкість, як правило, розглядає системи за фіксованих обмежень на стан та на обмежених проміжках часу. Наприклад, у технічних системах важливо забезпечити зміну параметрів, які характеризують стан системи на інтервалі функціонування системи у такий спосіб, що виконуються обмеження на стан, які визначають умови експлуатації системи [1].

У доповіді автори висвітлюють властивості оптимальної множини практичної стійкості у випадку, коли права частина системи диференціальних рівнянь залежить від початкового стану системи. Фазові обмеження описуються напівнеперервним зверху багатозначним відображенням. Обґрунтовано компактність, а також необхідні та достатні умови належності точки до границі та внутрішності оптимальної множини. У випадку лінійної системи диференціальних рівнянь, права частина якої залежить від початкових умов, доведено умови опуклості, а також знайдено функцію Мінковського, обернену функцію Мінковського та опорну функцію оптимальної множини практичної стійкості.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. *Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь*. — Київ: Київський університет, 2023. — 367 с.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: petrenko.bogdan09@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: volodymyr.pichkur@knu.ua

ПРО КОРЕКТНІСТЬ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДІРІХЛЕ ТА УМОВАМИ ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ У ДВОШАРОВІЙ ОБЛАСТІ

І.Я. САВКА, М.А. МИТРОФАНОВ

Актуальними є задачі теплопровідності в неоднорідних середовищах із різними фізичними властивостями [1, 2], у яких фізичний стан на зовнішніх межах змінюються з певною періодичністю [3]. Крім того, на межах розділу між областями накладаються умови спряження, що відображають фізичну узгодженість процесів теплопередачі в системі.

У даній роботі досліджується коректність двошарової задачі з крайовими умовами Діріхле та умовами лінійного спряження, праві частини яких задаються 2π -періодичними функціями за часом. Початкові умови не задаються.

Нехай $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathcal{D} = (x_0, x_2)$ — інтервал дійсної прямої $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_1 = (x_0, x_1)$, $\mathcal{D}_2 = (x_1, x_2)$, $u_j = u_j(x, t)$, $j = 1, 2$; $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболева всіх тригонометричних рядів $\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k e^{ikt}$ із скінченною нормою $\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{2q} |\varphi_k|^2}$; $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x) e^{ikt}$, $u_k(x) \in \mathbf{C}^n(\mathcal{D})$, таких, що для кожного фіксованого $x \in \mathcal{D}$ функції $\partial^j u / \partial x^j \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k^{(j)}(x) e^{ikt}$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору $\mathbf{H}_{q-j/2}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $\mathcal{D}$; норму в просторі $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$ задаємо формулою $\|u; \mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)\| = \sum_{j=0}^n \max_{x \in \mathcal{D}} \|\partial^j u(x, \cdot) / \partial x^j; \mathbf{H}_{q-j/2}\|$.

В області $\mathcal{D} \times \Omega$ для $u = (u_1, u_2)$ розглядається задача

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}_j \times \Omega, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_1|_{x=x_0} = g_1(t), \quad u_2|_{x=x_2} = g_2(t), \quad t \in \Omega, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1-} h_1 u_1 - \lim_{x \rightarrow x_1+} h_2 u_2 = g_3(t), \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1-} \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lim_{x \rightarrow x_1+} \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = g_4(t), \quad t \in \Omega,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, h_1, h_2, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}_+$, g_1, g_2, g_3, g_4 — задані періодичні функції із простору Соболева $\mathbf{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$ — довільне фіксоване.

Умови спряження (3) узагальнюють класичні умови неперервності, вводячи лінійний зв'язок між температурами з обох боків межі через коефіцієнти h_1 та h_2 . Таке узагальнення дає змогу врахувати тепловий опір або наявність контактної шару між двома середовищами.

Умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі тісно пов'язані з властивостями визначника $\Delta(k)$ для цілих значень k , де

$$\Delta(0) = h_1 \kappa_2 (x_1 - x_0) + h_2 \kappa_1 (x_2 - x_1),$$

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} e^{\beta_{1k} x_0} & e^{-\beta_{1k} x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\beta_{2k} x_2} & e^{-\beta_{2k} x_2} \\ h_1 e^{\beta_{1k} x_1} & h_1 e^{-\beta_{1k} x_1} & -h_2 e^{\beta_{2k} x_1} & -h_2 e^{-\beta_{2k} x_1} \\ \kappa_1 \beta_{1k} e^{\beta_{1k} x_1} & -\kappa_1 \beta_{1k} e^{-\beta_{1k} x_1} & -\kappa_2 \beta_{2k} e^{\beta_{2k} x_1} & \kappa_2 \beta_{2k} e^{-\beta_{2k} x_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\alpha_j} \beta_{jk} (b_1 + b_2) e^{\Lambda_k} \left(1 + \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} e^{2\beta_{1k}(x_0 - x_1)} - \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} e^{2\beta_{2k}(x_1 - x_2)} - e^{-2\Lambda_k} \right),$$

де

$$\Lambda_k = \beta_{1k}(x_1 - x_0) + \beta_{2k}(x_2 - x_1),$$

$$\beta_{jk} = \sqrt{\frac{|k|}{2\alpha_j}} (1 + \operatorname{sgn}(k)i), \quad k \neq 0, j = 1, 2,$$

$$b_1 = \frac{\kappa_1 h_2}{\sqrt{\alpha_1}}, \quad b_2 = \frac{\kappa_2 h_1}{\sqrt{\alpha_2}}.$$

Показано, що визначник $\Delta(k)$ не дорівнює нулю для всіх цілих чисел k , і для достатньо великих значень $|k|$ задовольняє оцінку знизу вигляду $|\Delta(k)| \geq c_0 |k|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \Lambda_k} > 0$ із деякою сталою $c_0 > 0$. Цей результат використано для доведення наступної теореми про існування єдиного розв'язку.

Теорема 1. *Якщо $g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{H}_q$, $g_4 \in \mathbf{H}_{q-1/2}$, $q \in \mathbb{R}$, то в просторі $\mathbf{C}^2(\mathcal{D}_1; \mathbf{H}_q) \times \mathbf{C}^2(\mathcal{D}_2; \mathbf{H}_q)$ існує єдиний розв'язок $u = (u_1, u_2)$ задачі (1)–(3), компоненти якого u_1 і u_2 неперервно залежать від функцій g_s , $s = 1, \dots, 4$.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Hahn D. W., Ozisik M. N. *Heat Conduction*. — New York: Wiley, 2012.
- [2] Chiba R. *An analytical solution for transient heat conduction in a composite slab with time-dependent heat transfer coefficient* // Math. Probl. Eng. — 2018. — Article ID 4707860.
- [3] Lu X., Lu T., Viljanen M. *A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings* // Applied Thermal Engineering. — 2006. — V. 26 (11). — pp. 1901–1909.

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
Email address: ivan.savka@cnu.edu.ua

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
Email address: mishmit123@gmail.com

ФУНКЦІЯ ГРІНА ЗАДАЧІ ПРО ОБМЕЖЕНІ ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ

Н.В. СТЕПАНЕНКО

Розглядаються системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = a(x), \quad \frac{dy}{dt} = b(x)y, \quad (1)$$

де позначено $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Вектор-функція $a(x) = \{a_1(x), \dots, a_m(x)\}$, $m \geq 1$, визначена на всьому просторі R^m , є обмеженою на R^m і локально задовольняє умову Ліпшица, $a(x) \in C_{Lip}(R^m)$. Матриця $b(x)$ є $n \times n$ -вимірною, $n \geq 1$, елементами якої є неперервні, дійсні, скалярні функції, визначені й обмежені на R^m , $b(x) \in C^0(R^m)$. Розв'язок задачі Коші $\frac{dx}{dt} = a(x)$, $x|_{t=0} = x_0$ позначаємо через $x(t; x_0)$. Матрицант лінійної системи $\frac{dy}{dt} = b(x(t; x_0))y$ з вектором параметрів x_0 , позначимо через $\Omega_\tau^t(x_0)$. Він є нормованим в точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(x_0)|_{t=\tau} = I_n$, де I_n – одинична n -вимірна матриця.

Будемо використовувати означення і позначення аналогічні як в роботах [1]–[2]. Нагадаємо основні означення і твердження.

Означення 1. Система (1) має функцію Гріна $G_0(\tau, x)$ задачі про обмежені інваріантні многовиди, якщо існує така матриця $C(x) \in C^0(R^m)$, при якій функція

$$G_0(\tau, x) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(x)C(x(\tau; x)), & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(x)[C(x(\tau; x)) - I_n], & \tau > 0. \end{cases} \quad (2)$$

задовольняє оцінці $\|G_0(\tau, x)\| \leq K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, де $K, \gamma = \text{const} > 0$.

Означення 2. Система (1) називається *регулярною*, якщо для неї існує єдина функція Гріна. Якщо ж існує безліч різних таких функцій, то систему (1) називають *слабо регулярною*.

Поряд з системою рівнянь (1) розглядаємо спряжену систему

$$\frac{dx}{dt} = a(x), \quad \frac{dz}{dt} = -b^T(x)z. \quad (3)$$

Теорема ([1]). Нехай існує квадратична форма $\langle S(x)z, z \rangle$, $z \in R^n$, $S(x) \in C'(R^m; a)$, $S^T(x) \equiv S(x)$, похідна якої вздовж розв'язків спряженої системи (3) є додатно визначеною, тобто виконується нерівність:

$$\left\langle \left[\dot{S}(x) - S(x)b^T(x) - b(x)S(x) \right] z, z \right\rangle \geq \|z\|^2.$$

Тоді система (1) має функцію Гріна (2). Причому якщо $\det S(x) \neq 0 \forall x \in R^m$, то система (1) буде регулярною, якщо ж $\det S(\bar{x}) = 0$ при деяких значеннях $\bar{x} \in R^m$, то система (1) буде слабо регулярною.

Зауваження. Кожну слабо регулярну систему (1) можна доповнити до регулярної:

$$\frac{dx}{dt} = a(x), \quad \frac{dy}{dt} = b(x)y, \quad \frac{dz}{dt} = y - b^T(x)z, \quad y, z \in R^n. \quad (4)$$

Причому похідна вздовж розв'язків системи (4) невідродженої квадратичної форми $p \langle y, z \rangle + \langle S(x)z, z \rangle$ при достатньо великому значенні параметра $p > 0$ буде додатно визначеною.

Однією з важливих і цікавих задач є знаходження функції Гріна (2) для слабо регулярної системи (1).

У випадку коли в системі (1) $b(x) = b(x_1, \dots, x_m)$ – скалярна функція неперервна й обмежена на R^m , припускаємо, що існує скалярна функція $s(x) \in C'(R^m; a)$, для якої виконується нерівність $\dot{s}(x) - 2s(x)b(x) \geq 1$. Крім цього нехай при деяких $x = \bar{x} \in R^m$ скалярна функція $s(x)$ приймає нульове значення. Тоді система (1) буде слабо регулярною. Розглядаючи розширену систему (4), яка уже буде регулярною, можна записати єдину функцію Гріна (2) у вигляді 2×2 -вимірної матриці. Знаходячи блок цієї матриці, який знаходиться у верхньому лівому куті, отримуємо скалярну функцію $C(x)$ для слабо регулярної системи (1):

$$C(x) = \frac{\int_{-\infty}^0 \exp \left\{ 2 \int_0^\tau b(x(\sigma; x)) d\sigma \right\} d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ 2 \int_0^\tau b(x(\sigma; x)) d\sigma \right\} d\tau} \quad (5)$$

при тих значень $x \in R^m$, для яких виконуються одночасно дві умови $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp \left\{ \int_0^t b(x(\sigma; x)) d\sigma \right\} = 0$ і $\lim_{t \rightarrow -\infty} \exp \left\{ \int_0^t b(x(\sigma; x)) d\sigma \right\} = 0$. Якщо ж при деякому значенні $x = \tilde{x}$ одна із записаних границь не виконується, то функцію (5) доповнюємо в цій точці $\tilde{x}$ по неперервності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mitropolsky Yu.A., Samoilenko A.M., Kulik V. L. *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems*. — Taylor & Francis Inc, London, 2003. — 369 с.
- [2] Kulyk V.L., Kulyk H.M., Stepanenko N.V. *On some constructions of regular linear extensions of dynamical systems on a torus* // Nelin. Kolyvannya — 26, № 1. — С. 77–94. — English translation: J. Math. Sci. (N.Y.), 2024, Vol.278, No. 6, 1013–1033 p.

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КПІ» ІМЕНІ І.СІКОРСЬКОГО,
Київ, Україна

Email address: nataliya.stepanenko@111.kpi.ua

СЕКЦІЯ 3

Теорія ймовірностей та математична статистика

GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESSES AND THEIR PROJECTION COEFFICIENTS

I. BODNARCHUK, YU. MISHURA

The problem of linear prediction in stochastic processes exhibiting memory presents considerable analytical challenges. We focus on resolving the projection problem for the Gaussian-Volterra process with a linear kernel, defined by the stochastic integral

$$X_t = \int_0^t (t-s) dW_s, \quad (1)$$

where W is a Wiener process.

More precisely, in [1] we find the predictor for the first increment, $\Delta_1 = X_1 - X_0$, based on n subsequent, non-overlapping increments, $\Delta_i = X_i - X_{i-1}$ for $2 \leq i \leq n+1$. For this Gaussian process it is equivalent to the conditional expectation:

$$\mathbb{E}(\Delta_1 | \Delta_2, \dots, \Delta_{n+1}) = \sum_{k=2}^{n+1} c_n^{(k)} \Delta_k.$$

The primary goal was to calculate the projection coefficients $\{c_n^{(k)}\}$ and try to understand how the properties of the process affect the properties of the coefficients. Unexpectedly, we established that the coefficients $\{c_n^{(k)}\}$ change their sign. For example,

$$c_2^{(2)} = \frac{15}{31} \quad \text{and} \quad c_2^{(3)} = -\frac{3}{31}.$$

At the same time, increments of the process (1) across non-overlapping intervals are positively correlated. Thus, we can make the conclusion that a positive correlation of increments does not guarantee the positivity of the projection coefficients.

The similar problem for fBm B_t^H was studied in [2]. The following hypothesis was investigated there:

for $H > 1/2$ all projection coefficients are strictly positive.

This hypothesis was checked in [2] numerically and analytically for small n . However, it was not proved analytically. The projection problem is also still unsolved for the general Gaussian-Volterra process.

The two-sided (bilateral) projections of the fractional Gaussian noise $\Delta_k = B_k^H - B_{k-1}^H$, $k \geq 1$, are studied in [3]. In particular, the coefficients of this

projection are investigated numerically and analytically. We made a rather unexpected observation: while all the coefficients of one-sided projection remain positive (see [4]), with a two-sided projection one of the coefficients steadily becomes negative, but quite small in absolute value.

REFERENCES

- [1] Bodnarchuk I., Mishura Yu. *Combinatorial approach to the calculation of projection coefficients for the simplest Gaussian-Volterra process* // Modern Stoch. Theory Appl. — 2024. — V. 11, No 4. — P. 403–419.
- [2] Mishura Yu., Ralchenko K. and Schilling R. L. *Analytical and computational problems related to fractional Gaussian noise* // Fractal and Fractional. — 2022. — V. 6, No 11. — P. 1–22.
- [3] Bodnarchuk I., Mishura Yu. and Ralchenko K. *Fractional Gaussian Noise: Projections, Prediction, Norms* // Fractal and Fractional. — 2025. — V. 9, Iss. 7, 428.
- [4] Mishura Yu., Ralchenko K. and Shklyar S. *General Conditions of Weak Convergence of Discrete-Time Multiplicative Scheme to Asset Price with Memory* // Risks. — 2020. — V. 8, No 1, 11.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: ibodnarchuk@knu.ua

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: yuliyamishura@knu.ua

DYNAMICS OF A NON-AUTONOMOUS STOCHASTIC MUTUALISM MODEL WITH JUMPS

O.D. BORYSENKO, O.V. BORYSENKO

In nature, we can find many examples where the interaction of two or more species is to the advantage of all. Mutualism occurs when one species provides some benefit in exchange for some benefit. Population systems may suffer abrupt environmental perturbations, such as epidemics, fires, earthquakes, etc. So, it is natural to introduce Poisson noises into the population model to describe such discontinuous systems. In this presentation, we consider the stochastic mutualism model with jumps generated by centered and non-centered Poisson measures. This model is driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & x_i(t) \left[r_i(t) - \frac{b_i(t)x_i(t)}{K_i(t) + x_{3-i}(t)} - c_i(t)x_i(t) \right] dt + \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) + \\ & \int_{\mathbb{R}} \gamma_i(t, z)x_i(t^-)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)x_i(t^-)\nu_2(dt, dz), x_i(0) = x_{i0} > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$i = 1, 2$, where $x_1(t)$ and $x_2(t)$ denote population densities of each species at time t , $x_i(t^-)$, $i = 1, 2$ are the left limits of $x_i(t)$, $i = 1, 2$, $w_i(t)$, $i = 1, 2$ are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_i(t, A)$, $i = 1, 2$ are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t)$, $i = 1, 2$, $E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$ are finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$.

We will use the notations $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $X_0 = (x_{10}, x_{20})$, $|X(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$, $\mathbb{R}_+^2 = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$,

$$\beta_i(t) = \sigma_i^2(t)/2 + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))] \Pi_1(dz) - \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z)) \Pi_2(dz),$$

$i = 1, 2$. For the bounded, continuous functions $f_i(t)$, $t \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2$, let us denote $f_{i \sup} = \sup_{t \geq 0} f_i(t)$, $f_{i \inf} = \inf_{t \geq 0} f_i(t)$, $i = 1, 2$, $f_{\max} = \max\{f_{1 \sup}, f_{2 \sup}\}$, $f_{\min} = \min\{f_{1 \inf}, f_{2 \inf}\}$. We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed that $r_i(t) > 0$, $b_i(t) > 0$, $K_i(t) > 0$, $c_i(t) > 0$, $\sigma_i(t)$, $i = 1, 2$ are bounded, continuous on t functions, $c_{\min} > 0$, $K_{\min} > 0$, $\gamma_i(t, z)$, $\delta_i(t, z)$, $i = 1, 2$ are continuous on t functions, and $\ln(1 + \gamma_i(t, z))$, $\ln(1 + \delta_i(t, z))$ are well-defined and bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty$, $i = 1, 2$.

In what follows, we will assume that Assumption 1 holds.

Theorem 1. *There exists a unique global solution $X(t)$ to the system (1) for any initial value $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, and $P\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$.*

Definition 1. The solution $X(t)$ to the system (1) will be said stochastically ultimately bounded, if for any $\varepsilon \in (0, 1)$, there is a positive constant $\chi = \chi(\varepsilon) > 0$, such that for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, the solution to the system (1) has the property that $\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|X(t)| > \chi\} < \varepsilon$.

Theorem 2. *The solution $X(t)$ to the system (1) is stochastically ultimately bounded for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.*

Definition 2. The solution $X(t)$ to equation (1) is said to be stochastically permanent if for any $\varepsilon > 0$, there are positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that $\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x_i(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x_i(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon$ for $i = 1, 2$, for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.

Theorem 3. *If $\min\{(r_1 - \beta_1)_{\inf}, (r_2 - \beta_2)_{\inf}\} > 0$, then the solution $X(t)$ to the system (1) is stochastically permanent for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.*

Theorem 4. *If for $i = 1, 2$ we have $\bar{p}_i^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_i(s) ds < 0$, where $p_i(s) = r_i(s) - \beta_i(s)$, then the solution $X(t)$ to the system (1) with the initial condition $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ will be extinct: $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$, $i = 1, 2$ a.s.*

Theorem 5. *If $\bar{p}_i^* = 0$, $i = 1, 2$, then the solution $X(t)$ to the system (1) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ will be non-persistent in the mean:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds = 0 \text{ a.s., } i = 1, 2.$$

Theorem 6. *If $\bar{p}_i^* > 0$, $i = 1, 2$, then the solution $X(t)$ to the system (1) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ will be weakly persistent in the mean: $\bar{x}_i^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds > 0$, $i = 1, 2$, a.s.*

Theorem 7. *If $\bar{p}_{i*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_i(s) ds > 0$, $i = 1, 2$, where $p_i(t) = r_i(t) - \beta_i(t)$, $i = 1, 2$, then $\bar{x}_{i*} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_i(s) ds \geq \frac{\bar{p}_{i*}}{m_i}$, a.s., where $m_i = \frac{b_{i \inf}}{K_{i \inf}} + c_{i \sup}$, $i = 1, 2$. Therefore, the solution $X(t)$ to the system (1) with initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$ will be strongly persistent in the mean: $\bar{x}_{i*} > 0$ a.s., $i = 1, 2$.*

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV
Email address: borysenko13101953@gmail.com

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: borisenko1373@gmail.com

INTERPOLATION OF PERIODICALLY CORRELATED STOCHASTIC PROCESSES WITH MISSING OBSERVATIONS

I.I. GOLICHENKO, M.P. MOKLYACHUK

We study the problem of mean square optimal linear estimation of the functional

$$A_s \zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \int_{M_l}^{M_l + N_{l+1}} a(t) \zeta(t) dt$$

which depends on the unknown values of a periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$, [1]. The estimation is based on observations of the process $\zeta(t) + \theta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} [M_l, M_l + N_{l+1}]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$, where $\theta(t)$ is uncorrelated with $\zeta(t)$ periodically correlated stochastic process.

We assume that the length of each interval of observations is a multiple of the period T and the length of each interval of missed observations is a multiple of T , what means that

$$K_1 = T \cdot K_1^T, K_2 = T \cdot K_2^T, \dots, K_{s-1} = T \cdot K_{s-1}^T, \\ N_1 = T \cdot N_1^T, N_2 = T \cdot N_2^T, \dots, N_s = T \cdot N_s^T,$$

respectively.

Denoting by

$$a(u + jT) = a_j(u), \quad \zeta(u + jT) = \zeta_j(u), \\ j \in \tilde{S}, \quad \tilde{S} = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l^T, \dots, M_l^T + N_{l+1}^T - 1\}, \quad u \in [0, T),$$

and taking into account the decomposition of generated vector stationary sequence $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, [2], the functional $A_s \zeta$ can be written as

$$A_s \zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T + N_{l+1}^T - 1} \int_0^T a(u + jT) \zeta(u + jT) du = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T + N_{l+1}^T - 1} \vec{a}_j^\top \vec{\zeta}_j,$$

where vectors $\vec{a}_j$ are of the form

$$\vec{a}_j = (a_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top = (a_{1j}, a_{3j}, a_{2j}, \dots, a_{2k+1,j}, a_{2k,j}, \dots)^\top, \quad j \in \tilde{S},$$

where $a_{kj} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T a_j(v) e^{-2\pi i \{(-1)^k \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\} v/T} dv$, vector sequence $\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \tilde{S}$, is generated vector stationary sequence.

In the case of spectral certainty when the spectral density matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ of the generated vector stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ are exactly known the Hilbert space projection method to estimation of functional $A_s \zeta$ is applied.

Theorem 1. [3] *Let $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\theta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually uncorrelated periodically correlated processes such that generated vector stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ have spectral density matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$. Assume that the matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ satisfy the minimality condition. Let coefficients $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \dots\}$ that determine the functional $A_s \zeta$ satisfy conditions $\|\vec{a}_j\| < \infty$, $\|\vec{a}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2$, $j \in \tilde{S}$. Then the spectral characteristic $\vec{h}(f^\zeta, f^\theta)$ and the mean square error $\Delta(f^\zeta, f^\theta)$ of the optimal estimate of the functional $A_s \zeta$ from observations of the process $\zeta(t) + \theta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ are given by formulas*

$$\begin{aligned} \vec{h}^\top(f^\zeta, f^\theta) &= (A_s^\top(e^{i\lambda})f^\zeta(\lambda) - C_s^\top(e^{i\lambda})) [f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda)]^{-1} = \\ &= A_s^\top(e^{i\lambda}) - (A_s^\top(e^{i\lambda})f^\theta(\lambda) + C_s^\top(e^{i\lambda})) [f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda)]^{-1}, \\ \Delta(f^\zeta, f^\theta) &= \langle \vec{a}_s, \mathbf{R}_s \vec{a}_s \rangle + \langle \vec{c}_s, \mathbf{B}_s \vec{c}_s \rangle. \end{aligned}$$

In the case of spectral uncertainty when density matrices are not exactly known, but a class $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities is specified the minimax (robust) approach to estimation of functional $A_s \zeta$ is used. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_s \zeta$ are derived. The estimation problem is investigated in details for classes D_0^- , D_M^- of admissible spectral densities.

REFERENCES

- [1] Gladyshev E.G. *Periodically and almost periodically random processes with continuous time parameter.* // Theory Probab. Appl. — 1963. — V. 8. — P. 173–177.
- [2] Moklyachuk M.P., Golichenko I.I. *Periodically correlated processes estimates.* — LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. — 308 p.
- [3] Golichenko I.I., Moklyachuk M.P. *Interpolation problem for periodically correlated processes with missing observations.* // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics. — 2025. — 47(2) (in print)

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: idubovetska@gmail.com

KYIV NATIONAL TARAS SHEVCHENKO UNIVERSITY, KYIV, UKRAINE
Email address: moklyachuk@gmail.com

ON THE THEORY OF REPEATED RECORDS

K.H. INDLEKOFER, O.I. KLESOV, J. STEINEBACH

Let $\{X_n\}$ be a sequence of independent identically distributed random variables. We say that n is a record time if

$$X_n > \max\{X_1, \dots, X_{n-1}\}.$$

We assume that the common distribution function of random variables is continuous. It is known that the number of record times in $\{X_n\}$ is infinite with probability one.

Another random variable of interest is the so called repeated record. Namely, n is said to be a repeated record time if both n and $n - 1$ are record times. In contrast to the the case of records, the number of repeated record times is finite with probability one.

We say that a sequence of independent random variables $\{X_n\}$ is an F^α -scheme if, for aome sequence of positive real numbers $\{\alpha_n\}$, the distribution function of X_n is F^{α_n} , where F is a given distribution function.

Below are two typical results discussed in the talk.

Theorem 1. *Let $\{X_n\}$ be an F^α scheme. If*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \cdot \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}} = \infty, \quad (1)$$

then the probability of infinite number of repeated numbers in $\{X_n\}$ equals one.

Denote by $\mu_n^{(2)}$ the number of repeated records in $\{X_1, \dots, X_n\}$. The first of moments of $\mu_n^{(2)}$ are given by

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mu_n^{(2)} \right] &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} \cdot \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1}}, \\ \text{var} \left[\mu_n^{(2)} \right] &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_k \alpha_{k+1}}{A_k A_{k+1}} - \frac{\alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2}{A_k^2 A_{k+1}^2} \right). \end{aligned}$$

Note that $\mathbb{E} \left[\mu_n^{(2)} \right] \rightarrow \infty$ does not imply $\text{var} \left[\mu_n^{(2)} \right] \rightarrow \infty$ in general while the converse is true. However, $\text{var} \left[\mu_n^{(2)} \right] \rightarrow \infty$ follows, for example, from

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} < 1.$$

Theorem 2. *If condition (1) holds, then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^{(2)} - \mathbb{E} \left[\mu_n^{(2)} \right]}{\text{var} \left[\mu_n^{(2)} \right]} = 0$$

almost surely.

The talk is based on the papers [1] and [2].

REFERENCES

- [1] P. Doukhan, O. I. Klesov, and J. Steinebach *Strong laws of large numbers in an F^α -scheme* // in book “Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels” — Springer — 2015. — P. 287–303.
- [2] K.-H. Indlekofer, O. I. Klesov, J. G. Steinebach *Asymptotic behavior of consecutive records in a F^α scheme.* // in book “Stochastic and analytic structures with applications” — Springer — 2026. — P. 198–220.

UNIVERSITÄT PADERBORN, WARBURGER STRASSE 100, D-33098 PADERBORN, GERMANY

Email address: `k-heinz@uni-paderborn.de`

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE, “IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE”, KYIV, UKRAINE

Email address: `k-heinz@uni-paderborn.de`

MATHEMATISCHES INSTITUT, UNIVERSITÄT ZU KÖLN, WEYERTAL 86–90, D-50931 KÖLN, GERMANY

Email address: `jost@math.uni-koeln.de`

A LIMIT THEOREM FOR STOCHASTIC EQUATIONS WITH THE LOCAL TIME

I.H. KRYKUN

The stochastic differential equation that involves the local time of the process was first investigated in [1] and [2]. Moreover, in works [2], [3], and [4], formulae were obtained that connect solutions of stochastic equations with local time to solutions of Itô's stochastic equations.

It is well known that the convergence of coefficients in an Itô stochastic equation is recognized as insufficient for guaranteeing the weak convergence of the equation's solutions; an additional condition is required.

We consider solutions of stochastic equations that involve local time, focusing on cases where the coefficients exhibit nonregular dependence on a small parameter ε :

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t, 0) + \int_0^t (b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))) ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) dw(s). \quad (1)$$

The primary focus is on studying the weak convergence of the solutions of these equations (specifically, in terms of the weak convergence of the measures generated by the processes in a certain functional space) as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Denote by $\xi(t)$ a weak solution following a stochastic equation involving a local time (with $|\gamma| < 1$)

$$\xi(t) = x + \gamma L^\xi(t, 0) + \int_0^t g(\xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(\xi(s)) dw(s). \quad (2)$$

Let $(\mathbb{C}[0, T], C_t), t \in [0, T]$ be a space of continuous functions in the interval $[0, T]$. Consider the measures on the functional space $(\mathbb{C}[0, T], C_t)$ generated by the processes $\xi_\varepsilon(t)$ and $\xi(t)$, respectively.

We suppose that the coefficients of the stochastic equations (1) and (2) satisfy the following conditions: $\beta_\varepsilon \rightarrow \beta$ when $\varepsilon \rightarrow 0$, $|\beta_\varepsilon| < 1$ and $|\beta| < 1$, there exists a constant $\Lambda > 0$ such that $|g_\varepsilon(x)| \leq \Lambda$, $|g(x)| \leq \Lambda$, $\frac{1}{\Lambda} \leq \sigma_\varepsilon^2(x) \leq$

This work was partially supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00017674, Krykun I. H.).

$\Lambda, \frac{1}{\Lambda} \leq \sigma^2(x) \leq \Lambda$ and for every $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{\sigma_\varepsilon^2(y)} dy \right| \leq \Lambda.$$

Based on the research detailed in the paper [5], the following result has been achieved.

Theorem 1. *The necessary and sufficient conditions are obtained for the weak convergence of solutions of stochastic equations (1) to the solution of stochastic equation (2).*

The detailed formulation of the necessary and sufficient conditions for convergence, along with the proof of this theorem and supporting results, is presented in a manuscript currently undergoing peer review.

Acknowledgments. *The Author expresses his heartfelt gratitude to the brave soldiers of the Ukrainian Armed Forces who have protected the lives of the author, his family, and his friends from Russian bloody murderers since 2014.*

REFERENCES

- [1] Harrison J.M., Shepp, L.A. *On skew Brownian motion* // Ann. Probab. — 1981. — V. 9, No 2. — P. 309–313.
- [2] Le Gall J.-F. *One dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process* // Lecture Notes in Math — 1983. — V. 1095. — P. 51–82.
- [3] Engelbert H.J., Schmidt W. *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations III* // Math. Nachr. — 1991. — V. 151. — P. 149–197.
- [4] Makhno S.Ya. *A limit theorem for stochastic equations with the local time* // Theory of Prob. and Math. Statistics. — 2002. — V. 64. — P. 123–238.
- [5] Krykun I.H. *On Weak Convergence of Stochastic Differential Equations with Irregular Coefficients* // Journal of Math. Science — 2023. — V. 273, No 3. — P. 398–413.

INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS OF NAS OF UKRAINE, SLOVIANSK, UKRAINE & KROK UNIVERSITY, KYIV, UKRAINE

Email address: iwanko@i.ua

WEAK CONVERGENCE ANALYSIS OF DYNAMIC CUTTING FOR LÉVY-TYPE PROCESSES

D.Y. PLATONOV

We consider a one-dimensional Lévy-driven SDE of the type:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dB_s + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} c(s, X_{s-}, z) \tilde{N}(ds, dz),$$

where $\tilde{N}(ds, dz)$ is the compensated Poisson random measure.

A main practical obstacle is the infinite activity of many Lévy processes, which makes the exact simulation of small jumps impossible. To address this issue, we use a dynamic cutting (DC) technique to truncate small jumps in a time-dependent way, while the large jumps are simulated exactly as a time-inhomogeneous compound Poisson process.

We analyze two Euler–Maruyama schemes for handling the small jumps: (i) they are omitted entirely or (ii) they are replaced by a Gaussian term with matching variance.

Theorem 1. *Under standard Lipschitz-growth and smoothness conditions on the coefficients and the Lévy measure, the weak error of both schemes is of order $O(n^{-1})$. This rate is achieved by choosing the scaling hyperparameter as $h = n^{-\alpha/(\varepsilon(2-\alpha))}$ for scheme (i) and $h = n^{-\alpha/(\varepsilon(3-\alpha))}$ for scheme (ii).*

REFERENCES

- [1] Asmussen S., Rosiński J. *Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation* // Journal of Applied Probability. — 2001. — V. 38, No 2. — P. 482–493.
- [2] Bossy M., Maurer P. *On the ε -Euler–Maruyama scheme for time inhomogeneous jump-driven SDEs* // Stochastic Processes and their Applications. — 2025. — V. 190. — P. 104747.
- [3] Ivanenko D., Knopova V., Platonov D. *On Approximation of Some Lévy Processes* // Austrian Journal of Statistics. — 2025. — V. 54, No 1. — P. 177–199.
- [4] Protter P., Talay D. *The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations* // The Annals of Probability. — 1997. — V. 25, No 1. — P. 393–423.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: `dplatonov@knu.ua`

ALMOST SURE BOUNDS FOR INCREMENTS OF TEMPERED FRACTIONAL BROWNIAN MOTION WITH STATISTICAL APPLICATIONS

O.D. PRYKHODKO, K.V. RALCHENKO

Nowadays, the theory of fractional Brownian motion (fBm) has been developing rapidly. Moreover, some of its developments have evolved into independent branches with their own sets of results. One of them is an improved version of fBm — a family of tempered fractional Brownian motions. This family includes the tempered fractional Brownian motion (tfBm) and the tempered fractional Brownian motion of the second kind (tfBmII). One advantage of tfBm and tfBmII, compared to fBm, is that they are well-defined for all positive values of the Hurst index.

Definition 1. The tempered fractional Brownian motion $B_{H,\lambda}^I = \{B_{H,\lambda}^I(t), t \geq 0\}$ and the tempered fractional Brownian motion of the second kind $B_{H,\lambda}^{II} = \{B_{H,\lambda}^{II}(t), t \geq 0\}$ are stochastic processes based on the Wiener process $\{W_s, s \in \mathbb{R}\}$ and are defined for all $H, \lambda > 0$ as follows:

$$B_{H,\lambda}^I(t) := \int_{-\infty}^t \left(e^{-\lambda(t-s)+} (t-s)_+^{H-\frac{1}{2}} - e^{-\lambda(-s)+} (-s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_s,$$

$$B_{H,\lambda}^{II}(t) := B_{H,\lambda}^I(t) + \lambda \int_{-\infty}^t \int_0^t (u-s)_+^{H-\frac{1}{2}} e^{-\lambda(u-s)+} du dW_s.$$

These processes were introduced by Meerschaert and Sabzikar [1], and by Sabzikar and Surgailis [2], respectively.

