

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Х
МІЖНАРОДНА
НАУКОВО-ПРАКТИЧНА
КОНФЕРЕНЦІЯ
«МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ
ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ»

Тези доповідей

Київ – 2025

NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
“IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE”

X
INTERNATIONAL
SCIENTIFIC AND PRACTICAL
CONFERENCE
“MATHEMATICS IN A MODERN
TECHNICAL UNIVERSITY”

Abstracts

Kyiv – 2025

**Х Міжнародна науково-практична конференція
«Математика в сучасному технічному університеті»
<https://matan.kpi.ua/uk/mstu10/>**

Програмний комітет

Олег Клесов (Київ, Україна), голова
Юрій Буценко (Київ, Україна)
Ольга Василик (Київ, Україна)
Анна Дудко (Київ, Україна)
Володимир Заєць (Барселона, Іспанія)
Олександр Заїграєв (Торунь, Польща)
Володимир Колчинський (Атланта, США)
Микола Леоненко (Кардіфф, Велика Британія)
Анна Мельникова (Авіньйон, Франція)
Андрій Оленко (Мельбурн, Австралія)
Петро Самусенко (Київ, Україна)
Анатолій Свіщук (Калгарі, Канада)

Організаційний комітет

Ірина Голіченко (Київ, Україна)
Юлія Новікова (Київ, Україна)
Марія Погребіцька (Київ, Україна)
Юрій Приходько (Київ, Україна)
Лідія Федорова (Київ, Україна)

Секції

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках
Секція 2. Методика викладання математики та сучасні освітні
технології у вищій школі
Секція 3. Історія точних наук

Матеріали Десятої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», 20–21 лютого 2025 року, Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського.

X International Scientific and Practical Conference
«Mathematics in a Modern Technical University»
<https://matan.kpi.ua/en/mstu10/>

Programme committee

Oleg Klesov (Kyiv, Ukraine), chair
Yurii Butsenko (Kyiv, Ukraine)
Olga Vasylyk (Kyiv, Ukraine)
Anna Dudko (Kyiv, Ukraine)
Volodymyr Zayats (Barcelona, Spain)
Oleksandr Zaigraev (Toruń, Poland)
Volodymyr Koltchinskii (Atlanta, USA)
Mykola Leonenko (Cardiff, Great Britain)
Anna Melnykova (Avignon, France)
Andriy Olenko (Melbourne, Australia)
Petro Samusenko (Kyiv, Ukraine)
Anatoliy Swishchuk (Calgary, Canada)

Organizing committee

Iryna Golichenko (Kyiv, Ukraine)
Yuliia Novikova (Kyiv, Ukraine)
Mariia Pohrebitska (Kyiv, Ukraine)
Yuriy Prykhodko (Kyiv, Ukraine)
Lidiia Fedorova (Kyiv, Ukraine)

Секції

Section 1. Applications of mathematics
Section 2. Methods of teaching mathematics and modern educational
technologies in higher education
Section 3. History of natural sciences

Proceedings of the X International Scientific and Practical Conference «Mathematics in a Modern Technical University», February 20–21, 2025, Kyiv, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.

Зміст

Пленарна доповідь / Plenary session

9

Алексеева І.В., Федорова Л.Б. Конференція «Математика в сучасному технічному університеті» як відображення змінення тенденцій в математичній освіті	10
---	----

I. Застосування математики в суміжних науках / Applications of mathematics

14

Isaiev V., Fedorenko V., Bankovskyi M., Palchik S. Modeling of air exchange according to the scheme "air supply from above – air exhaust from below"	15
Krutii Yu.S., Perperi A.O., Bekshaiev O.S. On an analytical method for calculating the bending of rectangular plates on an inhomogeneous elastic foundation . . .	19
Krutii Yu.S., Perperi A.O., Teorlo N.A. On the analytical method for calculation a beam resting on inhomogeneous elastic foundation	23
Shevtsova O.M. The Poisson bracket and Hamilton's equations of motion	26
Барабаш О.В., Свинчук О.В., Макачук А.В. Ймовірність зв'язності інформаційних систем як функція часу	30
Білий В.О., Білий О.Г. Вплив рідини із ємностей циліндричної та сферичної форм в залежності від осі обертання	32
Богинський Д.С., Сідлецький В.О., Новікова Ю.В. Дослідження хаотичної поведінки осцилятора Чуа	36
Бондарчук В.Ю. Перетворення Фур'є в теорії сигналів	39
Буценко Ю.П., Лабжинський В.А. Виявлення деструктивного інформаційного впливу на об'єкт критичної інфраструктури	41
Ванін В.В., Залевська О.В., Савчук Б.І. Моделювання цифрових даних звукових сигналів на основі параметрів фрактальних функцій	45
Вашпанова Н.В., Синлівий М.Ю. Деякі інфінітезимальні деформації поверхонь із заданою зміною тензора Річчі	49
Гембарська С.Б., Василюк Н.В., Воронюк М.О. Колмогоровські поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова	53
Гембарська С.Б., Романюк І.А., Балабуха В.І. Найкращі наближення класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{q,1}$	55
Гладун В.В., Іванов О.В. Особливості оцінювання параметрів множинного квазіцирпованого сигналу	57
Горчаков О.О. Реалізація сценарію узагальненої переміжності у динамічній системі Ресслера	61
Гураль І.М., Смоловик Л.Р. Класифікація навчальної поведінки майбутніх інженерів при вивченні дисциплін математичного циклу	63

Залевська О.В., Гуляньський О.С., Коник Р.В. Застосування фрактального аналізу для прогнозування довгострокових тенденцій на українському фондовому ринку	66
Зінченко Н.М. Складні процеси відновлення: асимптотична поведінка і застосування у фінансовій і актуарній математиці, теорії надійності і теорії масового обслуговування	69
Іваненко Т.В. Оптимізаційні моделі банківської діяльності	74
Іваненко Т.В. Моделювання банківської діяльності з позиції мікроекономіки	78
Кюсак В.А., Патрашку Є.В. Моделювання природного освітлення	82
Косович І.Т., Черевко І.М. Математичний аналіз SIR моделі Кермака–Маккендріка	85
Круглова Н.В., Диховичний О.О. Застосування факторного аналізу в психології	89
Крутії Ю.С., Перпері А.О., Величко Д.В. Математичні аспекти динамічного розрахунку круглих пластин на неоднорідній пружній основі	93
Кубайчук О.О., Іщенко А.А., Прухніцька В.В. Метод Кьоніга-Егерварі в алгоритмах розв'язування задачі оптимізації для задач криптоаналізу	96
Кузьмич О.Р. Використання математики в кібербезпеці	98
Макарчук О.П. Ланцюгове A_2 -представлення дійсних чисел: сучасні результати та відкриті проблеми	100
Матковський В.Ю. Метод оптимального розподілу інвестицій на основі нечіткого виведення типу 2	103
Мельник А.О., Розора І.В. Статистична оцінка та перевірка гіпотез для імпульсної перехідної функції	107
Мірко С.С., Маслянюк П.П. Проблеми обробки інформації судочинства України та NLP-технологій штучного інтелекту	111
Нерода І.В., Кондрук Є.Б., Нерода В.А. Інтелектуальний аналіз даних в задачах освітньої сфери	115
Панічек О.В., Тимошенко О.А. Математичне моделювання динаміки передачі інфекційних захворювань з використанням СДР	119
Паренюк Д.В., Івко О.П., Паренюк А.В. Використання штучного інтелекту в задачах неруйнівного контролю	123
Романюк О.Н., Майданюк В.П., Романюк О.В. Використання математики при формуванні графічних зображень	126
Сеїт-Джеліль І.А. Вплив запізнювання на регулярну та хаотичну динаміку неідеальної динамічної системи “бак з рідиною-електродвигун”	130
Селіванов В.В., Василик О.І. Оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ -субгауссовими величинами позовів	132
Синявська О.О., Тегза А.М. Застосування рангових коефіцієнтів для оцінки узгодженості рейтингів за різними факторами	136
Соловйов А.А., Рашкова Л.О. Тривимірні звідні псевдоріманові простори	140
Тихоненко Д.В., Ямненко Р.Є. Властивості екстремумів сум зважених випадкових процесів із класів $V(\varphi, \psi)$	144

Федченко Ю. С., Лесечко О. В., Мар'яно Я. Г. <i>Майже єйштейнові напівзвідні простори</i>	147
Чередько Д. О. <i>Роль математичних методів у геоінформаційній розвідці (GEOINT)</i>	150

II. Методика викладання математики та сучасні освітні технології у вищій школі / *Methods of teaching mathematics and modern educational technologies in higher education* 152

Shevtsova O. M. <i>Visualization in Maple for Learning Differential Calculus</i>	153
Tuluchenko H. Ya. <i>Generalized Bernoulli equation as a source for generating tasks of increased complexity</i>	157
Бакун В. В. <i>Про математичні моделі випадкового досліджу</i>	160
Баліна О. І., Безклубенко І. С., Богданов О. В., Буценко Ю. П. <i>Спеціалізовані програмні пакети та їх роль у курсі вищої математики</i>	164
Гурич А. М. <i>Методика вивчення теми «Застосування похідної» в шкільному курсі математики</i>	168
Диховичний О. О., Круглова Н. В. <i>Застосування штучного інтелекту у створенні та аналізі тестових завдань з вищої математики</i>	172
Зошак Л. М. <i>Інноваційні підходи до формування математичних компетентностей студентів в умовах цифровізації вищої освіти</i>	175
Ковтонюк М. М., Соля О. М. <i>Інноваційні підходи до формування методичної культури майбутнього викладача математики в освітньому середовищі університету</i>	179
Кононович Т. О., Подошвелев Ю. Г. <i>Інформаційні технології та наукові знання в контексті підвищення якості математичної освіти</i>	184
Лагода О. А., Кудзіновська І. П. <i>Оцінювання математичних компетентностей студентів-логістів в умовах дистанційного навчання</i>	188
Мельник І. Ю., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д., Хохотва М. О. <i>До питання використання штучного інтелекту при вивченні математичних та технічних дисциплін</i>	192
Москвичова К. К., Орловський І. В., Пелехата О. Б., Тимошенко О. А. <i>Інноваційні підходи підтримки математичної освіти в умовах викликів</i>	195
Мулик О. В. <i>Власні вектори та власні числа в лінійній алгебрі та статистиці за допомогою функцій MS Excel</i>	199
Підгорна Т. В., Самусенко П. Ф. <i>Особливості навчання імітаційного моделювання</i>	203
Тютюн Л. А., Косовець О. П. <i>Візуалізація навчального матеріалу з математичних дисциплін у вищій школі за допомогою середовища GeoGebra</i>	205

III. Історія точних наук / *History of natural sciences* 209

Golichenko I. I. <i>History of complex numbers</i>	210
Karmadonova T. <i>The use of mathematical methods for modeling the causes and consequences of Intellectual migration</i>	213

Бережний Б.О. <i>Історія машин Тюрінга та роль в алгоритмізації</i>	217
Гембарська С.Б., Коренков М.Є., Харкевич Ю.І. <i>Володимир Йосипович Горбайчук — учений і педагог (до 90-річчя від дня народження)</i>	220
Задерей Н.М., Нефьодова Г.Д., Мельник І.Ю., Хохотва М.О. <i>Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко, видатний український математик, педагог (до 200-річчя від дня народження)</i>	223
Кравчук О.М. <i>Історико-філософські аспекти становлення аналітичної геометрії</i>	227
Кравчук О.М., Никитюк А.Л. <i>Четверта славнозвісна задача давнини і відшукання її розв'язку</i>	231
Кухарук С.О. <i>Історичний розвиток встановлення класичних методів інтерполяції</i>	235
Литвинко А.С. <i>Ювілеї науки: до 90-річчя Інституту математики НАН України</i>	239
Луговський О.Г. <i>Дослідження математиків АН УРСР з балістики в 20–30-х роках ХХ ст.</i>	244
Маловічко Т.В. <i>Моральне сподівання</i>	248
Падалко Н.Й. <i>Сторінки пам'яті професора Володимира Горбайчука (до 90-річчя від дня народження)</i>	252
Стельмашук В.О. <i>Жінки в історії точних наук: внесок та досягнення</i>	256
Шумлянський А.Ю., Федорова Л.Б. <i>Визначник Вронського (вронськіан)</i>	260

ПЛЕНАРНА ДОПОВІДЬ

PLENARY SESSION

Конференція «Математика в сучасному технічному університеті» як відображення змінення тенденцій в математичній освіті

І. В. Алексеєва¹, Л. Б. Федорова¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

alexir1@ukr.net, fedorova_lb@yahoo.com.ua

Анотація

Розглянуто історію організації та проведення конференцій МСТУ, змінення важливих аспектів підготовки майбутніх фахівців у контексті сучасних реформ освіти і викликів сьогодення. Вшановується пам'ять про організатора конференції, математика, педагога В.О. Гайдея.