For the tfBm and tfBmII, many properties have already been proved by mathematicians. For example, the scaling property, upper bounds and covariance functions have been established. However, there remain many unexplored problems related to tfBm and tfBmII.

We have established upper bounds for the increments of both processes. Let $Z(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, denote the increment of either $B_{H,\lambda}^I$ or $B_{H,\lambda}^{II}$, that is,

$$Z(\mathbf{t}) = B_{H,\lambda}^I(t_1) - B_{H,\lambda}^I(t_2) \text{ or } Z(\mathbf{t}) = B_{H,\lambda}^{II}(t_1) - B_{H,\lambda}^{II}(t_2).$$

Theorem 1. Let $\beta = H \wedge 1$ if $H \neq 1$, and let $\beta \in (0, 1)$ be arbitrary if $H = 1$. For any $\delta > 0$ and $p > 2$, there exists a nonnegative random variable $\eta = \eta(\delta, p)$ such that, for all $0 \leq t_2 < t_1 \leq t_2 + 1$,

$$|Z(\mathbf{t})| \leq (t_1^\delta \vee 1)(t_1 - t_2)^\beta (|\log(t_1 - t_2)|^p \vee 1) \eta, \quad a.s.,$$

and there exist constants $C_1 = C_1(\delta, p) > 0$ and $C_2 = C_2(\delta, p) > 0$ such that, for all $u > 0$,

$$P(\eta > u) \leq C_1 \exp(-C_2 u^2).$$

In addition to their interesting theoretical features, many studies have shown that tfBm and tfBmII are useful for practical applications. Thus, further investigations of various models involving these processes are required.

We consider a Langevin-type equation driven by either tfBm or tfBmII. This equation takes the following form:

$$Y_t = y_0 + \theta \int_0^t Y_s ds + \sigma X_t, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

where y_0 is an arbitrary real initial value, and θ and σ are positive constants. In our case, X denotes either tfBm or tfBmII. We are interested in studying a strongly consistent estimator of the parameter θ .

For a continuous trajectory $\{Y_t, t \geq 0\}$, we consider the following estimator:

$$\hat{\theta}_T = \frac{Y_T^2 - y_0^2}{2 \int_0^T Y_t^2 dt}. \quad (2)$$

To construct discrete-time observations from the interval $[0, n^{m-1}]$, with $n, m > 1$, we choose the points $t_k = k \cdot n^{-1}$, $k = 0, 1, \dots, n^m$. Then, the discrete-time version of $\hat{\theta}_T$ is

$$\tilde{\theta}_n(m) = \frac{n(Y_{t_{n^m}}^2 - y_0^2)}{2 \sum_{k=0}^{n^m-1} Y_{t_k}^2}. \quad (3)$$

We have proved that the estimators $\hat{\theta}_T$ and $\tilde{\theta}_n(m)$ are strongly consistent for the continuous and discrete cases, respectively. Moreover, a simulation experiment has been conducted for the discrete case, and the obtained estimates $\tilde{\theta}_n(m)$ confirm the theoretical results.

REFERENCES

- [1] Meerschaert M.M., Sabzikar F. *Tempered fractional Brownian motion* // Statistics & Probability Letters — 2013. — V. 83, No 10. — P. 2269–2275.
- [2] Sabzikar F., Surgailis D. *Tempered fractional Brownian and stable motions of second kind* // Statistics & Probability Letters — 2018. — V. 132. — P. 17–27.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: prykhodkood@gmail.com

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE, AND UNIVERSITY OF VAASA, VAASA, FINLAND
Email address: kostiantynralchenko@knu.ua

OPTIMIZING MULTIVARIATE SAMPLE ALLOCATION USING AUXILIARY VARIABLES IN STRATIFIED SAMPLING

D. PUMPUTIS

The study focuses on improving sample allocation methods in stratified surveys involving multiple study variables. When a population is divided into homogeneous strata, an optimal distribution of samples across these strata is crucial for achieving high precision of the estimators used, while minimizing survey cost. Traditional approaches such as Neyman allocation [5] often perform suboptimally when multiple correlated variables are studied simultaneously. To address this, the paper explores several optimization-based methods that account for both survey cost and precision while leveraging auxiliary variables — readily available variables correlated with the study variables — to enhance estimation accuracy.

The study compares seven algorithms for multivariate optimal sample allocation: the integer programming algorithm (IPA) [2], Bethel's algorithm (BA) [1], generalized simulated annealing (GSAA) [8], constrained optimization by linear approximations (COBYLA) [6], particle swarm optimization (PSO) [4], biased random key genetic algorithm (BRKGA) [3], and differential evolution optimization (DEO) [7]. These methods are applied to simulated and real survey populations with varying correlation strengths between auxiliary and study variables.

Simulation results show that all algorithms perform well when the correlations between auxiliary and study variables are high, but required sample sizes increase substantially as correlations weaken. The IPA achieves the exact global minimum cost and serves as a benchmark for comparison. Among the heuristic methods, DEO performs most consistently, achieving results closest to the global minimum in 86% of the tested cases, followed by BRKGA and PSO.

In addition to efficiency, the paper investigates algorithmic convergence behavior, assessing how rapidly and reliably each method reaches its optimal or near-optimal solution. DEO shows stable convergence and low sensitivity to parameter tuning, while GSAA and PSO occasionally exhibit slower convergence or premature stagnation. COBYLA performs well for smooth objective functions but can miss the global minimum in multimodal cases.

Overall, the findings highlight that using correlated auxiliary variables improves estimation precision and reduces survey cost in multivariate stratified

sampling. Moreover, metaheuristic optimization methods — especially differential evolution (DEO) — combine high convergence reliability with computational robustness, making them suitable for large, complex survey designs.

REFERENCES

- [1] Bethel J. *An optimum allocation algorithm for multivariate surveys* // Proceedings of the Survey Research Methods Section. — 1985. — P. 209–212. — http://www.asasrms.org/Proceedings/papers/1985_035.pdf.
- [2] Brito J.A., do Nascimento Silva P.L., Semaan G.S., Maculan N. *Integer programming formulations applied to optimal allocation in stratified sampling* // Survey Methodology. — 2015. — V. 41, No 2. — P. 427–442. — <https://www150.statcan.gc.ca/n1/en/pub/12-001-x/2015002/article/14249-eng.pdf?st=P7ZqwcD1>.
- [3] Gonçalves J.F., Resende M.G.C. *Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization* // Journal of Heuristics. — 2011. — V. 17, No 5. — P. 487–525. — <https://doi.org/10.1007/s10732-010-9143-1>.
- [4] Kennedy J., Eberhart R. *Particle swarm optimization* // Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks. — 1995. — P. 1942–1948. — <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>
- [5] Neyman J. *On the two different aspects of the representative method: The method of stratified sampling and the method of purposive selection (with discussion)* // Journal of the Royal Statistical Society. — 1934. — V. 97. — P. 558–625. — <https://doi.org/10.2307/2342192>.
- [6] Powell M.J.D. *A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation* // in S. Gomez, J. P. Hennart (Eds.), *Advances in Optimization and Numerical Analysis*. — 1994. — P. 51–67. — <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8330-5>.
- [7] Storn R., Price K. *Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces* // Journal of Global Optimization. — 1997. — V. 11. — <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>.
- [8] Tsallis C., Stariolo D.A. *Generalized simulated annealing* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 1996. — V. 233, No 1. — P. 395–406. — [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(96\)00271-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(96)00271-3).

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY (VILNIUS TECH), VILNIUS, LITHUANIA

Email address: `dalius.pumputis@vilniustech.lt`

DISTRIBUTIONAL PROPERTIES OF POISSON PROCESSES OF ORDER k WITH TIME CHANGE

ARTEM STOROZHUK, LYUDMYLA SAKHNO

Let $N^k(t)$ denote the Poisson process of order k (PPoK), introduced in [1], with the probability mass function (PMF) given by

$$p_n^{N^k}(t) = \mathbb{P}(N^k(t) = n) = \sum_{X=\Omega(k,n)} e^{-k\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\zeta_k}}{\Pi_k!},$$

where $\Omega(k, n) = \{X = (x_1, \dots, x_k) \mid x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = n\}$, $\zeta_k = x_1 + \dots + x_k$, and $\Pi_k = x_1! \dots x_k!$.

This talk focuses on the distributional properties of PPoK models with time change, i.e., processes of the form $N^k(H(t))$, where $H(t)$ is an independent subordinator. We extend previous results by considering a wider class of subordinators. The time-change processes $H(t)$ investigated include: compound Poisson-Gamma process; inverse compound Poisson-Exponential process; Bessel subordinator; Gamma process subordinated to a Poisson process with a drift; Bessel transform of a Gamma process; Inverse Gaussian process.

For each of these models, we derive explicit expressions for their probability mass functions, the governing systems of difference-differential equations, and their first two moments. The resulting distributions are expressed in closed form in terms of special functions, such as the generalized Wright function, the Mittag-Leffler function, and modified Bessel functions.

This talk is based on the paper [2].

REFERENCES

- [1] Kostadinova K., Minkova L. *On the Poisson process of order k* // Pliska Stud. Math. Bulgar. — 2013. — V. 22. — P. 117–128.
- [2] Sakhno L., Storozhuk A. *Poisson processes of order k with time change and distributions given by special functions*. — Submitted, 2025.

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS, TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE

Email address: `artem.storozhuk@knu.ua`

FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS, TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE

Email address: `lyudmyla.sakhno@knu.ua`

DYNAMICALLY WEIGHTED MIXTURE OF EXPONENTIAL AND ERLANG DISTRIBUTIONS WITH INDEPENDENT RATE PARAMETERS

H.YA. TULUCHENKO

Mixture models of Exponential and Erlang distributions with identical rate parameters are widely known [1, 2]. However, these models exhibit limited flexibility when modeling processes characterized by high variability in the initial phase followed by a monotonic decrease of intensity.

The proposed dynamically weighted Mixture has two key differences that constitute the scientific novelty:

- (1) Independent rate parameters ($\lambda \neq \beta$) for the components.
- (2) The use of a sigmoid function ($\omega(x)$) as a dynamic weighting coefficient.

Dynamic weights provide adaptive switching of component influence. This allows the model to fit data where each phase of the process requires individual decay rates, which is unattainable in static mixtures.

The model is a combination of:

- (1) The Exponential distribution with rate parameter λ . Its density function is

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

- (2) The Erlang distribution (second order, $\alpha = 2$) with rate parameter β . Its density function is

$$f_2(x) = \beta^2 x e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

The dynamics of the transition are governed by the weighting coefficient $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \frac{\mu}{1 + \exp(-kx)},$$

where $k > 0$, $0 \leq \mu \leq 1$.

The unnormalized probability density function $f^*(x)$ takes the form:

$$\omega(x)f_1(x) + (1 - \omega(x))f_2(x).$$

To obtain the true PDF, the normalizing constant C is defined as:

$$C = 1 + \int_0^\infty \omega(x)[f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

The analytical calculation of the integral is performed by reducing it to the Lerch transcendent function $\Phi(z, s, a)$:

$$C = 1 + \frac{\mu\lambda}{k}\Phi\left(-1, 1, \frac{\lambda}{k}\right) - \frac{\mu\beta^2}{k^2}\Phi\left(-1, 2, \frac{\beta}{k}\right).$$

Thus, the true PDF of the dynamically weighted mixture is:

$$f(x) = \frac{1}{C}(\omega(x)f_1(x) + (1 - \omega(x))f_2(x)). \quad (1)$$

Found the expression Cumulative Distribution Function (CDF):

$$F(x) = \frac{1}{C} \int_0^x [\omega(t)f_1(t) + (1 - \omega(t))f_2(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{C} (1 - (1 + \beta x) \exp(-\beta x) - \mu\beta^2 Q(x, 1, \beta, k) + \mu\lambda Q(x, 0, \lambda, k)),$$

where

$$Q(x, 0, \lambda, k) = \frac{1}{k} \left(\Phi\left(-1, 1, \frac{\lambda}{k}\right) - \exp(-\lambda x) \cdot \Phi\left(-\exp(-kx), 1, \frac{\lambda}{k}\right) \right),$$

$$Q(x, 1, \beta, k) = \frac{1}{k^2} \left(\Phi\left(-1, 2, \frac{\beta}{k}\right) - \exp(-\beta x) \left(\Phi\left(-\exp(-kx), 2, \frac{\beta}{k}\right) + kx \Phi\left(-\exp(-kx), 1, \frac{\beta}{k}\right) \right) \right),$$

$$k > 0, \lambda > 0, \beta > 0.$$

In the complete study, analytical expressions for the raw moments, the expected value, and the variance were also derived. The behavior of functions in $x = 0$ is analyzed. Examples demonstrating the approximation of experimental distributions using the distribution (1) were considered.

REFERENCES

- [1] Ekhsosuehi N., Nzei L., Opone F. *A New Mixture of Exponential-Gamma Distribution* // Gazi University Journal of Science. — 2020. — V. 33, No 2. — P. 548–564. doi: 10.35378/gujs.475102.
- [2] Sarma S., Ahmed I., Begum A. *A New Two Parameter Gamma-Exponential Mixture* // J. Math. Comput. Sci. (Journal of Mathematics and Computer Science). — 2021. — V. 1, No 11. — P. 414–426. doi: 10.28919/jmcs/5146.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY "KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE", KHARKIV, UKRAINE

Email address: tuluchenko@ukr.net

OPTIMAL CONTROL OF ENVIRONMENTAL SYSTEMS VIA PDE GAMES WITH BROWNIAN SHEET

O.A. TYMOSHENKO

Environmental pollution control is inherently multi-regional: neighboring jurisdictions act on a shared spatial domain and interact through the physics of dispersion and the timing of interventions. Uncertainty enters both temporally and spatially due to variable emissions, transport, and measurement noise. These features make stochastic partial differential equations (SPDEs) with *spatio-temporal* noise (modeled here by a Brownian sheet) natural; strategic interdependence motivates differential games rather than a single-agent problem. This extended abstract presents a nonzero-sum SPDE game on a rectangle $R_Z = [0, T] \times [0, X]$ in the time-space plane and derives maximum-principle conditions for Nash equilibria.

State dynamics and objectives. Let $z = (t, x)$ and $R_z = [0, t] \times [0, x]$. The environmental state $Y(z)$ (e.g., pollutant concentration or cumulative load) evolves according to

$$Y(z) = Y(0) + \int_{R_z} \alpha(\zeta, Y(\zeta), u_1(\zeta), u_2(\zeta)) d\zeta + \int_{R_z} \beta(\zeta, Y(\zeta), u_1(\zeta), u_2(\zeta)) B(d\zeta), \quad (1)$$

where B is a Brownian sheet and u_i are admissible regional controls (effort, abatement, or regulation intensity), and $d\zeta = dt dx$. Player $i \in \{1, 2\}$ minimizes

$$J_i(u_1, u_2) = \mathbb{E} \left[\int_{R_Z} f_i(\zeta, Y(\zeta), u_1(\zeta), u_2(\zeta)) d\zeta + g_i(Y(Z)) \right]. \quad (2)$$

A pair $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ is a (open-loop) Nash equilibrium if for all admissible u_1, u_2

$$J_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \leq J_1(u_1, \hat{u}_2) \quad \text{and} \quad J_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \leq J_2(\hat{u}_1, u_2).$$

Hamiltonian, adjoint variables, and the sheet operator. For each player $i = 1, 2$, define the Hamiltonian

$$H_i(z, y, u_1, u_2, p_i, q_i, L_i) = f_i(z, y, u_1, u_2) + \alpha(z, y, u_1, u_2) p_i(z) + \beta(z, y, u_1, u_2) q_i(z) + \mathcal{K}[L_i, \alpha(\cdot, y, u_1, u_2)](z),$$

where p_i, q_i are scalar adjoint processes on R_Z , and $L_i : R_Z \rightarrow \mathbb{R}$ is an *additional adjoint* induced by the Brownian sheet. The operator $\mathcal{K}[L, \alpha]$ is the convolution-like term specific to 2D stochastic integration:

$$\mathcal{K}[L, \alpha](z) := \int_0^x \int_t^T (L(z) \alpha(\zeta', y, u_1, u_2) + L(\zeta') \alpha(z, y, u_1, u_2)) d\zeta', \quad z = (t, x).$$

Adjoint equations (BSPDEs). The adjoint triple (p_i, q_i, r_i) and the process L_i satisfy

$$L_i(z) = -\partial_y H_i(z, Y(z), u_1(z), u_2(z), p_i(z), q_i(z), L_i(z)), \quad (3)$$

$$p_i(dz) = -\partial_y H_i(z, Y(z), u_1(z), u_2(z), p_i(z), q_i(z), L_i(z)) dz + q_i(z) B(dz) + M_i^{r_i}(dz), \quad (4)$$

$$p_i(Z) = \partial_y g_i(Y(Z)), \quad (5)$$

where the term $M_i^{r_i}$ denotes the second-order (double) stochastic integral

$$M_i^{r_i}(R_z) = \iint_{R_z \times R_z} r_i(\zeta, \zeta') B(d\zeta) B(d\zeta').$$

Stochastic maximum principle on the time–space plane.

Theorem 1. Assume: (i) the coefficients α, β, f_i, g_i are continuously differentiable in (y, u_1, u_2) with linear growth; (ii) admissible sets $U_i \subset \mathbb{R}$ are convex; and (iii) the state (1) admits a unique square-integrable solution for any admissible control pair. Then:

Necessity. If $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ is an open-loop Nash equilibrium with associated state $\hat{Y}$ and adjoints $(\hat{p}_i, \hat{q}_i, \hat{r}_i, \hat{L}_i)$ solving (3)–(5), then for a.e. $z \in R_Z$,

$$\partial_{u_i} H_i(z, \hat{Y}(z), \hat{u}_1(z), \hat{u}_2(z), \hat{p}_i(z), \hat{q}_i(z), \hat{L}_i(z)) \cdot (u_i - \hat{u}_i(z)) \geq 0.$$

Sufficiency. Suppose in addition that $y \mapsto g_i(y)$ is convex and, for almost every z , the mapping $(y, u_i) \mapsto H_i(z, y, u_1, u_2, p_i, q_i, L_i)$ is jointly convex in (y, u_i) for each i (with the opponent's control held fixed). If a control pair $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ together with admissible adjoints satisfies the pointwise minimization

$$\begin{aligned} & H_i(z, \tilde{Y}(z), \tilde{u}_1(z), \tilde{u}_2(z), \tilde{p}_i(z), \tilde{q}_i(z), \tilde{L}_i(z)) \\ &= \min_{u_i \in U_i} H_i(z, \tilde{Y}(z), u_1(z), u_2(z), \tilde{p}_i(z), \tilde{q}_i(z), \tilde{L}_i(z)), \end{aligned}$$

for $i = 1, 2$ and almost every $z \in R_Z$, then $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ is a Nash equilibrium.

This talk is based on joint work with B. Øksendal, N. Agram, F. Proske [1], [2].

REFERENCES

- [1] Agram N., Øksendal B., Proske F., Tymoshenko O. *Optimal control of SPDEs driven by time–space Brownian motion* // SIAM J. Control Optim. — 2025. — V. 63, No 1. — P. 546–570.
- [2] Agram N., Øksendal B., Proske F., Tymoshenko O. *SPDE games driven by a Brownian sheet with applications to pollution minimization* // arXiv:2503.04993 — 2025. — DOI: 10.48550/arXiv.2503.04993.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE, AND UNIVERSITY OF OSLO, NORWAY

Email address: otymoshenkokpi@gmail.com

METHODS OF CONSTRUCTING MULTIVARIATE POWER SERIES DISTRIBUTIONS

O. VOLKOV, YU. VOLKOV

The paper proposes methods for constructing multivariate power series distributions (PSD) with *natural parameterization*, which generalize the one-dimensional case ([1] and [2]) to the m -dimensional space.

Let $k = (k_1, \dots, k_m)$ be a multi-index with non-negative integer coordinates, and let the series

$$\omega(y_1, \dots, y_m) = \sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0} a_{k_1} \dots a_{k_m} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m},$$

where $a_{k_1} \geq 0, \dots, a_{k_m} \geq 0$, converge in the polycylinder

$$Y := \{y_1 \mid 0 \leq y_1 < R\} \times \dots \times \{y_m \mid 0 \leq y_m < R\}.$$

The distribution of a random vector $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ with coordinate probabilities

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} = \frac{a_{k_1} \dots a_{k_m} y_1^{k_1} \dots y_m^{k_m}}{\omega(y_1, \dots, y_m)}, \quad k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0$$

is called the *power series distribution* (PSD) of the function ω .

The Generating Function is:

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{(z_1 y_1)^{k_1} \dots (z_m y_m)^{k_m}}{\omega(y_1, \dots, y_m)} a_{k_1} \dots a_{k_m} = \frac{\omega(z_1 y_1, \dots, z_m y_m)}{\omega(y_1, \dots, y_m)}.$$

For such a distribution

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{\partial \log \omega}{\partial \log y}, \quad \text{Cov}(\xi) = \frac{\partial^2 \log \omega}{(\partial \log y)^2}.$$

On the convex domain Y , the mapping $y \mapsto x$ is one-to-one and has an inverse function $y = f(x)$.

Theorem 1. *The following relation holds:*

$$\frac{\partial P}{\partial x} V(x) - \frac{\partial P}{\partial z} \tilde{z} + xP = 0, \quad P(1, \dots, 1, x_1, \dots, x_m) = 1,$$

$$P = P(z_1, \dots, z_m, f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)),$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial x_m} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \left(\frac{\partial P}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial z_m} \right), \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_m \end{pmatrix},$$

where $P(x_1, \dots, x_m)$ is the probability function constructed in the natural parameterization, and $V(x)$ is the covariance matrix of ξ , expressed in terms of x .

In the correctness of the theorem one can be convinced by direct verification.

To construct specific PSD functions, we shall make use of power series in the one-dimensional case.

Example 1. $\omega(y) = (1 + y)^n$, $n \in \mathbb{N}$. We have

$$f(x) = \frac{x}{n - x}, \quad \frac{\omega(y)}{\omega'(y)} = \frac{1 + y}{n}, \quad \left(\frac{\omega(y)}{\omega'(y)} \right)' = \frac{1}{n},$$

hence, for the elements of the covariance matrix of the PCP function $\omega(y_1 + \dots + y_m)$ we get:

$$\nu_{ij} = \delta_{ij}x_i - x_i x_j n^{-1}, \quad \det V(x) = x_1 \dots x_m (1 - |x|n^{-1}).$$

If we denote $p_1 = x_1/n, \dots, p_m = x_m/n$, then

$$P\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_m = k_m\} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m! (n - |k|)!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m} (1 - p_1 - \dots - p_m)^{n - |k|}$$

Example 2. $\omega(y) = \exp y$. In this case, $f(x) = x$, and for the elements of the covariance matrix of the PSD function $\omega(y_1)\omega(y_1 y_2) \dots \omega(y_1 y_2 \dots y_m)$ we obtain $\nu_{ij} = x_i$, if $i \geq j$ and $\nu_{ij} = x_j$, if $i < j$, $\det V(x) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{m-1} - x_m)x_m$.

REFERENCES

- [1] Noack A. *A class of Random Variables with Discrete Distributions* // Ann. Math. Statist. — 1950. — № 21. — P. 127–132.
- [2] Khatry C. G. *On certain properties of power-series distributions* // Biometrika. — 1959. — № 46. — P. 486–490.
- [3] Johnson L., Kotz S., Balakrishnan N. *Discrete Multivariate Distributions*. — Wiley, 1997. — 328 p.
- [4] Evans M., Hastings N., Peacock B. *Statistical Distributions*. — Wiley, 2000. — 221 p.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY, USA
Email address: oleksandr_volkov@berkeley.edu

VOLODYMYR VYNNYCHENKO CENTRAL UKRAINIAN STATE UNIVERSITY, KROPYVNYTSKYI, UKRAINE
Email address: yulysenko@i.ua

SUB-GAUSSIAN RISK PROCESSES WITH HETEROGENEOUS TIMINGS OF INSURANCE CLAIMS AND CONTRACT INCEPTIONS

R. YAMNENKO, V. LEVCHENKO

In this paper, Sub-Gaussian risk processes were developed and investigated, taking into account different timings of insurance events and contract inception. Following results were obtained for surplus process (1):

Lemma 1. *Let the surplus process be*

$$U_t = u + \sum_{b=1}^n (c_b(\min\{t, z_b\}) - \sum_{i=1}^{N_b(\min\{t, z_b\})} Y_i) + \sum_{e=1}^{M_t} (d_e(\min\{t, t_e\} - s_e) - \sum_{k=1}^{P_e(\min\{t, t_e\} - s_e)} Y_k), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

with the mutual independence assumptions from the model statement. Assume

- *the claim sizes Y_i are i.i.d. sub-Gaussian with parameter τ_Y , i.e. $Ee^{\theta Y_1} \leq \exp(\frac{\theta^2 \tau_Y^2}{2})$ for all $\theta \in \mathbb{R}$;*
- *each initial policy has claim intensity α (so $E[N_b(t)] = \alpha t$), each new policy has claim intensity γ (so $E[P_e(t)] = \gamma t$), and new policies arrive according to M_t with $E[M_t] = \beta t$.*
- *the random premium/exposure integrals (the terms of the form $c_b \min\{t, z_b\}$ and $d_e(\min\{t, t_e\} - s_e)$) admit uniform sub-Gaussian controls with constants b and d respectively (if these integrals are deterministic the statement below simplifies accordingly).*

Then for every $\lambda \in \mathbb{R}$ we have the bound

$$E[e^{\lambda U_t}] \leq \exp(\lambda u) \cdot \exp\left\{\exp\left(\lambda t \sum_{b=1}^n c_b\right) \exp\left(\frac{\lambda^2 b^2}{2}\right) - 1\right\} \cdot \exp\left\{\left(\exp\left(\frac{\lambda^2 d^2}{2}\right) - 1\right) \beta t\right\} \cdot \exp\left\{\left(\exp\left(\frac{\lambda^2 \tau_Y^2}{2}\right) - 1\right) \alpha t\right\}. \quad (2)$$

Theorem 1. *Under the assumptions of Lemma 1, for every $x > 0$ and every $\lambda > 0$ we have the Chernoff bound*

$$P(U_t < -x) \leq \exp(-\lambda x) E[e^{\lambda U_t}]. \quad (3)$$

Combining (3) with (2) yields the explicit bound

$$P(U_t < -x) \leq \exp(-\lambda x + \lambda u) \cdot \exp\left\{\exp\left(\lambda t \sum_{b=1}^n c_b\right) \exp\left(\frac{\lambda^2 b^2}{2}\right) - 1\right\} \cdot \exp\left\{\left(\exp\left(\frac{\lambda^2 d^2}{2}\right) - 1\right) \beta t\right\} \cdot \exp\left\{\left(\exp\left(\frac{\lambda^2 \tau_Y^2}{2}\right) - 1\right) \alpha t\right\},$$

valid for every $\lambda > 0$.

Theorem 2. Consider the surplus process described in Lemma 1

Assume further that the random premium/exposure integrals admit **Poisson-type controls**:

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \theta \sum_{b=1}^n c_b \min\{t, z_b\} \right\} \leq \exp \{m_I(e^\theta - 1)\},$$

$$\mathbb{E} \exp \left\{ \theta d_e(\min\{t, t_e\} - s_e) \right\} \leq \exp \{m_N(e^\theta - 1)\},$$

for some constants $m_I, m_N > 0$ and all $\theta \in \mathbb{R}$.

Define the claim correction terms

$$\kappa_I(\lambda) := \alpha(\psi_Y(-\lambda) - 1), \quad \kappa_N(\lambda) := \gamma(\psi_Y(-\lambda) - 1),$$

and let $B \subset [0, \infty)$ be a compact index set (time horizon), with covering numbers $\mathcal{N}(\varepsilon)$ under an admissible semimetric $d(\cdot, \cdot)$ and effective measure $|B|$.

Then, for every $\lambda > 0$ and $x > 0$, the following exponential tail bounds hold:

$$\Pr \left(\sup_{t \in B} (U_t - f(t)) > x \right) \leq Z(x, \lambda, B),$$

$$\Pr \left(\sup_{t \in B} (U_t - f(t)) < -x \right) \leq Z(x, \lambda, B),$$

$$\Pr \left(\sup_{t \in B} |U_t - f(t)| > x \right) \leq Z(x, \lambda, B),$$

where

$$\begin{aligned} Z(x, \lambda, B) = & \exp(-\lambda x + \lambda u) \exp \{m_I(e^\lambda - 1)\} \cdot \exp \{\beta |B| (\exp(m_N(e^\lambda - 1)) - 1)\} \\ & \cdot \exp \{\alpha |B| (\psi_Y(-\lambda) - 1)\} \cdot \exp \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \log \mathcal{N}(\varepsilon_j) \frac{\lambda \Delta_j(\lambda)}{2} \right\}, \end{aligned}$$

for any decreasing sequence $\varepsilon_j \downarrow 0$ and increment control terms

$$\Delta_j(\lambda) := \sup_{d(s,t) \leq \varepsilon_{j-1}} \mathbb{E}[|\Xi_{s,t,j}|]$$

associated with the process increments in the chaining decomposition.

REFERENCES

1. Buldygin, V. V. and Kozachenko, Yu. V., *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, p. 257.
2. Buldygin, V. V. and Kozachenko, Yu. V., *O subgaussovskikh sluchainykh velichinakh (On Subgaussian Random Variables)*, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal **32**, 1980, pp. 723–730 (in Russian).
3. Kozachenko, Yu. V. and Pashko, A. O. and Rozora, I. V., *Modelling of Stochastic Processes and Fields (Modeliuvannia vypadkovykh protsesiv ta poliv)*, Zadruga, Kyiv, Ukraine, 2007, p. 230 (in Ukrainian).

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: rostyslav.yamnenko@knu.ua

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: vlad.levchenko@protonmail.com

AI-DRIVEN MULTI-STAGE FRAMEWORK FOR FORECASTING VAR AND CVAR IN FINANCIAL TIME SERIES

V.F. ZRAZHEVSKA, G.M. ZRAZHEVSKY

Forecasting financial risks ranks among the most pressing challenges captivating economists, mathematicians, and finance experts worldwide. Among the key tools for quantifying these risks are Value-at-Risk (VaR) and Conditional Value-at-Risk (CVaR), which enable the assessment of potential losses and facilitate proactive measures to avert substantial financial setbacks. Numerous techniques and algorithms have been developed for computing and predicting these metrics. However, conventional econometric approaches to VaR and CVaR frequently overlook critical features of contemporary financial time series, such as abrupt regime shifts and fat-tailed distributions.

The study in [1] focuses on advancing methodologies for estimating dynamic VaR and CVaR measures. It employs a heteroscedastic time series model as its foundational framework. These approaches are tailored to generate predictive estimates of risk metrics for highly volatile series, explicitly accounting for long-range dependencies.

Artificial intelligence (AI) significantly enhances time series forecasting by effectively capturing complex patterns, non-linear relationships, and abrupt changes in data that traditional econometric models often miss. Machine learning algorithms, such as neural networks and ensemble methods, adapt to volatile and high-dimensional datasets, improving prediction accuracy for applications like financial risk assessment and demand forecasting [2].

We propose an AI-driven multi-stage framework that integrates anomaly detection with large pretrained probabilistic forecasting models to improve the estimation of risk measures.

We propose an AI-driven multi-stage framework that integrates anomaly detection with large pretrained probabilistic forecasting models to improve the estimation of risk measures.

The framework consists of three main stages. First, anomaly detection is applied to financial returns using autoencoder-based time-series models [3], identifying high-risk regimes where extreme losses are more likely. Focusing on anomalies is crucial, since unconditional estimation across calm and crisis periods dilutes tail risk information, leading to underestimated VaR

and CVaR. Second, the Chronos-Bolt model [4], a powerful pretrained transformer for time-series forecasting, is fine-tuned on historical return data restricted to anomalous periods. Fine-tuning, as opposed to using Chronos in a zero-shot fashion, enables the model to learn domain-specific heavy-tailed dynamics and conditional dependence on stress regimes. Data preparation includes constructing sliding windows of returns, attaching anomaly indicators as exogenous features, and generating supervised training targets for quantile distributions. Third, from Chronos’s probabilistic outputs, Monte Carlo samples $\{x_t^{(i)}\}_{i=1}^N$ are generated to compute:

$$\text{VaR}_\alpha(t) = \text{Quantile}_\alpha\left(\{x_t^{(i)}\}_{i=1}^N\right),$$

$$\text{CVaR}_\alpha(t) = \frac{1}{[\alpha N]} \sum_{i=1}^N x_t^{(i)} \mathbf{1}\left(x_t^{(i)} \leq \text{VaR}_\alpha(t)\right).$$

Backtesting uses Kupiec’s unconditional coverage test, Christoffersen’s independence test, and the Fissler–Ziegel framework [1] for joint VaR/ CVaR evaluation. This methodology highlights the importance of restricting training to anomalous periods, leveraging the representational power of large AI models such as Chronos–Bolt, and systematically fine-tuning them to domain-specific financial data. We tested the framework on Tesla (TSLA) daily returns, where anomaly-aware fine-tuned Chronos produced significantly improved VaR exception rates and more stable CVaR estimates compared to unconditional Chronos and GARCH baselines, demonstrating the effectiveness of the proposed AI-based approach.

REFERENCES

- [1] Zrazhevskaya V., Zrazhevsky G. *Generalized Approach for Estimating and Forecasting of Dynamical VaR and CVaR Based on Metalog Distribution* // In: Babichev, S., Lytvynenko, V., Wójcik, W., Vyshemyskaya, S. (eds) *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making*. ISDMCI 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1246. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54215-3_15
- [2] Goel A. *-Series Foundation AI Model for Value-at-Risk Forecasting*. arXiv preprint arXiv:2410.11773. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2410.11773>, 2025
- [3] Keras. *Time Series Anomaly Detection with Autoencoders*. https://keras.io/examples/timeseries/timeseries_anomaly_detection, 2020.
- [4] Alexandrov et al. *Chronos: Pretrained Transformers for Time Series Forecasting*. <https://huggingface.co/amazon/chronos>, 2024.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: vera.zrazhevskaya@gmail.com

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: greg.zrazhevsky@knu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ БУТСТРЕП-МЕТОДУ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

А.В. ІЛЬЧЕНКО, О.І. ВАСИЛИК

Страхові резерви є одним із ключових елементів фінансової стійкості страхової компанії. Вони формуються для забезпечення майбутніх виплат страхових відшкодувань, виступаючи гарантією виконання зобов'язань перед страхувальниками. Раціональне управління резервами забезпечує платоспроможність, стабільність і конкурентоспроможність страховика. В Україні формування та облік технічних резервів регулюються Законом України «Про страхування» [1] та нормативно-правовими актами Національного банку України. Положення НБУ визначає перелік актуарних методів, дозволених до використання під час оцінки резервів збитків, що виникли, але не заявлені (IBNR). Серед них — метод ланцюгових сходів, метод Борнхюттера—Фергюсона, метод Кейп—Код та Мюнхенський ланцюговий метод. Проте класичні детерміновані підходи не враховують стохастичну природу страхових збитків і варіацію даних. Тому сучасна актуарна практика все частіше звертається до стохастичних методів, серед яких бутстреп-метод посідає важливе місце.

Технічні резерви — це грошова оцінка зобов'язань страховика за договорами ризикового страхування [1]. Вони поділяються на резерв незароблених премій (РНП) та резерв збитків (РЗ), який включає:

- резерв заявлених, але не виплачених збитків (RBNS) — зобов'язання за відомими, проте ще не врегульованими вимогами;
- резерв збитків, що виникли, але не заявлені (IBNR) — оцінка виплат за страховими випадками, про які на звітну дату ще не відомо.

Одним із найпоширеніших методів оцінки IBNR є метод ланцюгових сходів (Chain-Ladder), який ґрунтується на аналізі історичних закономірностей розвитку збитків. Метод передбачає побудову трикутників збитків і використання коефіцієнтів розвитку для прогнозування майбутніх виплат за припущень сталості портфеля та стабільності збитків у часі [2].

Стохастичне узагальнення цього підходу запропонував Томас Мак, створивши модель Мака (Mack Model, 1993). Вона дозволяє не лише оцінити очікувану величину резерву, а й виміряти невизначеність прогнозу через дисперсію збитків [3].

Бутстреп-метод є стохастичним підходом до оцінювання невизначеності страхових резервів, який ґрунтується на багаторазовому випадковому відборі даних. Його застосування дозволяє отримати емпіричний розподіл можливих значень резерву, побудувати довірчі інтервали та оцінити ризик недостатності резервів [3].

Основна ідея методу полягає у формуванні певної кількості B бутстреп-вибірок зі спостережених залишків моделі, на основі яких повторно оцінюються резерви. Для кожного $b = 1, 2, \dots, B$ отримується нове значення оцінки резерву $\hat{R}^{*(b)}$, а сукупність таких оцінок формує бутстреп-розподіл:

$$\hat{R}^{*(1)}, \hat{R}^{*(2)}, \dots, \hat{R}^{*(B)}.$$

Алгоритм бутстреп-методу складається з таких етапів:

- побудова моделі (наприклад, із застосуванням методу ланцюгових сходів) і розрахунок залишків;
- випадковий відбір залишків із поверненням;
- генерація нових «бутстреп-трикутників» і повторне оцінювання резервів;
- формування емпіричного розподілу та оцінювання показників невизначеності.

Перевагою бутстреп-методу є відсутність потреби в припущеннях щодо форми розподілу даних. Він базується лише на інформації, що міститься у вибірці, і тому ефективний при обмежених даних. Комбінація класичних методів (наприклад, методу ланцюгових сходів) із бутстреп-методом дає можливість отримати повну картину розподілу резервів та ймовірнісні оцінки їх достатності. Його застосування підвищує точність розрахунків, обґрунтованість рішень і прозорість фінансової звітності страховика.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Закон України «Про страхування». <https://zakon.rada.gov.ua/laws/>
- [2] Зубченко В.П., Ямненко Р.Є. *Статистичні методи у ризиковому страхуванні. Навчальний посібник*.— КНУ імені Тараса Шевченка, 2023.
- [3] Tuysuz S., Pekel P. *A Comparison of Stochastic Claims Reserving Methods* // European Journal of Business and Management Research — 2019.— Vol. 4(4). <https://doi.org/10.24018/ejbmr.2019.4.4.43>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: nastialeonteva14@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: vasylyk@matan.kpi.ua

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДОВГОВІЧНИХ ЛИСТКІВ У ВИПАДКОВИХ РЕКУРСИВНИХ ДЕРЕВАХ

О.А. ГАЛГАНОВ

Нехай $(\mathcal{T}_n, n \in \mathbb{N})$ — послідовність випадкових рекурсивних дерев з афінним преференційним приєднанням з параметром $a \geq 0$ (напр., [2]), а $(b_k, k \in \mathbb{N})$ — деяка послідовність натуральних чисел, яка строго зростає, причому $b_k > k$ для всіх k .

Назвемо вершину k довговічним листком, якщо вона була листком принаймні в деревах $\mathcal{T}_{k+1}, \mathcal{T}_{k+2}, \dots, \mathcal{T}_{b_k}$. Нехай

$$X_k = \mathbb{1}\{\text{вершина } k \text{ є довговічним листком}\},$$

Теорема 1. $\mathbb{P}(X_k = 1 \text{ н.ч.}) = 1$ (тобто, довговічних листків нескінченно багато) тоді й тільки тоді, коли $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k}{b_k})^{\frac{1}{a+1}} = \infty$. В протилежному випадку $\mathbb{P}(X_k = 1 \text{ н.ч.}) = 0$.

Теорема 2. Припустимо, що

- (1) $\frac{k}{b_k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$,
- (2) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{k}{b_k})^{\frac{1}{a+1}} = \infty$,
- (3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\frac{k}{b_k})^{\frac{1}{a+1}} < \infty$.

Тоді $\frac{S_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \gamma \sim N(0, 1), n \rightarrow \infty$, де $\lambda_n = \sum_{k=1}^n (\frac{k}{b_k})^{\frac{1}{a+1}}$.

Варто зауважити, що випадкові величини X_k є залежними. Теорему 2 доведено на основі методу Стейна [3] за допомогою побудови size-bias coupling.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Drmota Michael. Random Trees: An Interplay between Combinatorics and Probability. — Springer Vienna, 2009.
- [2] Pittel Boris. Note on the heights of random recursive trees and random m-ary search trees, *Random Structures & Algorithms*, 2, 337-347, 1994.
- [3] Ross Nathan. Fundamentals of Stein's method, *Probability Surveys*, 8, 210-293, 2011.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: galganov.oleksii@111.kpi.ua

На основі сумісної роботи з А.Б. Ільєнком.

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ КВАЗІПЕРІОДОГРАМНОЇ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. ГЛАДУН, О.В. ІВАНОВ

У даній роботі розглянуто чирпований сигнал, тобто сигнал з лінійною частотною модуляцією, що спостерігається на фоні адитивного гауссівського випадкового шуму. У якості оцінки для невідомих параметрів чирпованого сигналу розглянуто квазіперіодограмну оцінку (див. означення нижче). Для відповідним чином нормованої квазіперіодограмної оцінки невідомих параметрів чирпованого сигналу отримано властивість асимптотичної нормальності.

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = A^0 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T],$$

де $A^0 > 0$, $\theta^0 = (\phi^0, \psi^0) \in \Phi \times \Psi = (\underline{\phi}, \bar{\phi}) \times (\underline{\psi}, \bar{\psi})$, $0 < \underline{\phi} < \bar{\phi} < +\infty$, $0 < \underline{\psi} < \bar{\psi} < +\infty$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ — випадковий шум, що задовольняє наступні вимоги.

A. ε — вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

- (i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L — неспадна повільно змінна на нескінченності функція;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

- B.** (i) Процес ε , що задовольняє умову **A(i)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \tilde{L}(1/|\lambda|)|\lambda|^{\alpha-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, де $\tilde{L}$ — повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.
- (ii) Спектральна щільність процесу ε , що задовольняє умову **A(ii)**, має четвертий спектральний момент.

Надамо означення квазіперіодограмної оцінки.

Означення. Квазіперіодограмною оцінкою параметра θ^0 будемо називати такий випадковий вектор $\theta_T \in \Phi^c \times \Psi^c$, для якого

$$\theta_T = \max_{\theta \in \Phi^c \times \Psi^c} Q_T(\theta), \quad Q_T(\theta) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T X(t) e^{i(\phi t + \psi t^2)} dt \right|^2.$$

У той же час, оцінку амплітуди будемо шукати як значення $A_T = Q_T^{\frac{1}{2}}(\theta_T)$.

Сформулюємо теорему про асимптотичну нормальність квазіперіодогамної оцінки параметрів чирпованого сигналу, що є основним результатом даної роботи.

Теорема. *Нехай виконуються умови **A** та **B**. Тоді випадковий вектор*

$$(T(A_T - A^0), T^2(\phi_T - \phi^0), T^3(\psi_T - \psi^0))^* \quad (1)$$

є асимптотично нормальним при $T \rightarrow \infty$, з граничним математичним сподіванням

$$\begin{aligned} & (A^0 a_2(\theta^0), 36a_1(\theta^0), -30a_1(\theta^0))^*, \\ & \begin{pmatrix} a_1(\theta^0) \\ a_2(\theta^0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\psi^0}} \left[\cos\left(\frac{(\phi^0)^2}{2\psi^0}\right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - \frac{S}{C} \left(\frac{\phi^0}{\sqrt{2\psi^0}} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. \mp \sin\left(\frac{(\phi^0)^2}{2\psi^0}\right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{8}} - \frac{C}{S} \left(\frac{\phi^0}{\sqrt{2\psi^0}} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

де функції $C(x) = \int_0^T \cos(t^2)dt$, $S(x) = \int_0^T \sin(t^2)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Гранична коваріаційна матриця вектора (1) має вигляд

$$\begin{pmatrix} 4G_{22}(\theta^0) & 144G_{21}(\theta^0)/A^0 & -120G_{21}(\theta^0)/A^0 \\ 144G_{21}(\theta^0)/A^0 & 5184G_{11}(\theta^0)/(A^0)^2 & -4320G_{11}(\theta^0)/(A^0)^2 \\ -120G_{21}(\theta^0)/A^0 & -4320G_{11}(\theta^0)/(A^0)^2 & 3600G_{11}(\theta^0)/(A^0)^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де матриця (2) має $\text{rank } 2$, якщо $G_{11}(\theta^0)G_{22}(\theta^0) - G_{21}^2(\theta^0) \neq 0$. Тут функції $G_{i,j}(\theta^0)$, $i, j = \overline{1,2}$, позначають елементи граничної коваріаційної матриці

$$\begin{pmatrix} G_{11}(\theta^0) & G_{21}(\theta^0) \\ G_{21}(\theta^0) & G_{22}(\theta^0) \end{pmatrix}$$

випадкового вектора

$$\left(\int_0^T \varepsilon(t) \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt, \int_0^T \varepsilon(t) \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt \right)^*.$$

Доведення цієї теореми спирається на загальну схему роботи [1].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Іванов, О. В., Лимар, О. В. (2019). Асимптотичні властивості періодогамних оцінок параметрів тригонометричної моделі спостережень на площині. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 2(101), 115–133.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: viktor.hladun00@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexntuu@gmail.com

ТЕХНІКА КРОС-ВАЛІДАЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЙНОЇ СУМІШІ

Д.Д. ГОРБУНОВ

Розглянемо модель суміші зі змінними концентраціями [1], де кожен об'єкт O_j з вибірки $O_1, \dots, O_n$ належить до однієї з M популяцій (компонент суміші). Справжній номер компоненти κ_j , якій належить O_j вважається невідомим, але відомими є імовірності

$$\mathbf{P}(\kappa_j = m) = p_{j:n}^{(m)},$$

де $\{p_{j:n}^{(k)}\}$ називаються концентраціями.

Для кожного об'єкта O_j спостерігається вектор характеристик (X_j, Y_j) . Залежність між X_j та Y_j описується непараметричною регресійною моделлю

$$Y_j = g^{(\kappa_j)}(X_j) + \varepsilon_j, \quad (1)$$

де $g^{(m)}$ є невідомою функцією регресії для m -ої компоненти суміші, ε_j є випадковою помилкою моделі, причому розподіл ε_j може бути різним для різних компонент суміші. Припускається, що розподіл $X_j \mid \{\kappa_j = m\}$ є абсолютно неперервним з щільністю розподілу $f^{(m)}$ відповідно.

Для оцінювання $g^{(m)}$ в моделі (1), розглянемо модифіковану оцінку локально-лінійної регресії [2]:

$$\hat{g}_n^{(m)}(x_0) = \frac{\hat{S}_{2,0:n}^{(m)} \hat{S}_{0,1:n}^{(m)} - \hat{S}_{1,1:n}^{(m)} \hat{S}_{1,0:n}^{(m)}}{\hat{S}_{2,0:n}^{(m)} \hat{S}_{0,0:n}^{(m)} - (\hat{S}_{1,0:n}^{(m)})^2}, \quad (2)$$

де зважені суми $\hat{S}_{p,q:n}^{(m)} = \hat{S}_{p,q:n}^{(m)}(x_0)$ обчислюються за формулою

$$\hat{S}_{p,q:n}^{(m)}(x_0) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n a_{j:n}^{(m)} K\left(\frac{x_0 - X_j}{h}\right) \left(\frac{x_0 - X_j}{h}\right)^p Y_j^q. \quad (3)$$

У формулі (3), $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ є ядром, $h > 0$ є параметром згладжування, а $\{a_{j:n}^{(m)}\}$ є мінімаксними ваговими коефіцієнтами [1].

У [2] доведено асимптотичну нормальність оцінки (2) за виконання деяких умов. Використовуючи асимптотичну нормальність оцінки, можна отримати теоретично оптимальне значення параметра згладжування h_{opt} , що мінімізує асимптотичну середньоквадратичну похибку оцінки. Втім,

h_{opt} залежить від невідомих параметрів моделі, що унеможлиблює безпосереднє використання на практиці.

Натомість, для вибору оптимального параметра згладжування розглядається техніка крос-валідації. Для вибраної компоненти суміші, параметр згладжування обирається шляхом мінімізації функціоналу

$$CV(h; m) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{j:n}^{(m)} (Y_j - \hat{g}_{-j;n}^{(m)}(X_j))^2 \rightarrow \min_{h>0},$$

де $\hat{g}_{-j;n}^{(m)}(x)$ є оцінкою локально-лінійної регресії для m -ої компоненти суміші за всією вибіркою, крім j -го спостереження.

Якість роботи оцінки (2) із запропонованим вибором параметра згладжування продемонстровано за допомогою симуляцій. Також цей підхід порівнюється з навантаженим ЕМ-алгоритмом, розглянутим у [3].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Майборода Р.Є., Сугакова О.В. *Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші*. К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. 213 ст.
- [2] Horbunov D., Maiboroda R. *Asymptotic normality of local linear regression estimator for mixtures with varying concentrations*. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2025. DOI: 10.15559/25-VMSTA282.
- [3] Xiang S., Yao W. *Semiparametric Mixtures of Regressions with Single-index for Model Based Clustering*. Advances in Data Analysis and Classification, 2017. Vol. 14. DOI: 10.1007/s11634-020-00392-w.

КНУ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: danielhorbunov@knu.ua

ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ СИНГУЛЯРНОГО РОЗПОДІЛУ, ПОРОДЖЕНОГО Q_s -РОЗКЛАДАМИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Н.В. ДИВЛЯШ

Нехай $Q_s = (q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$, $0 \leq q_i \leq 1$, $\sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$, $s \geq 2$.

Розглянемо випадкову величину

$$\zeta = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \dots}^{Q_s} = \beta_{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\eta_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\eta_j} \right), \quad \text{де } \beta_{\eta_k} = \sum_{i=0}^{\eta_k-1} q_i, \quad (1)$$

з незалежними однаково розподіленими Q_s цифрами η_i , що набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з імовірностями $p_0, p_1, \dots, p_{s-1}$, $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=0}^{s-1} p_i = 1$.

Функцію розподілу такої випадкової величини можна записати у вигляді [2]

$$F_{\zeta}(x) = b_{\eta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\eta_k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\eta_j}, \quad (2)$$

де $b_{\eta_k} = \sum_{i=0}^{\eta_k-1} p_i$, $b_0 = 0$, η_k — k -та цифра у Q_s -розкладі x .

Позначимо через ρ_i статистичну оцінку p_i , $i = \overline{0, s-2}$. Розглянемо клас багатопараметричних розподілів $F(x, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{s-2})$, а саме розподілів випадкової величини ζ виду (1) з незалежними однаково розподіленими Q_s цифрами η_k , прийнявши в ролі параметрів $p_0, p_1, \dots, p_{s-2}$.

Для циліндричних відрізків [2] рангу m

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s} = [\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}(0); \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s}(s-1)]$$

введемо аналог функції правдоподібності.

$$\begin{aligned} L_m(X_n, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{s-2}) &= \prod_{i=1}^n \frac{P\{x_i \in \Delta_{\alpha_{i1} \alpha_{i2} \dots \alpha_{im}}^{Q_s}\}}{|\Delta_{\alpha_{i1} \alpha_{i2} \dots \alpha_{im}}^{Q_s}|} = \\ &= \left(\frac{\rho_0}{q_0} \right)^{\sum_{i=1}^n N_0(x_i, m)} \cdot \left(\frac{\rho_1}{q_1} \right)^{\sum_{i=1}^n N_1(x_i, m)} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \left(\frac{\rho_{s-2}}{q_{s-2}} \right)^{\sum_{i=1}^n N_{s-2}(x_i, m)} \cdot \left(\frac{1 - \rho_0 - \dots - \rho_{s-2}}{1 - q_0 - \dots - q_{s-2}} \right)^{\sum_{i=1}^n N_{s-1}(x_i, m)}, \end{aligned}$$

де $N_j(x_i, m)$ — кількість цифр k в Q_s -розкладі x_i до m -го місця.

Функція $L_m(X_n, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{s-2})$ є диференційовною по $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{s-2}$. Розглянемо $\frac{\partial L}{\partial \rho_j}$, $j = \overline{0, s-1}$. Знайдемо найменше значення по кожному із параметрів ρ_j , склавши для цього систему лінійних рівнянь.

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо оцінки параметрів виду

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{i=1}^n N_j(x_i, m)}{mn}, \quad j = \overline{0, s-1}. \quad (3)$$

Доведено наступні твердження:

Теорема 1. *Оцінки, отримані з формул (3), є незміщеними та конзистентними оцінками параметрів ρ_j , $j = \overline{0, s-1}$.*

Розглянемо статистику

$$T(X_n) = (T_0, T_1, \dots, T_{s-2}), \quad \text{де } T_j = \sum_{i=1}^n N_j(x_i, m), \quad j = \overline{0, s-2}. \quad (4)$$

Показано, що умовний розподіл

$$P \left\{ \bigcap_{i=1}^n (\zeta_i \in \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s}) \mid T(\zeta) = \overline{k_0} \right\},$$

де ζ_i — випадкова величина, що має розподіл типу (2), $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^{Q_s}$ — циліндричний відрізок рангу m , $\overline{k_0} = (k_0, k_1, \dots, k_{s-2})$, $k_j \in \{0, 1, \dots, mn\}$, не залежить від параметрів ρ_j , $j = \overline{0, s-1}$, тобто статистика $T(X_n)$ є достатньою для оцінки параметрів ρ_j , $j = \overline{0, s-1}$.

Також доведено, що статистика $T(X_n)$ є повною. Цей факт було використано під час доведення наступної теореми.

Теорема 2. *Оцінки, отримані з формул (3), є ефективними оцінками параметрів ρ_j , $j = \overline{0, s-1}$.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Lehmann E.L., Scheffé H. *Completeness, Similar Regions, and Unbiased Estimation-Part I. In: Rojo, J. — Selected Works of E. L. Lehmann. Selected Works in Probability and Statistics.* Springer, Boston, MA, 2012 p.
- [2] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998 — 296 с.
- [3] Гончаренко Я. В., Дивляш Н. В. *Статистичні методи оцінки параметра для одного однопараметричного класу сингулярних розподілів салемівського типу.* //Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014, 16(1). — с. 81-94.

Київ, УКРАЇНА

Email address: dyvljash_natali@ukr.net

ПРО ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЮВАННЯ ЗВУЖЕННЯ БРОУНІВСЬКОГО ЛИСТА НА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ КРИВУ

Н.В. КРУГЛОВА, О.О. ДИХОВИЧНИЙ

Означення 1 ([1]). Дійсне сепарабельне гауссівське поле $X(t_1, t_2)$ називається броунівським листом, якщо воно задовольняє такі умови:

- (1) $X(0, t_2) = X(t_1, 0) = 0$ для довільних $t_1, t_2 \in [0, 1]$;
- (2) $E[X(t_1, t_2)] = 0$ для довільних $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$;
- (3) $E[X(t_1, t_2)X(s_1, s_2)] = \min\{t_1, s_1\} \min\{t_2, s_2\}$ для довільних $(t_1, t_2), (s_1, s_2) \in [0, 1]^2$.

Розглянемо звуження $Y(t)$ броунівського листа $X(t, y)$ на криву $y = e^{-\alpha t}$, де $\alpha > 0$. Тоді $Y(t) = X(t, e^{-\alpha t})$. Дослідження розподілів функціоналів від процесу $Y(t)$ має практичне значення в багатьох прикладних науках. Наприклад, у фізиці процес $Y(t)$ описує коливання температури вздовж охолоджувальної поверхні, коли температура спадає експоненціально з часом. В матеріалознавстві цей процес може визначати розподіл мікрODEфектів вздовж поверхні, в якій з часом зменшується товщина (наприклад, внаслідок тертя). У фармакокінетиці процес $Y(t)$ моделює флуктуації концентрації деякої речовини у тканинах з часом.

З [2] отримуємо, що процеси $Y(t)$ і $e^{-\alpha t}w(te^{\alpha t})$, де $w(t)$ — вінерівський процес, — стохастично еквівалентні. Розіб'ємо інтервал $[0; 1]$ на M рівних частин. Нехай $t_j = \frac{j}{M}$, $j = \overline{1, M-1}$, і

$$S_M(t_j) = e^{-\alpha t_j} \sum_{i=1}^j \eta_i \sqrt{t_i e^{\alpha t_i} - t_{i-1} e^{\alpha t_{i-1}}}, \quad (1)$$

де η_j , $j = \overline{1, M-1}$, — незалежні однаково розподілені стандартні гауссівські величини. Позначимо

$$S_M(t) = \sum_{j=1}^{M-1} I_{[t_j; t_{j+1})}(t) S_M(t_j), \quad (2)$$

$$\text{де } I_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

Теорема 1. Процес $S_M(t)$ збігається за розподілом до процесу $Y(t)$.

Використаємо алгоритм, представлений в [3], та формули (1)–(2) і згенеруємо 2000 реалізацій процесу. На рисунку 1 зображено графіки емпіричних та теоретичних характеристик процесу.

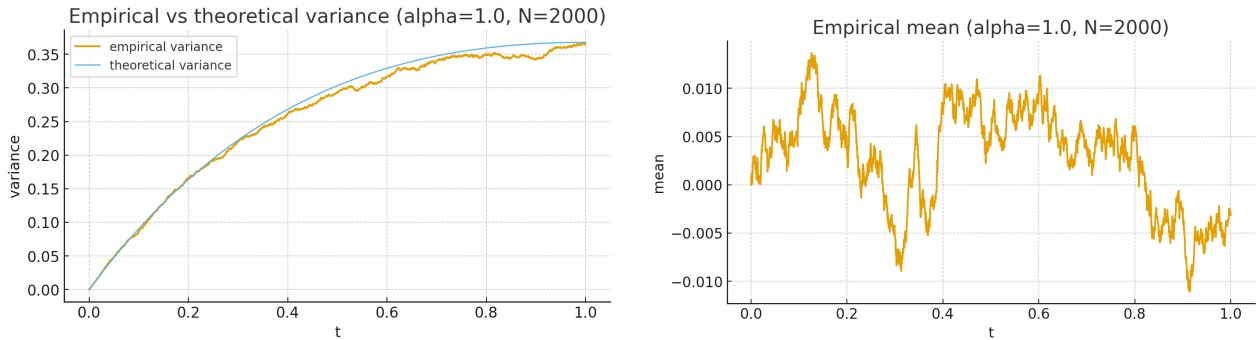


Рис. 1. Теоретичні та емпіричні дисперсія і мат. сподівання

Для випадкового процесу $Y(t)$, $t \in [0, T]$, будемо позначати $\|Y(t)\|_{SP}$ норму в Гільбертовому просторі таку, що $\|Y(t)\|_{SP} = \sqrt{\int_0^T E[Y^2(t)]dt}$.

Теорема 2. Нехай $Y(t) = X(t, e^{-\alpha t})$, де $X(t, y)$ — броунівський лист, а $S_M(t)$ задається формулами (1), (2), тоді

$$\|Y(t) - S_M(t)\|_{SP} \sim \sqrt{\frac{e^a(1+a)}{2}} \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Yeh, J. *Wiener measure in a Space of Functions of Two Variables*//Transactions of the American Mathematical Society—1960.— № 95.— P. 433–450.
- [2] Doob, L. *Heuristic approach to Kolmogorov-Smirnov theorems*// Ann. Math. Statist.—1949.— № 20.— P. 393-403.
- [3] Dykhovychnyi, O., Kruglova, N. *Simulation of a gaussian process with correlation function of a special form*//International conference"Stochastic Equations, Limit Theorems and Statistics of Stochastic Processes dedicated to the 100th anniversary of I.I. Gikhman—2018.— P. 17-22.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: natahak@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.dyx@ukr.net

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

О.А. ЛАГОДА

Нехай B — дійсний або комплексний банахів простір, $\|\cdot\|$ — норма в B , $L(B)$ — простір всіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B , O — нульовий оператор, I — одиничний оператор в $L(B)$.

Розглянемо стохастичне різницеве рівняння

$$X_n = A_1 X_{n-1} + A_2 X_{n-2} + Y_n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

з початковими умовами X_0 та X_{-1} , які є деякими випадковими величинами з B , та послідовністю $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$, елементи якої також є випадковими величинами.

Використаємо умови, за яких для довільної обмеженої за нормою послідовності $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ та довільних початкових умов $\{X_0, X_{-1}\} \subset B$ розв'язок $\{X_n : n \geq 1\} \subset B$ рівняння (1) буде обмеженим за нормою. Необхідною та достатньою умовою такої обмеженості розв'язку є умова [1]

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1, \quad \exists (z^2 I - A_1 z - A_2)^{-1} \in L(B). \quad (2)$$

Ця ж умова виявляється корисною і для оцінки розв'язків у недетермінованому випадку.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

- 1) *послідовність $\{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}_+$ незростаюча і збігається до нуля;*
- 2) *послідовність $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ обмежена за нормою майже напевно;*
- 3) *$\sup_n c_n \left\| \sum_{k=1}^n Y_k \right\| < \infty$ майже напевно;*
- 4) *справджується умова (2).*

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^n X_i - (I - A_1 - A_2)^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i \right\| = 0$$

майже напевно.

Застосуваннями теореми 1 є різноманітні граничні теореми для сум випадкових величин, що утворюють розв'язок різницевого рівняння (1).

Теорема 2. Нехай B — дійсний сепарабельний гільбертів простір. Якщо $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\mathbb{E}\|Y_n\|^2 < \infty$; T — оператор коваріації та виконується умова (2), то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|}{\sqrt{n \ln \ln n}} = \sqrt{2\|(I - A_1 - A_2)^{-1}T(I - A_1^* - A_2^*)^{-1}\|}$$

майже напевно.

Зауваження 1. В роботі [2] були отримані твердження аналогічні до теорем 1 та 2 у випадку $A_2 = O$.

Теорема 3. Нехай $\{Y_n : n \geq 1\}$ — нескінченна послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з B , визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Нехай $\mathbb{E}Y_i = \mu$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, та виконуються умови теореми 1.

Тоді для $\{X_n : n \geq 1\} \subset B$ — розв'язку стохастичного різницевого рівняння (1) справджується, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = (I - A_1 - A_2)^{-1} \mu$$

майже напевно.

Зауваження 2. Теорема 2 дає узагальнення закону повторного логарифма для розв'язку абстрактного стохастичного різницевого рівняння (1). Теорема 3 узагальнює посилений закон великих чисел для того ж рівняння. Також можливі аналогічні узагальнення для інших граничних теорем [3].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Городній М.Ф., Лагода О.А. Обмежені розв'язки двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 12. — С. 1610–1614.
- [2] Koval V., Schwabe R. *Limit theorems for solutions of stochastic difference equations in Banach spaces with applications* // Random Oper. and Stoch. Equ. — 1998. — Vol. 6, № 2. — pp. 149–158.
- [3] Гнеденко Б.В. *Курс теорії ймовірностей*. — Київ: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: Lahoda.Oksana@111.kpi.ua

ПІДСИЛЕНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ КІЛЬКОСТІ РЕКОРДІВ У СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ З ТРЕНДОМ ТА АЛЬФА-СХЕМОЮ

Д.О. ЛОГВИНОВ

Розглянемо стохастичну модель $Y_n = X_n + cn, n \in \mathbb{N}$, де $c \in \mathbb{R}$ додатною константою, X_n — незалежними випадковими величинами з функцією розподілу $F^{\alpha_n}(x)$ для фіксованої функції розподілу F . Ця стохастична модель визначається параметрами $c > 0$, функцією розподілу F та послідовністю додатних чисел $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Позначимо через X випадкову величину з функцією розподілу F . Визначимо послідовність індикаторів рекордів

$$I(1) = 1, \quad I(n) = 1_{Y_n > \max(Y_1, \dots, Y_{n-1})}, \quad n \geq 2.$$

Ця стохастична модель є узагальненням моделі зі статті [1].

Теорема 1. Нехай $\exists M > 0 : |X| < M$ м.н., $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(I(n)) = +\infty$, тоді

$$\frac{\sum_{n=1}^N I(n)}{\sum_{n=1}^N \mathbb{E}(I(n))} \rightarrow 1 \quad \text{м.н.}$$

Також варто помітити, що ми можемо спростити закон великих чисел у випадку, коли $\alpha_n = 1$, до вигляду

Теорема 2. Нехай $\exists M > 0 : |X| < M$ м.н. та $\alpha_n = 1$, тоді існує $N^* \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\sum_{n=1}^N I(n)}{n} \rightarrow \mathbb{E}(I(N^*)) \quad \text{м.н.}$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Jasper Franke, Gregor Wergen and Joachim Krug *Records and sequences of records from random variables with a linear trend* // Journal of Statistical Mechanics, P10013 (2010)

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: denislogvinov410@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕНІ ЛІНІЙНІ МОДЕЛІ В АКТУАРНІЙ МАТЕМАТИЦІ

А.А. МОГИЛЯН, О.І. ВАСИЛИК

Пропущені значення у страхових даних можуть виникати з різних причин, наприклад, коли респондент відмовляється повідомити сімейний дохід або пацієнт не приходить на обстеження для здачі аналізів крові тощо. Для врахування пропусків у даних у статистичному аналізі були розроблені спеціальні методи.

Часто збір і обробка даних є найбільш трудомістким етапом у процесі побудови прогнозної моделі, і розробники зазвичай недооцінюють обсяг часу, необхідний для цього кроку. Більшість даних є «брудними», тому доводиться витрачати багато часу на їх очищення, заповнення пропусків, об'єднання з додатковими змінними тощо. Крім того, ці процеси часто мають ітеративний характер, оскільки на пізніших етапах побудови моделі може виявитися, що певна змінна в наборі даних є некоректною [2].

Хоча кожна організація має свої процеси та системи збору, зберігання та отримання даних, існують певні спільні риси й ситуації, з якими має бути знайомий кожен актуарій. Майже завжди найбільш придатними для побудови тарифного плану є дані про страхові премії (демографічні характеристики полісів) та збитки (страхові випадки) [2].

При роботі з пропущеними значеннями одним із можливих рішень є їх заміна середнім значенням або модою. Інший підхід полягає у тому, що б заповнити вхідні значення для цих предикторів, використовуючи інформацію, що міститься в інших предикторах. Деякі спеціальні методи імпутації, такі як заповнення середніми значеннями, регресійна імпутація та інші, мають різний рівень похибок

Для підвищення точності рекомендується застосовувати складніші методи заповнення пропусків. Ми досліджуємо, як можна використати узагальнені лінійні моделі для отримання статистично незміщених оцінок цільових параметрів та зробити висновки на основі цих оцінок [1].

Узагальнені лінійні моделі (УЛМ) — це спосіб моделювання залежності між цільовою змінною, яку ми хочемо оцінити (передбачити), та однією чи кількома пояснювальними змінними (предикторами). У програмах тарифоутворення страхування майна чи страхування від нещасних випадків цільовою змінною зазвичай є одна з наступних: частота позовів,

сума збитку в грошовому вираженні на один позов або випадок, нетто-премія, тощо. В узагальненій лінійній моделі вважається, що результат цільової змінної зумовлений як систематичною складовою, так і випадковою складовою. Систематична складова відображає ту частину варіації результатів, яка пов'язана зі значеннями предикторів. Наприклад, можна припустити, що вік водія впливає на очікувану частоту страхових випадків за договором особистого автострахування. Якщо вік водія включено як предиктор у модель частоти, цей вплив є частиною систематичної складової. Випадкова складова — це частина результату, зумовлена причинами, відмінними від предикторів у нашій моделі. Вона включає «чисту випадковість», тобто ту частину, що визначається обставинами, які неможливо передбачити навіть теоретично, а також ту, яку потенційно можна було б передбачити за допомогою додаткових змінних, але вони відсутні у нашій моделі.

УЛМ моделює залежність між μ_i (прогнозом моделі) та предикторами:

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}, \quad (1)$$

тобто, деяке перетворення μ_i (позначене як $g(\mu_i)$) дорівнює вільному члену β_0 плюс лінійна комбінація предикторів та коефіцієнтів, які позначені як $\beta_1, \dots, \beta_p$. Значення вільного члена (β_0) і коефіцієнтів ($\beta_1, \dots, \beta_p$) потрібно оцінити. Перетворення μ_i , яке задається функцією $g(\cdot)$ у лівій частині рівняння (1), називається функцією зв'язку.

При використанні узагальнених лінійних моделей для побудови страхових тарифних планів додаткову перевагу отримують тоді, коли функцію зв'язку задають як натуральний логарифм, тобто $g(x) = \ln(x)$. УЛМ із **ЛОГ-ЗВ'ЯЗКОМ** має вигляд:

$$\ln(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}$$

Така модель формує мультиплікативну структуру страхового тарифу: $\mu_i = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}) = \exp(\beta_0) \exp(\beta_1 x_{i1}) \dots \exp(\beta_p x_{ip})$.