Ключові слова: конференція; дистанційна освіта; тестування; історія і методика математики.

Десята міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», організована кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, відзначає в 2025 році свій перший ювілей. Тому доречно згадати історію її виникнення і розвитку.

Ідея проведення конференції, присвяченої важливим аспектам математики, застосуванню математичних методів в інших галузях науки і техніки, історичному розвитку точних наук і підходам до викладання математики в закладах вищої освіти, була запропонована завідувачем кафедри О.І. Клесовим.

В квітні 2013 року відбулася перша така конференція, в якій взяли участь 226 науковців з 6 країн, подано 174 статей і тез доповідей. Матеріали конференції були опублікованих в електронному і друкованому вигляді.

Перша конференція проводилася в очному форматі і складалась з чотирьох секцій [1]:

1. Застосування математики в суміжних науках.
2. Методика викладання математики у вищій школі.
3. Історія точних наук.
4. Сучасні освітні технології у вищій школі.

Засідання секцій проходили в аудиторії імені академіка Михайла Кравчука, в якій зберігаються матеріали про життєвий шлях, наукові і педагогічні здобутки видатного математика, завідувача кафедри вищої математики КПІ у 1930–1937 роках.

Наступні дев'ять конференцій проводились в заочному форматі щороку в грудні з 2013 по 2020 роки. Щорічно у конференціях брало участь понад 100 учасників, загалом було опубліковано майже 900 тез і статей.

Пандемія COVID-19 та війна в Україні значно вплинули на всі сфери суспільства, зокрема і на освітній процес, змусивши адаптуватися до нових викликів і реалій. Якщо перші конференції були присвячені обговоренню методики викладання певних розділів математичних дисциплін, формам проведення лекцій і практичних занять, дискусіям щодо спроможності тестування адекватно оцінювати знання студентів з математики, то перехід до дистанційної і змішаної форми навчання вимагав нових підходів і освітніх технологій. Розвиток інформаційних технологій дозволив викладачам доволі швидко перебудувати навчальний процес відповідно до нових умов. Використання інформаційно-комунікаційних програм відеозв'язку, таких як Zoom, Microsoft Teams, Google Meet, Discord та інших для проведення лекцій і практичних занять дозволяє в синхронному режимі підтримувати спілкування зі студентами. Використання онлайн-курсів і інтерактивних платформ дає змогу студентам отримувати доступ до навчальних матеріалів з будь-якої точки світу та в зручний для них час.

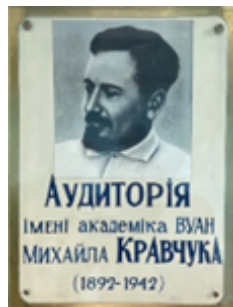
Найскладнішим є питання проведення контрольних заходів, тому саме організації контролю знань студентів приділялось багато уваги на останній дев'ятій конференції МСТУ, яка проходила вже під час пандемії в грудні 2020 року. Викладачі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей мають великий досвід у створенні, проведенні та аналізі якості комп'ютерних тестів. Система електронного навчання Moodle надає багато можливостей для створення тестових завдань різного рівня складності, що дозволяє швидко та якісно провести перевірку знань студентів.



Віктор Гайдей
(1973–2021)

Треба відзначити кропітку працю організаційного та програмного комітетів конференцій, постійними членами яких були викладачі нашої кафедри.

Згадуючи історію проведення конференцій, неможливо не згадати одного з основних організаторів як конференції «Математика в сучасному технічному університеті», так і конференції ім. Михайла Кравчука, нашого колегу, доцента кафедри, математика, педагога, музейника, великого патріота України – Віктора Олександровича Гайдея і віддати йому шану.



Віктор Олександрович пішов з життя раптово і несподівано 12 лютого 2021 року маючи багато планів і задумів. Все творче життя Віктора Олександровича пов'язане з математикою. Після закінчення КНУ ім. Тараса Шевченка з 1995 року він працював в КПІ, пройшовши шлях від асистента до доцента. Під керівництвом професора Н.О. Вірченко захистив кандидатську дисертацію. Талановитий математик, він все ж таки особливу увагу приділяв методиці викладання математики в технічному університеті. Віктор Олександрович був ініціатором створення нових посібників, підручників, електронних курсів, які мають грифи МОН і Вченої ради КПІ.



Свій викладацький досвід, розуміння необхідності навчити майбутніх інженерів самостійно працювати і мислити, він втілював у трьох томах підручника «Математика в технічному університеті», який містить теоретичний матеріал і практикум з опорним конспектом у вигляді таблиць, адже інженери краще розуміють таблиці і схеми, великою кількістю навчальних задач і завдань для самостійної роботи [2].

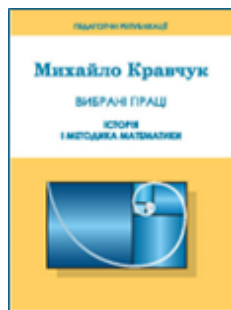
Віктор Олександрович дуже любив книги, цікавився досвідом кращих педагогів-математиків минулого і сучасності, традиціями освітньої системи.

З 2014 року за сумісництвом працював провідним науковим співробітником Педагогічного музею України, в якому займався дослідженням педагогічної спадщини українських математиків, упорядкуванням літературних фондів [3]. Віктор неодноразово говорив: «Працюючи в музеї, я відпочиваю душою».

Віктор Гайдей є автором віртуальних виставок про життя і творчість педагогів-новаторів, математиків-методистів: Олени Дубінчук (1919–1994), Миколи Єржківського (1894–1967), Костянтина Лебединцева (1878–1925) і Михайла Гельфанда (1907–1991).

Разом з директором Педагогічного музею Олександром Петровичем Міхно започаткував видавничу серію «Педагогічні републікації», перший випуск якої містив вибрані праці з історії та методики математики академіка Михайла Кравчука. Віктор Гайдей був серед укладачів 6 випусків даної серії видань. За ініціативи Віктора Олександровича започатковано серію видань каталогів-путівників, серед яких каталоги української дитячої книги кінця XIX – початку XX сторіччя.

Для Віктора Гайдея була характерна людяність, тактовність, делікатність, доброзичливість до колег і студентів, готовність завжди прийти на допомогу, закоханість в свою роботу. Він був справжнім патріотом України, багато часу і зусиль присвятив формуванню і збереженню національної історичної пам'яті. На лекціях завжди приділяв увагу історії математики, видатним вченим-математикам, розширюючи світогляд студентів. Коло наукових і дослідницьких



інтересів Віктора Олександровича Гайдея співзвучно з тематикою нашої конференції. Сподіваємось на цікаві доповіді, обмін досвідом і кращими практиками в підготовці майбутніх спеціалістів.

Перелік посилань

- [1] Архів кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
<https://matan.kpi.ua/uk/konferencii.html>
- [2] Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б (2018, 2019, 2021). *Математика в технічному університеті: підручник*. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.– Т. 1, 2, 3.
Т.1: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/24338>
Т.2: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30396>
Т.3: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/39003>
- [3] Матеріали Педагогічного музею України Національної академії педагогічних наук України
<https://pmu.in.ua/books/>

I

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

APPLICATIONS OF MATHEMATICS

Modeling of air exchange according to the scheme “air supply from above – air exhaust from below”

V. Isaiev¹, V. Fedorenko^{1,2}, M. Bankovskyi¹, S. Palchik¹

¹*State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine*

²*Odesgaz joint-stock company, Odessa, Ukraine*

isaevv5@gmail.com

Abstract

On the basis of the developed human model simulating heat and mass exchange at its release of heat, water vapour and CO_2 and air coming and removed by the supply and exhaust ventilation unit the efficiency of the general exchange ventilation system was investigated. Applying numerical modelling ANSYS CFD (Computational Fluid Dynamics) on the basis of continuity equations and Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations “RANS” (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) monitoring and rendering (visualization) of changes in CO_2 concentration, temperature and relative humidity in the space under study by time along the room height was performed.

Keywords: mathematical model; air contaminant; aerodynamics; computational fluid dynamics; air change scheme.

The energy efficiency of life support systems (ventilation and air conditioning) is directly related to the regulatory constraints on indoor air parameters. The main harmfulnesses of air, by which the performance of ventilation systems is calculated: temperature; relative humidity; concentration of carbon dioxides.

Normed also: the speed of the air flow into the working area of the room; the temperature difference between the temperature of the air in the working area and the temperature of the supply air flow entering the working area (WA).

In the practice of climatotechnics, the efficiency of ventilation and air conditioning systems is also significantly affected by the air exchange scheme.

The developed mathematical model of human impact on the air environment of an isolated room allowed to analyse the intensity of pollution of the studied space [Kiosak, Isaiev, Fedorenko, Gridasov, 2024]. In the same work, the study of normalisation of air environment parameters from the state of pollution to the normative

parameters on CO_2 concentration was carried out using the air exchange scheme “air supply from above - removal from below”. Generalisation of results of researches of multifactor interaction:

- of a person (CO_2 , heat and water vapour emission);
- polluted space of a premise (CO_2 , heat and water vapour emission);
- supply ventilation (CO_2 , heat and water vapour emission);
- removal of air mixture by exhaust ventilation system (a person+polluted space of a premise+supply ventilation) is presented in this paper. Various methods and approaches have been used in the practice of calculating changes in the state of the air environment in rooms for various purposes. Examples of successful solutions of applied ventilation problems do not remove the question of the accuracy of the results obtained by mathematical modelling. Nowadays, mathematical modelling methods are used in engineering calculations, which allow obtaining an estimate of flow parameters based on numerical solution of the Reynolds equations of stationary or unsteady Navier-Stokes equations. (RANS/URANS: Steady/Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes).

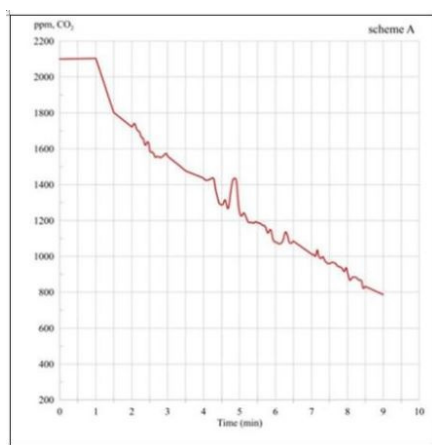


Figure 1: Dynamics of changes in CO_2 concentration over the time of observation.

This paper considers the efficiency of supply and exhaust ventilation according to the scheme “air supply from above - removal from below”.

The parameters of air pollutants that are assimilated by the ventilation system are adopted as follows: air temperature: $24^{\circ}C$; initial level of CO_2 concentration: 2100 ppm; atmospheric pressure: 101325 Pa; relative humidity: $\varphi = 65\%$; average surface temperature of a clothed person: $27^{\circ}C$.

Results of studies of the “air contaminant” assimilation. Scheme provides the following constructive conditions for ventilation functioning: air supply from above using a static chamber and a ceiling diffuser with a working diameter of $\varnothing 150mm$;

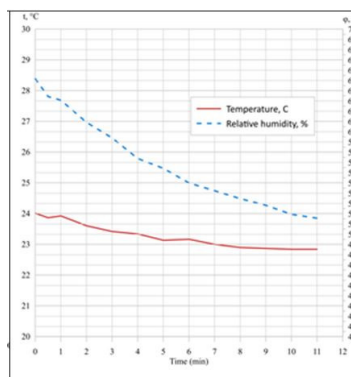
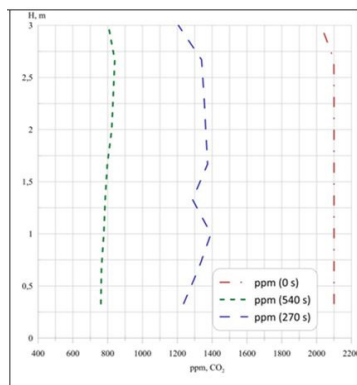


Figure 2: Monitoring the distribution of CO_2 concentration on a vertical scale

Figure 3: Graphs of changes in temperature and relative air humidity

consumption of supply and exhaust air: $120m^3/hour$; exhaust ventilation is organized in the lower part of the wall using a ventilation grid.

First of all, it is reasonable to consider the time required to bring the microclimate of the room to the normative state during CO_2 assimilation. In turn, preliminary studies have established that the highest concentration is concentrated in the working zone, which is due to the physical properties of carbon dioxide compared to the surrounding air.

There is an interest in the organization of exhaust ventilation in the lower plane of the working area, where the extraction of polluted air has the shortest path and the possibility of repeated ascent of carbon dioxide into the human breathing zone is excluded. The dynamics of changes in CO_2 concentration at the monitoring point in a 9-minute period is presented in Fig. 1.