Узагальнені лінійні моделі мають низку недоліків, тому ми також розглядаємо деякі модифікації УЛМ.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Burke K. *Missing Data Analysis: An Actuarial Perspective* // National Association of Insurance Commissioners.— 2025. https://content.naic.org/sites/default/files/call_materials/MissingData_BookClub02.25.25.pdf
- [2] Goldburd M. et al. *Generalized Linear Models for Insurance Rating*. 2nd edition. Casualty Actuarial Society, 2020.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: amogiluan@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: vasylyk@matan.kpi.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ НА УСПІШНІСТЬ СТУДЕНТІВ

Р.Ф. ОВЧАР, А.Ю. ПОЛІЩУК

У роботі було проведено дослідження можливого впливу дистанційного навчання на успішність студентів у вивченні вищої математики. Було проаналізовано оцінки з вищої математики (за 3 семестри) 259 студентів факультету інформатики та обчислювальної техніки, що навчалися на одній спеціальності протягом 2020–2025 років. У таблиці наведено середні бали (0–100) по групах залежно від курсу:

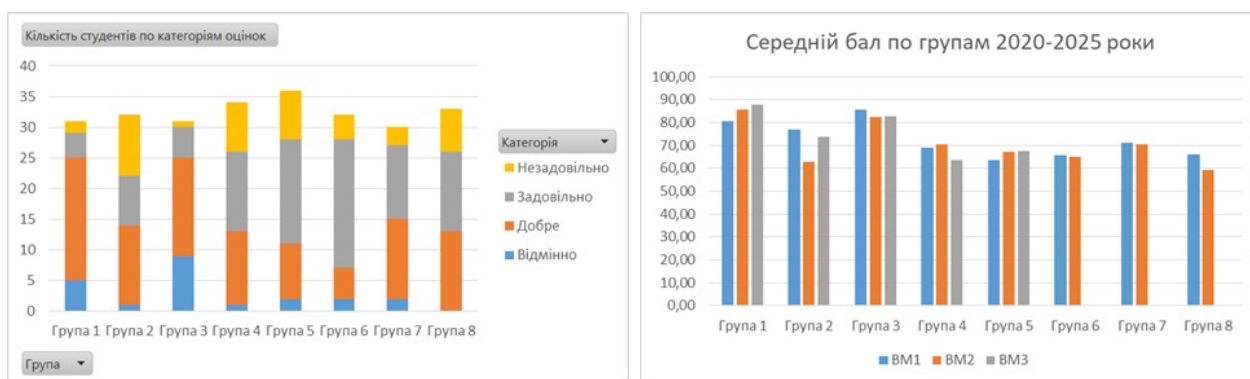
Група	ВМ-1	ВМ-2	ВМ-3
Група 1	80.57	85.56	87.69
Група 2	76.98	62.67	73.85
Група 3	85.69	82.45	82.74
Група 4	69.06	70.46	63.60
Група 5	63.39	67.01	67.53
Група 6	65.63	64.91	навчається
Група 7	71.21	70.37	навчається
Група 8	66.18	59.30	навчається

Тест	Показник	Значення	Відмінності
χ^2 Пірсона	$P = 0.0000025081$	< 0.05	суттєві
t -тест (1-2)	$P = 0.3949$	> 0.05	незначні
t -тест (1-3)	$P = 0.9831$	> 0.05	незначні
ANOVA	$F = 11.78, P = 0.0001$	< 0.05	суттєві

Для перевірки залежності розподілу підсумкових оцінок від навчальної групи було застосовано **критерій χ^2 Пірсона**. Отримане значення вказує на різницю у розподілах оцінок між групами, отже, існує статистично значуща залежність між роком зарахування та рівнем успішності студентів.

Парні t -тести Ст'юдента між середніми оцінками ВМ-1 – ВМ-2 та ВМ-1 – ВМ-3 показали, що середні оцінки в межах однієї групи суттєво не відрізняються в різних семестрах.

Однофакторний дисперсійний аналіз (ANOVA) виявив статистично суттєві відмінності між середніми балами груп різних років зарахування з тенденцією погіршення.



Отримані результати вказують на поступове зниження середніх балів студентів у 2020–2025 рр. Це може бути пов'язано як із переходом на дистанційне навчання, так і з іншими чинниками освітнього процесу, включно зі зниженням рівня академічної мотивації та доброчесності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mishra P, Singh U, Pandey CM, Mishra P, Pandey G. *Application of Student's t-test, analysis of variance, and covariance.* // Ann Card Anaesth. — Oct–Dec 2019. — 22(4) — p 407-411.
- [2] Rost JK *Analyzing student success outcome variables in higher education utilizing the Chi-square test of independence.* // International Journal of Higher Education — 2024. — Vol 13, No 2 — p 100-106.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: rfovchar@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: polishchuk.anastasiia@l111.kpi.ua

РОЗПОДІЛИ ЗНАЧЕНЬ ФРАКТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Більшість функцій простору $C[0, 1]$ мають фрактальні властивості (структурно або метрично). Одні мають фрактальні графіки, інші — множини рівнів, у третіх фрактальними є важливі для них множини (множини особливостей різного характеру). Серед фрактальних функцій (функцій з фрактальними властивостями) функції сингулярні, ніде не монотонні та недиференційовні, функції обмеженої та необмеженої варіації, функції з континуальними множинами рівнів.

Основним об'єктом розгляду є розподіл випадкової величини $\xi = \varphi(X)$, де X — випадкова величина з заданим на відрізку розподілом (рівномірним, експоненційним, сингулярним, зокрема канторівського чи салемівського типів), а $y = \varphi(x)$ — функція, що має фрактальні множини рівнів. При цьому задання випадкової величини X узгоджене з аналітичним заданням функції φ .

Приклад 1. X має експоненційний розподіл на $[0; 1]$, $\varphi(x)$ — Трибін-функція, аргумент якої має четвіркове зображення, а значення функції — двійкове зображення.

Приклад 2. X має експоненційний розподіл на $[0; 1]$, $\varphi(x)$ — інверсор цифр Q_2 -зображення чисел.

Приклад 3. X має рівномірний розподіл на $[0; 1]$, $\varphi(x)$ — сингулярна функція канторівського або квазіканторівського типу.

Приклад 4. X має рівномірний розподіл на $[0; 1]$, $\varphi(x)$ — функція, означена рівністю:

$$\varphi\left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(r+1)^n}\right) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \cdots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_s},$$

де s, r — фіксовані натуральні числа, причому $2 \leq s \leq r$, $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, r\}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Ратушняк С.П. *Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2 -зображенням дійсних чисел* // Теорія ймовірностей та математична статистика — 2018. — Вип. 2(99) — С. 187–202.
- [2] Працьовитий М. В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наукова думка, 2022. — 316с.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Email address: prats4444@gmail.com

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ БАГАТОРІВНЕВИХ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ЗАДАЧІ ПРО ДНІ НАРОДЖЕННЯ

В.В. СТАМАТІЄВА

Нехай задана нескінченна послідовність об'єктів, що надходять послідовно, кожен з яких незалежно належить до одного з n типів з імовірністю $\frac{1}{n}$. Позначимо через $Y_{i,r}^{(n)}$ момент часу (номер кроку), в який надходить $(r+1)$ -ий об'єкт типу i . Одновимірний асимптотичний аналіз для фіксованого r [1] не дозволяє дослідити спільну асимптотичну поведінку моментів збігу для різних рівнів заповнення r_1 та r_2 . Ця робота присвячена узагальненню отриманих результатів на багатовимірний випадок для дослідження спільної збіжності процесів надходжень для всіх рівнів r одночасно.

Для подолання проблеми залежності між $Y_{i,r}^{(n)}$ ми застосовуємо метод пуассонізації, розглядаючи моменти $Z_{i,r}^{(n)}$ у відповідній схемі, де вони є незалежними для різних i . Один з підходів до дослідження спільної асимптотики полягає у поєднанні спільного для всіх рівнів $r \in \{0, \dots, r_0\}$ нормування з операцією прорідження. Зафіксуємо $r_0 \geq 1$, введемо спільну нормуючу функцію $\psi_{r_0}^{(n)}(x) = x/n^{\frac{r_0}{r_0+1}}$ та побудуємо для кожного рівня r однорівневий процес $\nu_r^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta_{\psi_{r_0}^{(n)}(Z_{i,r}^{(n)})}$.

Операція прорідження $T_p \nu$ полягає в тому, що кожна точка процесу ν незалежно зберігається з імовірністю p . Позначимо ймовірність прорідження $p_r^{(n)} = n^{-\frac{r_0-r}{r_0+1}}$. Тоді головним об'єктом дослідження є проріджений багаторівневий точковий процес $H_{\text{thin}}^{(n)}$ на просторі $\mathbb{X}_{r_0} = \bigcup_{r=0}^{r_0} \{r\} \times \mathbb{R}$, що задається як

$$H_{\text{thin}}^{(n)} \left(\bigcup_{r=0}^{r_0} \{r\} \times B_r \right) = \sum_{r=0}^{r_0} T_{p_r^{(n)}} \nu_r^{(n)}(B_r).$$

Одержані результати у цьому напрямку подамо у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. Нехай H — точковий процес Пуассона на просторі $\mathbb{X}_{r_0}$ з мірою інтенсивності λ :

$$\lambda \left(\bigcup_{r=0}^{r_0} \{r\} \times B_r \right) = \sum_{r=0}^{r_0} \frac{1}{r!} \int_{B_r} x^r \cdot \mathbb{I}\{x \geq 0\} dx, \quad B_r \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Тоді $H_{thin}^{(n)} \xrightarrow{vd} H$ при $n \rightarrow \infty$.

Доведена збіжність дозволяє за допомогою теореми про неперервне відображення знаходити спільні граничні розподіли для функціоналів від процесу. Зокрема, розглянемо вектор $Q_{r,m}^{(n)} = \text{card}\{i : Z_{i,r}^{(n)} < Z_{(m),r_0}^{(n)}\}$, $r = 0, \dots, r_0 - 1$, де $Z_{(m),r_0}^{(n)}$ — m -та порядкова статистика для рівня r_0 . Спираючись на [2], справедливий наступний наслідок.

Наслідок 1. Нехай $G_m \sim \Gamma(m, 1)$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ має місце збіжність за розподілом:

$$\left(n^{-\frac{r_0-r}{r_0+1}} Q_{r,m}^{(n)}, r = 0, \dots, r_0 - 1 \right) \xrightarrow{d} \left(\frac{((r_0 + 1)! G_m)^{\frac{r+1}{r_0+1}}}{(r+1)!}, r = 0, \dots, r_0 - 1 \right).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ільєнко А. Б., Стаматієва В. В. Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження // Науковий вісник Ужгородського університету. — 2021. — Т. 39, № 2. — С. 38–46.
- [2] Iliencko A. *Limit theorems in the extended coupon collector's problem.* — arXiv:2002.00650v1, 2020. — 19 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: stamatieva56@gmail.com

ДЕКОМПОЗИЦІЯ РИЗИКУ ПРОСПЕКТИВНОГО РЕЗЕРВУ У БАГАТОСТАНОВИХ МОДЕЛЯХ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ

О.А. ТИМОШЕНКО, О.О. ПЛУГАТОР

Ми вивчаємо спосіб розділити загальну невизначеність проспективного резерву на дві керовані складові: (i) ризик переходів між станами (смертність, непрацездатність та інші події), (ii) процентний ризик, зумовлений коливаннями ставки дисконту.

Такий підхід дозволяє відокремити стохастичну природу процесу, яка походить із життєвих змін застрахованої особи, від випадковості фінансового середовища, що визначається ринковими факторами. У результаті ми отримуємо структурну модель, придатну як для теоретичного аналізу, так і для практичних розрахунків страхових резервів.

Ідея методу така, що якщо зафіксувати траєкторію процентної ставки, то випадковість резерву повністю пов'язана лише з переходами між станами, і цю частину можна виміряти умовною дисперсією. Якщо ж дозволити ставці змінюватися, порівнюючи різні траєкторії, то додатково з'являється внесок процентного ризику, який відповідає дисперсії умовного сподівання. Таким чином, ми розділяємо дві природи невизначеності — демографічну та фінансову — відповідно до закону повної дисперсії

$$\text{Var}(W) = \mathbb{E}[\text{Var}(W \mid Z)] + \text{Var}(\mathbb{E}[W \mid Z]). \quad (1)$$

Перший доданок відображає ризик переходів (смертність, непрацездатність тощо) за фіксованою кривою дисконту, а другий — процентний ризик, пов'язаний із коливаннями ставки. Це розділення узгоджується з інтуїцією, адже навіть за відомих біометричних параметрів зміна фінансових умов може вплинути на фактичну величину резерву (більш детально див. [1] та [2]).

Розглядається багатостановий процес X_t зі станами S . Грошовий потік задається мірою Стілтєса

$$dA(t) = \sum_{i \in S} I_i(t) da_i(t) + \sum_{i \neq j} a_{ij}(t) dN_{ij}(t),$$

де перша сума описує потоки у стані i (наприклад, анuitетні виплати чи премії), а друга — потоки, пов'язані з переходами між станами (наприклад, страхові суми при смерті чи інвалідності).

Поточна вартість елементарного потоку визначається як

$$dV(t, A) = v(t) dA(t), \quad v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(\tau) d\tau\right),$$

де $v(t)$ — дисконт-фактор, що зменшує майбутні платежі з урахуванням поточної сили відсотка $\delta(\tau)$. Це дозволяє виражати майбутні зобов'язання у сучасній вартості, що є основою для обчислення резервів.

Проспективну вартість на інтервалі $[t, T]$ можна записати як

$$W = \frac{1}{v(t)} \int_t^T v(\tau) dA(\tau),$$

тобто є очікуваною приведеною до моменту t вартістю всіх майбутніх потоків.

Для аналізу варіативності W зафіксуємо траєкторію короткої ставки $Z = \{r_t, t \in [t, T]\}$. У цьому випадку дисконт-фактор $v(\cdot)$ стає детермінованим, а всі випадкові зміни резерву пов'язані лише зі стохастикою переходів. Після цього можна застосувати закон повної дисперсії (1). Таким чином, ризик переходів відображає внутрішню випадковість страхових подій, а процентний ризик — реакцію резерву на зміни дисконтної ставки.

Для зручності обчислень вводимо міру інтенсивності майбутніх виплат $m(d\tau)$, тоді умовне сподівання набуває вигляду

$$\mathbb{E}[W | Z] = \frac{1}{v(t)} \int_t^T v(\tau) m(d\tau),$$

де $m(d\tau)$ визначає очікувану величину майбутніх потоків у часі, а дисконт-фактор $v(\tau)$ — знижує їхню вартість. Процентна частка $\text{Var}(\mathbb{E}[W | Z])$ залежить лише від коваріацій $v(\cdot)$, тобто від взаємозв'язку між динамікою ставки та моментом виплат.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Koller M. *Stochastic Models in Life Insurance*. — 2nd Edition. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] Christiansen M. C. *On the decomposition of an insurer's profits and losses*. — Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Germany, 2021.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна/Норвегія
Email address: elena_timoshenko2008@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pluhatorolesya2003@gmail.com

ПРО УТОЧНЕННЯ ХАРАКТЕРИЗАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ДЛЯ НОРМ φ -СУБГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Д.В. ТИХОНЕНКО

На просторі φ -субгауссових випадкових величин можна задавати різні норми, зокрема такі як:

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \inf\{a \geq 0: \mathbf{E} \exp(\lambda \xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$\theta_{\varphi}(\xi) = \sup_{n \geq 2} |\mathbf{E} \xi^n|^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi^{-1}(n)}{n},$$

$$\nu_{\varphi}(\xi) = \sup_{n \geq 2} |\mathbf{E} \xi^n|^{\frac{1}{n}} \frac{\varphi^{-1}(n)}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Для цих норм справедливі характеристизаційні нерівності описані в [1]. Частину з них отримано використовуючи відому оцінку для залишкового члена $|\theta_n| \leq \frac{1}{12n}$, $n \geq 2$, із формули Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{\theta_n}.$$

Розглянувши межі для θ_n , наведені в [2, 3], та обравши найкращі з них, було уточнено деякі з розглянутих характеристизаційних нерівностей:

$$\begin{aligned} \nu_{\varphi}(\xi) &\leq e^{\frac{329227}{322560}} \theta_{\varphi}(\xi), \\ \tau_{\varphi}(\xi) &\leq S_{\varphi} e^{\frac{329227}{322560}} \sigma_{\varphi^*}(\xi), \\ \tau_{\varphi}(\xi) &\leq S_{\varphi} e^{\frac{329227}{322560}} (1 + C) D. \end{aligned} \tag{1}$$

Отримані результати є покращенням результатів, отриманих в [1] та надалі у можуть бути використані в теорії φ -субгауссових випадкових величин.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu. V., Nikitina, T.. Space of φ -sub-Gaussian random variables. *Rendiconti, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni*, 2003, Vol. XXVII, pp. 92-124.
- [2] Paul R. Beesack. Improvements of Stirling's formula by elementary methods. *Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta. Serija Matematika i Fizika*, 1969, Vol. 274/301, pp. 17-21.
- [3] L. Lin. On Stirling's formula remainder, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, Vol. 247, pp. 494-500.

КНУ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: tykhonenko.dmytro@gmail.com

СУМІСНІ ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ АДИТИВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Г. ШЕВЧЕНКО, А. ЯРОШЕВСЬКИЙ

Розглянемо послідовність незалежних центрованих випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$, що належить до області притягання до α -стійкого закону з параметром $\alpha \in (1, 2]$. Визначимо випадкове блукання

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S_{[nt]} = \sum_{i=1}^{[nt]} \xi_i, \quad t \geq 0.$$

Для побудови неперервного у часі аналога, введемо послідовність додатних випадкових величин $\{\theta_n, n \geq 1\}$, які інтерпретуються як час очікування між стрибками, та незалежні від $\{\xi_n\}$. Позначимо

$$N_t = \max \left\{ k \geq 0 : \sum_{i=1}^k \theta_i \leq t \right\}, \quad X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

Процес X_t називається випадковим блуканням з неперервним часом (CTRW) та описує положення частинки у момент часу t , де стрибки відбуваються у випадкові моменти.

Основні припущення:

- (A1) Послідовність стрибків $\{\xi_n\}$ складається з н.о.р. випадкових величин зі $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, які належать до області притягання до α -стійкого закону з $\alpha \in (1, 2]$. Це означає, що існує послідовність нормувань $a_n = n^{1/\alpha} L(n)$, де L — повільно змінна функція, така що $\frac{S_{[nt]}}{a_n} \Rightarrow Z_\alpha(t)$, де $Z_\alpha(t)$ — α -стійкий процес Леві (див. [1]).
- (A2) Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
- (A3) Характеристична функція $\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_1}$ є достатньо інтегрованою: існує $N \in \mathbb{N}$, для якого

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_\xi(t)|^N dt < \infty.$$

- (A4) Часи очікування $\{\theta_n\}$ — н.о.р. додатні випадкові величини, незалежні від $\{\xi_n\}$, зі скінченним середнім $\mathbb{E}\theta_1 = \mu < \infty$.

За наведених припущень формулюються основні результати, що описують сумісну граничну поведінку випадкового блукання та його адитивного функціонала — спершу у дискретному, а потім з неперервним часом.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення (A1)–(A3). Тоді скінченновимірні розподіли процесу*

$$\left(\frac{S_{[nt]}}{a_n}, \frac{a_n}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} f(S_k) \right)$$

збігаються до скінченновимірних розподілів граничного процесу

$$\left(Z_\alpha(t), \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \cdot l_\alpha(t) \right),$$

де $Z_\alpha(t)$ є α -стійким процесом Леві, а $l_\alpha(t)$ позначає його симетричний локальний час у нулі.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення (A1)–(A4). Тоді у просторі Скорохода $D([0, \infty), J_1)$ маємо збіжність*

$$\left(\frac{X_{tu}}{a_t}, \frac{a_t}{t} \int_0^{tu} f(X_s) ds \right)_{u \geq 0} \Longrightarrow \left(\mu^{-\frac{1}{\alpha}} Z_\alpha(u), \mu^{\frac{1}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \cdot l_\alpha(u) \right)_{u \geq 0},$$

при $t \rightarrow \infty$, де $Z_\alpha(u)$ є α -стійкий процес Леві, а $l_\alpha(u)$ позначає його симетричний локальний час у нулі.

Ідея дослідження походить з роботи [2, 3], однак тут отримано не лише сумісну збіжність, а й збіжність у просторі Скорохода. Доведення ґрунтується на стандартних методах збіжності у просторі $D([0, \infty), J_1)$ (див. [2, 4, 5, 6]).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Zolotarev V.M. *One-dimensional Stable Distributions* — Providence, RI: American Mathematical Society, 1986.
- [2] Jeganathan P. *Convergence of Functionals of Sums of Random Variables to Local Times of Fractional Stable Motions*. — *Annals of Probability*, 32(3A), 1771–1795 (2004).
- [3] Kondratiev Y., Mishura Y., Shevchenko G. *Limit Theorems for Additive Functionals of Continuous Time Random Walks*. — *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A: Math.*, 151(2), 799–820 (2021).
- [4] Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. — 2nd ed. Wiley, New York, 1999.
- [5] Whitt W. *Stochastic-Process Limits*. — New York: Springer, 2001.
- [6] Aldous D. *Stopping Times and Tightness*. — *The Annals of Probability*, 6(2), 335–340 (1978).

Київська школа економіки

Email address: gshevchenko@kse.org.ua

Київська школа економіки

Email address: a.yaroshevskyi@kse.org.ua

СЕКЦІЯ 4
Інформаційні системи та технології в освіті

AUTOMATED LLAMA-BASED GENERATION OF SCHOOL TEST ITEMS: ALIGNMENT AND LOCALIZATION TO UKRAINIAN EDUCATIONAL STANDARDS

T. HOMBOSH, P. MULESA

We present a compact system for automatically creating school test items using Llama-class large language models (LLMs). This system is specifically designed to meet Ukrainian state educational standards and is tailored to the Ukrainian language and classroom context. Our contribution includes a prompt and validation framework that: (i) connects learning outcomes to content and cognitive levels, (ii) generates age-appropriate items in Ukrainian, (iii) packages items for Learning Management System delivery via 1EdTech QTI 3.0, and (iv) checks quality through rule-based assessments, expert reviews, and pilot psychometrics.

Motivation. Automated item generation (AIG) can cut down on authoring time and expand formative assessment coverage. For K-12 in Ukraine, practical AIG must ensure the curriculum matches, has correct language, works well with other systems, and includes measures for validity and fairness.

Standards alignment. We base our prompts on the State Standard of Primary Education (2018) and the State Standard of Basic Secondary Education (2020) [7, 6]. Each item includes: (a) outcome identifiers and subject area, (b) cognitive level based on the revised Bloom taxonomy [2], and (c) item type with constraints such as notation, units, and allowed contexts. Before generating content, we gather confirmed curricular examples to provide a solid foundation and minimize inaccuracies.

Llama-based generation. An instruction-tuned Llama model [1] creates items from a template that includes grade band, outcome text, item schema (single/multiple choice, short answer, matching), and stylistic and safety limits. Rejection sampling against a validator eliminates unclear keys and out-of-scope content.

Localization. The LLM used supports localization of educational materials in different languages, and for our study, the target language is Ukrainian. Post-generation checks ensure that the text complies with Ukrainian spelling and grammar rules, and that the formatting of numbering and SI units is consistent with the requirements of the curriculum.

Interoperability (QTI, LMS). Items are serialized to 1EdTech QTI3.0 [4] with response declarations, scoring, and metadata, including standard IDs,

Bloom level, and estimated difficulty. Deployment uses LTI1.3 launch for LMS integration [5].

Validation and psychometrics. Quality assurance includes: (1) schema and rule checks (unique key, plausible distractors, no duplication, key leakage); (2) standards audit (coverage, Bloom conformity); (3) SME review with inter-rater agreement (Cohen's k); (4) pilot testing ($N \approx 60-200$) to estimate item difficulty and discrimination using IRT [3]. Items that do not meet thresholds are revised or discarded.

Targets and outcomes. The pipeline aims to cut down the time SMEs spend on drafting. It targets achieving SME acceptance of 50% or more after validator triage. We want to deliver QTI-compliant items that can be used in mainstream LMS, complete with accessibility annotations.

Conclusion. Standards-aware prompting, Ukrainian-specific linguistic validation, interoperable packaging, and psychometric screening together make Llama-based AIG useful for the Ukrainian curriculum. They provide a repeatable way to convert model output into a classroom-ready assessment.

REFERENCES

- [1] H. Touvron, L. Martin *et al.* LLaMA 2: Open foundation and fine-tuned chat models. arXiv:2307.09288, 2023.
- [2] L. W. Anderson, D. R. Krathwohl (eds.). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman, New York, 2001.
- [3] F. B. Baker. *The Basics of Item Response Theory*. ERIC, 2001. URL: <https://eric.ed.gov/?id=ED458219>
- [4] 1EdTech Consortium. Question and Test Interoperability (QTI) Specification. URL: <https://www.1edtech.org/standards/qti>
- [5] 1EdTech Consortium. Learning Tools Interoperability (LTI) 1.3 and LTI Advantage. URL: <https://www.1edtech.org/activity/learning-tools-interoperability>
- [6] Cabinet of Ministers of Ukraine. State Standard of Basic Secondary Education (Resolution No. 898, 30 Sept 2020). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020>
- [7] Cabinet of Ministers of Ukraine. State Standard of Primary Education (Resolution No. 87, 21 Feb 2018). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/87-2018>

UZHGOROD NATIONAL UNIVERSITY, UNIVERSYTETSKA 14, 88000 UZHGOROD, UKRAINE
Email address: `tomash.hombosh@uzhnu.edu.ua`

UZHGOROD NATIONAL UNIVERSITY, UNIVERSYTETSKA 14, 88000 UZHGOROD, UKRAINE
Email address: `pavlo.mulesa@uzhnu.edu.ua`

ІНТЕРАКТИВНІ ТЕХНОЛОГІЇ ЯК ІННОВАЦІЙНИЙ ЗАСІБ НАВЧАННЯ ТЕМИ «КОМБІНАТОРИКА ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

І.Л. АВДЕЙЧИК

Умови функціонування сучасного інформаційного суспільства вимагають від особистості нової якості мислення — здатності ефективно діяти в ситуаціях невизначеності, аналізувати випадкові явища, здійснювати ймовірнісні оцінки, передбачати можливі наслідки подій і ухвалювати рішення на основі кількісно обґрунтованих даних. У зв'язку з цим особливої значущості набуває розвиток ймовірнісно-статистичного мислення та засвоєння ключових понять комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики [1].

Організація інтерактивного навчання передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор і колективного розв'язання проблемних завдань, що забезпечує глибоке занурення учнів у контекст практичного застосування знань. Створення таких навчальних умов формує освітнє середовище, сприятливе для вироблення ціннісних орієнтацій, розвитку соціальних навичок співпраці та ключових компетенцій [1, 3].

Інтерактивні технології є інноваційним засобом, за допомогою якого створюються умови для активної участі учнів у навчальному процесі, що сприяє формуванню самостійності, критичного мислення, навичок колективної взаємодії та рефлексивної оцінки результатів.

Термін «інтерактив» (від англійського *interact* — «взаємодіяти») вказує на здатність до активної комунікації, діалогу, обміну інформацією між суб'єктами. У педагогічному контексті під інтерактивним навчанням розуміють таку організацію освітнього процесу, яка передбачає активну взаємодію між учнями, а також між учнями та вчителем, що реалізується у формі діалогу, обговорення або спільного розв'язання навчальних завдань [2, с. 230].

Інтерактивне навчання як цілісна методична система ґрунтується на низці ключових принципів, що забезпечують ефективність освітнього процесу. До таких принципів належать: активне залучення всіх учасників до пізнавальної діяльності; створення ситуації співпраці, вільного обміну думками; формування атмосфери взаємопідтримки, у якій кожен може відчувати себе успішним; варіативність форм і методів роботи; опора на міжособистісну взаємодію; спонукання до рефлексії.

Зважаючи на різноманіття цифрових освітніх платформ і складність їх дидактичного добору, доцільним є представлення умовної класифікації цифрових ресурсів.

- **Інтерактивні тренажери та симулятори.** Вебплатформи, які дають змогу виконувати комбінаторні обчислення та ймовірнісні експерименти в інтерактивному режимі.
- **Онлайн-калькулятори та генератори комбінацій.** Інструменти для автоматичного обчислення факторіалів, кількості перестановок, комбінацій, розподілів ймовірностей.
- **Платформи для створення та перевірки тестових завдань.** Сервіси, що підтримують автоматичну перевірку знань, зокрема з адаптивними тестами, які підлаштовуються під рівень учня.
- **Програмне забезпечення для статистичного аналізу та моделювання.** Використання таких пакетів, як *Microsoft Excel*, *GeoGebra*, *Wolfram Alpha*, *Python*, дає змогу виконувати складні математичні операції, моделювати випадкові процеси, досліджувати статистичні властивості даних.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Жалдак М.І., Біляй І.М. *Стохастика: посіб. для вчителів* — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. — 304 с.
- [2] Забезпечення якості вищої освіти: підвищення ефективності використання інформаційних технологій у здійсненні освітнього процесу: збірник матеріалів IV Всеукр. наук.-практ. конф., м. Одеса, 13–15 квітня 2022 р. — Одеса, 2022. — 528 с.
- [3] Підручники для школи. URI: <https://shkola.in.ua/pidruchnyky/>. (Дата звернення: 12.10.2025).

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: ail30082003@gmail.com

МНОГОЧЛЕНИ ЯКОБІ В ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ

В.Ю. БОНДАРЧУК

Обробка сигналів відіграє важливу роль у сучасній техніці, зокрема в телекомунікаціях, електроніці та обчислювальній техніці. Одним із важливих аспектів обробки сигналів є фільтрація, яка дозволяє виокремити потрібні компоненти та позбутися небажаних шумів. Одним із методів аналізу та проєктування фільтрів є використання многочленів Якобі для апроксимації їхніх амплітудно-частотних характеристик (АЧХ).

Як відомо, сигнал — це фізичний процес, що несе інформацію. Сигнали поділяються на детерміновані та стохастичні (випадкові). Також сигнали можуть бути неперервними або дискретними, залежно від способу подачі даних [2].

Фільтрація сигналів — це процес відокремлення корисної частини сигналу від небажаних компонентів. Фільтри класифікують залежно від діапазону частот, які пропускає фільтр: фільтри низьких частот (пропускають сигнали з низькими частотами та пригнічують високі); фільтри високих частот (пропускають високі частоти та пригнічують низькі); смугові фільтри (пропускають сигнали у певному частотному діапазоні); режекторні фільтри (усувають певний діапазон частот). Фільтри низьких частот особливо важливі, оскільки вони дозволяють виділяти корисну низькочастотну компоненту сигналу та усувати високочастотні шуми [2].

Многочлени Якобі є узагальненням ортогональних многочленів, таких як многочлени Лежандра, багаторазові многочлени Чебишева першого та другого родів. Завдяки цьому вони є універсальним інструментом для апроксимації характеристик фільтрів та можуть бути скориговані відповідно до заданих параметрів.

Многочлени Якобі [1] n степеня, які позначаються $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, є ортогональними на інтервалі $[-1, 1]$ відносно вагової функції Якобі $w^{(\alpha, \beta)} = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, коли $\alpha, \beta \geq -1$.

А саме,

$$\int_{-1}^1 P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^{(\alpha, \beta)}(x) dx = h_m^{(\alpha, \beta)} \delta_{n, m},$$

де

$$h_m^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)},$$

$\delta_{n,m}$ — дельта-символ Кронекера, а $\Gamma(\cdot)$ — добре відома гамма-функція.

Саме ця властивість ортогональності дозволяє використовувати їх у спектральному аналізі та фільтрації сигналів. Для цих многочленів є відношення симетрії [3]:

$$P_n^{(\beta,\alpha)}(x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-x).$$

Для отримання апроксимуючої функції необхідно використовувати модифіковані многочлени Якобі:

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + P_n^{(\beta,\alpha)}(x),$$

нормованих на деяку величину $C_n^{(\alpha,\beta)}$:

$$\psi_n(\Omega) = \frac{J_n^{(\alpha,\beta)}(\Omega)}{C_n^{(\alpha,\beta)}}, \quad (1)$$

яка визначається як значення модифікованого многочлена Якобі при $x = 1$ і рівна

$$C_n^{(\alpha,\beta)} = J_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} \right].$$

Для нормованого фільтра низьких частот функція квадрата АЧХ має вигляд

$$|H_n(x)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \psi_n^2(x)},$$

де x — частотна змінна, $\psi_n(x)$ — характеристичний многочлен n степеня, визначений рівністю (1), а ϵ є параметром, який відповідає за нерівномірність в смузі пропускання. Функція $|H_n(x)|$ приймає максимальне значення, рівне 1, у нулях функції $\psi_n(x)$ і монотонно спадає за межами інтервалу $x \in [-1, 1]$.

Многочлени Якобі є потужним математичним інструментом у фільтрації сигналів. Вони дозволяють створювати фільтри з покращеними характеристиками, які можна адаптувати до конкретних вимог за допомогою параметрів α і β . Використання цих многочленів є перспективним напрямком у створенні високоточних цифрових і аналогових фільтрів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* New York, Dover: National Bureau of Standards applied Mathematics Series 55.
- [2] Кветний Р. Н. (2012). *Комп'ютерне моделювання систем та процесів*. Методи обчислень. Частина 1. Навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ.
- [3] Przemysław Gospodarczyk, Paweł Woźny, (2017). *Efficient modified Jacobi-Bernstein basis transformation* arXiv.org

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: bondarchuk.volodymyr2024@vnu.edu.ua

РОЗШИРЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОСТІ СИСТЕМИ $\text{\LaTeX}$ ШЛЯХОМ СТВОРЕННЯ МАКРОСІВ ДЛЯ ДЕЯКИХ МАТЕМАТИЧНИХ СИМВОЛІВ

Г.М. ГУБАЛЬ

Система $\text{\LaTeX}$ популярна серед науковців і освітян, оскільки вона дає можливість здійснювати складне форматування наукових та навчальних публікацій [1, 2]. Окремо варто зазначити, що в цій системі можна створювати складні формули, посилання і виноски [3].

Автоматизацію та прискорення виконання повторюваних завдань з налаштовуваною функціональністю у різних текстах, зокрема математичних, можна здійснити, створюючи нові макроси з використанням мови програмування $\text{\LaTeX}$ [3].

У цій роботі створено нові макроси для друку таких математичних символів, як символ квантора довільності, символ кратного інтеграла та символи потрібного об'єднання і потрібного перетину. При цьому символ квантора довільності масштабується до розмірів операторів у математичних виразах.

Створені нові макроси:

- (1) скорочують програмний код у документі $\text{\LaTeX}$;
- (2) стандартизують розробку математичних символів квантора довільності, кратного інтеграла, потрібного об'єднання і потрібного перетину;
- (3) сумісні зі стандартними командами системи $\text{\LaTeX}$ та з командами пакетів цієї системи.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Grätzer G. *Practical $\text{\LaTeX}$* . — Springer, 2014. — 216 p.
- [2] Van Dongen M.R.C. *$\text{\LaTeX}$ and friends*. — Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K., 2012. — 300 p.
- [3] Hubal H.M. *Improvement of references and footnotes in mathematical and other texts by creating macros in the $\text{\LaTeX}$ programming language* // International Journal on Information Technologies & Security. — 2023. — V. 15, No 3. — P. 15–22.

Луцький НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ, Луцьк, УКРАЇНА
Email address: halynahbl@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ MATHCAD В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

А.М. ГУРИЧ

Сучасні освітні стандарти Нової української школи вимагають активного впровадження комп'ютерних технологій для формування компетентностей, зокрема цифрової та математичної. Тема «Похідна та її застосування» є ключовою для розвитку аналітичного мислення та моделювання реальних процесів. Традиційні методи часто обмежуються рутинними обчисленнями, що знижує мотивацію [1].