The value of carbon dioxide on a vertical scale during the functioning of the ventilation system (Fig. 2) is distributed with a fluctuation within 200 ppm, which indicates uniform assimilation of polluted air in the study area over the time of observation.

Graphs of changes in temperature and relative air humidity are presented in Fig. 3.

On the basis of the developed mathematical model, it became possible to solve such problems using the ANSYS software complex as: human air contaminant intake in an isolated space; modeling of the “air contaminant” intake, scheme “air supply from above – removal from below”.

The ANSYS mathematical apparatus allows to analyze the operation of air handling unit to redistribute and remove the main “air contaminants” from the room (carbon dioxide, heat, water vapor) and track the values of temperature, humidity content, relative humidity, enthalpy, and air velocity. In particular, on the basis of the contour

Parameters	The range of changes in the indicator is from min to max in the boundary plane of the room WA		Optimal parameters when the jet enters the working area of the room			
	Value (min-max)	Temperature difference	$\Delta t, ^\circ C$	$v, m/s$	$\varphi, \%$	CO_2 , ppm
Scheme “air supply from above - removal from below” (data after 540 s)						
Temperature, $t^\circ C$	22.6-22.9	$\Delta t = 0.6 - 0.9$	1-1.5			
Velocity, vm/s	0-0.4			0.1-0.2		
Humidity content, dg/kg	8.8-8.9					
Relative humidity, $\varphi\%$	52.2-51.9				25-60	
Carbon dioxide CO_2 , ppm	686-864					400-600

Table 1: Air parameters at the entrance of the supply jet into the working area of the room.

distribution of the air handling unit, it became possible to evaluate and compare the efficiency of the work of various air distribution schemes in the room WA.

Data processing of made it possible to compare the obtained results with the regulatory requirements for the optimal parameters of the air jet entry from the ceiling diffuser in the room WA (see Table 1).

With the use of the ANSYS software package, mathematical modeling of processes of changing the state of the air environment has become possible. An objective opportunity has appeared to study:

- processes of heat and mass exchange and hydrogas dynamics during the interaction of systems (human and air handling unit operating according to various air change schemes);
- obtain intermediate results of the efficiency of various air change schemes in the room.

Subsequent publications will allow a comprehensive assessment and comparison of the efficiency of all four air change schemes we have chosen, when solving the inverse problem (bringing the parameters of the polluted air environment of the room to optimal standard parameters by means of general exchange ventilation).

References

Kiosak, V., Isaiev, V., Fedorenko, V., Gridasov, A. (2024). Modeling the entry of air contaminants into a room. *Mechanics and Mathematical Methods*, vol. 6, no. 2, pp. 58–76. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-58-76>

On an analytical method for calculating the bending of rectangular plates on an inhomogeneous elastic foundation

Yu. S. Krutii¹, A. O. Perperi¹, O. S. Bekshaiev¹

¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Odesa, Ukraine*

yurii.krutii@gmail.com, a.perperi@odaba.edu.ua,
a.bekshayev@gmail.com

Abstract

An analytical method for calculating the bending of a rectangular plate resting on an inhomogeneous elastic foundation and subjected to a continuously distributed variable transverse load is proposed. It is assumed that two parallel sides of the plate are hinged, while the other two are fixed in any manner. The foundation reaction is described by the Winkler model with a variable bedding coefficient.

Keywords: rectangular plate; inhomogeneous elastic foundation; Winkler hypothesis; variable bedding coefficient; analytical solution.

The problem of bending a rectangular plate ($0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$) with constant cylindrical rigidity D is considered, where the sides $x = 0$; $x = a$ are fixed in any manner, and the sides $y = 0$; $y = b$ are hinged. The plate rests on an inhomogeneous elastic foundation and is subjected to a transverse continuously distributed load with intensity $q(x, y)$ (Fig. 1).

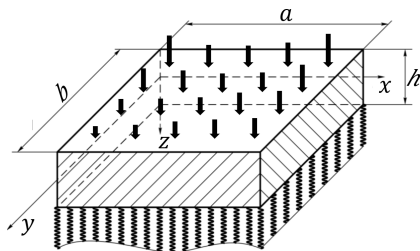


Figure 1: Plate on an elastic foundation under the action of a transverse load.

In the general case, the coefficient k is a function of the variables x and y . However, here it is assumed that the bedding coefficient continuously changes along the x -axis, while remaining constant along the y -axis, i.e., $k = k(x)$. For $k(x)$, the representation $k_0 B(x)$ is adopted, where k_0 is the value of the bedding coefficient at some characteristic point (for example, at the point $x = 0$), and $B(x)$ is a continuous dimensionless function that expresses the law of variation of the bedding coefficient over the segment $0 \leq x \leq a$.

The equation of the elastic surface of the plate in our case will have the form

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + k_0 B(x) w = q(x, y). \quad (1)$$

With the aim of satisfying the boundary conditions

$$w = 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

at the edges of the plate $y = 0$ and $y = b$, the solution to the equation (1) is sought in the form

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (2)$$

The given load is also approximated by a trigonometric series

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (3)$$

For the function $q_m(x)$, we adopt the representation $q_m(x) = q_{m,0} C_m(x)$, where $q_{m,0}$ is a constant dimensional factor, and $C_m(x)$ is a dimensionless function.

Substituting the representations (2) and (3) into equation (1) and equating the terms of the series with the same indices, we obtain the ordinary nonhomogeneous fourth-order differential equation

$$w_m''''(x) - \frac{2\lambda_m^2}{a^2} w_m''(x) + \frac{1}{a^4} (\lambda_m^4 + K B(x)) w_m(x) = \frac{q_{m,0}}{D} C_m(x), \quad (4)$$

where

$$K = \frac{k_0 a^4}{D}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi a}{b}.$$

The solution of the equation (4) is found using the method developed in [Krutii, 2016], [Krutii, 2018], [Krutii, Suriyaninov, Vandynskiyi 2018], [Krutii, Vandynskiyi, 2019], [Krutii, Sur'yaninov, Karnaukhova, 2021]. The corresponding formulas, after approximating the functions $B(x)$ and $C_m(x)$ by Maclaurin series in powers of x/a , will have the form:

$$w_m(x) = w_m(0) X_{m,1}(x) + w_m'(0) a X_{m,2}(x) + w_m''(0) a^2 X_{m,3}(x) + w_m'''(0) a^3 X_{m,4}(x) + \frac{q_{m,0} a^4}{D} X_{m,5}(x); \quad (5)$$

$$X_{m,n}(x) = \alpha_{m,n,0}(x) - \alpha_{m,n,1}(x)K + \alpha_{m,n,2}(x)K^2 - \alpha_{m,n,3}(x)K^3 + \dots \quad (6)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$\alpha_{m,n,k}(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{n+4k-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{m,n,k,j} \left(\frac{x}{a}\right)^j \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5)(k = 0, 1, 2, \dots); \quad (7)$$

$$c_{m,n,0,0} = \frac{1}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, 4); \quad (8)$$

$$c_{m,n,0,j} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4)(j = 1, 3, 5, \dots); \quad (9)$$

$$c_{m,n,0,j} = \left(1 - \frac{j}{2}\right) \frac{\lambda_m^j}{(n+j-1)!} \quad (n = 1, 2)(j = 2, 4, 6, \dots); \quad (10)$$

$$c_{m,n,0,j} = \left(1 + \frac{j}{2}\right) \frac{\lambda_m^j}{(n+j-1)!} \quad (n = 3, 4)(j = 2, 4, 6, \dots); \quad (11)$$

$$c_{m,5,0,j} = \frac{C_{m,j}}{r_{5,0,j} r_{5,0,j+2}} \quad (j = 0, 1); \quad (12)$$

$$c_{m,5,0,j} = \frac{1}{r_{5,0,j} r_{5,0,j+2}} (C_{m,j} + 2\lambda_m^2 r_{5,0,j} c_{m,5,0,j-2}) \quad (j = 2, 3); \quad (13)$$

$$c_{m,5,0,j} = \frac{1}{r_{5,0,j} r_{5,0,j+2}} (C_{m,j} + 2\lambda_m^2 r_{5,0,j} c_{m,5,0,j-2} - \lambda_m^4 c_{m,5,0,j-4}) \quad (14)$$

$$(j = 4, 5, 6, \dots);$$

$$c_{m,n,k,j} = \frac{1}{r_{n,k,j} r_{n,k,j+2}} \sum_{i=0}^j B_{j-i} c_{m,n,k-1,i} \quad (15)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1);$$

$$c_{m,n,k,j} = \frac{1}{r_{n,k,j} r_{n,k,j+2}} \left(\sum_{i=0}^j B_{j-i} c_{m,n,k-1,i} + 2\lambda_m^2 r_{n,k,j} c_{m,n,k,j-2} \right) \quad (16)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 2, 3);$$

$$c_{m,n,k,j} = \frac{1}{r_{n,k,j} r_{n,k,j+2}} \left(\sum_{i=0}^j B_{j-i} c_{m,n,k-1,i} + 2\lambda_m^2 r_{n,k,j} c_{m,n,k,j-2} - \lambda_m^4 c_{m,n,k,j-4} \right) \quad (17)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 4, 5, 6, \dots),$$

where

$$r_{n,k,j} = (n+4k+j-4)(n+4k+j-3) \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5)(k = 0, 1, 2, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots),$$

and B_j and $C_{m,j}$ are the corresponding coefficients of the Maclaurin series.

Thus, under the specified conditions, the formulas (5)–(17) effectively define an analytical method for calculating the bending of rectangular plates resting on an inhomogeneous Winkler elastic foundation.

References

- Krutii, Y.S. (2016). *Development of a method for solving stability and vibration problems of deformable systems with varying continuous parameters. [in Ukrainian]* (Sc.D. diss.). Lutsk National Technical University, Lutsk.
- Krutii, Y.S. (2018). *Construction of a solution of the problem of stability of a bar with arbitrary continuous parameters*. Journal of Mathematical Sciences, 231(5), 665–677. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3843-8>
- Krutii, Y., Suriyaninov, M., Vandynskiy, V. (2018). *Development of the method for calculation of cantilever construction's oscillations taking into account own weight*. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 3(7 (93)), 13–19. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.131165>
- Krutii, Y., Vandynskiy, V. (2019). *Exact solution of buckling problem of the column loaded by self-weight*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 708, 012062. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/708/1/012062>
- Krutii, Y.S., Sur'yaninov, M.G., Karnaukhova, G.S. (2021). *Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 1. Analytical relations*. Strength of Materials, 53(2), 247–257. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00282-2>

On the analytical method for calculation a beam resting on inhomogeneous elastic foundation

Yu. S. Krutii¹, A. O. Perperi¹, N. A. Teorlo¹

¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine*

yurii.krutii@gmail.com, a.perperi@odaba.edu.ua,
nata.teorlo@gmail.com

Abstract

An exact solution of the differential oscillation equation of an Euler–Bernoulli beam resting on an inhomogeneous continuous elastic Winkler foundation is given. Based on the exact solution, an analytical method for the calculation of free oscillations of a beam is developed.

Keywords: beam, inhomogeneous elastic base, analytical method.

The problem of free bending oscillations of an Euler–Bernoulli beam of constant stiffness EI is considered, resting on an inhomogeneous continuous elastic Winkler foundation. The general scheme of oscillations is shown in fig. 1.

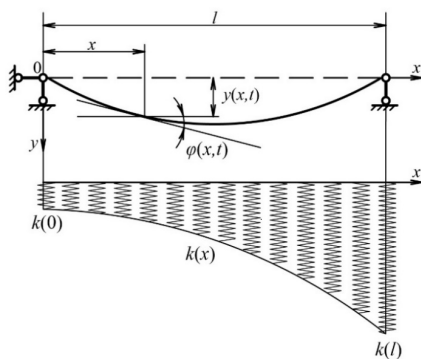


Figure 1: Design diagram of beam oscillations on inhomogeneous elastic foundation

The inhomogeneity of the elastic foundation is characterized by a variable linear coefficient of subgrade reaction $k(x)$, which in general can be any continuous function. For $k(x)$ submission $k(x) = k_0 B(x)$ is accepted, where k_0 – is the coefficient value of the subgrade reaction at some characteristic point of the beam (for example, at the point $x = 0$), and $B(x)$ – is a continuous dimensionless function that determines the law of variation of the coefficient of subgrade reaction along the beam length. The differential equation of free oscillations of a beam, written with respect to the amplitude function of deflections $v(x)$, will have the form

$$v''''(x) + \frac{1}{l^4} (KB(x) - \Omega^2) v(x) = 0, \quad (1)$$

where $K = k_0 l^4 / EI$, $\Omega^2 = m \omega^2 l^4 / EI$, m – distributed mass of the beam, ω – frequency of free oscillations of the beam.

The exact solution of equation (1) is found by the direct integration method, which was developed in the work of [Krutii, 2016]. It is defined by the following set of formulas:

$$y(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x) + C_3 X_3(x) + C_4 X_4(x); \quad (2)$$

$$X_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-K)^k \Omega^{2m} \alpha_{n,m,k}(x); \quad (3)$$

$$\alpha_{n,0,0}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, 4); \quad (4)$$

$$\alpha_{n,m,0}(x) = \frac{1}{(n+4m-1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad (5)$$

$$\alpha_{n,0,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x B(x) \alpha_{n,0,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (6)$$

$$\alpha_{n,m,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x (B(x) \alpha_{n,m,k-1}(x) + \alpha_{n,m-1,k}(x)) dx dx dx dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots) (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (7)$$

where C_1, C_2, C_3, C_4 – integration constants. Variable coefficients of the series (3) here are sequentially determined by the recurrence formulas (4)-(7).

An analytical method for integral expressions calculation has been developed (6), (7), which is based on the function approximation $B(x)$ by the Maclaurin series

$$B(x) = B_0 + B_1 \left(\frac{x}{l}\right) + B_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_j \left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots \quad (8)$$

As a result, for (6), (7) the power series representation is obtained

$$\alpha_{n,0,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,0,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

$$\alpha_{n,m,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4(m+k)-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,m,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (m = 1, 2, 3, \dots)(k = 1, 2, 3, \dots), \quad (10)$$

whose coefficients are calculated by recurrence formulas

$$c_{n,0,0,0} = \frac{1}{(n-1)!}; \quad c_{n,0,0,j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

$$c_{n,m,0,0} = \frac{1}{(n+4m-1)!}; \quad c_{n,m,0,j} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)(j = 1, 2, 3, \dots), \quad (12)$$

$$c_{n,0,k,j} = \frac{1}{p_{n,0,k,j}} \sum_{i=0}^{\infty} B_{j-i} c_{n,0,k-1,i} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$c_{n,m,k,j} = \frac{1}{p_{n,m,k,j}} \left(c_{n,m-1,k,j} + \sum_{i=0}^{\infty} B_{j-i} c_{n,m,k-1,i} \right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Thus, an analytical method for studying free oscillations of a beam on an inhomogeneous continuous elastic Winkler foundation has been developed. This method is completely determined by a set of formulas (2)-(5), (8)-(14).

References

Krutii, Y.S. (2016). *Rozrobka metodu rozv'yazannya zadach stiykosti i kolyvan' deformivnykh system zi zminnymy neperervnymy parametramy*. (Sc.D. diss.). Lutsk National Technical University, Lutsk.

The Poisson bracket and Hamilton's equations of motion

O. M. Shevtsova¹

¹*National University 'Kyiv-Mohyla Academy', Kyiv, Ukraine*

`o.shevtsova@ukma.edu.ua`

Abstract

In mathematics and classical mechanics, the Poisson bracket is a fundamental binary operation in Hamiltonian mechanics, serving as a key component in Hamilton's equations of motion. This binary operation can be computed for any two physical quantities.

Keywords: Poisson bracket; Phase space; Canonical coordinates; Hamiltonian function; Hamilton's equations of motion.

Introduction

The Poisson bracket is a fundamental concept in Hamiltonian mechanics, used to describe the time evolution of physical quantities. The Poisson bracket is essential in Hamilton's equations, aiding in the formulation of conserved quantities in dynamical systems. It helps establish equations governing conserved quantities of motion and identify fundamental symmetries in physical systems. Moreover, it reveals the relationships between various physical quantities and their time evolution [Goldstein, 2002].

Poisson bracket Representation of Hamiltonian Mechanics

The Poisson bracket of any two continuous functions of generalized coordinates $F(p, q)$ and $G(p, q)$ is defined to be

$$[F, G]_{qp} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right).$$

Hamilton's canonical equations of motion describe the time evolution of the canonical variables (q, p) in phase space. Jacobi showed that the framework of Hamiltonian mechanics can be restated in terms of the elegant and powerful Poisson bracket formalism [Cline, 2017]. The Poisson bracket is especially useful for elucidating which observables are constants of motion and whether any two observables can be measured simultaneously and exactly. Using the Poisson bracket, the time evolution of a function $F(x, p, t)$ is given by:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\},$$

where H is the Hamiltonian of the system. By incorporating Poisson brackets in physics education, students gain deeper insight into the mathematical structure of mechanics and enhance their problem-solving skills for more advanced topics in theoretical physics.

Poisson Brackets of Simple Harmonic Oscillator

The simple harmonic oscillator is one of the most fundamental physical systems and is widely used in mechanics, quantum physics, and engineering. In this section, we apply the Poisson bracket formalism to describe its dynamics [Blashievska et.al, 2011]. The Hamiltonian of a one-dimensional simple harmonic oscillator with mass $m = 1$ and frequency $\omega = 1$ (for simplicity) is given by:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2},$$

where $x(t)$ is the coordinate, $p(t)$ is the momentum.

We apply the Poisson bracket representation to find the time evolution of the physical quantities of $x(t)$, $p(t)$, $x(t)p(t)$, $p^2(t)$.

Time Evolution of Position $x(t)$ and Momentum $p(t)$

Using the Poisson bracket, the time evolution of a function $x(t)$ is given by:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \{x, H\} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} \\ &= (1)(p) - (0)(x) = p. \end{aligned}$$

Similarly, for $p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = \{p, H\} = -x.$$

This results in the system of differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -x,$$

which has the well-known solutions:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

and

$$p(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

where C_1 and C_2 are constants determined by the initial conditions $x(0) = x_0$ and $p(0) = p_0$. These solutions describe harmonic oscillations with frequency $\omega = 1$.

Time Evolution of xp

Using the Poisson brackets, we get:

$$\frac{d(xp)}{dt} = \{xp, H\}$$

Applying the product rule for the Poisson bracket:

$$\{xp, H\} = x\{p, H\} + p\{x, H\}.$$

$$= x(-x) + p(p) = p^2 - x^2.$$

Thus,

$$\frac{d(xp)}{dt} = p^2 - x^2.$$

Substituting $x(t)$ and $p(t)$, we get

$$p^2 - x^2 = (C_2^2 - C_1^2)(\cos^2 t - \sin^2 t) - 4C_1C_2 \cos t \sin t,$$

which can be rewritten as:

$$p^2 - x^2 = (C_2^2 - C_1^2) \cos 2t - 2C_1C_2 \sin 2t,$$

and

$$x(t)p(t) = C_1C_2 \cos 2t + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) \sin 2t.$$

Time Evolution of p^2

$$\frac{dp^2}{dt} = \{p^2, H\} = 2p\{p, H\} = 2p(-x) = -2px.$$

Using the previously found expression for $x(t)p(t)$, integrating gives:

$$p^2(t) = -C_1C_2 \sin 2t + \frac{1}{2}(C_2^2 - C_1^2) \cos 2t + \frac{1}{2}(C_2^2 + C_1^2).$$

Therefore, we find explicit solutions for the quantities: $x(t)$, $p(t)$, $x(t)p(t)$, $p^2(t)$, where the constants C_1 and C_2 are determined by the initial conditions $x(0) = x_0$ and $p(0) = p_0$.

These results confirm the periodic nature of the system and highlight the utility of the Poisson bracket in analyzing Hamiltonian dynamics.

Conclusion

The Poisson bracket is an elegant and powerful tool to analyze the dynamics of Hamiltonian systems, to establish equations for conserved quantities determined by motion, and to identify the fundamental symmetries of physical systems. The Poisson bracket provides information on the relationships between different physical quantities and their evolution over time. Understanding its properties provides deep insight into the structure of classical mechanics and serves as a bridge to quantum mechanics. From an educational perspective, it plays a crucial role in teaching advanced mechanics and mathematical physics and enhancing problem-solving skills. By mastering the Poisson bracket approach, students develop the ability to: analyze systems using symmetry principles, compute equations of motion in a systematic way and identify conserved quantities efficiently.

References

- Goldstein H., Charles P. Poole Jr., John L. Safko, (2022). *Classical Mechanics*, 3rd Edition, Pearson Education, p. 665, ISBN: 9788131758915.
- Cline D., (2017). *Variational Principles in Classical Mechanics*, 1st Edition, University of Rochester River Campus Libraries, p. 717, ISBN: 978-0-9988372-4-6.
- Blashievskaya M. V., Rovenchuk A. A., Sidletska N. A., Stetsko M. M., Tkachuk V. M., Fito T. V., (2011). *A collection of problems in theoretical mechanics*, Ivan Franko National University of Lviv, p. 67, ISBN: 973-966-613-797-8.

Ймовірність зв'язності інформаційних систем як функція часу

О. В. Барабаш¹, О. В. Свинчук¹, А. В. Макаrchук¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

bar64@ukr.net, 7011990@ukr.net, andreymakarh2@gmail.com

Анотація

Використання інформаційних систем є невід'ємною частиною багатьох задач прикладного характеру, що вимагає різностороннього підходу до їх проектування та впровадження. Особливо цікавим аспектом в цьому плані є дослідження функціональної стійкості розроблюваної інформаційної системи. Для чисельної оцінки функціональної стійкості інформаційних систем було розроблено чимало так званих показників функціональної стійкості, одним із найпростіших серед яких без сумніву є ймовірність зв'язності. Однак, нині розроблені методи обчислення ймовірності зв'язності передбачають їх обчислення лише в конкретні моменти часу. В даній роботі робиться спроба розробити алгоритм представлення ймовірності зв'язності як функції від часу.

Ключові слова: функціональна стійкість, інформаційні системи, архітектура, показник, ймовірність, передача даних, динаміка.

Коли мова йде про проектування багатомашинних систем, зараз досить важливо досліджувати так їх функціональну стійкість [Барабаш, 2004] тобто здатність виконувати поставлені задачі на фоні деградації, можливих негативних впливів тощо. Для того, щоб дослідити функціональну стійкість багатомашинної системи було розроблено ряд методів, які дозволяють функціональну стійкість описати чисельно. Ці методи, здебільшого, відомі як показники функціональної стійкості. У випадку інформаційних систем часто головною поставленою задачею є передача інформації. В даній ситуації логічним є використання таких показників функціональної стійкості як ймовірність зв'язності R_{ij} [Барабаш, Мусієнко, Макаrchук, 2023] тобто ймовірність передачі інформації між наперед вибраними машинами v_i та v_j . Обчислення даної ймовірності базується на ідеї, що кожен елемент розглядуваної інформаційної системи є справним з певною ймовірністю. Однак, головною проблемою є те, що навіть якщо ми ці ймовірності знаємо, то відомі методи обчислення R_{ij} [Барабаш, Макаrchук, Саланда, 2024] дозволяють обчислити дану величину

лише в окремі моменти часу. Тому логічною є спроба попереднє представлення ймовірності справності елемента e_i як функції часу.

Покладемо, що ймовірність справності елемента e_i в момент часу t рівна $p_{e_i}(t)$. Для знаходження функції $p_{e_i}(t)$ розглянемо її як розв'язок задачі Коші

$$\frac{dp_{e_i}}{dt} = -K_{e_i}c_{e_i}(t)p_{e_i}, p_{e_i}(0) = \bar{p}_{e_i}. \quad (1)$$

де $K_{e_i} > 0$ - це швидкість зношення елемента e_i , а $c_{e_i}(t)$ - це вплив на цей елемент (завантаженість, зовнішні впливи тощо). Позначимо розв'язок задачі (1) як $\bar{p}_{e_i}(t)$. Таким чином ймовірність справності кожного з елементів e_i в довільний невід'ємний момент часу t можна розглянути як функцію

$$p_{e_i}(t) = \min(1, \bar{p}_{e_i}(t)) = \min(1, \bar{p}_{e_i}e^{-K_{e_i}(\int c_{e_i}dt(0) - \int c_{e_i}dt)}). \quad (2)$$

Таким чином, якщо використовувати (2) як ймовірність справності елемента e_i при обчисленні ймовірності зв'язності R_{ij} , можна отримати представлення ймовірності зв'язності як функції часу. Таким чином на етапі проектування інформаційної системи можна намагатися прослідкувати зміну її функціональної стійкості в часі, що може бути вкрай критичним фактором у випадках типу автономного режиму роботи цієї інформаційної системи.

Перелік посилань

Барабаш, О.В. (2004). *Побудова функціонально стійких розподілених інформаційних систем*. Київ: НАОУ.

Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Макарчук А.В. (2023). Порівняльний аналіз методів визначення показників функціональної стійкості інформаційних систем на прикладі повного перебору та методу Литвака-Ушакова. *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*, no. 4, pp. 57–63.

Барабаш О.В., Макарчук А.В., Саланда І.П. (2024). Дослідження ймовірнісного показника функціональної стійкості розподілених інформаційних систем. *Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах*, no. 1, pp. 45–50.