Програмою з математики для 10–11 класів профільного рівня рекомендовано використання різних математичних пакетів комп'ютерної математики. Однією з таких програм є *MathCad*. MathCad як математичний пакет дозволяє автоматизувати розрахунки, візуалізувати графіки функцій та перевіряти гіпотези в реальному часі, роблячи навчання більш інтерактивним і прикладним. Програма підтримує символічні обчислення, графічну інтерпретацію та параметричне моделювання, що ідеально підходить для створення динамічних моделей. Це сприяє не лише розв'язуванню задач, а й розвитку дослідницьких навичок, евристичного підходу та творчого потенціалу учнів [2, с. 48–49].

Оптимальними етапами для інтеграції MathCad у вивчення теми «Похідна та її застосування» є:

- введення поняття похідної через геометричний зміст (динамічна візуалізація зміни положення дотичної до графіка);
- обчислення похідної (символьне диференціювання з автоматичною перевіркою);
- складання рівняння дотичної (порівняння аналітичного результату з графічною побудовою);
- аналіз монотонності, екстремумів, опуклості (знаходження похідних першого та другого порядку, визначення критичних точок);
- повне дослідження функції за схемою;
- розв'язування прикладних задач (моделювання швидкості, прискорення, оптимізації).

Такий підхід дозволяє учням швидко виявляти помилки, експериментувати з параметрами та глибше розуміти зв'язок між аналітичними та графічними методами [3].

Системне використання MathCad при вивченні теми «Похідна та її застосування» на профільному рівні значно підвищує ефективність навчання, розвиває критичне мислення та готує учнів до використання цифрових інструментів в подальшій освіті та професійній діяльності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Теплицький І.О., Віхрова О.М., Семеріков С.О. *Розвиток пізнавальної активності учнів 10–11-х класів у процесі навчання алгебри і початків аналізу засобами комп'ютерно-орієнтованих систем навчання* // Рідна школа. — 2004. — № 6. — С. 48–49.
- [2] Кіяновська Н.М., Рашевська Н.В., Семеріков С.О. *Теоретико-методичні засади використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчанні вищої математики студентів інженерних спеціальностей в Сполучених Штатах Америки: монографія* — Кривий Ріг: Вид. відділ ДВНЗ «Криворізький національний університет», 2014. — Т. V, Вип. 1(5): спецвипуск «Монографія в журналі». — 316 с.
- [3] Хоменко Є.Р. *Використання програмних засобів навчального призначення як засіб активізації пізнавальної діяльності на уроках алгебри старшої школи* — Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2023. — 8 с.

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, Луцьк, УКРАЇНА
Email address: gurich.tolia@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ ІНСТРУМЕНТІВ СТАТИЧНОГО ТА ДИНАМІЧНОГО АНАЛІЗУ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ ПРОГРАМУВАННЮ МОВОЮ С

І.М. ДАНИЛЮК

Ручне керування пам'яттю є фундаментальною особливістю мови програмування С, яка забезпечує високу ефективність виконання програм, але водночас створює ризики появи помилок, пов'язаних із витоками пам'яті, подвійним звільненням або зверненням до вже звільнених комірок. Такі помилки часто залишаються непоміченими під час компіляції та можуть проявлятися лише під час виконання програми, що ускладнює навчання та перевірку студентських робіт. Тому у процесі підготовки майбутніх фахівців з програмування важливо не лише пояснити принципи динамічного виділення пам'яті, а й сформувані практичні навички аналізу, виявлення та усунення помилок.

У сучасному освітньому процесі навчання мовою С потребує поєднання класичних підходів з інструментами, що використовуються у професійному середовищі. Дослідження показують, що використання статичного аналізу коду дозволяє виявляти значну частину помилок ще до етапу виконання програми [1, 2]. Впровадження таких інструментів у навчальні курси сприяє розвитку у студентів критичного мислення та підвищує якість програмного коду.

Серед інструментів статичного аналізу, які доцільно застосовувати у навчанні, слід відзначити Cppcheck та Clang Static Analyzer. Cppcheck аналізує вихідний код мов С і С++, виявляючи типові помилки, як-от використання неініціалізованих змінних, потенційні витоки пам'яті та порушення меж масивів. Його просто інтегрувати у середовище Visual Studio Code або застосовувати у сценаріях автоматизованої перевірки студентських завдань. Clang Static Analyzer здійснює глибший аналіз шляхів виконання програми, допомагаючи студентам зрозуміти, як неправильна логіка циклів чи умов може призводити до втрати пам'яті [2]. Завдяки використанню таких засобів студенти краще засвоюють принцип «один malloc — один free» і вчать писати більш передбачуваний та безпечний код [1].

Окрім статичного аналізу, важливим компонентом підготовки програмістів є навчання динамічним методам діагностики. Динамічні аналізатори досліджують поведінку програми під час її виконання, дозволяючи

виявляти помилки керування пам'яттю в реальному часі. Найбільш поширеними інструментами є Valgrind (Memcheck) і AddressSanitizer (ASan). Valgrind виконує програму у спеціальному віртуальному середовищі, фіксуючи всі операції з пам'яттю, що дає змогу точно визначати, які блоки не були звільнені або використані повторно [3]. AddressSanitizer, вбудований у компілятори GCC та Clang, забезпечує ефективне виявлення аналогічних помилок із мінімальними витратами ресурсів та створює детальні звіти з трасуванням помилок [4]. Використання цих засобів у навчальному процесі дозволяє студентам усвідомити механізми роботи оперативної пам'яті та формує навички відповідального підходу до написання коду [1].

Методика впровадження інструментів статичного та динамічного аналізу у навчальний процес передбачає послідовне поєднання теорії і практики. На першому етапі студенти ознайомлюються з принципами виділення і звільнення пам'яті в мові C. Далі демонструються типові помилки, що призводять до витоків, після чого проводяться практичні заняття із застосуванням Cppcheck і Clang Static Analyzer. Наступний етап передбачає роботу з Valgrind та AddressSanitizer, порівняння звітів цих засобів і самостійне усунення виявлених дефектів. Такий підхід сприяє розвитку навичок тестування, відлагодження та самоконтролю коду, що особливо важливо при підготовці студентів до роботи в командних або промислових проєктах.

Використання інструментів статичного та динамічного аналізу під час навчання програмуванню мовою C є ефективним засобом підвищення якості підготовки студентів. Воно формує у них цілісне розуміння взаємозв'язку між архітектурою комп'ютера, управлінням пам'яттю та стабільністю програмного забезпечення. Запропонований підхід доцільно інтегрувати у курси «Програмування» та «Системне програмування», що дозволить поєднати академічну підготовку з вимогами сучасної ІТ-індустрії.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Seacord R.C. *Effective C: An Introduction to Professional C Programming*. 2-nd ed.. — San Francisco: No Starch Press, 2020. — 272 p.
- [2] Bessey A., Block K., Chelf B., Chou A., Fulton B., Hallem S., Henri-Gros C., Kamsky A., McPeak S., Engler D. *A Few Billion Lines of Code Later: Using Static Analysis to Find Bugs in the Real World* // Communications of the ACM. — 2010. — Vol. 53, No 2. — PP. 66-75.
- [3] Valgrind: Memcheck Manual [Електронний ресурс]. 2025. Режим доступу: <http://valgrind.org/docs/manual/mc-manual.html>.
- [4] AddressSanitizer [Електронний ресурс]. 2025. Режим доступу: <https://clang.llvm.org/docs/AddressSanitizer.html>.

ЧНУ ім. Ю. Федьковича, Чернівці, Україна
Email address: i.danyluk@chnu.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ ДОДАТКІВ, СТВОРЕНИХ У СЕРЕДОВИЩАХ SHINY ТА WOLFRAM, НА ЗАНЯТТЯХ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

О.О. ДИХОВИЧНИЙ, Н.В. КРУГЛОВА, С.В. КАЙДАЛОВ

Одним з ефективних засобів інтеграції інформаційних технологій у процес викладання математичних дисциплін є веб додатки, створені викладачами для конкретних завдань чи тем. Наприклад, веб додатки можна створювати з використанням Shiny (мова програмування R) або за допомогою Wolfram Language.

Shiny дає змогу створити власний інтерактивний додаток, використовуючи галерею прикладів тем, без спеціальних знань HTML, CSS. Перевага пакета Shiny полягає у можливості поєднання теорії, обчислень, ілюстрацій та інтерактивної взаємодії користувача в одному середовищі. Для створення Shiny-додатків викладачеві достатньо базових знань мови R. Структура програми складається з двох частин: UI (User Interface) — опис інтерфейсу користувача; Server — обчислення, виведення результатів та реакцій на дії користувача. Shiny інтегрується з RStudio та дозволяє запускати програми безпосередньо в ньому або публікувати у вигляді вебсторінок. Такий підхід відкриває можливість створення віртуальних лабораторних робіт, у яких студенти можуть досліджувати математичні моделі, змінюючи параметри у режимі реального часу.

Інше середовище — Wolfram Language — потребує більшої підготовки у сфері програмування, однак має надзвичайно потужні аналітичні можливості. Його використання дає змогу створювати додатки з інтегрованими символьними обчисленнями, тривимірною графікою та моделями складних стохастичних процесів. Крім того, мова дозволяє публікувати розробки у Wolfram Cloud, що забезпечує доступ студентів до інтерактивних моделей без необхідності встановлення додаткового програмного забезпечення.

Вебзастосунки є методами активного навчання студентів, які самостійно змінюють параметри, спостерігаючи за наслідками та змінами результатів, перевіряють власні гіпотези та аналізують вплив параметрів.

Вони дозволяють також проводити віртуальні лабораторні роботи з математичних дисциплін. Наприклад, на рис. 1 показано скріншот роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики у вебдодатку на тему «Біноміальний розподіл». Користувачі можуть змінити кількість підкидань монети, порахувати точні та наближені ймовірності. В окремих

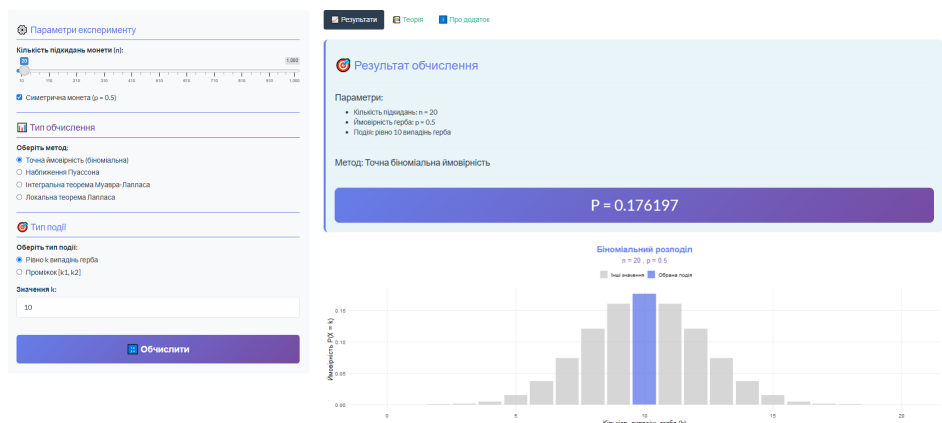


Рис. 1. Додаток у Shiny

вкладеннях можна розмістити короткий теоретичний матеріал, формули, довідкові таблиці, що перетворює додаток на мініпідручник.

Можна реалізувати додатки для моделювання випадкових подій. Наприклад, студенти можуть віртуально підкидати монету або кубик тисячі разів, спостерігаючи дію закону великих чисел чи центральної граничної теореми. Для користувачів створення простих симуляцій не потребує знань мов програмування, проте дозволяє провести та проаналізувати стохастичні експерименти.

Важливою перевагою є можливість інтеграції таких вебдодатків у систему Moodle. Це забезпечує єдине навчальне середовище, у якому студенти можуть переглядати теорію, виконувати інтерактивні експерименти та одразу надсилати результати викладачеві.

Таким чином, використання Shiny та Wolfram Language у процесі викладання вищої математики та теорії ймовірностей підвищує мотивацію студентів, сприяє глибшому засвоєнню матеріалу та формує сучасні цифрові компетентності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Wickham, H. *Mastering Shiny: Build interactive apps, reports, and dashboards powered by R.* — O'Reilly, 2021. — 372 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.dyx@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: natahak@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ТА ІНСТРУМЕНТІВ WOLFRAM, GEOGEBRA ДЛЯ СТВОРЕННЯ ШАБЛОНІВ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ НА ПЛАТФОРМІ MOODLE

Н.В. КРУГЛОВА, О.О. ДИХОВИЧНИЙ, С.В. КАЙДАЛОВ

В умовах війни та частоті зміни форми навчання українські викладачі потребують ефективних інструментаріїв для автоматизації контролю знань студентів. Особливо це актуально для точних дисциплін, де тестові завдання мають перевіряти не лише кінцеву відповідь, але й певні етапи розв'язання задачі.

Однією з найпоширеніших дистанційних навчальних платформ в сучасних університетах є платформа Moodle. Проте, створення якісного банку завдань потребує від викладачів не тільки тривалих часових затрат, але й певних технічних навичок та вмінь. Інтеграція можливостей штучного інтелекту, програми Wolfram Language та інструменту GeoGebra відкриває нові можливості для розробки варіативних, адаптивних тестових завдань з автоматизованою перевіркою результатів.

Роль штучного інтелекту у створенні тестових завдань полягає в: генерації формулювань задач на основі заданих тем і параметрів; автоматичному створенні шаблонів однотипних варіантів завдань зростаючої складності; створенні HTML файлу у відповідній категорії завдань; аналізі типових помилок та формуванні персоналізованих рекомендацій; а в питаннях множинного вибору — створення варіативних дистракторів, які генеруються на основі типових помилок.

Wolfram Language забезпечує: шаблони для генерації умови та розв'язку тестових завдань; перевірку правильності відповіді, генерацію покрокових розв'язків, які можна використати для зворотного зв'язку.

GeoGebra дозволяє: створювати інтерактивні геометричні ілюстрації, які можна використовувати в ролі шаблонів завдань з аналітичної геометрії та лінійної алгебри; візуалізувати графіки функцій з динамічними параметрами; інтегрувати графічні зображення безпосередньо в завдання Moodle.

Для проектування шаблону потрібно спочатку визначити дидактичну мету, рівень складності завдання, виділити змінні параметри та визначити їх допустимі діапазони. Потім, за допомогою ШІ, можна створити

шаблон тестового завдання у потрібній програмі, який, у свою чергу, згенерує варіант тестового завдання та забезпечить його перевірку.

Застосування засобів ІКТ дозволяє зменшити час генерації однотипних варіантів валідних завдань, збільшити кількість унікальних варіантів контрольних робіт, покращити якість зворотного зв'язку, зменшити кількість технічних та арифметичних помилок при створенні тестових завдань.

Результати впровадження такої інтегрованої технології показали зменшення часу викладача на апеляції студентів, пониження середнього балу в експериментальній групі в порівнянні з контрольною групою. Це можна пояснити більшою варіативністю завдань, створених засобами ІІІ, та новизною формулювань тестових питань, генерацією пояснень від ІІІ до кожного завдання.

Інтеграція штучного інтелекту та спеціалізованих математичних інструментів, таких як Wolfram та GeoGebra, у платформу Moodle запроваджує новий рівень автоматизації тестування з вищої математики, забезпечуючи варіативність завдань, об'єктивність оцінювання та персоналізований зворотний зв'язок. Запропонована методика створення програмних шаблонів для тестових завдань забезпечує баланс між автоматизацією та педагогічною доцільністю, дозволяючи генерувати унікальні завдання, зберігаючи при цьому їхню однакову складність.

Перспективи подальших досліджень полягають у розробці адаптивних алгоритмів тестування з використанням машинного навчання для автоматичного підбору оптимальної траєкторії оцінювання кожного студента, а також у вивченні можливостей використання великих мовних моделей для перевірки завдань з розгорнутою відповіддю та впровадженні використання STACK плагіну для аналітичних перевірок.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Бережної В.Д. і Тулученко Г.Я. *Аналіз можливостей сучасних моделей ІІІ для розробки тестових завдань з вищої математики* // Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання : Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (м. Чернігів, 20 листопада 2024 р.). Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка — 2024.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: natahak@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.dyx@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ВИКОРИСТАННЯ ІКТ ТА ЕЛЕКТРОННИХ ЖУРНАЛІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Н.І. МІЗИРНИЮК

Сучасна освіта неможлива без активного впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Вони стають не лише допоміжним [1] інструментом, а й необхідною умовою якісного навчання. Особливо важливим це є для уроків математики — предмета, що потребує логічного мислення, візуалізації абстрактних понять і розвитку аналітичних навичок.

Використання ІКТ дає змогу зробити урок математики цікавішим, наочним і доступним для кожного учня. Замість сухих формул і складних обчислень на дошці учні можуть бачити процес розв'язання задач [2] у динаміці, експериментувати з параметрами та самостійно робити висновки. Це сприяє розвитку дослідницьких умінь і формує стійку мотивацію до навчання.

Учитель, застосовуючи мультимедійні презентації, відеофрагменти, симуляції або інтерактивні геометричні середовища (наприклад, GeoGebra, Desmos, Mathcad), може показати учням, як математичні закономірності працюють у реальному житті. Такі інструменти допомагають пояснити складні теми — наприклад, графіки функцій, перетворення фігур, побудову тіл обертання чи статистичний аналіз даних. Одним із найважливіших напрямів використання ІКТ у школі є застосування електронних освітніх платформ. Після пандемії COVID-19 більшість закладів освіти активно інтегрували у навчальний процес сервіси Google Classroom, Moodle, Microsoft Teams, «Всеосвіта», «На Урок», державну платформу «Єдина школа», зокрема у нашій громаді освітня інформаційна система «SMART школа».

Такі ресурси дозволяють учителю створювати інтерактивні завдання, тести, тренажери та контролювати навчальні досягнення учнів у режимі онлайн. Наприклад, на уроках математики можна розміщувати відеоінструкції до розв'язування задач, створювати віртуальні дошки для групової роботи, проводити математичні марафони чи змагання.

Для учнів це — можливість навчатися у власному темпі, отримувати миттєвий зворотний зв'язок, повторювати матеріал у зручний час. Крім того, електронна платформа формує у школярів цифрову компетентність — одну з ключових навичок XXI століття.

Важливою складовою цифровізації освітнього процесу є електронні журнали та щоденники. Вони забезпечують прозорість оцінювання, зручність у спілкуванні між учителем, учнями й батьками. Учні можуть у будь-який момент переглянути свої оцінки, побачити коментарі вчителя, перевірити пропущені теми. Це сприяє більшій відповідальності за результати власного навчання.

OIC «SMART школа» вже активно працює в закладах освіти України, поєднуючи педагогіку з інструментами сучасного цифрового менеджменту. Також вона пропонує своїм користувачам освітню цифрову платформу, яка максимально розкриє їхній освітній потенціал. Вони прямуватимуть шляхом, на якому будуть критично мислити та з легкістю долати усі виклики стандартів освіти сьогодення, підвищувати [3] якість освітнього процесу.

SMART школа — це більше, ніж журнал. Це:

- електронний щоденник із можливістю комунікації з батьками;
- онлайн-журнал, що відповідає вимогам Державного стандарту та концепції Нової української школи;
- журнал для початкової школи з інтегрованими освітніми галузями та індивідуальними характеристиками учнів;
- модуль аналітики, що дозволяє адміністрації глибше оцінювати освітній процес;
- система, що трансформує освітній простір відповідно до запитів сучасності.

Учителі ж отримують можливість швидко аналізувати успішність класу, виявляти [4] труднощі у засвоєнні матеріалу, коригувати темп викладання. Таким чином, електронний журнал стає не просто засобом фіксації оцінок, а елементом педагогічної аналітики.

На практиці інформаційні технології можна ефективно застосовувати для:

- візуалізації матеріалу — створення графіків функцій за допомогою GeoGebra чи Desmos;
- самостійної роботи — виконання інтерактивних тестів у Google Forms або на платформі LearningApps;
- проєктної діяльності — створення мінідосліджень із використанням Excel або Google Sheets для аналізу статистичних даних.

Такі інструменти дозволяють враховувати індивідуальні особливості кожного учня, формувати компетентності, потрібні у сучасному цифровому суспільстві.

Отже, використання інформаційних технологій на уроках математики не є даниною моді, а необхідністю сучасної освіти. Вони допомагають зробити процес навчання більш ефективним, мотивуючим і відкритим.

Електронні журнали, освітні платформи та інтерактивні ресурси створюють умови для формування цифрової грамотності, розвитку критичного мислення і самостійності учнів.

Майбутнє шкільної математики — за творчим поєднанням традиційних методів і сучасних технологічних рішень, які відкривають для вчителя й учня нові горизонти пізнання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Биков В. Ю. та ін. Технології дистанційного навчання та віртуального освітнього простору: монографія / В. Ю. Биков, В. М. Кухаренко, Н. Г. Сиротенко, А. М. Рибалко, О. В. Стичинський. — К. : Атіка, 2008. — 324 с.
- [2] Морзе Н. В., Дементієвська Н. П. Методика навчання інформатики : Навч. посіб.: У 3-х част. / За ред. акад. В. Ю. Бикова. — К.: Навчальна книга, 2003.
- [3] Семерніков С. О., Теплицький О. І., Вовкотруб В. П. та ін. Теоретичні та методичні засади використання хмарних обчислень в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти: монографія. — К.: ІТЗО, 2017.
- [4] Шарко В. Д. Сучасний урок: технологічний аспект: посіб. для вчителів і студ. / В. Д. Шарко. — К. : СПД Богданова А. В., 2007. — 220 с.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: Natalia.Mizyrniuk2021@gmail.com

ІНТЕРАКТИВНІ МЕТОДИ ТА ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ У ВИКЛАДАННІ ТРИГОНОМЕТРІЇ В СУЧАСНІЙ ШКОЛІ

О.І. ОЛАСЮК

Сучасна освіта зазнає значних змін завдяки використанню цифрових технологій та інтерактивних методів навчання. Тригонометрія, як один із фундаментальних розділів математики, відіграє важливу роль у формуванні математичних компетенцій учнів. Однак традиційні методи викладання іноді не відповідають потребам сучасного покоління, яке зростає в умовах цифрової епохи. Тому використання інтерактивних технологій та цифрових інструментів у навчальному процесі стає нагальною необхідністю [1].

Завдяки сучасним технологіям вчителі можуть створювати інтерактивні уроки, що допомагають краще розуміти складні математичні концепції. Доступ до цифрових ресурсів розширює можливості навчання як у класі, так і поза ним. Використання візуалізацій, динамічних моделей та онлайн-платформ робить вивчення тригонометрії більш доступним і цікавим для учнів [2].

1. Інтерактивні методи у викладанні тригонометрії. Інтерактивні методи навчання передбачають активну участь учнів у процесі навчання, що сприяє кращому розумінню та засвоєнню матеріалу [3]. Серед найбільш ефективних методів можна виокремити:

- Метод проєктів — передбачає самостійну або групову роботу над проєктами, пов'язаними з тригонометрією. Наприклад, учні можуть створити макет моста або будівлі, використовуючи тригонометричні розрахунки для визначення кутів нахилу конструкцій.
- Ігровий підхід — використання ігрових елементів у навчальному процесі. Наприклад, учитель може організувати математичний квест, де учні шукають приховані підказки у класі, розв'язуючи тригонометричні рівняння.
- Дискусії та проблемне навчання — спрямовані на активізацію мислення та аналіз складних математичних проблем. Наприклад, учитель може запропонувати задачу на визначення висоти недоступного об'єкта (дерева чи будівлі) за допомогою тіні та тригонометричних функцій.

2. Цифрові інструменти для вивчення тригонометрії. Сучасні цифрові технології відкривають широкі можливості для покращення викладання тригонометрії. Серед найпопулярніших цифрових інструментів можна виділити [4]:

- Графічні калькулятори та програми для побудови графіків (GeoGebra, Desmos) — дозволяють візуалізувати тригонометричні функції у вигляді графіків. Наприклад, учні можуть самостійно побудувати графік синусоїди та дослідити, як змінюються її параметри при зміні коефіцієнтів.
- Онлайн-платформи та навчальні ресурси (Khan Academy, Wolfram Alpha) — надають доступ до інтерактивних уроків, тестів, відеолекцій та практичних завдань. Наприклад, на Khan Academy учні можуть пройти курс з тригонометрії, виконуючи вправи з автоматичною перевіркою відповідей.
- Програмування та STEM-підхід — застосування мов програмування (Python, Scratch) для моделювання тригонометричних процесів. Наприклад, учні можуть написати програму, яка анімує рух маятника або моделює поширення звукових хвиль у просторі.

Використання інтерактивних методів та цифрових інструментів у викладанні тригонометрії значно покращує якість навчального процесу. Поєднання сучасних технологій із традиційними підходами сприяє кращому засвоєнню матеріалу, підвищенню мотивації учнів та розвитку аналітичного мислення. Завдяки цифровим інструментам учні мають змогу не лише засвоювати теоретичні знання, а й застосовувати їх у реальних ситуаціях.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Мороз, О. В. Використання ІКТ при вивченні математики у ЗЗСО (на прикладі 5 класу та теми «Дробі»). // Збірник наукових праць. – Київ: Освіта, 2024. – С. 45–60.
- [2] Генсерук, Г. В., Гром'як, Р. Б. Цифрові інструменти для створення інтерактивного навчального середовища. // Матеріали конференції. – Львів: Львівський національний університет, 2024. – С. 78–92.
- [3] Семеніхіна, О. В. Методика проведення інтерактивних навчальних занять із цифровими технологіями. // Науковий журнал. – Харків: Харківський національний університет, 2024. – № 5. – С. 112–130.
- [4] Морейко, Т. В. Від теорії до практики. Сучасні інтерактивні технології навчання (методичні матеріали). – Одеса: Педагогічна думка, 2023. – 214 с.

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: oksana.olasiuk@gmail.com

СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЯКОСТІ ПОКРОКОВИХ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕСТІВ У СИСТЕМІ STACK З МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

І.В. ОРЛОВСЬКИЙ, В.С. МИКИТЕНКО

У цифровій освіті ефективність навчання визначається не лише доступом до онлайн-платформ, а і якістю методів оцінювання, особливо у математичних дисциплінах, де важливо оцінювати не лише кінцевий результат, а й хід міркувань студента.

Платформа Moodle — один із найпоширеніших засобів дистанційного навчання, що дає змогу створювати структуровані курси, проводити контрольні заходи й аналізувати успішність студентів. Зокрема, Moodle підтримує достатньо широкий спектр тестових завдань. Використовуючи тип запитання Embedded answer та мову розмітки HTML, на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей (МАтаТЙ) КПІ ім. Ігоря Сікорського розробляються так звані покрокові тести (Step-by-Step tests),

Обчислити інтеграл

$$\int (x-7) \ln(x-7) dx.$$

Увага!
Дотримуйтесь таких правил унесення даних:

- записуйте відповідь без пробілів;
- дробові числа записуйте звичайним нескоротним дробом, без виділення цілої частини, використовуючи $\frac{\text{}}{\text{}}$;
- не змінюйте** порядок запису доданків в останній рівності;
- при записі функції:
 - степені записуйте за допомогою знаку $^{\wedge}$. Наприклад

Вираз	Запис у комірці
$(x-7)^3$	$(x-7)^{\wedge}3$
$\sqrt{x^5}$	$x^{\wedge}(5/2)$

- використовуйте стандартні позначення функцій, записуючи аргумент у дужках. Наприклад

Вираз	Запис у комірці
e^x	$e^{\wedge}x$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln \frac{x}{2}$	$\ln(x/2)$

- знак множення не записувати або, у разі необхідності, записувати як $\ast$, а знак ділення записувати як $/$. Наприклад

Вираз	Запис у комірці
$\frac{2\ln^2 x}{5x} - \frac{1}{x}$	$2\ln^{\wedge}2(x)/(5x)-1/x$
$x \sin x$	$x^{\ast} \sin(x)$

Розв'язання.

Прointегруємо частинами

$$I = \int (x-7) \ln(x-7) dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du = \frac{(x-7)^2}{2} \ln(x-7) - \int \frac{(x-7)^2}{2} \cdot \frac{1}{x-7} dx = \frac{(x-7)^2}{2} \ln(x-7) - \frac{1}{2} \int (x-7) dx = \frac{(x-7)^2}{2} \ln(x-7) - \frac{1}{4} (x-7)^2 + C$$

(а)

Знайти невідомий інтеграл

$$\int (x+3)^5 \cdot \ln(x+3) dx = \int \left(\frac{1}{(x+3)^5} \right) \ln(x+3) dx = \frac{\ln(x+3)}{(x+3)^5} - \int \left(\frac{1}{(x+3)^5} \right) \cdot \frac{1}{x+3} dx = \frac{\ln(x+3)}{(x+3)^5} - \frac{1}{36} (x+3)^{-4} + C$$

Your last answer was interpreted as follows:

$$\frac{\ln(x+3)}{6} \cdot (x+3)^6$$

The variables found in your answer were: [x]

Your last answer was interpreted as follows:

$$\frac{(x+3)^6}{6}$$

The variables found in your answer were: [x]

Your last answer was interpreted as follows:

$$\frac{\ln(x+3)}{6} \cdot (x+3)^6 - \frac{(x+3)^6}{36} + C$$

The variables found in your answer were: [C, x]

⚠ Your answer is partially correct.

Інтеграл обчислюється інтегруванням частинами $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\int (x+3)^5 \cdot \ln(x+3) dx = \int \left(\frac{1}{(x+3)^5} \right) \ln(x+3) dx = \frac{\ln(x+3)}{(x+3)^5} - \int \left(\frac{1}{(x+3)^5} \right) \cdot \frac{1}{x+3} dx = \frac{\ln(x+3)}{(x+3)^5} - \frac{1}{36} (x+3)^{-4} + C$$

(б)

Рис. 1. Приклад покрокового тесту: (а) стандартного, (б) STACK

які оцінюють не лише кінцевий результат, а й процес розв'язання задач (Рис. 1а), що підвищує об'єктивність контролю. Їх розробка потребує алгоритму, який враховує технічні можливості Moodle [1]. У КПІ такі тести створено для всіх тем курсу «Вища математика», і вони вже понад шість років успішно застосовуються в освітньому процесі.

Покрокові тести перевіряють не лише кінцевий результат, а й логіку розв’язання задач, що робить оцінювання об’єктивнішим і наближає його до традиційного письмового контролю. Їх створення потребує врахування технічних особливостей Moodle. Окрім контролю, такі тести можна використовувати як навчальні тренажери для відпрацювання розв’язання типових задач — студенти отримують зворотний зв’язок і формують навички послідовного мислення. Головною перевагою є можливість оцінювати логіку міркувань і зменшувати ймовірність випадкових вгадувань. Недоліками є чутливість до синтаксичних помилок і складність введення складних математичних виразів. Це змушує викладачів створювати спеціальні правила запису відповідей (Рис. 1а) і періодично оновлювати базу правильних варіантів, що підвищує трудомісткість розробки тестів.

Для усунення цих обмежень кафедра МАтаТІ почала впровадження плагіна STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel) — інструмента символічної перевірки математичних виразів. STACK забезпечує автоматичну перевірку рівнянь, обчислень і графіків у режимі реального часу, генерує різні варіанти завдань та підтримує покрокове тестування. Студенти отримують миттєвий зворотний зв’язок і пояснення, що сприяє самокорекції та глибшому розумінню матеріалу. Завдяки можливості аналізувати не лише кінцеву відповідь, а й проміжні кроки, STACK істотно підвищує об’єктивність і зменшує рутинне навантаження викладача (Рис. 1б).

Розгляд особливостей і функціональне порівняння обох типів тестів наведено у [2]. У цій доповіді здійснено статистичний аналіз їх якості на основі положень Класичної теорії тестів. Результати дозволяють порівняти ефективність покрокових і STACK-тестів, визначити їх сильні та слабкі сторони й надати рекомендації щодо вдосконалення оцінювання. Аналіз спрямований на підвищення надійності контролю та подальший розвиток цифрових технологій навчання у математичній освіті.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Омельчук Т.С., Орловський І.В., Тимошенко О.А. *Особливості створення та аналіз якості покрокових тестів з лінійної алгебри та аналітичної геометрії* // Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». — 27–28 грудня, 2018. — Київ. — С. 268-271.
- [2] Orlovskiy I.V., Tymoshenko O.A. *Beyond Traditional Testing: Enhancing Mathematical E-learning with STACK and Step-by-Step Assessment* // International scientific and practical conference «Innovative Digital Methods in Education and Research». — March 27–28, 2025. — Berehove, Ukraine. — P. 19-22

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: orlovskiy@matan.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: viktoriamykytenko.om01@gmail.com

RAISE SPECIFICATION LANGUAGE ЯК ІНСТРУМЕНТ ОСВІТИ В ПРИКЛАДНІЙ МАТЕМАТИЦІ

О.Г. ПІСКУНОВ, Н.П. ТУПКО

Важливим аспектом у галузі інформаційних систем і технологій є потреба в описі та поясненні алгоритмів. Різні автори вирішують це по-різному. Наприклад, Кнут розробив власний асемблер. Кормен [1] для цього використовує псевдокод. А Макконнелл [2] використанню псевдокоду присвятив окрему главу.

З другого боку існують формальні методи, що вважаються корисними під час розробки ПЗ. Однак у численних оглядах, присвячених їх застосуванню (наприклад, Парнас [3]), наголошується, що їх практичне впровадження досі недостатнє. Серед причин цієї ситуації називають не лише відносну складність цих методів, але й відсутність потрібної кількості відповідних інженерів.

Базовим елементом будь-якого формального методу є відповідна мова, що отримала назву мови формальних специфікацій. Варто відзначити, що лише Б. Мейєру вдалося у його мові Eiffel поєднати мову формальної специфікації з мовою програмування. У більшості ж випадків мови формальної специфікації відрізняються від мов програмування, що потребує додаткового часу на їхнє опанування. До таких мов належать, зокрема, Z [4] та Raise Specification Language (RSL) [5].

При цьому слід зауважити: опанування мови є значно простішим, ніж засвоєння методу формальної розробки. Сама така мова оперує поняттями аксіом, кванторів загальності та існування, предикатів, функцій, областей визначення тощо. З огляду на це, для студентів математичних спеціальностей опанування мови формальної специфікації не становитиме суттєвих труднощів.

Після аналізу обох мов для навчальних цілей було обрано RSL. Вибір цієї мови зумовлений наявністю стабільно працюючої утиліти для перевірки синтаксису та узгодженості типів і вбудованого типу дійсних чисел. Зокрема можна відзначити, що:

- (1) RSL підтримує кілька стилів формальної специфікації: від абстрактного алгебраїчного до імперативного. Це дозволяє використовувати її для V-подібної розробки ПЗ, що добре підходить для невеликих навчальних проєктів.