Вилив рідини із ємностей циліндричної та сферичної форм в залежності від осі обертання

В. О. Білий¹, О. Г. Білий¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

valeri_y@ukr.net

Анотація

Розглянута задача виливання рідини із ємностей деяких геометричних форм шляхом виливу через край поворотом ємності відносно фіксованих осей з постійною кутовою швидкістю. Для циліндричного ковша знайдено закон зміни розходу рідини в залежності від кута нахилу при обертанні відносно двох різних осей, виконано порівняльний аналіз і запропоновано, використовуючи одержані результати, корегувати дії поворотних механізмів так, щоб процес виливу був рівномірним.

Ключові слова: ємність, розхід рідини, осі обертання, кут нахилу, рівномірний витік.

Вивчення процесу виливу рідини із ємностей різних геометричних форм при певних способах повороту цих ємностей відносно закріплених точок або деяких осей має не тільки теоретичний інтерес, але й практичне застосування. А саме, при промисловому виливі розплавленого металу, хімічних токсичних речовин, скрапленого газу, кислот і т. п. із великих ємностей певних геометричних форм в менші стандартні форми шляхом виливання через край. В роботах [Bilyi, Bilyi, 2022], [Bilyi, Bilyi, 2022], [Білий, Білий, 2023] та [Білий, Білий, 2023] авторів розглянуто процес розливу із ємностей півсферичної, параболічної, конічної та циліндричної форм шляхом їх повороту із постійною кутовою швидкістю ω відносно або закріпленої точки або відносно деяких фіксованих осей. Знаходимо важливу характеристику процесу виливу P_ϕ – розхід рідини (об'єм витікаючої рідини за одиницю часу) в залежності від кута повороту ϕ , порівнюємо її динаміку для різних способів розливу і надаємо рекомендації для коригування роботи поворотних пристроїв, щоб виливання було близьким до рівномірного.

В даній роботі розглянемо випадок ємності – прямий круговий циліндр з висотою H та радіусом основи R вщерть наповнений рідиною та порівняємо два способи розливу.

А. Обертання відбувається в фронтальній площині відносно діаметра нижньої основи, перпендикулярного до фронтальної площини з постійною кутовою швидкістю ω . Тоді [Bilyi, Bilyi, 2022] розхід рідини P_ϕ , який дорівнює добутку площі поверхні витоку S_ϕ , помножений на вертикальну складову $v_{\text{верт.}}$ швидкості рідини в точці витоку має вигляд:

I випадок. Кут нахилу $0 \leq \phi \leq \gamma = \arctg \frac{H}{2R}$, тоді $S_\phi = \frac{\pi R^2}{\cos \phi}$, $v_{\text{верт.}} = v \cos \alpha = \omega \sqrt{R^2 + H^2} \cos \alpha$, де α – кут між прямою, що проходить через точку витоку і центр нижньої основи та площиною поверхні вливу. Ясно, що $\alpha + \phi = \beta = \arctg \frac{H}{R}$, тобто $\alpha = \beta - \phi$. Тоді

$$P_\phi = S_\phi \cdot v_{\text{верт.}} = \frac{\pi R^2}{\cos \phi} \omega \sqrt{R^2 + H^2} \cdot \cos \alpha = C \frac{\cos \left(\arctg \frac{H}{R} - \phi \right)}{\cos \phi},$$

де $C = \pi R^2 \omega \sqrt{R^2 + H^2}$ – константа.

Дослідження на екстремум показують, що $P'_\phi = P_\phi \frac{H(1 + \tg^2 \phi)}{R + H \tg \phi} > 0$, тобто P_ϕ монотонно зростає на $0 \leq \phi \leq \gamma$, тоді $P_{\max} = P_\phi|_{\phi=\gamma} = \pi R \omega \left(R^2 + \frac{H^2}{2} \right)$, $P_{\min} = P_\phi|_{\phi=0} = \pi R^2 \omega \sqrt{R^2 + H^2} \cos \left(\arctg \frac{H}{R} \right)$.

II випадок. а) $\gamma < \phi \leq \beta = \arctg \frac{H}{R}$, тоді

$$P_\phi = S_\phi \cdot v_{\text{верт.}} = \frac{\omega \sqrt{R^2 + H^2} \cos \left(\arctg \frac{H}{R} - \phi \right)}{\cos \phi} \left(\pi R^2 - x_M \cdot z_M - R^2 \arcsin \frac{z_M}{R} \right),$$

де $x_M = R - H \ctg \phi < 0$, $z_M = \sqrt{R^2 - x_M^2} > 0$.

б) $\beta < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, тоді

$$P_\phi = S_\phi \cdot v_{\text{верт.}} = \frac{\omega \sqrt{R^2 + H^2} \cos \left(\phi - \arctg \frac{H}{R} \right)}{\cos \phi} \left(R^2 \arcsin \frac{z_M}{R} - x_M \cdot z_M \right),$$

де $x_M = R - H \ctg \phi > 0$, $z_M = \sqrt{R^2 - x_M^2} > 0$.

Всі отримані значення P_ϕ добре “зшиваються” при $\phi = \gamma$ та $\phi = \beta$ (проміжні важливі точки). Зауважимо, що при $\phi = \frac{\pi}{2}$ ($\phi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$)

$$P|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = C \cdot \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{R^2 \arcsin \frac{z_M}{R} - x_M \cdot z_M}{\cos \phi} = 0.$$

Із геометричних і фізичних міркувань зрозуміло, що у II випадку $P_\phi \downarrow$ від $P_{max} = P_\phi|_{\phi=\gamma} = \pi R \omega \left(R^2 + \frac{H^2}{2} \right)$ до $P_{min} = P_\phi|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = 0$.

Б. Якщо ж обертання буде відносно діаметра верхньої основи, то:

I випадок. $0 \leq \phi \leq \gamma = \arctg \frac{H}{2R}$, тоді $S_\phi = \frac{\pi R^2}{\cos \phi}$, $v_{\text{верт.}} = \omega R \cos \phi$, тому $P_\phi = S_\phi \cdot v_{\text{верт.}} = \pi \omega R^3$ – постійно.

II випадок. **а)** $\gamma \leq \phi \leq \beta = \arctg \frac{H}{R}$, тоді

$$P_\phi = S_\phi \cdot v_{\text{верт.}} = \omega R \left(\pi R^2 - x_M \cdot z_M - R^2 \arcsin \frac{z_M}{R} \right), \quad x_M < 0, z_M > 0.$$

б) $\beta < \phi \leq \frac{\pi}{2}$, тоді

$$P_\phi = S_\phi \cdot v_{\text{верт.}} = \omega R \left(R^2 \arcsin \frac{z_M}{R} - x_M \cdot z_M \right), \quad x_M > 0, z_M > 0.$$

де і в пункті **а)**, і в пункті **б)**

$$x_M = R - H \operatorname{ctg} \phi, \quad z_M = \sqrt{R^2 - x_M^2}.$$

Дослідження на екстремум дає, ($C > 0$)

$$P'_\phi = -C x'_M \cdot z = -C \frac{1}{\sin^2 \phi} \sqrt{(2R - H \operatorname{ctg} \phi) \operatorname{ctg} \phi} \leq 0.$$

$$1) \operatorname{ctg} \phi = 0, \quad \phi = \frac{\pi}{2} \in \left(\beta; \frac{\pi}{2} \right].$$

$$2) \operatorname{ctg} \phi = \frac{2R}{H}, \quad \phi = \operatorname{arccotg} \frac{2R}{H} = \gamma \in [\gamma; \beta].$$

Тобто $P_\phi \downarrow$ для $\phi \in \left[\gamma; \frac{\pi}{2} \right]$ і маємо такий результат:

$$P_{max} = P_\phi|_{\phi \in [0; \gamma]} = \pi R^3 \omega; \quad P_{min} = P_\phi|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Використовуючи ці дані про динаміку розходу рідини, можна в кожному конкретному випадку так скорегувати роботу поворотних механізмів, що процес виливання стане близьким до рівномірного, що є дуже важливим з точки зору забезпечення технології розливу в стандартні малі форми і сприяє зменшенню непродуктивних витрат.

Перелік посилань

Bilyi V., Bilyi O. (2022). Dynamics of liquid outflow from containers of classic geometric shapes. Part I. *ZnanstvenaMiselJournal*, 70, 24–28, <https://doi.org/10.5281/zenodo.7095676>

Bilyi V., Bilyi O. (2022). Dynamics of liquid outflow from containers of classic geometric shapes. Part II. *ZnanstvenaMiselJournal*, 71, 38-44. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7248072>

Білий В.О., Білий О.Г. (2023). Порівняльна динаміка витікання рідини із ємностей певних геометричних форм в залежності від зміни осі обертання. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. №1(2023), 65-68. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.9>

Білий В.О., Білий О.Г. (2023). Дослідження динаміки витікання рідини із ємностей різних геометричних форм в залежності від зміни осі обертання. *Матеріали Дев'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 року, Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського*. С. 260-261. <https://matan.kpi.ua/media/2023/kravchuk-conf-2023/kravchuk2023-abstracts.pdf>

Дослідження хаотичної поведінки осцилятора Чуа

Д. С. Богинський¹, В. О. Сідлецький², Ю. В. Новікова¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

²*Кафедра фізики РДГУ, Рівне, Україна*

danboh-fmf28@kpi.ua

Анотація

Одним із найбільш значимих наукових відкриттів двадцятого століття, є відкриття детермінованого хаосу в динамічних системах. Суть цього відкриття полягає в тому, що повністю визначена (детермінована) динамічна система, за відсутності будь-яких випадкових впливів на неї, починає поводитися непередбачено (хаотично). Вивчення детермінованого хаосу у системах, таких як осцилятор Чуа, відкриває можливості для розвитку стратегій управління та контролю над хаотичною динамікою. Це може бути важливим в аспектах стабілізації та прогнозування динамічних систем.

Ключові слова: детермінований хаос; біфуркація; осцилятор Чуа; атрактор; точка рівноваги.

Світ, у якому ми живемо, формувався через хаос і існує завдяки хаосу. Наприклад, квантові флуктуації у вакуумі, броунівський рух частинок та концепція ентропії є лише деякими прикладами того, як хаос впливає на структуру нашого світу. Для того, щоб досліджувати Всесвіт, розуміти його початки та моделювати подальший характер розвитку, необхідно вивчати хаос та його вплив на природні процеси та явища.

Вивчення детермінованого хаосу має важливі наукові та практичні застосування в різних галузях науки та техніки, адже він є проявом складних та нелінійних динамічних систем. Вивчення хаосу допомагає розкрити та розуміти природу несподіваних, складних та, здавалося б, нерегульованих явищ у різних галузях науки, від фізики до біології.

Як генератор хаосу було розглянуто схему Чуа, що є найбільш поширеним предметом дослідження за рахунок простої як математичної моделі, так і схематичної реалізації.

Схема генератора Чуа складається із чотирьох лінійних елементів: котушка індуктивності $L1$, два конденсатори $C1$ та $C2$ і резистор R , а також одного нелінійного елемента Nr . Реалізація нелінійного елемента може бути найрізноманітнішою. Найбільш поширеними є нелінійні елементи як на двох операційних підсилювачах (ОП), так і на ОП в сукупності з діодами. Саме останній варіант було використано в даній роботі.

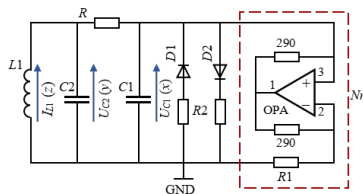


Рис. 1: Схема генератора Чуа

Створивши в програмному середовищі Mathlab програму, яка за допомогою методу Рунге-Куты обчислює систему диференціальних рівнянь опису осцилятора Чуа (1), ми дослідили залежність фазових портретів від параметрів альфа та бета, де $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, а $\beta = \frac{C_2}{LG^2}$ ($C_1 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-3}$ F, $C_2 = 10^{-3}$ F, $L = \frac{10}{7}$ H, $G = 0.7 \cdot 10^{-3} \omega^{-1}$ – опір нелінійного елемента Nr)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - g(U_{C_1})) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (1)$$

Тут $g(U_{C_1})$ – кусково-лінійна функція, що описується рівнянням (2) (E – точки, що відповідають зламам графіку кусково-лінійної функції):

$$g(U_{C_1}) = G_b U_{C_1} + \frac{1}{2}(G_a - G_b)(|U_{C_1} + E| - |U_{C_1} - E|) \quad (2)$$

Отримані фазові портрети:

- Атрактор “4 періоду” ($\alpha = 8.75, \beta = 15$)

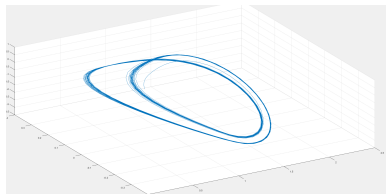


Рис. 2: Атрактор 4 періоду

- Атрактор “Ресслера” ($\alpha = 15, \beta = 31$)

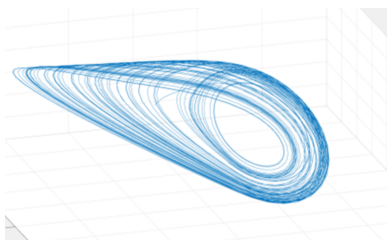


Рис. 3: Атрактор Ресслера

- Атрактор “Чуа” (інша назва – атрактор типу “double scroll”) ($\alpha = 15, \beta = 28$)

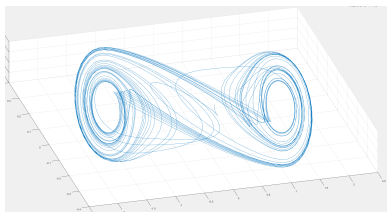


Рис. 4: Атрактор Чуа

У роботі було досліджено процес генерування хаотичних сигналів схемою Чуа, побудовано фазові портрети схеми Чуа в залежності від початкових параметрів та проаналізовано умови генерації атракторів різних видів. У результаті дослідження було встановлено, що існують конкретні математичні моделі, які описують динаміку хаотичної системи та дозволяють визначити її стан у будь-який момент часу спостереження. Також встановлено, що динамічні властивості систем генерування хаотичних сигналів визначаються їх чутливістю до початкових умов, що забезпечує можливість зміни режимів роботи однієї і тієї ж системи.

Перелік посилань

Matsumoto T. (1984). A Chaotic attractor from Chua's circuit. *IEEE Transactions on Circuits & Systems*, vol. CAS-31, no. 12, pp. 1055-1058.

Mandelbrot B.B. (1982). *The fractal geometry of nature*.

Швець О.Ю. (2010). *Детермінований хаос*. Київ:НТУУ «КПІ».

Перетворення Фур'є в теорії сигналів

В. Ю. Бондарчук¹

¹*ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна*

Bondarchuk.Volodymyr2024@vnu.edu.ua

Анотація

Перетворення Фур'є є ключовим математичним інструментом у теорії сигналів, що дозволяє аналізувати сигнали в частотній області. Розглянуто основні аспекти перетворення Фур'є, його означення та застосування в обробці сигналів.

Ключові слова: перетворення Фур'є; теорія сигналів; обернене перетворення Фур'є.

Теорія сигналів – це розділ прикладної математики та інженерії, який вивчає способи представлення, аналізу та обробки сигналів. Під сигналом ми розуміємо будь-які фізичні або абстрактні величини, що змінюються в часі або просторі [Білінський, 2011]. Це можуть бути різні типи сигналів, такі як звук, електромагнітне випромінювання, зображення, а також покази датчиків.

Одним із фундаментальних інструментів аналізу сигналів є швидке перетворення Фур'є (FFT – Fast Fourier Transform). Це алгоритм, який перетворює сигнал в окремі спектральні компоненти і тим самим надає інформацію про частоту сигналу. Це дає змогу досліджувати його частотний спектр і спрощує багато завдань у цифровій обробці сигналів, телекомунікаціях, радіотехніці, медичній візуалізації та інших сферах.

Перетворення Фур'є визначається як інтеграл:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Ця формула перетворює сигнал у часовій області $f(t)$ у аналог $F(\omega)$ у частотній області, показуючи, скільки кожної частоти присутнє у вихідному сигналі.

Обернене перетворення Фур'є дозволяє відновити оригінальний сигнал з його спектра:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

де

$F(\omega)$ – спектр сигналу в частотній області,

$f(t)$ – сигнал у часовій області,

$\omega = 2\pi f$ – основна гармонічна пульсація (частота),

i – уявна одиниця ($i^2 = -1$).

Перетворення Фур'є часто записують $f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$ або $F(f(t)) = F(\omega)$, де F є оператором перетворення Фур'є [Heckbert, 1995].

Наведемо приклади застосувань перетворення Фур'є в теорії сигналів. Одна з ключових переваг перетворення Фур'є це можливість розкласти сигнал на синусоїдальні компоненти. Це особливо корисно під час аналізу складних сигналів у системах зв'язку, де різні частотні компоненти несуть різну інформацію.

Під час обробки сигналів фільтрація є важливою для видалення небажаних частот із сигналів. Перетворення Фур'є допомагає розробляти такі фільтри, як фільтри низьких частот, високочастотні та смугові фільтри.

Наприклад, під час обробки звуку перетворення Фур'є використовується для видалення фонового шуму з мовних сигналів, покращуючи чіткість голосу. Так само в біомедичній інженерії перетворення Фур'є допомагає відфільтрувати шум із сигналів електрокардіограми (ЕКГ) для точного аналізу стану серця [Proakis, 1996].

Перетворення Фур'є є одним із найпотужніших інструментів в аналізі сигналів. Воно дозволяє перейти від часової області до частотної, що спрощує обробку, аналізувати фільтр сигналів у різних сферах науки і техніки. Сучасні алгоритми, такі як FFT, дозволяють забезпечити швидку обробку сигналів у реальному часі, що використовується в телекомунікаціях, цифровій обробці звуку та зображень, медичній діагностиці та багатьох інших технологіях.

Перелік посилань

Білінський Й.Й., Огороднік К.В., Юкиш М.Й. (2011). *Електронні системи: навчальний посібник*. Вінниця: ВНТУ.

John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis (1996). *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall.

Heckbert P. (1995). Fourier transforms and the Fast Fourier Transform (FFT) algorithm. *Computer Graphics*, vol. 2, pp. 15–463.

Виявлення деструктивного інформаційного впливу на об'єкт критичної інфраструктури

Ю. П. Буценко¹, В. А. Лабжинський¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

armchairdoc@ukr.net

Анотація

У роботі розглядається методика реагування на несанкціоноване втручання в роботу автоматизованої системи керування об'єктом критичної інфраструктури. Запропонований підхід до вироблення рекомендацій щодо виявлення такого втручання та забезпечення відновлення функціонування системи в штатному режимі.

Ключові слова: об'єкт критичної інфраструктури; складна технічна система; еволюційна модель; векторний параметр.

Відповідно до Закону України «Про критичну інфраструктуру» [1] до об'єктів критичної інфраструктури (ОКІ), зокрема, віднесені складні технічні системи (СТС), задіяні у сферах транспорту, зв'язку, енергетики та в інших сферах. Особливо небезпечними є деструктивні інформаційні впливи на ОКІ. Серед усіх можливих цілей для комп'ютерних атак особливо вразливими є автоматизовані системи керування виробничими й технологічними процесами, що функціонують у складі ОКІ. Несправність ОКІ може бути наслідком деструктивного інформаційного впливу, старіння й зношування, реалізації неоптимальних алгоритмів функціонування тощо. Одна з найважливіших складових систем забезпечення безпеки ОКІ – це засоби моніторингу безпеки, завданням яких є оцінювання стану ОКІ під час деструктивного інформаційного впливу, у тому числі на деякий наступний період часу, достатній для нейтралізації впливу й усунення його наслідків. Прикладом може служити формування автоматизованою системою керування неоптимальних керувальних впливів внаслідок низької точності вимірювання параметрів функціонування в разі позаштатної експлуатації. Пропонована робота присвячена підвищенню безпеки СТС, що функціонує під керуванням ОКІ в умовах деструктивного впливу з використанням комплексного підходу до синтезу параметризованої (залежної від векторного дійсного параметра) моделі об'єкта.

До основних особливостей функціонування ОКІ в умовах деструктивного впливу слід віднести:

1. Спотворення інформації, необхідної для прийняття управлінських рішень.
2. Зростання відповідальності за прийняття управлінських рішень.
3. Істотне підвищення значення фактора часу.
4. Необхідність оцінки наслідків ухвалених рішень із метою виключення розвитку позаштатної ситуації припускає оцінку стану об'єкта не тільки в поточному часі, але і його прогнозування на деякий період.

Модель, використовувана для розв'язку задачі оцінки стану ОКІ в умовах деструктивного впливу, повинна відповідати таким основним вимогам:

1. Використання статистичної інформації, попередньо створених баз даних, ефективних обчислювальних алгоритмів.
2. Можливість одержувати результат у масштабі часу, близькому до реального, а також прийнятна точність і вірогідність одержаного результату оцінки стану.
3. Можливість застосування моделі на однотипних ОКІ для розв'язання як прямої, так і оберненої задачі (оцінювання стану в поточний момент часу та оцінювання часу повернення до режиму нормального функціонування).
4. Можливості поповнення використовуваних баз даних та розширення множини критеріїв для оцінювання об'єктивності вибору параметрів моделі.

Синтез моделі зміни стану ОКІ, що забезпечує керування СТС, і використання результатів моделювання для організації квазіоптимального керування системою передбачає виконання таких операцій [2]:

- оцінку області можливих значень параметрів, з урахуванням зовнішнього деструктивного впливу, зовнішнього середовища, початкових та граничних умов досліджуваних процесів тощо;
- одержання параметризованих значень коефіцієнтів зносу й дифузії еволюційних рівнянь, що моделюють досліджуваний процес зміни стану ОКІ, уточнення їх у міру накопичення статистичної інформації про досліджуваний процес для всіх;
- на базі змодельованих траєкторій еволюції системи оцінити час знаходження ОКІ в працездатному стані із заданою ймовірністю;

- високу оперативність функціонування й одержання результату оцінювання стану, а також вироблення керувальних впливів в умовах позаштатної ситуації, викликаній деструктивним впливом;
- формування квазіоптимального плану керування СТС на основі заданих критеріїв.

У нормальних умовах експлуатації ОКІ забезпечує реалізацію деякого набору корисних функцій керування, який визначає якість і (економічні) показники ефективності функціонування СТС за відсутності деструктивного інформаційного впливу. При цьому ОКІ реалізує деякий набір функцій безпеки, що вимагає певного обсягу витрати його ресурсів. Одним з показників якості (ефективності) функціонування ОКІ можна вважати частку його ресурсу, використаного на реалізацію корисних (основних) функцій призначення. У нормальних умовах у випадку ця умова забезпечується співвідношенням, яке реалізується засобами, що виконують мінімально необхідний набір функцій безпеки, наприклад, захист від несанкціонованого доступу. В умовах наявності несанкціонованого доступу частка ресурсу, що витрачається на усунення загроз, зростає аж до втрати економічної ефективності функціонування системи або зростання до неприйнятної рівня ризиків від надзвичайних ситуацій [3].

Оскільки СТС містить інформаційний та керувальний контури, то можливим є несанкціонований вплив як на один з них, так і на обидва. При цьому більш імовірним є втручання у систему на рівні відображення показників її функціонування, тобто у інформаційний контур. Завданням такого втручання має бути формування хибної інформації для автоматизованої системи управління, наслідком чого може бути як виникнення аварійної ситуації (аж до руйнування ОКІ) з негативним впливом на навколишнє середовище, так і порушення функціональних можливостей системи, наприклад, встановлення несанкціонованих зв'язків з певними об'єктами. На практиці єдиним способом запобігання для такої ситуації є дублювання джерел та каналів отримання інформації про функціонування системи, у тому числі використання «ручного» методу збору інформації замість використання дистанційних технологій та автоматизованих систем. У той же час, для кожного такого об'єкту існує комплекс обмежень - фінансових, апаратних, часових, кадрових - щодо запровадження такого дублювання. За цих умов пропонується така процедура побудови дублюючої схеми (процедури) отримання інформації про стан ОКІ, що мінімізує використання ресурсів [4]:

- ранжування показників діяльності системи за рівнем їх впливу на параметри керування системою та показники її діяльності (економічні, екологічні та інші);
- вибір показників функціонування об'єкта, які б, з одного боку, могли спостерігатись незалежним від основної (автоматизованої дистанційної) схеми та

максимально економним з точки зору використовуваних ресурсів способом, а з іншого - були пов'язані функціональною або принаймні статистичною залежністю з максимальною кількістю параметрів, що контролюються через вищезгадані інформаційні канали та покриття за допомогою сукупності цих показників максимально можливої частки параметрів у відповідності до їх ваги, визначеної вище;

- прийняття такого регламенту функціонування системи: на основі побудованих коефіцієнтів динамічної системи моделюються траєкторії еволюції виділених таким чином показників, при цьому окремо виділяються випадки, коли реальні траєкторії відрізняються від змодельованих, на основі ансамблю таких випадків створюється модель навчання, що дозволяє у майбутньому вирізняти такі ситуації, у яких проявляється відмінність від прогнозованих траєкторій з наступним переходом до резервних джерел отримання інформації щодо усіх параметрів, присутніх у регресійному співвідношенні.