- (2) Алгебраїчний стиль дозволяє застосовувати RSL для пояснення абстрактних типів даних згідно розробці по контракту Б. Мейєра і, загалом, робить роботу подібною до діяльності математиків [6].
- (3) Також алгебраїчний стиль дозволяє на початкових етапах розробки формулювати умови тестування ПЗ. Це дає змогу використовувати його для курсів з тестування і користуватися особливостями розроблення через тестування, уникаючи рефакторингу.
- (4) Можливість використання різних областей визначення і множин значень дозволяє ілюструвати такі важливі для ООП поняття, як ко- і контраваріантність.
- (5) Імперативний стиль дозволяє записувати будь-які алгоритми на рівні звичних операторів та використовувати ці записи як коментарі в програмах (як це пропонується в [2]).
- (6) Крім того, утиліта для перевірки синтаксису дає змогу додатково перевіряти відповідність алгебраїчної та імперативної специфікацій.

Після проходження кількох курсів з використанням мови RSL (зокрема, з модульного тестування, ООП, методів обчислень тощо) майбутні розробники зможуть застосовувати елементи формальних методів. Це сприятиме підвищенню надійності ПЗ та покращенню його якості. Зазначимо, що таким чином реалізується пропозиція Д. Парнаса, яка передбачає поступове навчання методам формальної розробки та наближення їх до практичного використання. Даний підхід був впроваджений в учбовий процес для студентів кількох курсів спеціальності «Прикладна математика».

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. *Introduction to Algorithms*.— 3rd ed.—Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 2009.—1312 p.—ISBN 978-0-262-03384-8.
- [2] McConnell S. *Code Complete: A Practical Handbook of Software Construction*.— 2nd ed.—Redmond, WA, USA: Microsoft Press, 2004.—960 p.—ISBN 978-0735619678.
- [3] Parnas D.L. Really Rethinking 'Formal Methods' // *Computer* (IEEE Computer Society).—2010.—Vol.43.—P.28-34.—DOI: 10.1109/MC.2010.22.
- [4] Jacky J. *The Way of Z: Practical Programming with Formal Methods*.— USA, New York: Cambridge University Press, 1997.—350 p.—ISBN 0-521-55041-6.
- [5] Haxthausen A.E. *Introduction to RAISE*. Course 02263.— DTU Compute Technical University of Denmark, 2020.—32 p.
- [6] Піскунов О.Г., Тупко Н.П., Петренко І.А. Алгебраїчне проектування програмного забезпечення // *Інформаційні технології та суспільство*.—2024.—№5 (11).—С.50-59.

ДУКАІ, Київ, Україна

Email address: oleksii.piskunov@npp.kai.edu.ua

ДУКАІ, Київ, Україна Київ, Україна

Email address: natalia.tupko@npp.kai.edu.ua

СЕКЦІЯ 5
**Історія і методика викладання математики та
інформатики**

FROM THE EXPERIENCE OF TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES IN MULTINATIONAL ACADEMIC GROUPS OF KAI

O.W. KARUPU, T.A. OLESHKO, V.V. PAKHNENKO, V.K. REPETA

The State University “Kyiv Aviation Institute” (KAI) was formed on the 7th of November 2024 as a result of the reform of the National Aviation University, which was a descendant of the Kyiv Aviation Institute, established in 1933. KAI is a reputable international center for training specialists for aviation and other industries, which enrolls both Ukrainian and foreign students. Students from different countries study at KAI — Turkey, Nigeria, Egypt, and others. Most students study on technical specialties, so the curricula for training future specialists in all engineering and IT fields include the study of mathematical disciplines.

Since 1999, the university has been implementing English-language education, when all subjects are taught in English. Since English is one of the official languages of ICAO (International Civil Aviation Organization), the opportunity to receive professional education in English is very important for future aviation specialists. Since 2007, we have been conducting research on the methodology of teaching mathematical subjects to foreign and Ukrainian students within the framework of the English Language Education Project (see [1, 2]).

Methodological support of the educational process is provided by numerous textbooks on mathematical disciplines authored by our university teachers, including authors. In particular, we are the authors and co-authors of a number of textbooks on mathematical disciplines in English, including mathematical analysis, probability theory and mathematical statistics, and some other areas (for example, English in mathematical practice), etc. (see [3, 4, 5]).

It should be noted that the work of a teacher in multinational academic groups including both Ukrainian and foreign students, has certain peculiarities. Certain features of teaching mathematical disciplines to students of technical specialties in multinational academic groups were studied in (see [6, 7]).

The specifics of using electronic resources in teaching mathematical disciplines was considered in (see [7, 8, 9]).

REFERENCES

- [1] Karupu O.V., Oleshko T.A., Pakhnenko V.V. *About teaching of the mathematical disciplines for foreign students* // EEJET[Internet]. — 2012. — V. 56, No 2. — P. 11–14., <https://journals.uran.ua/eejet/article/view/3657>
- [2] Репета В.К., Репета Л.А. *Викладання вищої математики іноземним студентам: проблеми і шляхи їх вирішення* // Математика у технічному університеті ХХІ сторіччя: зб. наук. праць за матеріалами дистанційної Всеукраїнської наук. конф. (Краматорськ, 15–16 травня 2017 р.). — Краматорськ, 2017. — С. 163–164.
- [3] Denisiuk V.P., Demydko V.G., Karupu O.V., Oleshko T.A., Pakhnenko V.V., Repeta V.K. *Mathematical analysis: Manual*. — Kyiv: NAU, 2013. — 396 p.
- [4] Denisiuk V.P., Bobkov I.A., Grishina L.I., Demidko V.G., Karupu O.W., Oleshko T.A., Pakhnenko V.V., Pogrebetska T.O., Repeta V.K. *Higher mathematics. Part 4: Theory of probability and mathematical statistics. Manual*. — Kyiv: NAU, 2013. — 248 p.
- [5] Карупу О.В., Олешко Т.А., Пахненко В.В., Репета В.К. *Англійська мова в математичній практиці: навчальний посібник*. — К.: КАІ, 2025. — 240 с.
- [6] Карупу О.В., Олешко Т.А., Пахненко В.В. *Про особливості викладання математичних дисциплін студентам технічних спеціальностей в мультинаціональних академічних групах* // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. — 2019. — V. VII, No 188. — P. 21–24.
- [7] Karupu O., Oleshko T., Pakhnenko V. *Modeling Future Aviation and IT Specialists' Professional Skills Development on Mathematical Practical Training with Application of Information Technologies* // 2021 IEEE 3rd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). — 2021. — P. 215–220. <https://doi.org/10.1109/ATIT54053.2021.9678904>
- [8] Karupu O.W., Oleshko T.A., Pakhnenko V.V., Pashko A.O. *Applying information technologies to mathematical education of IT specialists in English-speaking academic groups* // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics. — 2019. — No 4. — P. 70–75. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/4.9>, <https://bphm.knu.ua/bphm/article/view/122>
- [9] Karupu O., Oleshko T., Pakhnenko V., Pashko A. *Application of Google Workspace in Mathematical Training of Future Specialists in the Field of Information Technology* // Advances in Computer Science for Engineering and Education VI. ICCSEE 2023. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies, vol 181 / ed. by Z. Hu, I. Dychka, M. He. — Cham: Springer, 2023. — P. 939–949. https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0_80

STATE UNIVERSITY KAI, KYIV, UKRAINE

Email address: olena.karupu@npp.kai.edu.ua

STATE UNIVERSITY KAI, KYIV, UKRAINE

Email address: tetiana.oleshko@npp.kai.edu.ua

STATE UNIVERSITY KAI, KYIV, UKRAINE

Email address: valeriia.pakhnenko@npp.kai.edu.ua

UKRAINIAN CENTER FOR EDUCATION QUALITY ASSESSMENT, KYIV, UKRAINE

Email address: viktor.repeta@npp.kai.edu.ua

DIDACTIC POTENTIAL OF THE SKEW LINES DISTANCE PROBLEM IN THE CONTEXT OF TRAINING ENGINEERING SPECIALISTS

B.S. TSYBAN, H.YA. TULUCHENKO

The problem of finding the shortest distance between skew lines is fundamental in the course of analytical geometry; however, its teaching is often reduced to demonstrating purely computational methods. This approach diminishes the educational value of the topic and hinders students' appreciation of its engineering applications.

It is methodologically effective to introduce students to the key methods for solving the skew lines distance problem (vector, parallel planes, common perpendicular, projection, and geometric), with most of these methods suitable for independent study. This approach optimizes classroom time while ensuring the development of essential professional competencies. The cornerstone of this methodology is presenting each analytical method in the context of its practical application.

The Vector Method (using the scalar triple product) is the fastest analytical approach, where the distance is defined as the height of the parallelepiped constructed on the lines' direction vectors and the vector connecting them. This formula is ideal for rapid calculations in space navigation and air traffic control [1]. The method is used to calculate the minimum separation distance between the linear segments of satellite or aircraft trajectories.

The Parallel Planes Method is based on a geometric principle: the distance between skew lines equals the distance between two parallel planes that contain these lines. This approach is applied in architecture and construction to determine the minimum safe clearance between parallel structural elements, such as bridge beams [2].

The Common Perpendicular Method is the most fundamental and the only one that enables determining the coordinates of the closest points P and Q on the lines. Determining these points facilitates precise evaluation of whether the movable links of a manipulator are at a safe distance, constituting the basis for its design [3].

The Geometric Method (via projection construction) is based on projecting space onto a plane perpendicular to one of the lines. The distance is reduced to the distance from a point to a line on this plane. This approach is key in 3D rendering algorithms and Collision Detection in computer graphics and games,

as the transition to 2D projection significantly simplifies the calculation of the minimum distance between objects [4].

The Vector Projection Method (Scalar Projection) provides the geometric justification for the scalar triple product formula. The distance is considered the length of the scalar projection of the vector connecting the lines ($\overrightarrow{AC}$) onto the direction of the common perpendicular $\vec{n}$. This method is widely used in geodesy and cartography for calculating the shortest distance between two non-intersecting utility lines (e.g., power lines) when designing mainline networks. It is also applied in the oil and gas industry to calculate the minimum permissible distance between existing and new skew pipelines [5, 6].

An integrated approach, emphasizing the practical value of each analytical method, significantly enhances the quality of specialist training. This approach fosters the development of systemic thinking, as students learn to select the optimal mathematical apparatus based on the requirements of a specific engineering problem. Structured exploration of diverse applications, alongside analytical methods and visual tools, equips students to apply the mathematical apparatus effectively in engineering.

REFERENCES

- [1] Hejduk M.D., Frigm R.L. *Collision Avoidance 'Short Course' Part I: Theory*, NASA Technical Report NASA/TP-20170008904, 2017. [Online]. Available: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20170008904/downloads/20170008904.pdf>
- [2] Sacks R., Eastman C., Lee G., Teicholz P. *BIM Handbook: A Guide to Building Information Modeling for Owners, Designers, Engineers, Contractors, and Facility Managers*. — 3rd ed. — Wiley, 2018. — 659 p.
- [3] Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G. *Robotics: Modelling, Planning and Control* — Springer, 2009. — 632 p.
- [4] Eberly D.H. *3D Game Engine Design: A Practical Approach to Real-Time Computer Graphics* — Morgan Kaufmann, 2006. — 1040 p.
- [5] Croft A., Davison R. *Mathematics for Engineers: A Modern Interactive Approach*. — 3rd ed. — Pearson, 2008. — 1173 p.
- [6] Mohsin M.E.O.M., Majid M.S.A., Yahya A.B. *Safety distance between underground natural gas and water pipeline facilities. // Reliability Engineering & System Safety*. — 2014. — V. 138. — P. 53–60.

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY "KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE", KHARKIV, UKRAINE

Email address: `tsyban@ukr.net`

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY "KHARKIV POLYTECHNIC INSTITUTE", KHARKIV, UKRAINE

Email address: `tuluchenko@ukr.net`

ВИКЛИКИ ЩОДО ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ПІДГОТОВКИ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ В УКРАЇНІ

О.І. БАЛІНА, І.С. БЕЗКЛУБЕНКО, О.В. БОГДАНОВ, Ю.П. БУЦЕНКО

У технічних вишах зменшення кількості набраних на перший курс студентів у більшості випадків викликає, разом з іншими обставинами, урізання годин, що виділяються на фундаментальну підготовку, і це за обставин, коли першокурсники виявляються з кожним роком усе гірше мотивовані та підготовлені до навчання! З великими проблемами йде омоложення викладацької спільноти, молодь не тільки не виявляє особливого бажання починати займатись педагогічною діяльністю, але й просто полишає її за найменшої нагоди. Необхідність «збереження контингенту», викликає серйозні конфлікти у викладацькому середовищі, не кажучи вже про якість підготовки таких фахівців. На цьому фоні наразі проявляється не тільки дефіцит фахівців інженерних спеціальностей, але й просто безпомічність у багатьох випадках щодо можливостей їх залучення — випускники бакалаврату відмовляються навіть від співбесід з серйозними роботодавцями, одночасно відмовляючись від навчання у магістратурі. У процесі ж навчання все більше студентів намагаються ухилитись від дотримання принципів академічної доброчесності. Причини такої ситуації добре зрозумілі: більшість студентів мають після шкіл недостатній рівень знань та умінь, переважно відсутні навички ефективного засвоєння навчального матеріалу та практичного його застосування. Істотну частку їх, до того ж, складають ті, хто травмований вимушеним переїздом з місця постійного проживання або існуючою загрозою для їх рідних та близьких. У воєнний час, помітно збільшився відсоток студентів (навіть на молодших курсах), які поєднують навчання на стаціонарі з роботою, у тому числі на повний робочий день. Усі ці обставини негативним чином впливають на ефективність навчального процесу.

По-перше, нам видається безальтернативним збереження як опції дистанційної форми навчання. Йдеться саме про опціональний характер такої форми навчання, розрахований на можливість збереження у студентських колективах тих, для кого вона є безальтернативною у зв'язку з переліченими вище обставинами.

По-друге, студенти першокурсники повинні мати можливість належним чином адаптуватись до вимог, які забезпечують належний рівень

засвоєння ними фундаментальних дисциплін, попри, ймовірно, недостатню шкільну підготовку. Це вимагає як додаткових годин на вивчення таких дисциплін, так і наявності спеціальних адаптаційних курсів, можливо, платних. Така практика, наприклад, характерна для КПІ імені Ігоря Сікорського.

По-третє, навіть за умови реалізації перших двох заходів, неодмінно має існувати практика надання студентам максимально гнучких індивідуальних графіків навчання, до того ж із жорстким їх дотриманням.

Нарешті, по-четверте, підтримання належного рівня мотивації у студентів неможливе без тісного зв'язку навчальних курсів з практикою застосування набутих знань, відсутність чого є, на наш погляд, принциповим недоліком шкільної освіти в Україні. Йдеться не тільки про контакти з дослідницькими, проєктно-конструкторськими та виробничими підприємствами, але й про якомога швидше використання вивченого студентами у наступних навчальних курсах, наприклад, навичок програмування та експлуатації програмних продуктів у курсах математики, фізики, прикладної геометрії тощо.

Анотація. У роботі розглядаються питання фундаментальної підготовки у технічному ВНЗ України на сучасному етапі. Аналізуються проблеми, пропонуються принципові підходи до організації навчального процесу, орієнтовані на підготовку фахівців у необхідних кількостях та адекватної викликам часу якості.

Ключові слова: профорієнтаційна робота, фундаментальна підготовка, дистанційна форма навчання, мотивація.

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

Email address: elena.i.balina@gmail.com

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

Email address: i.bezklubenko@gmail.com

НТУ України «Київський політехнічний інститут» ім. І. Сікорського, Київ, Україна

Email address: sbov58968-ames@l11.kpi.ua

НТУ України «Київський політехнічний інститут» ім. І. Сікорського, Київ, Україна

Email address: armchairdoc@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є У МАТЕМАТИЧНОМУ АНАЛІЗІ НЕПЕРЕРВНИХ СИГНАЛІВ

К.Ю. БАРАНОВА

Перетворення Фур'є є одним із найважливіших інструментів математичного аналізу, що здійснює перехід від часової області до частотної. Це дозволяє подати довільну інтегровну функцію $f(t)$ як суперпозицію нескінченної кількості гармонічних коливань різних частот:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

де $F(\omega)$ — спектральна функція, що характеризує частотний склад сигналу.

Обернене перетворення має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Якщо $f(t) \in L_2(\mathbb{R})$, то виконується рівність Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega,$$

що відображає збереження енергії сигналу при переході з часової області у частотну.

Перетворення Фур'є часто використовується у задачах аналізу неперервних сигналів, оскільки дозволяє виділити їхні частотні характеристики. Це особливо важливо в електроніці, акустиці, телекомунікаціях та цифровій обробці зображень. Наприклад, при фільтрації сигналів використовують властивість, що згортка у часовій області відповідає множенню у частотній:

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}.$$

Крім того, перетворення Фур'є переводить операцію диференціювання у множення:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega),$$

що спрощує розв'язування диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами.

У математичному аналізі перетворення Фур'є цінне тим, що дозволяє не лише вивчати внутрішню структуру функцій, але й аналізувати їхню

динаміку та властивості у частотному просторі. Тому воно є фундаментом спектральних методів, які застосовуються для розв'язання ключових рівнянь математичної фізики, що описують, наприклад, теплопровідність або хвильові процеси. Фактично, воно слугує основою для цілого ряду методів розкладання функцій за ортогональними базисами, будучи тісно пов'язаним із класичними рядами Фур'є.

Перетворення Фур'є — це універсальний механізм для аналізу неперервних сигналів. Його ключова перевага полягає у здатності переводити дані з часової у частотну область, що значно полегшує роботу з диференціальними рівняннями та забезпечує глибоке розуміння розподілу енергії в сигналі. Цей метод слугує фундаментальною базою як для академічних досліджень, так і для численних практичних розробок у сучасній інженерії та науці.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Синявська О. О., Слюсарчук П. В. *Ряди Фур'є: навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика.* — Ужгород, 2015. — 70 с.
- [2] Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. *Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є: навчальний посібник для фахівців в галузі зв'язку.* — Одеса, 2021. — 122 с.
- [3] Конончук Г. Л., Прокопець В. М., Стукаленко В. В. *Вступ до Фур'є-оптики: навчальний посібник.* — Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. — 320 с.

ВНУ ІМЕНІ ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: katerynabaranova23@gmail.com

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ПІДСТАНОВОК

Д.М. БУШЕВ

Питання про розв'язування функціональних рівнянь — одне з найстаріших у математиці.

Диференціальні та інтегральні рівняння вивчаються у відповідних курсах вищої математики. Функціональним рівнянням, які не є диференціальними та інтегральними, приділяється значно менше уваги, як у курсі математичного аналізу, так і в курсі функціонального аналізу, хоча ці рівняння часто пропонуються для розв'язування на математичних змаганнях: олімпіадах, турнірах, конкурсах.

Метод підстановок — найбільш поширений і найбільш дієвий спосіб розв'язування функціональних рівнянь. Він дає змогу розв'язування функціональних рівнянь звести до розв'язування рівнянь відомих типів, зокрема алгебраїчних рівнянь та їх систем. Однак конкретних рекомендацій, коли і як його можна використати, не існує.

При розв'язуванні багатьох функціональних рівнянь методом підстановок розв'язки спочатку вгадують, а потім підбирають потрібні підстановки для їх одержання. В деяких випадках, навіть вгадавши розв'язки, зовсім непросто підбирати потрібні підстановки щоб їх одержати. Успішне розв'язування одного рівняння, аж ніяк не гарантує успіху при розв'язуванні іншого. Наша робота — спроба змінити ситуацію хоча б для деяких функціональних рівнянь (зрозуміло, що не для всіх).

Суть методу підстановок полягає у виборі потрібних підстановок для розв'язування функціонального рівняння. Оскільки алгоритми вибору потрібних підстановок для розв'язування багатьох функціональних рівнянь невідомі, розглянемо рівняння, за загальним виглядом яких можна записати множину всіх його розв'язків.

Встановлено, що до таких рівнянь відносяться функціональні рівняння виду $a(u, v)f^n(u) + b(u, v)f^n(v) = 0$ і $a(u, v)f^n(u) + b(u, v)f^n(v) = g(u, v)$, де $a(u, v)$, $b(u, v)$, $g(u, v)$ — довільні задані дійсні функції від двох дійсних змінних, $f(t)$ — невідомі функції та розв'язки цих рівнянь в загальному випадку, на нашу думку, пропонуються вперше.

Позначимо через $M_0(f) = \{f : a(u, v)f^n(u) + b(u, v)f^n(v) = 0\}$ множину всіх розв'язків однорідного функціонального рівняння.

В [2] була сформульована теорема 1.

Наслідок 1. Для множини розв'язків функціонального рівняння

$$\phi^m(v)f^n(u) - \phi^n(u)f^m(v) \equiv 0$$

справедливі твердження (a)–(d), тобто $(\phi^m(v)f^n(u) - \phi^n(u)f^m(v) \equiv 0) \wedge (M_0(f) = \{f : \phi^m(v)f^n(u) - \phi^n(u)f^m(v) \equiv 0\}) \Rightarrow (a)–(d)$.

- a. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) = \phi(t)\})$.
- б. $(n = 2s - 1 + m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) = \phi(t), f_2(t) = -\phi(t)\})$.
- в. $(n = 2s + m = 2l) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0\} \cup M_0^\infty = \{f(t) \equiv 0\} \cup \{f_\xi(t) \equiv 0, t \in E, \equiv \{-\phi(t), t \in D(\phi)\}E : (\forall E \subseteq D(\phi))\})$.
- г. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv K\phi(t) : K \in \mathbb{R}\})$.
- д. $(n = m = 2s) \Rightarrow M_0(f) = \{Kf_\xi(t) = \{K\phi(t), t \in E, -K\phi(t), t \in D(\phi) \setminus E\} : (\forall E \subseteq D(\phi))(K \in \mathbb{R})\}$.

Наведемо приклад застосування цього наслідку. Розв'язати функціональні рівняння.

Приклад 1. $v^n f^n(u) - u^n f^n(v) \equiv 0$. Оскільки $\phi(t) \equiv t$, то за наслідком 1 маємо:

- a. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) \equiv t\})$.
- б. $(n = 2s - 1 + m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) \equiv t, f_2(t) \equiv -t\})$.
- в. $(n = 2s + m = 2l) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0\} \cup M_0^\infty = (M_0^\infty = \{f(t) \equiv 0, f_\xi(t) = t, t \in E, -t, t \in \mathbb{R} \setminus E : (\forall E \subseteq \mathbb{R})\}))$.
- г. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv Kt : K \in \mathbb{R}\})$.
- д. $(n = m = 2s) \Rightarrow (M_0(f) = \{Kf_\xi(t) = \{Kt, t \in E, -Kt, t \in \mathbb{R} \setminus E\} : (\forall E \subseteq \mathbb{R})(K \in \mathbb{R})\})$.

Матеріал наших досліджень покликаний допомогти вчителю у проведенні позакласної роботи з учнями, які бажають досконало, поглиблено і всебічно вивчати шкільну математику, допомогти розширити їх математичний кругозір, підготувати до участі в математичних змаганнях. Він буде корисний студентам, учням, які захоплюються математикою, а також учителям закладів загальної середньої освіти, керівникам гуртків і факультативів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Федак І. В. *Функціональні рівняння: Навчальний посібник. (Видання друге).* — Івано-Франківськ: ПНУ, 2018. — 144 с.
- [2] Бушев Д. М. *Знаходження формул для розв'язків деяких класів функціональних рівнянь.* — Київ: XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Тези доповідей., 2023. — С. 221,222.

ВНУ ім. ЛЕСІ УКРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: bushev-d@ukr.net

АКАДЕМІК МИХАЙЛО КРАВЧУК — ЗАЧИНATEЛЬ ОЛІМПІАДНОГО РУХУ З МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНІ

Н.М. ЗАДЕРЕЙ, Г.Д. НЕФЬОДОВА, Т.Д. СТАДНІЙЧУК, М.О. ХОХОТВА

Мій скарб — це знайдені таланти. Помітити їх,
не дати зів'янути — хіба це не честь для патріота?

М. П. Кравчук

У 2025 році, під час війни, у стінах КПІ імені Ігоря Сікорського відбувається XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. Перша така конференція з ініціативи професора кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Ніни Вірченко пройшла у 1992 році.

Михайло Кравчук, видатний український математик, науковець, педагог, громадський діяч, завідувач кафедри вищої математики КПІ (1934–1938) натхненно розбудовував українську науку та освіту, допоки не був знищений тоталітарним радянським режимом. Плідна і вагома діяльність Михайла Пилиповича в освітній галузі тривала понад 20 років. Його наукові та педагогічні досягнення є прикладом високої наукової культури та патріотизму. Слід зазначити, що важливою сторінкою освітницької діяльності академіка Михайла Кравчука була організація першої математичної олімпіади в Україні. Ця подія відбулася рівно 90 років тому і започаткувала математичний олімпіадний рух в Україні.

Перша Київська математична олімпіада була проведена в Київському державному університеті імені Тараса Шевченка 4-5 червня 1935 року за активної участі академіка Кравчука. Михайло Пилипович очолив журі олімпіади та виступив на її відкритті перед учнями та вчителями київських шкіл з доповіддю «Про завдання і методи математичних наук». На жаль, доповідь не збереглася, оскільки, як і усі роботи вченого, була вилучена з усіх бібліотек після арешту Михайла Кравчука. Метою олімпіади було розвинути у школярів інтерес до самостійного математичного мислення, виховати любов до науки, відчувати свої творчі можливості.

Олімпіадні завдання були спільними для учнів 9–10 класів. Кожному учаснику олімпіади було запропоновано 13 задач, з них три обов'язкові й десять задач на вибір. Завдання охоплювали різні розділи математики. Інформація про кількість учасників та підсумки олімпіади не збереглася [1].

Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

1. Обчисліть значення виразу $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$ при $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0,19$, $c = 0,18$, $d = 0,04$.
2. Розв'яжіть рівняння $4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20,75} = \sqrt{2}$.
3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$
4. Додатні числа $u_1, u_2, \dots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що
$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$
5. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Доведіть, що $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.
6. При яких значеннях a , b , c многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ націло ділиться на $(x-1)^3$?

Задачі олімпіади 1935 року є актуальними і донині. Наприклад, одні з найбільш кваліфікованих педагогів-математиків України А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський та М. Якір розглядали зі школярами деякі олімпіадні задачі та помістили їх в один зі своїх підручників [2]. Педагоги пропонують учням спробувати сили у розв'язанні задач цієї олімпіади.

Академік Кравчук започаткував традицію високого рівня викладання математики в київській політехніці, вчений поєднував у собі видатного науковця, талановитого педагога, блискучого лектора. Його лекції відзначалися чіткістю, логічністю, естетичною довершеністю. Відомо, що Михайло Пилипович сприяв розвитку талановитої молоді, яку запалював своїм ентузіазмом. Один з його талановитих учнів Олександр Смогоржевський лише завдяки Михайлу Кравчуку отримав можливість займатися наукою, надалі професор О. Смогоржевський був завідувачем кафедри вищої математики, а згодом кафедри математичної фізики КПІ (1944–1967).

Перша Київська математична олімпіада у 1935 році стала початком олімпіадних змагань з математики. Українські школярі здобувають значних досягнень на Міжнародних математичних олімпіадах. Сучасний олімпіадний рух, зорієнтований на розвиток самостійного мислення та дослідницького підходу, продовжує справу, розпочату генієм української математики — Михайлом Кравчуком.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Михайло Кравчук. *Вибрані праці. Історія і методика математики* // Національний технічний університет України «КПІ», Педагогічний музей України; упоряд.: Вірченко Н. О., Гайдей В. О., Міхно О. П. — К.: НТУУ «КПІ», ПМУ, 2014. — 252 с. — (Сер. «Педагогічні республікації»; вип. 1).
- [2] Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський [та ін.]. — Х.: Гімназія, 2019. — 304 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: zadereynm@gmail.com

Email address: g.nefyodova@gmail.com

МУЗЕЙ МИХАЙЛА КРАВЧУКА У СЕЛІ ЧОВНИЦЯ

Н.М. ЗАДЕРЕЙ, Г.Д. НЕФЬОДОВА, Т.Д. СТАДНІЙЧУК, М.О. ХОХОТВА



Ім'я академіка Михайла Кравчука посідає особливе місце в історії української науки. Його праці з теорії ймовірностей, ортогональних поліномів, алгебри, теорії функцій, диференціальних рівнянь заклали підвалини багатьох напрямів сучасної математики.

Трагічна доля українського вченого — репресії, арешт 1938 року, засудження на 20 років як активного учасника націоналістичної організації, заслання та загибель

на Колимі у 1942 році — це приклад тотального знищення інтелектуальної української еліти в часи радянського тоталітаризму. Реабілітація та повернення імені вченого з небуття стали можливими завдяки багаторічним зусиллям українських науковців, освітян та краєзнавців, зокрема, Миколи Сороки, Ніни Вірченко, Галини Ситої.

Музей академіка Кравчука було відкрито 13.06.1987 р. у загальноосвітній школі I–III ступенів села Човниця на Волині. Ініціаторами стали директор школи Степан Лукашук, його дружина Євгенія та донька Леся. Впродовж багатьох років ними здійснювалася значна пошукова, науково-просвітницька та музейна робота.

Поштовхом до заснування музею стало звернення у 1967 р. редактора журналу «Знання та праця» Миколи Сороки до педагогів школи з проханням зібрати матеріали про уродженця села Човниця — академіка Кравчука. Школярі разом з учителькою історії Євгенією Лукашук відтворили спогади земляків, зокрема Анни Соколюк, яку виховувала родина Кравчуків. Поступово відшукали родичів ученого, отримали від них фотографії та документи. Племянниця вченого Софія Момотюк передала світлинку хати, у якій народився М. Кравчук, вказала місце її розташування. Нині там встановлено пам'ятний знак. Першим керівником музею був Степан Лукашук, з 2005 року його справу продовжили дружина та донька. Євгенія Лукашук присвятила музею понад 40 років, нині музей очолює Леся Лукашук-Свиновеї.

Фонд музею Михайла Кравчука налічує 1205 оригінальних експонатів: прижиттєві видання праць Кравчука, наприклад «Про деякі перетворення кратних інтегралів» (1927), рукописи, особисті документи, наукові книги французькою мовою, якими послуговувався вчений, оригінальне фото М. Кравчука із сином (08.01.1928) з дарчим підписом Марії Іщенковій. Неабияку цінність складають матеріали з домашнього архіву письменника Миколи Сороки, який усе життя по крихті збирав відомості про життя і творчість математика. На подвір'ї школи, поруч із музеєм, відкрито перший у світі пам'ятник академіку Кравчуку, а перший запис у книзі відгуків зробила онука вченого Ірина Кравчук.

Музей Михайла Кравчука став визнаним центром збереження наукової пам'яті та популяризації української математики, він прийняв понад 10 тисяч відвідувачів з різних куточків світу (Польщі, Франції, Австрії, Австралії та інших). Музей має відзнаку всеукраїнського рівня, звання «Зразковий музей», є переможцем конкурсу громадських музеїв у номінації «Видатний земляк».

Попри складні умови — закриття початкової школи, воєнний стан, обмежене фінансування — музей продовжує працювати завдяки громадській ініціативі. Директорка музею Леся Лукашук-Свиноей проводить екскурсії, організовує онлайн-заходи та долучається до конференцій імені академіка Михайла Кравчука у КПІ.

Втім музей вкрай потребує матеріальної підтримки: бракує тепла, електроенергії, обладнання для оновлення експозицій і технічних засобів. Проблеми благоустрою території та реставрації пам'ятника досі залишаються невирішеними.

Музей Михайла Кравчука в Човниці — це унікальний науково-культурний осередок, що поєднує українську історію, освіту, національну свідомість. Музей сприяє вихованню нового покоління українських науковців, формує повагу до вітчизняної науки, є зразком відновлення справедливості, зразком повернення у суспільну свідомість наших співвітчизників, знищених ганебним радянським тоталітарним режимом.

В умовах сучасних викликів музей залишається символом стійкості української науки і пам'яті, продовжує справу, яку сам Михайло Кравчук вважав найвищою честю для патріота — «помічати таланти й не дати їм зів'янути».

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: zadereynm@gmail.com

Email address: g.nefyodova@gmail.com

МЕТОДОЛОГІЯ ВИКЛАДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ «КВАНТОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ» У СУЧАСНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

С.О. КІОСОВА, А.В. СИРОТЕНКО

Актуальність. Надпотужні квантові комп'ютери обробляють великі обсяги інформації ефективніше й швидше, застосовуються в різних сферах науки. Актуальність теми зумовлена потребою якісного надання освіти з цієї дисципліни в університетах.

Мета дослідження. Метою дослідження є аналіз та визначення результативних підходів і методів викладання дисципліни для успішного засвоєння.

Сутність дослідження. Квантове програмування застосовує нові обчислювальні парадигми, засновані на ідеях квантової механіки: квантовій заплутаності, інтерференції, суперпозиції; математиці, зокрема на лінійній і векторній алгебрі, теорії ймовірностей, тензорному численні; інформатиці [1].

Ефективною стратегією є паралельне комбінування практичних завдань, самостійного опрацювання матеріалу та інтерактивного навчання. На всіх етапах ознайомлення з концепцією квантового програмування залучаються різні види пам'яті, асоціативне мислення та візуалізація, шляхом дослідження квантових процесів на прикладних задачах. Для закріплення пройденого матеріалу, надається завдання для домашнього самоопрацювання [3].

Під час практичних та лекційних занять відбувається поглиблення знань з фундаментальних понять квантової механіки, що виступає основою процесів у квантових комп'ютерах. Пропонується ознайомлення з поняттям кубіта [1].

Важливим розділом є історія розвитку квантових обчислювальних систем. Предмет надає краще розуміння історичної основи формування галузі, основних напрямків та задач які потребують вирішення.

Концепції матриць та векторів з лінійної алгебри дозволяють представити стан кубітів у вигляді векторів, описати лінійну суперпозицію через базисні вектори, дають розуміння того, як працюють квантові вентиля, такі як однокубітні, двокубітні вентиля CNOT, Адамара, Тоффолі та інші. Це, надалі, стане основою для розуміння тензорного добутку [1, 2].

Відбувається ознайомлення зі спеціальними квантовими алгоритмами, які не є притаманними для класичних комп'ютерів, такими як алгоритми Шора та Гровера [2].

Під час навчання закладається база понять з класичного програмування, зокрема: булева логіка, архітектура комп'ютера, основи двійкових чисел. Завдяки цьому здобуті знання класичного програмування полегшують розуміння квантового, оскільки нова інформація подається у знайомому середовищі [1].

Здобуття практичних навичок у квантових мовах програмування та бібліотеках frameworks може розпочатися з таких платформ: Microsoft Quantum Development Kit; PennyLane для гібридного програмування, що поєднує машинне навчання з квантовим програмуванням; Qiskit на IBM Quantum Platform. Перевага полягає в можливості реалізувати квантові коди через програми на Python, а також у безкоштовному доступі. Надалі студенти працюють практично з цією програмою, досліджуючи стандартні квантові структурні схеми та вентиля. Студенти ознайомлюються з Open Quantum Assembly Language (openQASM), а також з компіляцією коду [3].

Коли дисципліна викладається на 1 курсі з урахуванням низької початкової обізнаності у цій сфері, здобуття навичок на перших етапах розпочинається зі спрощених практичних задач, які не потребують знань з квантової механіки, але здатні продемонструвати квантові обчислення на практиці [1]. Важливою складовою є вивчення апаратного забезпечення квантових комп'ютерів [3].