Перелік посилань

1. Закон України «Про критичну інфраструктуру». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1882-20>.
2. Thakkar A., Lohiya R. (2022). A survey on intrusion detection system: Feature selection, model, performance measures, application perspective, challenges, and future research directions. *Artificial Intelligence Review*, vol. 55, pp. 453-563. URL: <https://doi.org/10.1007/s10462-021-10037-9>.
3. Jiang K., Wang W., Wang A., Wu H. (2020). Network intrusion detection combined hybrid sampling with deep hierarchical network. *IEEE Access*, vol. 8, pp. 32464-32476. URL: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2973730>.
4. Hnamte V., Nhung-Nguyen H., Hussain J., Kim Y. H. (2023) A novel two-stage deep learning model for network intrusion detection: LSTM-AE. *IEEE Access*, vol. 11, pp. 37131-37148. URL: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3266979>.

Моделювання цифрових даних звукових сигналів на основі параметрів фрактальних функцій

В. В. Ванін¹, О. В. Залевська¹, Б. І. Савчук¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

`o.zalevska@kpi.ua`

Анотація

У роботі запропоновано рішення для моделювання цифрових даних звукових сигналів на основі фрактальних функцій. Детально описано склад параметрів моделі, алгоритм їх визначення та розроблену систему, яка реалізує цей алгоритм. Проведено порівняння ефективності розробленого підходу з апроксимацією гармонічними функціями, а також з алгоритмами архівації та компресії цифрових даних. Переваги розробленого алгоритму полягають у можливості двостороннього перетворення та збереження високої точності відновлення даних..

Ключові слова: фрактальні функції, фрактальні моделі, цифрові дані сигналів, оптимізація параметрів функцій, апроксимація даних функцій, компресія цифрових даних.

Сучасні цифрові звукові сигнали (ЦДЗС) займають значний обсяг пам'яті, особливо у форматі амплітудно-часового представлення. Це створює потребу в ефективних методах їх компресії та моделювання. У роботі запропоновано використання фрактальних функцій для створення моделі, яка дозволяє компактно зберігати дані і забезпечує можливість їх точного відновлення.

Метою дослідження є розробка алгоритму моделювання ЦДЗС на основі фрактальних функцій, а також створення програмного модуля для реалізації цього алгоритму..

Для спектрального аналізу звукових сигналів зазвичай використовуються методи, засновані на гармонічних функціях, такі як перетворення Фур'є, косинусне та вейвлет-перетворення [1]. Проте ці методи мають обмежену точність для опису складних сигналів. Використання фрактальних функцій дозволяє моделювати сигнали з урахуванням їх нелінійної природи [2, 3].

Функція Вейерштрасса-Мандельброта обрана як основа для моделювання завдяки її властивості самоподібності, що відповідає природі звукових сигналів.

$$f(x) = \sum_{k=K_{\min}}^{K_{\max}} \frac{1}{a^{(2-b)k}} [1 - \cos(a^k x)]. \quad (1)$$

де $f(x)$ – значення функції,

x – зовнішній параметр,

k – параметр ітератора частот,

$K_{\min}$ – нижній поріг ітератора суми, $K_{\min} \in \mathbb{R}$,

$K_{\max}$ – верхній поріг ітератора суми, $K_{\max} \in (K_{\min}; +\infty)$,

a – внутрішній коефіцієнт

b – внутрішній коефіцієнт.

Функція має властивість періодичного повторення коливань, що дозволяє ефективно моделювати складні сигнали.

Для отримання коливань відносно абсциси використовується флуктуаційний профіль:

$$g(x_i) = f(x_i) - \frac{\sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} f(x_j)}{j_{\max} - j_{\min}}, \quad (2)$$

де i – індекс послідовного елементу в масиві даних функції $f(x)$,

x_i – значення абсциси в точці i , $x \in N$,

L – кількість послідовних даних точок функції $f(x)$,

t – розмір вибірки для тренду профілю, $t \in [2; \frac{L}{2}]$,

$j_{\min} = \max(0, i - \frac{t}{2})$,

$j_{\max} = \min(L, i + \frac{t}{2} + 1)$,

$g(x_i)$ – значення функції профілю для точки x_i .

На основі функції Вейерштрасса-Мандельброта було згенеровано цифрові дані, які відповідають властивостям звукових сигналів (рис. 1). Розроблений алгоритм передбачає визначення параметрів фрактальної функції та розмірність області вибірки для створення флуктуаційного профілю, як параметри моделі, які визначаються для представлення цифрових даних сигналу звуку [5] (рисунок 2). Для визначення оптимальних параметрів моделі використовується метод Хука-Дживса, який забезпечує ефективний пошук параметрів для фрактальної функції.

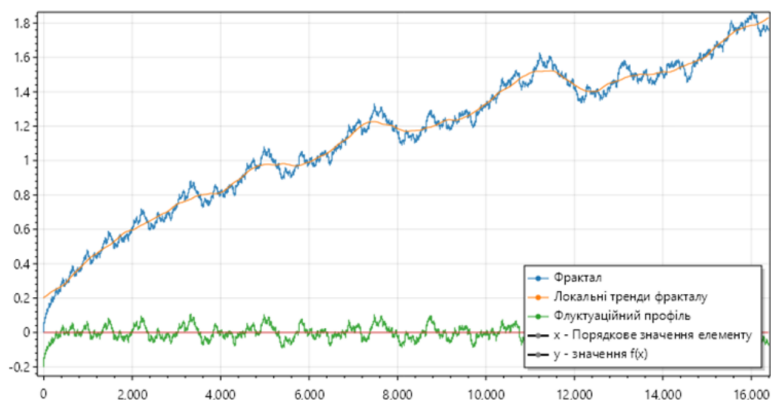


Рисунок 1 – Приклад даних функції Вейєрштрасса-Мандельброта на основі деяких параметрів та отримані значення флуктуаційного профілю.

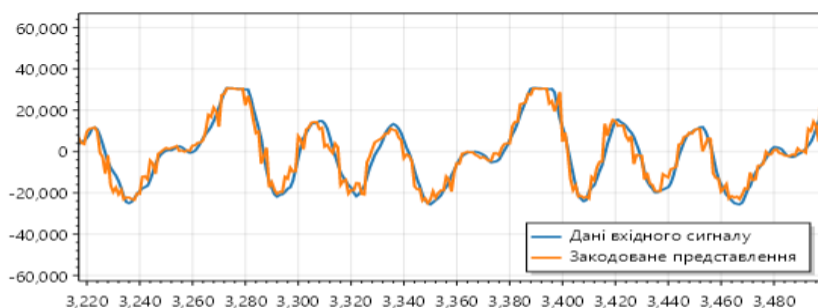


Рисунок 2 - Порівняння ділянки ЦДЗС голосу із даними апроксимуючої фрактальної моделі

Алгоритм забезпечує гнучке обчислення параметрів фрактальної моделі для цифрових звукових даних. Його програмний модуль включає:

1. Завантаження файлу – копіювання цифрових даних, розподіл за каналами.
2. Перетворення – фільтрація, групування, конвертація до необхідної дискретизації.
3. Визначення параметрів – обчислення параметрів моделі, збереження у байтовому та табличному вигляді.

Результати порівняння розробленого підходу з класичними методами наведено в таблиці 1. Фрактальні моделі мають перевагу над традиційними методами завдяки їх здатності описувати складні сигнали з меншим обсягом даних. Проте

використання методу Хука-Дживса вимагає додаткових обчислювальних ресурсів, що може бути обмеженням для великих масивів даних.

Табл. 1: Порівняльна таблиця методів моделювання ЦДЗС

Метод	Переваги	Недоліки
Ряди Фур'є	Простота реалізації	Неефективний для не-стаціонарних сигналів
Вейвлет-перетворення	Ефективний для нестаціонарних сигналів	Складність вибору вейвлета
Фрактальне моделювання	Висока точність для складних сигналів	Обчислювальна складність

Запропонований алгоритм моделювання ЦДЗС на основі фрактальних функцій забезпечує високу точність відновлення даних та ефективне стиснення. Розроблений програмний модуль може бути інтегрований у системи обробки звукових сигналів для зменшення обсягу збереження даних.

Подальше покращення алгоритму можливо забезпечити за рахунок оптимізації обчислювальних ресурсів для роботи з великими масивами даних, розширення алгоритму для роботи з багатоканальними сигналами, використання інших фрактальних функцій для моделювання.

Перелік посилань

- [1] Конахович Г. Ф., Давлет'янц О. І., Лавриненко О. Ю., Бахтіяров Д. І. Порівняльний аналіз перетворення Фур'є, косинусного перетворення та вейвлет-перетворення як спектрального аналізу цифрових мовних сигналів. Наукоємні технології. 2015. № 3. С. 210–220. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nt_2015_3_4.
- [2] Назарків Б. М., Іваненко В. В. Аналіз методів фільтрації цифрових сигналів за допомогою фрактальних функцій. Журнал Інженерії програмного забезпечення. 2018. Т. 5, № 2. С. 78–92.
- [3] Ременчук О. О., Тарасов І. В. Використання фрактальних функцій для передбачення розвитку звукових сигналів. Конференція з обчислювальної техніки та інформаційних технологій. 2017. С. 76–89.
- [4] Гейс М. Г. *Statistical Digital Signal Processing and Modeling* (Статистична цифрова обробка та моделювання сигналів). John Wiley & Sons, 1996. 624 с.
- [5] Шарф Л. Л. *Статистична обробка сигналів: Виявлення, оцінка та аналіз часових рядів*. Addison-Wesley, 1991. 524 с.

Деякі інфінітезимальні деформації поверхонь із заданою зміною тензора Річчі

Н. В. Вашпанова¹, М. Ю. Синлівий¹

¹Одеська державна академія будівництва та архітектури,
Одеса, Україна

vasha_nina@ukr.net

Анотація

У даній роботі задача про існування нескінченно малої (н.м.) деформації першого порядку з заданою зміною тензора Річчі у тривимірному евклідовому просторі зводиться до пошуку розв'язків одного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку відносно двох невідомих. При заздалегідь заданій одній з них отримане рівняння в загальному вигляді буде неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних гіперболічного типу. Для цього рівняння розглянута задача Коші. Доведено, що будь-яка регулярна поверхня ненульових гаусової та середньої кривин допускає н.м. деформації першого порядку при певних граничних умовах. Тензорні поля при цьому залежать від двох функцій, кожна однієї змінної та заздалегідь заданої регулярної функції.

Ключові слова: середня кривина; гаусова кривина; тензорні поля; нескінченно мала деформація; тензор Річчі.

Нехай у E_3 -просторі задана однозв'язна регулярна поверхня S класу C^3 з радіус-вектором $\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$ і гомеоморфна області G площини $x^1 O x^2$.

Будемо розглядати загальну н.м. деформацію першого порядку цієї поверхні з вектором зсуву $\bar{y}(x^1, x^2) \in C^2$, частинні похідні якого мають вид [Podousova, 2020]:

$$\bar{y}_i = c_{i\alpha}(T^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta})\bar{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \bar{n}.$$

Тут $c_{i\alpha}$ - дискримінантний тензор S ($c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}$, $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, $g_{\alpha\beta}$ - метричний тензор S), $c^{\alpha\beta} = g^{\alpha i}g^{\beta j}c_{ij}$, g^{ij} - елементи матриці, оберненої до матриці $\|g_{\alpha\beta}\|$, $\bar{n}$ - одиничний вектор нормалі поверхні S , $\bar{r}_\beta = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\beta}$, $T^{\alpha\beta}$, T^α - деякі тензорні поля на поверхні S . Індеси всюди набувають значень 1, 2.

Відомо [Podousova, 2020], що існування загальної н. м. деформації першого порядку поверхонь визначається розв'язком наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha i} - b_{\alpha}^i T^{\alpha} = \mu_{\alpha} c^{i\alpha}, \\ b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = -T_{,\alpha}^{\alpha}, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $b_{\alpha}^i = g^{\beta i} b_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta}$ - коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні S , $\mu(x^1, x^2)$ - деяка функція класу C^2 . Комою позначено коваріантне диференціювання на базі $g_{\alpha\beta}$.

Основна система рівнянь загальної н.м. деформації першого порядку поверхонь (1) містить чотири рівняння відносно семи невідомих функцій: $T^{\alpha\beta}$, T^{α} , μ .

Припустимо, що при цій деформації варіації тензора Річчі мають вид:

$$\delta R_{ij} = -F_{ij},$$

де F_{ij} - заздалегідь задані функції класу C^3 .