Висновки. Курс поєднує паралельне вивчення як теоретичного, так і практичного матеріалу з декількох точних наук. Це стає ключовим для якісної освіти з дисципліни «квантове програмування».

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Qihong Sun. *From computing to quantum mechanics: accessible and hands-on quantum computing education for high school students* — <https://epjquantumtechnology.springeropen.com/articles/10.1140/epjqt/s40507-024-00271-9>
- [2] Majid Haghparast. *Innovative Approaches to Teaching Quantum Computer Programming and Quantum Software Engineering* — <https://arxiv.org/abs/2501.01446v1>
- [3] Prashanti Priya Angara. *Teaching Quantum Computing to High-School-Aged Youth: A Hands-On Approach* — <https://ieeexplore.ieee.org/document/9613752>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: sofiakiosova37@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: antonsyrotenko86@gmail.com

ІДЕЇ М. П. КРАВЧУКА ЩОДО ВДОСКОНАЛЕННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

О.М. КРАВЧУК

Вражає далекоглядність і перспективність ідей академіка Кравчука, який майбутнє держави пов'язував із якістю підготовки молодого покоління. У вступному слові, яке він виголосив у 1930 році на засіданні Математичної комісії, стверджує: «Держава, піднісни... освіту і науку... на височінь, незрівнянну з попередніми періодами, має право і підстави сподіватися у ближчому майбутньому... таких наукових кадрів, що зроблять нашу школу осередком світового значення».

Підготовка майбутнього вчителя математики на факультеті інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки здійснюється у тісному зв'язку з педагогічною спадщиною найвизначнішого українського математика ХХ сторіччя, всесвітньо відомого вченого, академіка, нашого земляка Михайла Пилиповича Кравчука.

Погляди Михайла Кравчука на професійне становлення майбутніх учителів підтверджуються їх відповідністю змісту сучасної освітньої парадигми, домінантою якої визначено особистість студента як суб'єкта навчання. Індивідуальний стиль педагогічної взаємодії М.П. Кравчука зі студентами характеризувався відкритістю, щирістю, повагою, довірою, підтримкою молоді, сприйняттям студента як найвищої цінності. Він досконало володів педагогікою співробітництва [1, с. 334] та [4].

Михайло Кравчук, як методист-математик відзначав недоліки у традиційному підході до викладання математики: недостатній розгляд міжпредметних зв'язків, дублювання окремих теоретичних положень у різних математичних дисциплінах, недоречне подрібнення матеріалу в межах одного предмету. За умов інформаційного перевантаження сучасного навчального процесу такий підхід заслуговує на увагу у професійній підготовці майбутніх педагогів.

М.П. Кравчук розумів, що студенти сприймають та оцінюють його з позиції майбутньої професійної діяльності, тому намагався пов'язати вивчення математичних дисциплін із профілем майбутнього фахівця. Навчаючи математиків, Михайло Пилипович викладав усі питання таким чином, щоб студент міг використати цей матеріал (хоча б частково) у

своїй педагогічній роботі: на уроках або заняттях шкільного математичного гуртка [3].

На факультеті інформаційних технологій у ВНУ працює гурток «Постать академіка Михайла Кравчука крізь призму науково-педагогічної діяльності», який сприяє збагаченню знаннями та формуванню професійних якостей майбутнього вчителя математики, використовуючи багатий освітньо-педагогічний спадок видатного вченого.

Як педагог, Михайло Пилипович привчав студентів бачити у кожному школяреві творчу особистість, вміти організовувати навчальну діяльність з талановитими дітьми, виявляти обдарованих. Саме з його ініціативи відбулася перша в Україні математична олімпіада (1935 р.) [2, с. 179].

У Луцьку щорічно проводиться математична олімпіада, присвячена М.П. Кравчуку. У закладах загальної середньої освіти сьогодні вчителі математики, наші випускники, широко використовують методичні прийоми, пропонувані М. Кравчуком, виявляють талановитих учнів, проводячи математичні ігри та розваги (ранок хитромудрих задач, година цікавої математики) з розв'язанням задач, складених М. Кравчуком, читацька конференція — за романом М.О. Сороки «Михайло Кравчук».

Значну увагу також приділяв М. П. Кравчук питанням дидактики: оновлення змісту математичної освіти; удосконалення процесу навчання; методичне забезпечення процесу навчання; популяризація математичних знань із перспективою на їх використання для прискорення економічного розвитку держави.

Використання досвіду і методичних порад М.П. Кравчука сприятиме підготовці творчого вчителя, який не лише володіє професійними знаннями, а й відрізняється стійкою мотивацією до педагогічної діяльності та стійким прагненням до самовдосконалення.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Барановський В.М. Світло генія через покоління // Матеріали Тринадцятої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (13–15 трав. 2010 р.). — К., 2010. — Т. 3. — С. 334–336.
- [2] Білий Б.М. Про методичну спадщину М.П. Кравчука // Методика викладання математики. — К., 1967. — Вип. 3. — С. 177–189.
- [3] Зі спогадів Архипа Люльки — Київ. Політехнік, 2005. — 7 квіт. — С. 3.
- [4] Сорока М. Задавній спомин // Матеріали Дванадцятої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15–17 трав. 2008 р.). — К., 2008. — Т. 2. — С. 897–902.

ВНУ ІМЕНІ ЛЕСІ УРАЇНКИ, ЛУЦЬК, УКРАЇНА
Email address: olikr57@ukr.net

ІДЕЯ НАЦІОНАЛЬНОЇ ІДЕНТИЧНОСТІ В ОСВІТНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ М. КРАВЧУКА

О.М. КРАВЧУК, О.В. ГНЕПА

У скрутні для України часи завжди були патріоти, громадські діячі, науковці, педагоги, які відстоювали національні інтереси нашої держави. Серед них особливе місце займає Михайло Кравчук, який докладав чимало зусиль до розбудови національної освіти та науки.

Період 1917-1920 років характеризується визначальними політичними змінами у житті нашого народу, боротьбою за створення власної держави. У березні 1917 року з метою організації українського шкільництва у Києві було створене громадське Товариство шкільної освіти. 5–6 квітня цього ж року ТШО організувало Перший всеукраїнський учительський з'їзд, на якому було створено Всеукраїнську учительську спілку. Учасники з'їзду доручили ТШО видання україномовних підручників, перегляд наявних і розробку української термінології. При ТШО працювала математична комісія, де важливу роль відігравав Кравчук. Вчений подав на розгляд комісії проекти геометричної та алгебраїчної термінології, які були опубліковані у 1917 році видавництвом ТШО. 14 серпня цього ж року Кравчук звернувся у Генеральний Секретаріат Освіти з проханням про посаду вчителя математики в українській школі [1]. Невдовзі він отримав дозвіл на роботу у київських Першій та Другій українських гімназіях. Українські школи, підтримуючи та пропагуючи національну ідею, формували та розвивали національно свідому молодь — майбутню інтелігенцію.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Держархів м. Києва, ф. Р-332, оп. 1, спр. 50, 9 арк.

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: olkr57@ukr.net

ВПФК імені Агатангела Кримського Волинської обласної ради, Володимир, Україна
Email address: olchik.gnepa@gmail.com

ВНЕСОК М.П. КРАВЧУКА У ВИВЧЕННЯ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В АНАЛІТИЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

О.М. КРАВЧУК, О.С. МАТЯЩУК

Аналітична геометрія — частина математики, яка, застосовуючи координатний метод, досліджує геометричні об'єкти засобами алгебри.

М.П. Кравчук акцентував на тому, що аналітичне рівняння не можна розглядати лише як сукупність коефіцієнтів і символів. Воно є носієм геометричного змісту, який розкривається через перетворення координат і дослідження інваріантів рівняння.

Він зауважував, що значення визначника, складеного з коефіцієнтів при старших членах загального рівняння кривої другого порядку на площині має не лише аналітичне, а й глибоке геометричне значення, відображає форму та властивості кривих другого порядку, дає змогу геометру «бачити» рівняння — тобто уявляти, як розташована крива [1].

Михайло Пилипович Кравчук запропонував ефективні методи визначення типу кривої за її рівнянням, застосовуючи перетворення координат і використовуючи симетрію рівнянь для спрощення обчислень [2].

Він впровадив методику зведення рівнянь другого порядку до канонічного вигляду, яка ґрунтувалася на ідеї обертання осей координат для усунення члена з добутком xy . Це дозволило значно спростити процес класифікації кривих і дало можливість розглядати їхні властивості в уніфікованій формі. Методичний ефект полягає у тому, що на кожному етапі виконання завдання не лише розв'язують рівняння, а й усвідомлюють його геометричний зміст.

Михайло Пилипович Кравчук зробив вагомий внесок у розвиток аналітичної геометрії. Методичні підходи вченого ефективно застосовуються, зокрема, при вивченні кривих другого порядку.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Мацюк, О.І. Аналітична геометрія: підручник. – Київ: Вища школа, 2017. – 352 с.
- [2] Геворкян, Г.М. Аналітична геометрія. – Львів: Видавництво ЛНУ, 2020. – 280 с.

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: olikr57@ukr.net

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: oksanamatasuk6@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ВАРІАЦІЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА

С.О. КУХАРУК

Інтерполяція є одним із ключових методів чисельного аналізу, що забезпечує відновлення неперервної залежності за обмеженим набором дискретних даних. Після появи формул Ньютона і Лагранжа, які заклали основу побудови інтерполяційних поліномів [1], розвиток цієї теорії продовжився у напрямі вдосконалення точності, стабільності та симетрії обчислень. У XVIII–XIX століттях було запропоновано низку варіацій класичних підходів, які зробили інтерполяцію ефективним інструментом для практичних розрахунків у фізиці, астрономії та геодезії [2].

Після узагальнення інтерполяційної формули Ісаком Ньютоном з'явилися її численні модифікації [3]. Однією з найвідоміших стала формула Ньютона–Стерлінга, створена на основі методу скінченних різниць:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi T) = & f(x_0) + \xi \frac{\Delta f(x_0) + \Delta f(x_0 - T)}{2} + \frac{1}{2!} \xi^2 \Delta^2 f(x_0 - T) \\ & + \frac{1}{3!} \xi(\xi^2 - 1) \frac{\Delta^3 f(x_0 - T) + \Delta^3 f(x_0 - 2T)}{2} \\ & + \frac{1}{4!} \xi^2(\xi^2 - 1) \Delta^4 f(x_0 - 2T) + \dots \end{aligned}$$

де $\Delta^k f(x_0)$ — різниці k -го порядку, а T — крок таблиці. Симетричність побудови ряду відносно центрального вузла зменшувала похибку при рівномірному розташуванні вузлів, що зробило формулу зручною для табличних обчислень у практичних задачах.

Важливим кроком уперед стали дослідження Карла Фрідріха Гауса, який у 1812 році розробив власну центральну формулу інтерполяції:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi T) = & f(x_0) + \xi \Delta f(x_0) + \frac{1}{2!} \xi(\xi - 1) \Delta^2 f(x_0 - T) \\ & + \frac{1}{3!} (\xi + 1) \xi(\xi - 1) \Delta^3 f(x_0 - T) \\ & + \frac{1}{4!} (\xi + 1) \xi(\xi - 1)(\xi - 2) \Delta^4 f(x_0 - 2T) + \dots \end{aligned}$$

Вона забезпечувала двосторонню побудову інтерполяційного ряду і високу точність відновлення функцій на рівномірних сітках, що мало значення для обробки астрономічних спостережень.

У XIX столітті розвиток цих ідей продовжився у працях Фрідріха Бесселя, який у 1824 році запропонував власну формулу центральної інтерполяції:

$$f(x) = f(x_0) + \xi \Delta f(x_0) + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \frac{(\xi-1)\xi(\xi+1)}{3!} \Delta^3 f(x_0 - \frac{1}{2}T) + \dots$$

Вона відзначалася підвищеною точністю й зручністю для практичних обчислень у геодезії, астрономії та навігації. Незалежно від Бесселя подібну конструкцію запропонував Лідстоун, який уточнив структуру центральних різниць для кращої збіжності ряду.

Наприкінці XIX – на початку XX століття з'явилися нові модифікації інтерполяційних формул. Серед них особливе місце посідає підхід Шепарда (або Еверетта) [3], який описував центрально-симетричну інтерполяцію другого порядку:

$$f(x_0 + \xi T) = F(\xi, \delta) f(x_0 + T) + F(1 - \xi, \delta) f(x_0),$$

де

$$F(\xi, \delta) = \xi + \frac{1}{3!} \xi(\xi^2 - 1) \delta^2 + \frac{1}{5!} \xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2^2) \delta^4 + \dots$$

Цей підхід враховував лише парні різниці функції, що зменшувало накопичення похибки й забезпечувало чисельну стабільність.

Застосування центральних різниць парного порядку стало основою для створення методу породжувальних функцій, запропонованого Лапласом у 1820 році [3]. Цей підхід дав змогу компактно описувати різницеві співвідношення у вигляді функціональних залежностей. На його основі згодом були розроблені узагальнені інтерполяційні методи: інтерполяція Ерміта, що враховує значення похідних у вузлах, та інтерполяція Чебишева, спрямована на зменшення максимальної похибки апроксимації.

Таким чином, варіації формули Ньютона – від Стерлінга до Гауса, Бесселя, Лідстоуна та Шепарда – стали проміжною ланкою між класичними аналітичними та сучасними чисельними методами. Вони заклали основу для розвитку інтерполяцій Ерміта, Чебишева та подальших сплайнових алгоритмів, що поєднують точність, гладкість і високу ефективність обчислень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Кухарук С. О. *Історичний розвиток встановлення класичних методів інтерполяції.* // X Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». — Тези доповідей. — Київ, 2025. — С. 235–238.
- [2] Goldstine H. H. *A History of Numerical Analysis From the 16th Through the 19th Century.* — Berlin: Springer-Verlag, 1977. — 348 p.
- [3] Meijering E. *A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing.* // Proc. IEEE. — 2002. — Vol. 90, No. 3. — P. 319–342.

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГІЛЬБЕРТА ТА ФРЕНЕЛЯ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

І.С. ЛАСКІН, О.Г. ВІЛИЙ

У курсі «Вища математика» в освітньому компоненті МА-3 в КПІ на багатьох факультетах, наприклад, РТФ, ФЕЛ, ІСЗІ та інших, досить повно й детально розглядається тема інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа: їх застосування, переваги та недоліки. Однак на спеціальних дисциплінах не менш активно використовуються й інші інтегральні перетворення, ознайомлення студентів із якими було б дуже корисним і в загальному курсі МА-3. Розглянемо деякі інтегральні перетворення та покажемо, де і як вони ефективно застосовуються.

1. Інтегральне перетворення Гільберта. Продемонструємо його застосування на прикладі аналізу дійсного модульованого сигналу, знаходження його амплітудних, фазових та частотних характеристик. Нехай $u_1(t)$ — дійсний модульований сигнал зі спектральною щільністю $G_1(\omega)$. Побудуємо відповідний йому комплексний сигнал

$$u(t) = u_1(t) + iu_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

спектральна щільність якого $G(\omega) = 2G_1(\omega)\eta(\omega)$, де $\eta(\omega)$ — одинична функція Хевісайда. Тут $G_2(\omega) = 2G_1(\omega)(\eta(\omega) - \frac{1}{2}) = 2G_1(\omega)\gamma(\omega)$, де $\gamma(\omega)$ — функція стрибка. Оскільки функції $G_1(\omega)$ відповідає сигнал $u_1(t)$, а для $\gamma(\omega)$ відповідає сигнал $\frac{1}{2\pi t}$, то за теоремою про згортку маємо, що щільності $G_2(\omega)$ відповідає сигнал $u_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{u_1(\tau)}{t-\tau} d\tau$ (інтеграл у сенсі головного значення). Це і є інтегральне перетворення Гільберта сигналу $u_1(t)$. Але $G_1(\omega) = G_2(\omega) \cdot \frac{1}{2\gamma(\omega)} = G_2(\omega) \cdot 2\gamma(\omega)$, тому

$$u_1(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{u_2(\tau)}{t-\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{u_2(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

— обернене перетворення Гільберта. Таким чином, $u(t) = u_1(t) + iu_2(t) = |u(t)| \cdot e^{i\varphi(t)}$, де $A(t) = |u(t)|$ — амплітуда, $\varphi(t) = \arg u(t) = \arctan \frac{u_2(t)}{u_1(t)}$ — фаза, $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ — частота.

У випадку, якщо $u_1(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t}$, маємо для спектральної щільності $G_1(\omega)$: $G_1(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \omega_0 t}{t} e^{-i\omega t} dt = \pi(\eta(\omega + \omega_0) - \eta(\omega - \omega_0))$. Тоді обернене перетворення Фур'є від $G_1(\omega)$ лише по додатних частотах дає $u(t) =$

$\pi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\eta(\omega + \omega_0) - \eta(\omega - \omega_0)) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\omega_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\omega_0 t} - 1}{it}$, тобто $u(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{t} + i \frac{1 - \cos \omega_0 t}{t} = \frac{2}{t} \sin \frac{\omega_0 t}{2} e^{i \frac{\omega_0 t}{2}}$, звідки $A(t) = \sqrt{u_1^2(t) + u_2^2(t)} = 2 \left| \frac{\sin(\omega_0 t/2)}{t} \right|$, $\varphi(t) = \arctan \frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{\omega_0 t}{2}$, $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\omega_0}{2}$ — знайдено основні спектральні характеристики сигналу. Тобто $u(t)$ будуємо так, що $u_1(t)$ — дійсна його частина, а уявна частина $u_2(t)$ — це інтегральне перетворення Гільберта цієї дійсної частини.

2. Інтегральне перетворення Френеля. Визначається наступним чином:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i \frac{(x-\xi)^2}{2}} d\xi; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{i \frac{(x-\xi)^2}{2}} d\xi.$$

Це інтегральне перетворення застосовується у радіооптиці також часто й ефективно як і перетворення Фур'є для розв'язання різного роду задач.

Реальний фізичний простір взаємодіє з хвилями, що розповсюджуються в ньому, саме узгоджено з цими інтегральними перетвореннями. Якщо, наприклад, на пластинку в просторі у вибраній площині XOY падає плоска електромагнітна хвиля в напрямку OZ , то простір за пластиною по координаті Z можна розділити на дві частини. Одна, ближча до пластини — це область Френеля, і тут електромагнітне поле після взаємодії з пластинкою описується перетворенням Френеля, а далі, після певної межі, йде область Фраунгофера, де поле діє згідно з перетворенням Фур'є. Для опису дифракції на щілині або на краю екрана застосовуються також $\sin$ - та $\cos$ -інтеграли Френеля та спіраль Корню. Перетворення Френеля має багато цікавих прикладів застосування і в інших галузях науки та техніки.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Білий О.Г., Іваненко Т.В., Крошко Н.В., Білий В.О. *Підготовка та проведення математичних олімпіад. Навчальний посібник*. [Електронний ресурс], — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. — 247 с.
- [2] Литвиненко О.Н. *Основи радіооптики*. — Київ: Техніка, 1974. — 208 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: laskin100@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com
URL: <https://matan.kpi.ua/uk/people/beliy/>

ІСТОРІЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ІСПАНІЇ

Т.В. МАЛОВІЧКО

Хуан Карамуель і Лобковіц (1606–1682), цистерціанець, дуже освічена людина, що знав 20 мов, включив у свою двотомну роботу «*Mathesis bisepts (vetus et nova)*» (1670) трактат «*Kybeia, quae combinatoriae genus est, de alea et ludis fortunae serio disputans*» на 24 сторінки. У цьому трактаті він за допомогою комбінаторики розв'язував задачі, пов'язані з азартними іграми, та рішуче наполягав, що всі ігри неодмінно мають бути чесними. Карамуель описує різні ігри, розглядає розподіл ставок, коли гра переривається до її завершення, а також встановлює правило множення. На останніх 10 сторінках він відтворює роботу Гюйгенса, хоча помилково приписує її Лонгомонтану [1].

Оскільки Карамуель помилився в задачі про розподіл ставки між трьома гравцями, у листі до Монмора М. Бернуллі дуже суворо критикує його: «Єзуїт на ім'я Карамуель, якого я цитував у своїй дисертації, хотів заглибитись в ці питання і навіть критикував Гюйгенса в трактаті, який він називає *Kybeia*...; але оскільки все, що він наводить, — це лише маса паралогізмів, я його зовсім не розумію» ([2], с. 387). Проте аналогічну задачу для двох гравців і деякі інші задачі Карамуель розв'язав правильно.

Тадео Лопе і Агілар (1753–1800), військовий і професор математики, в 1795 р. опублікував другий том «Курсу математики», що містить трактат з теорії ймовірностей на 118 сторінках. Окрім означень понять ймовірності, незалежних подій, він містив поняття математичного сподівання, обчислення ймовірності складних подій та подій, які повторюються в n випробуваннях. Також розглядались ануїтети та страхування життя [1].

Беніто Байлс (1730–1797) у своєму курсі математики висловлює захоплення іноземними дослідниками теорії ймовірностей, але сам присвячує їй лише 7 сторінок з дуже простими вправами. Хосе Маріано Ваєхо (1779–1846) в 1819 р. включив до «*Compendio de Matemáticas*» теорію ймовірностей і на 12 сторінках розглянув її основні поняття [1].

У 1867 р. Агустін Мартінес Альсібар публікує підручник «Елементи теорії ймовірностей», де демонструє чудове знання праць з теорії ймовірності та статистики практично всіх європейських авторів і після викладення основних понять аналізує багато азартних ігор, обговорює застосування закону великих чисел і вводить поняття математичного сподівання [1].

У 1879 р. Дієго Ольєро Кармона (1839–1907), артилерист та професор Академії артилерії, опублікував «Tratado de Cálculo de Probabilidades» — перший сучасний підручник іспанською мовою з теорії ймовірностей, що використовує диференціальне числення. Підручник має 5 розділів. Перший містить інформацію, необхідну надалі: формулу Валліса, формулу Стірлінга, теорему Фур'є, дослідження важливих інтегралів тощо. Другий присвячений основним поняттям і формулам теорії ймовірностей (формула повної ймовірності тощо), третій — теоремі Бернуллі, четвертий — теорії помилок, п'ятий — методу найменших квадратів [3].

У другій половині XIX ст. статистика викладалась в університетах одночасно з політекономією та/або географією. Кафедри політичної економії та статистики почали з'являтися в юридичних школах, а кафедри географії та статистики в бізнес-школах. Результатом цього стала публікація низки робіт зі статистики, проте стосовно теорії ймовірностей вони містили лише дуже розпливчасті та прості деталі.

У 1909 р. Королівська академія точних, фізичних та природничих наук Мадрида провела конкурс з теорії ймовірностей. Премії було присуджено Габріелю Галану Руїсу та Мануелю Веласко де Пандо. Галан представив досить вичерпний огляд стану справ на той час з особливим акцентом на застосування теорії ймовірностей до актуарних розрахунків. У роботі Веласко де Пандо також розглядається теорія ймовірностей, але цілий розділ присвячено страхуванню, а також обговорюється застосування теорії ймовірностей до аналізу операцій на фондовому ринку [1].

Протягом 1930-х і 1940-х років на факультетах точних наук були створені кафедри математичної статистики. Вчені почали виявляти зацікавленість у теорії ймовірностей. У 1945 р. з'явився підручник Олегаріо Фернандеса Баньоса «Tratado de Estadística», що охоплює описову статистику та теорію ймовірностей і містить дуже велику бібліографію.

Розвиток теорії ймовірностей в Іспанії відбувався з затримкою майже на століття і прискорився лише після 1930 р. Хоча до того існували іспанські математики, які займалися цією наукою, але створити наукову школу і забезпечити потужний розвиток теорії ймовірності вони не змогли.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Pliego F.J.M. *Historia de la Probabilidad en España* // Revista de Historia Económica/ Journal of Iberian and Latin American Economic History. — 1997. — Vol. 15, no. 1. — P. 161–176.
- [2] Montmort P.R.d. *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* — Paris : Jacque Quillau, 1713. — 414 p.
- [3] Ollero D.D. *Tratado de Cálculo de Probabilidades* — Segovia : Imprenta de Pedro Ondero, 1879. — 244 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: malovichko.tetiana@l111.kpi.ua

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ І СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ЗНАНЬ У ВЕЛИКИХ ОСВІТНІХ СИСТЕМАХ

К.Ю. МАМСА, М.М. ПЕРЕСТЮК

Вступ. У сучасних умовах стрімкого розвитку технологій штучного інтелекту, аналітики даних і системного аналізу формується нова науково-практична парадигма управління освітніми процесами. Її сутність полягає у створенні концептуальних основ управління знаннями, що ґрунтуються на інтелектуальному аналізі даних (Data Mining), методах системного аналізу та інтеграції інструментів штучного інтелекту, зокрема великих мовних моделей (LLM). Таке поєднання відкриває можливості для побудови самонавчальних освітніх систем, що здатні до адаптації, прогнозування та оптимізації навчальних стратегій на основі великих масивів даних і когнітивного моделювання.

Математична модель еволюції колективних знань. Розроблена модель описує динаміку розподілу рівня знань у великій освітній системі з урахуванням взаємодії чотирьох основних компонентів: студентського, соціального, викладацького середовищ і системи моніторингу знань. У математичному вираженні ці взаємодії подано системою рівнянь у часткових похідних, яка описує «потік знань» та реакцію системи на зовнішні й внутрішні впливи. Модель враховує неперервні та дискретні фактори, що формують нелінійну, нестационарну систему з властивостями самоорганізації. Поведінку системи можна описати через поняття глобального атратора — множини можливих станів колективного знання.

Інтелектуальний аналіз даних і LLM у моніторингу залишкових знань. Методи Data Mining виступають інструментом експериментальної верифікації моделі та аналітичної підтримки управлінських рішень. На основі багаторічного моніторингу в НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» (понад 50 000 реєстрацій) було виявлено феномен самоорганізації систем колективних залишкових знань. Застосування кластеризації, класифікації, регресійних і прогностичних алгоритмів дозволило: виділити стійкі групи студентів за рівнем засвоєння матеріалу та мотиваційними

профілями; виявити фактори, що знижують якість знань; побудувати інтелектуальні прогностичні моделі рівня залишкових знань, здатні оновлюватися в режимі реального часу. Великі мовні моделі (LLM) виступають новим когнітивним шаром цієї системи: вони аналізують не лише кількісні дані, а й семантичні патерни освітніх текстів, відгуків студентів, дискусій у LMS і соціальних мережах. Це дозволяє формувати онтології освітніх знань, виявляти приховані когнітивні зв'язки між темами курсів і персоналізувати навчальні траєкторії.

Експериментальні результати. Порівняння експериментальної кривої динаміки залишкових знань із класичною «кривою забування Еббінгауза» показало ефект стійкої пам'яті: обсяг залишкових знань перевищує прогноз класичної моделі, що свідчить про наявність механізмів самоорганізації та взаємного підсилення знань у груповій взаємодії. Додатково, аналіз текстових і поведінкових даних за допомогою LLM виявив, що синергія колективної мотивації й когнітивних стратегій навчання формує нелінійні петлі зворотного зв'язку, які стабілізують систему на рівні високих залишкових знань.

Висновки. Поєднання системного аналізу, математичного моделювання, інтелектуального аналізу даних (Data Mining) і технологій штучного інтелекту (LLM) створює нову наукову парадигму дослідження освітніх систем. Цей підхід: забезпечує перехід від інтуїтивного до науково обґрунтованого управління освітою; відкриває шлях до створення інтелектуальних систем підтримки управлінських рішень, здатних адаптувати навчальний процес до потреб особистості, ринку праці та суспільства.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Perestyuk M., Mamsa K. *Data Mining and a synergetic approach to mathematical modeling of the evolution of knowledge distribution in large educational systems* // System Analysis & Intelligent Computing. SAIC. Springer, in press.
- [2] Ясінський В.В. *Дослідження еволюції залишкових знань у складних навчальних системах [Текст]* В.В. Ясінський, А.О. Болдак // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – №4. – с. 120 – 132.
- [3] Сугоняк І.І. *OLAP-технології для моніторингу успішності студентів за умов рейтингової системи оцінювання знань.* // Інформаційні технології і засоби навчання, 2013, Том 38, №6., с. 245-256.
- [4] Jiechao Cheng *Data-Mining Research in Education* // International School of Software, Wuhan University, Wuhan, China, 25 Okt. 2017, <https://arxiv.org/pdf/1703.10117>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: ekaterinamamsa@gmail.com

ННК «ІПСА» НАН України та МОН України, Київ, Україна
Email address: maria@perestyuk.com

МАТЕМАТИЧНИЙ ВЕБКВЕСТ ЯК ІННОВАЦІЙНА ФОРМА ОЦІНЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ

Ю.А. ПОЖАРСЬКИЙ, О.Л. ШВАЙ

Аналіз сучасних досліджень і публікацій засвідчує посилену увагу науковців і практиків до створення новітнього інструментарію оцінювання, основне призначення якого — вчасно з'ясувати індивідуальні проблеми в засвоєнні школярем математичного змісту та запобігти їх нашаруванню на подальших етапах навчання. Ефективне оцінювання повинне виходити за межі фіксації результату, виконуючи роль інструменту підтримки інтелектуального зростання учнів [1, 2].

Ураховуючи інтерес сучасних дітей до різноманітних інтерактивних занять, нами досліджено доцільність проведення вебквестів на уроках алгебри як особливої форми організації контролю й оцінювання навчальних досягнень учнів 8-9 класів.

Математичний вебквест — це особлива форма навчальної діяльності, що поєднує проблемне завдання з математики, елементи ролівої гри та використання інтернет-ресурсів для самостійного пошуку інформації, розв'язання задач і знаходження ключів для досягнення мети.

Проведені математичні вебквести, які були створені на платформі Всеосвіта, надали цінну інформацію для подальшої оптимізації педагогічної діяльності. Можна зробити висновок, що робота в команді активізувала пізнавальну активність учнів. Створення атмосфери суперництва мотивувало учнів виконувати завдання швидше та якомога точніше, адже саме така стратегія дозволяє швидше відшукати потрібний елемент «ключа» для закінчення квесту.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Михайленко Л., Остафійчук А., Хутченко І. *Оцінювання навчальних досягнень з математики: від офіційних рекомендацій – до щоденної практики* // Дидактика математики: теорія, досвід, інновації — 2025. — Т. 2, № 3. — С. 7–18.
- [2] Годованюк Т.Л., Махомета Т.М., Тягай І.М. *Інноваційні технології навчання шкільного курсу математики: навч.-метод. посіб.* — Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини, Умань: Візаві, 2021. — 180 с.

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

Email address: pozharskyi.y@gmail.com, shvai.olga@gmail.com

МИХАЙЛО ПИЛИПОВИЧ КРАВЧУК — ГОРДИСТЬ УКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИКИ

Л.С. СВИНОВЕЙ

Академік Михайло Пилипович Кравчук — вчений-математик, український методист, подвижник в науці математиці, автор багатьох наукових книг рідною мовою. Першими вчителями мови Михайлика були батько Пилип Йосипович та мати Адельфіна Фрідріхівна. І хоча в гімназії хлопчик ні в одному класі не вивчав української мови, проте все подальше життя присвятив тому, щоб математику вивчали рідною мовою. Його звіти від наукових поїздок — твори талановитого письменника.

Ще на перших курсах університету Кравчук добре усвідомив, що мова є основою науки. І вже старшокурсником працював над створенням української математичної термінології. Михайло Кравчук викладав українською мовою предмети в новостворених першій і другій українських гімназіях Києва, різні математичні курси у вищих навчальних закладах. Він член Українського наукового товариства у Києві, співробітник створеної у 1918 році Української академії наук, а з початку 20-х років — член комісії математичної термінології при Інституті наукової мови Всеукраїнської Академії наук (ВУАН).

Учений — перший корінний українець, котрий успішно репрезентував вітчизняну математику на міжнародному рівні. Роль Михайла Кравчука в історії української науки полягала не тільки в його особистих досягненнях, а й у тому, що він створив основу для розвитку математичної думки та науки в цілому через впорядкування термінології та підготовку нового покоління науковців.

Як член НТШ у «Збірнику» товариства опублікував 17 наукових праць.

У 1935 році організував першу в Україні математичну олімпіаду для школярів.

З 1916 року гурток київських математиків-українців, очолюваних М.П. Кравчуком, проводив підготовчу роботу до викладання в українській школі. Збирали та упорядковували народну лексику, записували мову різних працівників, видавались невеликі галузеві словники.

Товариство шкільної освіти спільно з Українським науковим товариством видало проєкт алгебраїчної та геометричної термінології роботи М.П. Кравчука.

Видано підручник українською мовою «Математика для сільськогосподарських профшкіл» М. Кравчука і І. Білика.

Кількарічна праця під головуванням Михайла Кравчука завершилась виданням тритомного математичного словника. Про роботу вченого рецензент пише: «Термінологія найкраще уложена: знати руку фаховика».

У 1925 році видано «Словник математичної термінології» Ф. Калиновича, над яким працював Михайло Кравчук. Ця праця увічніює українську математичну термінологію та сприяє її унормуванню. Має велике історичне значення, оскільки вона відображає пошуки та знахідки в розвитку української наукової мови у 20-ті роки минулого століття.

Михайло Пилипович розробив математичні курси українською мовою, що заборонялось законом.

Геометрію в Саварці Богуславського району викладав за власним підручником.

1920 року вийшли за його участі «Геометрія для семирічних трудових шкіл» (96 рукописних сторінок), «Робочі книжки з математики для V–VII років навчання».

1926 рік. Кравчук склав програму курсу «Елементи вищої математики в пристосуванні до сільського господарства», «Програми з математики для сільськогосподарських профшкіл рослинознавства».

1932–1934 роки. Видані підручники «Вступ до вищої математики», «Елементи теорії визначників», «Диференціальні рівняння та їх застосування в природознавстві і техніці», «Вибрані питання з основ аналізу нескінченних малих», посібник «Вища математика».

Відомо, що академік Кравчук написав понад 180 наукових праць з різних галузей математики, які відомі не лише в Україні, але і за кордоном у науковому світі.

Дяка і шана тим науковцям, котрі відшукують матеріали про вченого і відстоюють чесне ім'я нашого земляка академіка Михайла Кравчука.

Слова видатного українського вченого Івана Пулюя «Немає більшого гонору для інтелігентного чоловіка, як берегти свою і національну честь та без нагороди вірно працювати для добра свого народу, щоб забезпечити йому кращу долю. За тим народом перемога, в кого вища освіта» напряду відносяться до академіка Михайла Кравчука, тому що його життєве кредо — «Моя любов — Україна і математика».

Музей Академіка Кравчука, Волинська Область, село Човниця
Email address: m.kravchuk@ukr.net

ІНВАРІАНТИ В КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ІСТОРІЯ ТА МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ

Н.П. СЕЛЕЗНЬОВА, Т.В. АВДЄЄВА, Т.О. РУДИК

В аналітичній геометрії відомі афінна та метрична класифікація кривих другого порядку. Класи кривих характеризуються певним набором інваріантів. Інваріанти в аналітичній геометрії — величини, які залишаються незмінними при певних геометричних перетвореннях, таких як паралельне перенесення, поворот. Елементарними інваріантами є, наприклад, відстань між двома точками, площа плоскої фігури та об'єм тіла. В роботі [1] проведено класифікацію трикутників з точки зору проєктивної геометрії, шляхом введення певного проєктивного інваріанта, що характеризує трикутник. Визначено довільний трикутник на евклідовій площині через інваріант проєктивного перетворення — складне відношення чотирьох точок на прямій. Знайдено значення такого інваріанта в загальному вигляді для довільного трикутника та в окремих випадках. Отримані результати можна застосовувати, використовуючи принцип двоїстості для визначення інваріантів більш складних об'єктів.

В курсі аналітичної геометрії кривими другого порядку називають такі лінії, рівняння яких в декартових координатах будуть рівняннями II степеню. Загальне рівняння кривої другого порядку відносно змінних x та y має вигляд:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

(тут хоча б один із коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} відмінний від нуля). Для загального рівняння (1) лінії другого порядку відносно перетворення декартової системи координат назовемо функцію $I(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33})$ інваріантом, якщо, її значення не змінюється при переході до нової декартової системи. Для рівняння (1) відомі п'ять інваріантів перетворення повороту осей координат:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}; \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_4 = a_{13}^2 + a_{23}^2; \quad I_5 = a_{33}.$$

Зокрема, коефіцієнти в рівнянні (1) є інваріантами перетворення паралельного перенесення. Отже, I_1, I_2 також є інваріантами перетворення

паралельного перенесення. За допомогою інваріантів легко розв'язується задача визначення типу та класу лінії, що задана загальним рівнянням (1), та визначення коефіцієнтів зведених рівнянь цих ліній.

Визначення типу деяких кривих за допомогою вище вказаних інваріантів:

$I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 < 0$ — еліпс; $I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 > 0$ — уявний еліпс;

$I_2 > 0, I_3 = 0$ — вироджений еліпс (пара уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці);

$I_2 < 0, I_3 \neq 0$ — гіпербола; $I_2 = 0, I_3 \neq 0$ — парабола;

$I_2 < 0, I_3 = 0$ — пара дійсних прямих, що перетинаються.

Історія відкриття інваріантів кривих другого порядку тісно пов'язана з дослідженнями самих кривих, які вивчалися ще за часів Стародавньої Греції. Так, Аполлоній Пергський класифікував їх як перерізи конуса. Його дослідження заклали основу для вивчення властивостей кривих, які не змінюються при перетвореннях, що зберігають певну структуру. Пізніше Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) в праці *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), що стосувалася бінарних квадратичних форм, отримав деякі результати щодо алгебраїчних інваріантів. Ці результати стали однією з відправних точок для подальшого розвитку теорії інваріантів. Також слід відзначити внесок наступних математиків у розвиток теорії інваріантів. Джордж Буль (1815–1864) та його публікації у 1841 році вважаються початком сучасної теорії інваріантів. Ці роботи надихнули Артура Кейлі (1821–1895), у статті якого 1845 року започатковано класичну теорію інваріантів. Також він дав назву «інваріанти» алгебраїчним виразам, що не змінюються при лінійних перетвореннях. Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) був одним із ключових британських математиків, що розвивали теорію інваріантів. У 1850-х роках він разом з Кейлі та Джорджем Салмоном сформулювали основні поняття теорії інваріантів.

Слід зазначити, що інваріанти кривих другого порядку широко використовуються в комп'ютерній графіці, механіці, фізиці та інших науках.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Селезньова Н.П., Селезньов С.В. *Проективний інваріант трикутника* // ISSN in progress Математика в сучасному технічному університеті — 2015. — № 1. — С. 148-154.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: nadijasel@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: avdeeva.tetyana@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: ru58@ukr.net

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ТЕМИ «ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ» У ЗАКЛАДАХ ВИЩОЇ ОСВІТИ

О.П. ТОМАЩУК, П.Ф. САМУСЕНКО, О.Л. ЛЕЩИНСЬКИЙ

Для курсів вищої математики та математичного аналізу ключовим поняттям є поняття границі. Такі важливі поняття цих дисциплін як границя функції, неперервність функції, похідна функції, різні види інтегралів вводяться, спираючись саме на операцію граничного переходу. Формування у студентів поняття границі краще здійснювати на прикладі поняття границі послідовності.

Існують кілька означень поняття границі числової послідовності: на основі поняття нескінченно малої величини, мовою околів, мовою « ε - n_0 », на основі поняття часткової границі, аксіоматичне за Фреше. У запропонованому нами дослідженні [1] пропонується методика формування поняття границі послідовності, що ґрунтується на використанні двох означень: мовою околів і мовою « ε - n_0 ». Послідовність ознайомлення студентів з цими означеннями може бути різною. Розглянемо варіант, коли спочатку буде введено поняття границі послідовності мовою « ε - n_0 », а потім — мовою околів.

Поняття границі послідовності доцільно вводити конкретно-індуктивним методом, розглянувши при цьому приклади кількох послідовностей. Наприклад, можна вибрати послідовності із загальними членами $x_n = 2n$, $y_n = \frac{1}{n}$, $z_n = \frac{2n-1}{n}$, $g_n = (-1)^n$. Зобразивши члени цих послідовностей на координатних прямих, потрібно звернути увагу студентів на послідовності (y_n) і (z_n) та запропонувати їм виявити ту властивість, яка притаманна цим послідовностям, і якої не мають послідовності (x_n) і (g_n) . Керуючись ілюстраціями, студенти помічають ту особливість, що члени послідовності (y_n) зі зростанням їх номерів все ближче і ближче наближаються до числа 0, а члени послідовності (z_n) — до числа 2. У зв'язку з цим необхідно наголосити на необхідності «переведення» виявленої властивості послідовностей (y_n) і (z_n) на математичну мову, тобто на необхідності сформулювати строге означення границі послідовності.

У подальших викладках доцільно перейти до розгляду лише однієї послідовності, наприклад, (y_n) . Те, що зі зростанням номерів члени цієї послідовності все ближче і ближче наближаються до числа 0 означає, що

відстань від y_n до 0 стає все меншою, тобто зі зростанням номерів значення виразу $|y_n - 0|$ стає все меншим. Тому це значення може бути меншим, наприклад, за $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 0.01$. Вибираючи конкретні значення ε (наприклад, $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 0.06$) викладач показує, що для кожного вибраного значення ε можна вказати номер n_0 (відповідно $n_0 = 10$ і $n_0 = 16$) такий, що для всіх $n > n_0$ виконуватиметься нерівність $|y_n - 0| < \varepsilon$. Ці факти доцільно проілюструвати графічно, наприклад, за допомогою табличного процесора Microsoft Excel. Після цього викладач формулює означення границі послідовності мовою « ε – n_0 ».

Увівши поняття околу скінченної точки та околу плюс (мінус) нескінченно-віддаленої точки, можна переходити до введення поняття границі послідовності мовою околів. Викладач зазначає, що нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$ можна записати так: $-\varepsilon < y_n - a < \varepsilon$. Отже, $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ для всіх $n > n_0$, тобто члени послідовності y_n , номери яких є більшими за n_0 , потрапляють в ε -окол точки a . Причому це справедливо для всіх $\varepsilon > 0$. Цей факт доцільно продемонструвати на відповідному рисунку.

На основі проведених міркувань студенти самостійно або за допомогою викладача зможуть сформулювати таке означення границі послідовності мовою околів: число a називають границею послідовності (y_n) , якщо в будь-якому околі точки a містяться всі члени цієї послідовності, починаючи з деякого номера, тобто в будь-якому околі точки a міститься нескінченна кількість членів послідовності (y_n) , а за межами кожного такого околу знаходиться не більше, ніж скінченна їх кількість.

Особливостями запропонованої методики формування поняття границі послідовності є те, що припущення, висунуті на основі міркувань наочності, одержують відповідне аналітичне обґрунтування, студенти самостійно приходять до формулювання різних означень поняття границі послідовності. Це забезпечує свідоме опанування студентами цих понять.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Томащук О., Самусенко П., Лещинський О., Іллічева Л. *Методика формування поняття границі послідовності у студентів закладів вищої освіти* // Фізико-математична освіта — 2024. — В. 2 (39). — С. 60–67.

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ», Київ, Україна
Email address: oleksii.tomashchuk@npp.kai.edu.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: psamusenko@ukr.net

ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ ІНЖЕНЕРІЇ, УПРАВЛІННЯ ТА ЗЕМЛЕВПОРЯДКУВАННЯ ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «КИЇВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ», Київ, Україна
Email address: oleshchinsky17.1@gmail.com

СЕКЦІЯ 6
Математичні методи у наукових дослідженнях

MODEL OF INFORMATION DISSEMINATION WITHIN A NETWORK LIMITED BY A QUADRANT OF THE PLANE

M.E. DUDKIN, O.Y. DYUZHENKOVA, O.M. DUDKIN

We establish a connection between the dissemination model of information within a plane-parallel network, which is located in a quadrant of the real plane and the real two-dimensional moment problem. The real two-dimensional moment problem on the plane is associated with two block tri-diagonal Jacobi-type matrices (the size of the blocks increases). The plane-parallel model of information dissemination leads to two matrices, which are a special case of the matrices corresponding to the real two-dimensional moment problem. A generalization of the model with additional communication channels is also considered. Thus, the study of the information dissemination model can now be carried out using appropriate methods of moment problems, that is, using the studied objects: block matrices, measures on real planes and associated polynomials of two variables.

REFERENCES

- [1] Дудкін М.Є., Дюженкова О.Ю., Дудкін О.М. *Модель розповсюдження інформації у мережі обмеженій квадрантом площини* // Наука і техніка сьогодні. — 2025. — No 9(50). — С. 1148–1162.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: dudkin@imath.kiev.ua

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: oduzen@ukr.net

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: linkalex469@gmail.com

АНАЛІЗ ФАКТОРІВ, ЩО ЙМОВІРНО СПРИЯЮТЬ ВИНИКНЕННЮ ПТСР

Є.А. БУЛАТ, Р.Р. АНДРІЄВСЬКИЙ, О.В. МУЛИК

Актуальність. Посттравматичний стресовий розлад (ПТСР), що зачіпає жінок репродуктивного віку, є вагомою соціомедичною проблемою. Вплив ПТСР на жіноче здоров'я, особливо на здатність до дітонародження, досі не отримав належного наукового осмислення. Для з'ясування потенційних чинників формування ПТСР були відібрані відповіді жінок віком від 18 до 50 років з анкетування, яке було проведено серед людей зі звільнених територій України. Всього учасників опитування було 1101, вік респондентів коливався від 16 до 72 років, опитувані відповіли на 100 запитань, з яких для дослідження відібрали 54 запитання.

Мета та метод дослідження. Визначити фактори, які найбільше впливають на ймовірність розвитку посттравматичного стресового розладу у жінок репродуктивного віку за допомогою алгоритму машинного навчання Random Forest. Всі статистичні аналізи та побудова графіків в дослідженні проводились з використанням статистичної платформи JASP 0.19.3.

У Machine Learning статистичної платформи JASP 0.19.3 було застосовано модуль Random Forest Classification. Навчальний набір даних розподілено як 64% — 16% — 20% (див. Табл.1.) Конфігурація моделі підбиралась з умови попередньо отриманих результатів логістичної регресії на даній вибірці (Ассурасу 70%). Найкраща точність моделі досягалась при кількості дерев 190–350, причому на етапі кожного поділу випадково вибиралися 5 прогностичних змінних, кожне дерево навчалось на випадковій підмножині (63.2%) тренувальних даних з поверненням. Розширення навчальної вибірки за допомогою бутстреп-ресемплінгу призвело до зменшення розкиду кривих і підвищення їх узгодженості всередині груп. Це свідчить про покращення стабільності моделі та чіткіше відображення відмінностей між групами PTSD=0 та PTSD=1.

Найвища загальна точність моделі була 75.2% (AUC = 0.79) на тестовій вибірці ($n = 121$). Модель краще виявляє негативний клас (0): чутливість 89%, $F1 = 0.81$, тоді як для позитивного класу (1) — чутливість лише 54.2%, $F1 = 0.634$. Це свідчить про помірну здатність моделі до розрізнення класів, з перевагою у виявленні відсутності ПТСР. Що насправді неприйнятно для клінічного скринінгу — високий ризик пропустити тих, хто потребує допомоги. Показник ООВ Ассурасу виявився на рівні 49%,

ТАБЛ. 1. Model Summary: Random Forest Classification

Trees	F	n(Tr)	n(Val)	n(Test)	Val Acc	Test Acc	OOB Acc
192	5	388	97	121	0.711	0.744	0.490

Note. The model is optimized with respect to the *out-of-bag accuracy*.

що, ймовірно, може свідчити про певну мінливість чи складність самого набору даних, але водночас не спричиняє ознак очевидного ефекту надмірного перенавчання.

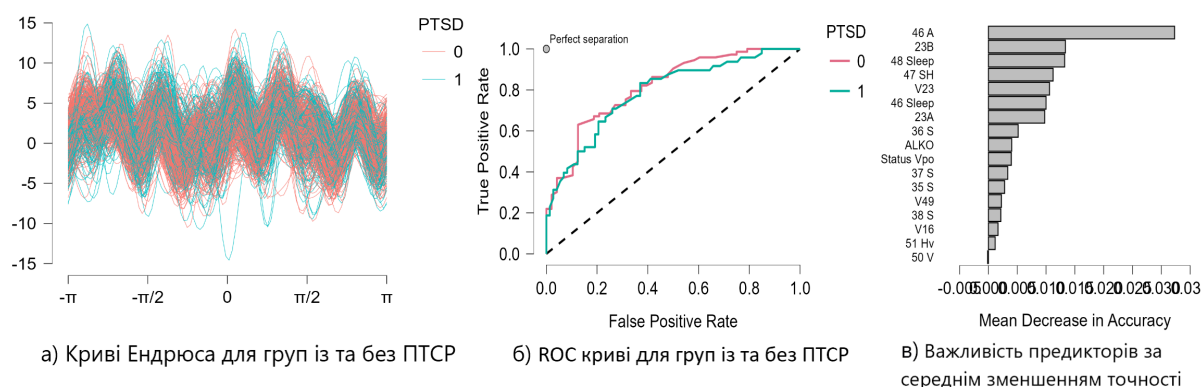


Рис. 1. Характеристики моделі Random Forest

Висновки. Проведений аналіз за допомогою алгоритму Random Forest Classification у середовищі JASP наводить доцільність розширення стандартного опитувальника для діагностики ПТСР. Додавання змінних, що відображають особливості харчової поведінки та якості сну, може підвищити точність класифікації та сприяти глибшому розумінню взаємозв'язку між соматичними та психологічними факторами посттравматичного стресового розладу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Turecki, B., Hodes, M., Zich, R. (2024). Mental health of civilians in the Russia–Ukraine war: A rapid scoping review. *European Journal of Psychotraumatology*, 15(1), 2291587.
- [2] Koubova A, Maricano H, Matkeviciene R, Matichescu M, Nazarov M, Teperik D, Kochiashvili N, Adini B. Hope and Distress: A Cross-Country Study Amid the Russian-Ukrainian War. *Stress Health*. 2025 Apr;41(2):e70033.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: o.bulat.zf41.fbmi28@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: r.andriyevskyj.zf41.fbmi28@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: mulyk.olena@gmail.com

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГАФА У ПИТАННЯХ АНАЛІЗУ ОРІЄНТАЦІЇ СТРУКТУРНИХ КОМПОНЕНТ НА ПРИКЛАДІ СТРУКТУРИ МЕТАЛУ

Д.Ю. КОРОЛЕНКО, О.О. ШТОФЕЛЬ, В.В. ГОЛОВКО, Т.В. АВДЄЄВА

Для аналізу зображення на орієнтацію структурних компонент було застосовано Standard Hough Transform (SHT) для виявлення меж зерен на зображеннях мікроструктури та Principal Component Analysis (PCA) — для визначення орієнтації кожного окремого зерна [1]. SHT переводить зображення з x, y простору пікселів у параметризований простір ρ, θ (де ρ — відстань від початку координат до лінії, θ — кут нахилу між x і перпендикуляром):

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Для кожної точки фото і кожного θ отримуємо карту $A(\rho, \theta)$ найбільш вірогідних ліній, які «промальовують» границі повертаючи зображення у декартові координати.

Для пошуку орієнтації використовується метод PCA:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}.$$

Середнє положення (центр мас) контуру:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

де $\bar{x}, \bar{y}$ — середні координати, що відповідають центру мас (центроїду) контуру зерна, відносно якого далі здійснюється центрування точок для виключення впливу положення на площині.

Всі точки зсуваються відносно цього центру мас:

$$x'_i = x_i - \bar{x} \quad y'_i = y_i - \bar{y}.$$

На основі зсунених координат обчислюється коваріаційна матриця — вона відображає, наскільки зміни вздовж осі x пов'язані зі змінами вздовж осі y :

$$\sum \begin{bmatrix} Var(x') & Cov(x', y') \\ Cov(y', x') & Var(y') \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} \sum x'^2 & \sum x' y' \\ \sum x' y' & \sum y'^2 \end{bmatrix},$$

де $Var(x')$ і $Var(y')$ – це дисперсії по кожній осі, $Cov(x', y')$ – коваріація, що показує, наскільки зміни по X і Y «узгоджені». Після побудови коваріаційної матриці Σ виконується її власний розклад:

$$\det(\Sigma - \lambda I) = 0,$$

де I – одинична матриця, а λ – власні значення, що описують ступінь варіації даних уздовж відповідних напрямків.

Для кожного знайденого λ_i обчислюється відповідний власний вектор v_i , який задовольняє рівняння:

$$\sum v_i = \lambda_i v_i,$$

де v_i – власні вектори (напрямки), λ_i – власні значення (ступінь розкиду даних у цьому напрямку).

Кут орієнтації зерна визначається як кут між головною віссю v_1 , що відповідає найбільшому власному значенню λ_1 , та віссю x :

$$\theta = \arctan 2(v_{1y}, v_{1x}),$$

де v_{1y} і v_{1x} – компоненти головного вектора.

Для зручності кут нормалізується до інтервалу $[0^\circ, 360^\circ)$:

$$\theta = \theta \mod 360.$$

Даний метод [2] та отримані результати дозволяють кількісно оцінювати структурну однорідність зварного металу та потенційно замінити частину функцій EBSD-аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *OpenCV Development Team.* (н.д.). // OpenCV-Python Tutorials. Отримано з https://docs.opencv.org/4.x/d6/d00/tutorial_py_root.html
- [2] Shtofel, O., Holovko, V., Korolenko, D. (2025). *A computer method for studying grain misorientation in materials science problems.* // Book of Abstracts of the IXth International Materials Science Conference HighMatTech – 2025 (p. 208). Отримано з <https://umrs.org.ua/activities/conferences/hmt-2025/boa2025/>

ІЕЗ ім. Є.О. ПАТОНА НАН УКРАЇНИ
Email address: danilkorlenko@gmail.com

КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА, ІЕЗ ім. Є.О. ПАТОНА НАН УКРАЇНИ
Email address: o.shtof@gmail.com

ІЕЗ ім. Є.О. ПАТОНА НАН УКРАЇНИ
Email address: v_golovko@ukr.net

КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: avdeeva.tetyana@gmail.com

ВПЛИВ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ТА ОБМЕЖЕНОСТІ МАСШТАБУ НА ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ ЗОБРАЖЕНЬ

С.Д. МАРКОВСЬКА, Ю.Ю. БОНДАРЕНКО, О.О. ШТОФЕЛЬ, Г.В. САМАР

В роботі розглядається застосування методу фрактального аналізу до зображень. Геометрична інтерпретація розмірності [1]:

$$D = \frac{\log(M)}{\log(L)}, \quad (1)$$

де D — розмірність, M — міра, L — розмір.

На прикладі крижинки Коха, фрактальна розмірність для неї за геометричним підходом (формула (1)) і аналізом розмірності:

$$D_{\text{кр.Коха}} = \frac{\log(4)}{\log(\frac{1}{3})} = 1.2619.$$

За комп'ютерним методом [2], методом Мінковського [1] (формула 2) (або *Box-counting method*): покриваємо фрактал сіткою з квадратів (коробок) розміром ϵ . Рахуємо кількість коробок $N(\epsilon)$, які містять частину фракталу.

$$D_{\text{кр.Коха}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}, \quad (2)$$

де $N(\epsilon)$ — мінімальне число множин діаметра ϵ , якими можна покрити множину.

$$D_{\text{кр.Коха}}^M = 1.2195.$$

Результат показує деяку розбіжність $D_{\text{кр.Коха}} > D_{\text{кр.Коха}}^M$, отже $\Delta = 0.0341$.

Фрактальний об'єкт	D	Розмір зображення	D^M	Δ
Килим Серпинського	1.8928	(122 × 122)	1.7713	0.1215
Килим Серпинського	1.8928	(729 × 729)	1.8456	0.0472

Відмітимо причини розбіжності в геометричному підході та в комп'ютерному аналізі:

- (1) Обмеженість роздільної здатності та масштабу (дискретизація): Чим менша досліджувана ділянка фракталу або чим менше ітерацій було виконано для його побудови, тим більшим буде відхилення обчисленої розмірності (табл. 1. Приклад Килим Серпинського).
- (2) Теоретичний фрактал має самоподібність на нескінченному діапазоні масштабів. Комп'ютерне представлення обмежене скінченною роздільною здатністю (пікселями, вокселями) та скінченним числом ітерацій або генерації фрактала. Це обрізає самоподібність на дуже малих і дуже великих масштабах. *При обчисленні, наприклад, методом box-counting, діапазон розмірів «коробок» (комірок) обмежений, і це впливає на точність апроксимації.*

Різні чисельні методи (наприклад, box-counting, method of capacity, метод радіуса тощо) можуть давати дещо відмінні значення фрактальної розмірності, особливо якщо фрактал не є строго самоподібним або має складну структуру.

Таким чином, теоретична розмірність — це ідеальне значення для нескінченного об'єкта, а комп'ютерно обчислена — апроксимація, обмежена роздільною здатністю, масштабом та методом аналізу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Falconer, K. *Д Fractal geometry: Mathematical foundations and applications* // — 2014 — (3rd ed.). John Wiley & Sons.
- [2] Штофель, О. О. *Вдосконалення методу фрактального аналізу для оцінки взаємозв'язку структури і властивостей конструкційних сталей* — [Дисертація кандидата технічних наук, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»]. — 2021. — Електронний архів КПІ. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/39936>.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: markovska.sofia@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yulia.b-fmf27@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна, ІЕЗ ім. Є.О. Патона НАН України
Email address: o.shtof@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: anna.samar@gmail.com

ЗАСТОСУНКИ ДОПОВНЕНОЇ РЕАЛЬНОСТІ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ ЗАКЛАДІВ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Н.В. РАШЕВСЬКА

Процес навчання в закладах загальної середньої освіти в останні роки все частіше здійснюється у дистанційному або змішаному форматах, що не завжди сприяє якісному опануванню навчального матеріалу. Особливо це відчутно під час вивчення таких предметів, як алгебра та геометрія, які вимагають високого рівня просторового мислення, уміння абстрагувати, аналізувати співвідношення між об'єктами, будувати моделі та оперувати символічними структурами. Досвід педагогів засвідчує, що учні часто мають труднощі з уявленням тривимірних фігур, побудовою геометричних тіл на площині, розумінням функціональних залежностей та графічним поданням математичних об'єктів.

Одним із перспективних напрямів розв'язання означених проблем є використання у процесі навчання імерсивних технологій, зокрема доповненої реальності (AR). Технології AR забезпечують поєднання віртуальних об'єктів із реальним середовищем, що створює ефект занурення та підсилює наочність. У математичній освіті це означає можливість «оживити» абстрактні поняття — побачити, як формула перетворюється на геометричну фігуру, а рівняння — на реальний графік у просторі. Таке візуально-інтерактивне подання сприяє розвитку просторового мислення, підвищенню мотивації та зменшенню когнітивного навантаження на учнів.

Виділяють дві основні групи мобільних та вебзастосунків для викладання математики з використанням 3D-візуалізації та AR:

1. Застосунки для візуалізації функцій (*Math3D*, *FunctionGraphsPlotter*, *3D FunctionsPlotter*, *3D GraphingCalculator*, *CalcPlot3D*). Ці інструменти орієнтовані на переведення складних алгебраїчних концепцій у наочний формат. Наприклад, *FunctionGraphsPlotter* зосереджений на двовимірних графіках, дозволяючи досліджувати вплив коефіцієнтів на криву, тоді як *3D FunctionsPlotter* та *3D GraphingCalculator* надають можливість будувати функції двох змінних у різних системах координат та досліджувати складні 3D-поверхні й вектори. *CalcPlot3D* додатково підтримує навчання, забезпечуючи просторові обертання та масштабування моделей.

2. Застосунки для стереометрії та розвитку просторової уяви на базі AR (*Geometria RA*, *RA Augmented Polyhedrons*, *Sólidos RA*, *Geometria Realidad Aumentada*). Ці інструменти використовують маркери (QR-коди) для віртуалізації геометричних тіл (призми, піраміди, тіла обертання) у реальному середовищі. Наприклад, *Sólidos RA* має розширений функціонал, що включає модулі «Планування» (для вивчення розгорток тіл), «Створення» (для комбінування геометричних тіл у 3D-системі координат) та «Моделювання» (для перетворення плоских фігур у багатогранники). Це надає можливість компенсувати відсутність фізичних макетів та забезпечити інтерактивну роботу учнів із 3D-об'єктами. Застосунки типу *Arloon Geometry* пропонують комплексні платні рішення з динамічними моделями, формулами та тестовими завданнями.

Методична інтеграція AR-застосунків передбачає їх використання на всіх етапах уроку: від наочної демонстрації нового матеріалу та анімації процесів до закріплення знань через інтерактивні експерименти. Вони є ефективними інструментами для індивідуальної та групової роботи, виконання дослідницьких і проєктних завдань.

Таким чином, використання мобільних застосунків 3D-візуалізації та доповненої реальності:

- покращує розуміння складних і абстрактних математичних концепцій;
- сприяє розвитку просторового мислення, критичного аналізу та навичок візуального моделювання;
- підвищує зацікавленість і мотивацію учнів, роблячи процес вивчення стереометрії та аналізу функцій більш захоплюючим і зрозумілим.

Інститут цифровізації освіти НАПН України, Київ, Україна
Email address: nvr1701@gmail.com

МОНІТОРИНГ ФАКТОРІВ ПОВ'ЯЗАНИХ З ПТСР МЕТОДАМИ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Д.П. РОЖЕНКО, О.В. МУЛИК, Т.Г. ПРИГАЛІНСЬКА

Актуальність. Посттравматичний стресовий розлад (ПТСР) є однією з найбільш поширених психічних реакцій у людей, які зазнали впливу воєнних дій. За даними метааналізу, відсоток осіб із симптомами ПТСР у зонах бойових дій сягає від 23% до 30% [1, 3]. В умовах тривалого збройного конфлікту в Україні значно зросло навантаження на психічне здоров'я населення, зокрема на жінок репродуктивного віку [2]. Це зумовлює необхідність глибшого аналізу факторів, що визначають наявність ПТСР, для удосконалення скринінгу та підвищення точності прогнозуючих моделей.

Мета. Виявити ключові латентні фактори, що зумовлюють розвиток ПТСР у жінок репродуктивного віку, та надати практичні рекомендації щодо оптимізації опитувальників.

Методи. Застосовано метод головних компонент (Principal Component Analysis, PCA) у статистичному середовищі JASP (модуль Factor). Придатність даних для факторного аналізу була оцінена за допомогою критерію Кайзера–Мейєра–Олкіна (КМО). Отримане загальне значення КМО 0.737 є прийнятним показником і свідчить про наявність достатньої кореляції між змінними (> 0.7).

Результати. Для аналізу було використано вибірку з 606 жінок зі звільнених територій України віком від 18 до 50 років, серед яких 36.6% виявили ознаки ПТСР. Опитувальник містив 54 показники, що описують соціально-демографічні характеристики, поведінкові звички, стан здоров'я, особливості сну та психоемоційний стан.

За допомогою факторного аналізу (PCA) виділено 8 компонент з власними числами більшими за одиницю.

	Eigenvalue	Unrotated solution	
		Proportion var.	Cumulative
Component 1	5.894	0.107	0.107
Component 2	3.862	0.070	0.177
Component 3	3.288	0.060	0.237
Component 4	2.788	0.051	0.288
Component 5	2.556	0.046	0.334
Component 6	2.259	0.041	0.375
Component 7	2.156	0.039	0.415
Component 8	1.883	0.034	0.449

Рис. 1. Характеристики головних компонент за результатами факторного аналізу (JASP)

Виділено декілька головних компонент, які пояснюють значну частку загальної дисперсії. Зокрема, найбільші власні значення має перша (5.894, 10.7% дисперсії), друга (3.862, 7.0%), третя (3.228, 6.0%) та четверта (2.788, 5.1%) компоненти. Вони найвпливовіші, оскільки агрегують найбільшу кількість інформації з початкового набору змінних.

Компонент	Назва фактора	Змінні з високим навантаженням	Обґрунтування значущості
PC1	Соматичне та інфекційне навантаження	76–82 Covid	Відображає соматичні симптоми після COVID-19
PC2	Фізичне здоров'я, функціонування	51 Hv (самооцінка фізичного здоров'я) 51 V (рівень працездатності)	Визначає загальний фізичний ресурс та схильність до стресової втоми.
PC3	Соціально-емоційна адаптація, статус ВПО	8 VPO	Відображає емоційну адаптацію та соціальні наслідки вимушеного переміщення.
PC4	Психофізіологічні прояви	46 Sleep (порушення сну) 46 A (виснаження)	Відображає психофізіологічні порушення, характерні для ПТСР: розлади сну та виснаження.

ТАБЛ. 1. Інтерпретація головних компонент факторного аналізу змінних, пов'язаних із ПТСР

Досліджено найбільш інформативні чотири компоненти (PC1–PC4), які охоплюють понад 28% варіації даних. Інші компоненти (PC5–PC8) мають незначну частку дисперсії та містять змінні, що дублюють або слабо корелюють із клінічними показниками ПТСР.

Висновки. Факторний аналіз (PCA) 54-х змінних у статистичному середовищі JASP дозволив виділити 8 компонент, які охоплюють як психічну, так і поведінкову/соматичну сфери. Зроблений аналіз допоможе удосконалити опитувальник виділенням ключових блоків, де деякі компоненти можуть бути виключені без втрати інформативності. Оптимізований опитувальник дозволить ефективніше здійснювати моніторинг і побудову ML-моделей ризику та раннього виявлення ПТСР.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Turecki, B., Hodes, M., Zich, R. (2024). Mental health of civilians in the Russia-Ukraine war: A rapid scoping review. *European Journal of Psychotraumatology*, 15(1), 2291587.
- [2] Koubova A, Maricano H, Matkeviciene R, Matichescu M, Nazarov M, Teperik D, Kochiashvili N, Adini B. Hope and Distress: A Cross-Country Study Amid the Russian-Ukrainian War. *Stress Health*. 2025 Apr;41(2):e70033.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: darinarozenko19@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: mulyk.olena@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tania.krivorot@gmail.com

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИЙ ПІДХІД У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Ю. В. ЦІВЧИК

Диференційований підхід в освітньому процесі з математичної освіти посідає важливе місце в сучасній педагогіці, адже вимагає високого рівня абстрактного мислення, логіки, аналітичних здібностей й нерідко викликає труднощі у здобувачів освіти. Водночас це обґрунтовує необхідність впровадження диференційованого підходу в освітньому процесі для врахування різного рівня здібностей учасників освітньої діяльності [1, с. 12].

У закладах середньої освіти вивчення математичної освітньої галузі входить до різних напрямів – математичного, гуманітарного, природничого. Це обґрунтовується не лише суспільною значущістю математичної освіти, а й її роллю у формуванні логічного мислення, пізнавальної самостійності та загальної культури здобувачів освіти. Дослідники (А. Покусай [2], Л. Шелестова [3]) пропонують систему різних рівнів складності у навчанні математики в закладах середньої освіти: I – загальнокультурний, II – прикладного спрямування, III – поглиблений.

I напрям орієнтований на здобувачів освіти, для яких освітня галузь «Математика» є елементом загальної освіти. Його мета – розвиток інтелектуальних здібностей, розуміння ролі математики в житті та опанування базових умінь для орієнтації у сучасному світі. II напрям адресований здобувачам освіти природничих і гуманітарних профілів, де дисципліна виконує допоміжну функцію, забезпечуючи опанування інструментів для вивчення закономірностей у відповідних науках. III напрям – найскладніший, призначений для майбутнього ґрунтового вивчення фізико-математичних та технічних напрямів. Він передбачає системне засвоєння математичних знань і формування інтелектуальної культури [1, с. 13].

Зміст навчальної дисципліни має враховувати різний рівень здібностей здобувачів освіти. Для тих, хто швидше опановує абстрактне та логічне мислення, доцільно передбачати більш складні завдання з алгебри та геометрії, а для тих, хто потребує додаткової підтримки – більш наочні та практично орієнтовані вправи. Такий підхід дозволяє адаптувати освітній процес до індивідуальних можливостей здобувачів освіти та сприяє формуванню їхніх когнітивних і аналітичних навичок [2, с. 45].

Практика диференційованого підходу включає: рівневу диференціацію, що реалізується через різні форми: поділ за рівнями підготовки, організацію групових й індивідуальних завдань, варіативність методів роботи. Поширеною є рівнева диференціація, що дає змогу кожному здобувачу освіти обирати завдання відповідно до своїх можливостей; диференціацію за самостійністю, коли одні працюють під керівництвом педагога, а інші виконують завдання самостійно; диференціацію за складністю завдань, яка передбачає поступове ускладнення вправ залежно від досягнень здобувачів освіти [3, с. 234].

Важливим аспектом ефективної диференціації є організація контролю знань. Система перевірки має відповідати обраному рівню навчання, оскільки контроль виконує керівну функцію у освітньому процесі. Правильно побудований контроль не лише фіксує досягнення здобувачів середньої освіти, а й сприяє розвитку їхнього логічного мислення, самостійності та відповідальності.

Отже, диференційований підхід в освітньому процесі вивчення математичної освітньої галузі виступає дієвим засобом реалізації особистісно орієнтованого навчання. Його впровадження в закладах середньої освіти створює умови для підвищення якості освіти, розвитку інтелектуального потенціалу здобувачів освіти та забезпечення наступності між загальною та профільною підготовкою.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Михайленко Л. М. Сучасні підходи до впровадження формульованого оцінювання на уроках математики // *Фізико-математична освіта*. – 2022. – Вип. 4. – С. 12–20.
- [2] Покусай А. М. Диференційований підхід до вивчення елементарних функцій в курсі алгебри та початків аналізу // *Педагогічний простір*. – 2022. – Вип. 3. – С. 45–53.
- [3] Шелестова Л. В. Педагогічні технології як засіб диференціації та інтенсифікації навчальної діяльності учнів у профільній середній освіті // *Розвиток сучасної освіти і науки: результати, проблеми, перспективи*. – 2025. – № 3. – С. 230–241.