Відомо [Вашпанова, 2023], що для існування н.м. деформації першого порядку ненульової гаусової кривини із заздалегідь заданою зміною тензора Річчі необхідно і достатньо щоб наступна система рівнянь

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha i} + \mu_{\alpha} c^{\alpha i} = b_{\alpha}^i T^{\alpha}, \\ b_{\alpha\beta} T^{ab} = -T_{,\alpha}^{\alpha}, \\ c_{\beta\alpha} T^{\alpha\beta} = 0, \\ (c_{j\alpha} g_{i\beta} + c_{i\alpha} g_{j\beta}) T^{\alpha\beta} = B_{ij}, \end{cases} \quad (2)$$

мала ненульовий розв'язок відносно симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$, компонентів вектора та функції $\mu(x^1, x^2) \in C^2$. Тут

$$B_{ij} = \frac{1}{K} F_{ij} - \frac{1}{2K} g_{ij} g^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Кожний розв'язок системи рівнянь (2) визначає н.м. деформацію поверхні S ненульової гаусової кривини з наперед заданими варіаціями тензора Річчі, яку можна інтерпретувати як безмоментний напружений стан рівноваги навантаженої оболонки [Векуа, 1988].

Якщо вектор зсуву $\bar{y} = const$, то поверхню S називатимемо жорсткою по відношенню до даної н. м. деформації.

Пошук розв'язків системи рівнянь (2) зводиться до дослідження та розв'язування одного диференціального рівняння в частинних похідних відносно функцій $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$.

$$\mu_{\alpha\beta} \rho^{\alpha\beta} - (\Gamma_{\alpha\beta}^s \rho^{\alpha\beta} + K c^{s\beta} (d^k_{\beta})_{,k}) \mu_s = -K F(\varphi) - K (\tilde{T}_{,\alpha}^{\alpha i} d^{i\beta})_{,\beta}. \quad (4)$$

Де Γ_{ij}^k - символи Христофеля другого роду, $F(\varphi = (d^{\alpha\beta}\varphi_\alpha)_{,\beta} + 2H\varphi, \varphi = -\frac{T_{,\alpha}}{2H}$ - заздалегідь задана функція, $\tilde{T}^{11}$, $\tilde{T}^{12}$, $\tilde{T}^{22}$ - відомі регулярні функції.

Зокрема, рівняння (4) відносно невідомої функції $\varphi(x^1, x^2)$, а $\mu(x^1, x^2)$ - заздалегідь задана функція, вивчалось у роботі [Вашпанова, 2023].

Легко впевнитись в тому, що диференціальне рівняння (4) відносно функції $\mu(x^1, x^2)$ буде гіперболічного типу.

Знайдемо механічний зміст функцій $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$.

Віднесемо поверхню S до ліній кривини, тоді рівняння (4) відносно функції $\mu(x^1, x^2)$ набуде канонічного вигляду:

$$\mu_{12} + t\mu_1 + s\mu_2 = -\frac{K}{2\rho^{12}}F(\varphi) - \frac{K}{2\rho^{12}}(T_{,\alpha}^{\alpha i}d^{i\beta})_{,\beta} \quad (5)$$

де

$$t = -\frac{\left(\Gamma_{\alpha\beta}^1\rho^{\alpha\beta} + K\frac{1}{\sqrt{g}}(d_{2,2}^2)\right)}{2\rho^{12}}; \quad s = -\frac{\left(\Gamma_{\alpha\beta}^2\rho^{\alpha\beta} - K\frac{1}{\sqrt{g}}(d_{1,1}^1)\right)}{2\rho^{12}}.$$

Нехай на площині x^1Ox^2 задана дуга кривої, яка перетинається не більше ніж в одній точці з прямими, паралельними осям координат і рівняння якої може бути записано у вигляді: $x^2 = g(x^1)$.

Задамо вздовж дуги кривої значення μ та $\frac{\partial\mu}{\partial x^2}$:

$$\mu|_{x^2=g(x^1)=\omega_0(x^1)}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x^2}\bigg|_{x^2=g(x^1)=\omega_0(x^1)} \quad (6)$$

та розглянемо задачу Коші: необхідно знайти розв'язок рівняння (5) в деякому околі кривої, що задовольняє умови (6). Розв'язок цієї задачі існує і єдиний [Кошляков, 1970]. Тоді має місце наступна

Теорема. *Будь яка поверхня S класу C^5 ненульових гаусової та середньої кривин при граничних умовах (6) допускає деформації з заданою зміною тензора Річчі в класі C^2 - поверхонь, а тензорні поля залежать від двох функцій кожсна від однієї змінної та заздалегідь заданої функції $\varphi(x^1, x^2)$ класу C^3 .*

У випадку однозв'язної поверхні наша геометрична задача про відшукування деформації з заданою зміною тензора Річчі поверхні, еквівалентна механічній задачі про відшукування безмоментного напруженого стану рівноваги оболонки з серединною поверхнею за умови, що поверхневе навантаження цієї оболонки виражено через дві функції $\mu(x^1, x^2)$ та $\varphi(x^1, x^2)$ у формі

$$X = (2\mu_\alpha c^{\alpha i} - \varphi_\beta g^{\beta i})r_i - 2H\varphi n.$$

Перелік посилань

Podousova T., Vashpanova N. (2020). Deformations of surfaces from stationary Ricci Tensor. *Mechanics and Mathematical methods*, vol. 2, no. 2, pp. 51-62. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2020-2-2-51-62>

Вашпанова Н.В., Лесечко О.В., Подоусова Т.Ю. (2023). Інфінітезимальні деформації поверхонь з заданою зміною тензора Річчі. *Механіка та математичні методи*. vol. 1, pp. 97-109. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2023-5-1-97-109>

Векуа І.Н. (1988). *Обобщенные аналитические функции*. М:Наука.

Кошляков Н.С. и др. (1970). *Уравнения в частных производных математической физики. Учеб.пособ. для мех.-мат.фак.ун-тов*, М:Высшая школа.

Колмогоровські поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова

С. Б. Гембарська¹, Н. В. Василюк¹, М. О. Воронюк¹

¹*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна*

*gembarskaya72@gmail.com, Nestorwasok@gmail.com,
Max.Voronyuk@gmail.com*

Анотація

Встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова у просторі $B_{q,1}$ для деяких співвідношень між параметрами p і q . Норма у просторі $B_{q,1}$ є більш сильною, ніж L_q -норма.

Ключові слова: періодичні функції багатьох змінних; класи типу Нікольського–Бесова; колмогоровські поперечники.

В доповіді мова буде йти про колмогоровські поперечники класів $B_{p,\theta}^\Omega$ [1] періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{q,1}$ [2]. Норма в цьому просторі є більш сильною, ніж L_q -норма. Надалі Ω функція типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі–Стечкина (S^α) та (S_l) [3], і для певної функції Ω класи $B_{p,\theta}^\Omega$ збігаються з відомими класами Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^r$ [4]. Означимо апроксимаційну характеристику, яка нами досліджується. Нехай W – centrally симетрична множина у просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$. Величина

$$d_m(W, X) = \inf_{L_m} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_m} \|w - u\|_X,$$

де $L_m \subset X$ – підпростір розмірності m , називається колмогоровським поперечником множини W у просторі X .

Сформулюємо одержані нами твердження стосовно величин $d_m(B_{p,\theta}^\Omega, B_{q,1})$ для деяких співвідношень між параметрами p і q .

Теорема 1. Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $w(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді для будь-якої послідовності $m = (m_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що $m \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливе співвідношення

$$d_m(B_{p,\theta}^\Omega, B_{p,1}) \asymp w(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорема 2. Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $w(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > 0$ і умову (S_l) . Тоді для будь-якої послідовності $m = (m_n)_{n=1}^\infty$ натуральних чисел такої, що $m \asymp 2^n n^{d-1}$, справедливе співвідношення

$$d_m(B_{p,\theta}^\Omega, B_{q,1}) \asymp w(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Прокоментуємо одержані результати.

1. Співставивши результати теорем 1, 2 з відповідними оцінками величин $d_m(B_{p,\theta}^\Omega, L_q)$ [1] виявляємо, що за винятком випадку $\theta = 1$, оцінки колмогоровських поперечників класів $B_{p,\theta}^\Omega$ є різними за порядком у просторах $B_{q,1}$ і L_q .
2. В одновимірному випадку порядки відповідних величин встановлено в [5] і при цьому їхні порядки є однаковими у просторах $B_{q,1}$ і L_q .

Перелік посилань

- [1] Yongsheng S., Heping W. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. *Tr. Mat. Inst. Steklova*. 1997. V.219. P.356–377.
- [2] Pozharska, K. V., Romanyuk A. S., Romanyuk V. S. Widths and entropy numbers of the classes of periodic functions of one and several variables in the space $B_{q,1}$. *Carpathian Math. Publ.* 2024. V.16, N2. P. 351–366.
- [3] Bari N. K., Stechkin S. B. The best approximation and differential properties of the two associated function. *The works of the Mos. Math. Soc.* 1956. V.5. P.483–522.
- [4] Lizorkin P. I., Nikolsky S. M. Spaces of mixed smoothness functions from a decomposition point of new. *Work of the Math. Ins.* 1989. V.187. P.143–161.
- [5] Гембарська С. Б., Романюк І. А., Федунік-Яремчук О. В. Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова. *Укр. мат. вісник*. 2023. Т.20, N2. С. 161–185.

Найкращі наближення класів типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{q,1}$

С. Б. Гембарська¹, І. А. Романюк¹, В. І. Балабуха¹

¹Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна

gembarskaya72@gmail.com, iromaniuk@ukr.net,
vitia1488.vb@gmail.com

Анотація

Одержано точні за порядком оцінки найкращих наближень класів $B_{p,\theta}^\Omega$ типу Нікольського–Бесова періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{q,1}$. Норма у цьому просторі є більш сильною, ніж L_q -норма.

Ключові слова: періодичні функції багатьох змінних; класи типу Нікольського–Бесова; найкраще наближення.

Досліджуються найкращі наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних [1], де $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, а $w(\tau)$ – задана функція (однієї змінної τ) типу модуля неперервності порядку l , що задовольняє умови (S^α) та (S_l) , які називаються умовами Барі–Стєчка [2]. При певному виборі функцій $\Omega(t)$ класи $B_{p,\theta}^\Omega$ є аналогами відомих класів Нікольського–Бесова $B_{p,\theta}^r$ [3].

Наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ здійснюємо за допомогою тригонометричних поліномів вигляду

$$T(Q_n) = \{t : t(x) = \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}^d\},$$

де Q_n – східчастий гіперболічний хрест (див., наприклад, [1]).

Нехай X – деякий нормований функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$. Для функції $f \in X$ позначимо через

$$E_{Q_n}(f)_X = \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_X$$

величину найкращого наближення функції f за допомогою поліномів із множини $T(Q_n)$. Відповідно для деякого функціонального класу $F \subset X$ покладемо

$$E_{Q_n}(F)_X = \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_X.$$

Отже, в якості F розглядаємо класи $B_{p,\theta}^\Omega$, а X – простір $B_{q,1}$, норма в якому є більш сильною, ніж L_q -норма [4].

Одержано точні за порядком оцінки величин $E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}}$ для певних співвідношень між параметрами p і q .

Наведемо одержані результати у двох важливих випадках.

Теорема 1. Нехай $d \geq 2$, $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $w(\tau)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ і умову (S_I) . Тоді справедлива оцінка

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}} \asymp w(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (1)$$

Теорема 2. Нехай $d \geq 2$, $1 \leq q < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, а $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $w(\tau)$ задовольняє умову (S^α) із деяким $\alpha > 0$ і умову (S_I) . Тоді виконується співвідношення

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{q,1}} \asymp w(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \quad (2)$$

Зробимо два зауваження до наведених результатів.

Зауваження 1. Порівнявши (1) і (2) із відповідними оцінками величин $E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_q$ [1], виявляємо, що, крім випадку $\theta = 1$, порядкові оцінки найкращих наближень класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторах $B_{q,1}$ і L_q є різними.

Зауваження 2. В одновимірному випадку $d = 1$ порядки відповідних величин встановлено у роботі [5]. Важливо зазначити, що при цьому порядки найкращих наближень класів $B_{p,\theta}^\Omega$ є однаковими у просторах $B_{q,1}$ і L_q .

Перелік посилань

- [1] Yongsheng S., Heping W. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. *Tr. Mat. Inst. Steklova*. 1997. V.219. P.356–377.
- [2] Bari N. K., Stechkin S. B. The best approximation and differential properties of the two associated function. *The works of the Mos. Math. Soc.* 1956. V.5. P.483–522.
- [3] Lizorkin P. I., Nikolsky S. M. Spaces of mixed smoothness functions from a decomposition point of new. *Work of the Math. Ins.* 1989. V.187. P.143–161.
- [4] Pozharska, K. V., Romanyuk A. S., Romanyuk V. S. Widths and entropy numbers of the classes of periodic functions of one and several variables in the space $B_{q,1}$. *Carpathian Math. Publ.* 2024. V.16, N2. P.351–366.
- [5] Гембарська С. Б., Романюк І. А., Федунік-Яремчук О. В. Характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних функцій багатьох змінних типу Нікольського–Бесова. *Укр. мат. вісник*. 2023. Т.20, N2. С.161–185.

Особливості оцінювання параметрів множинного квазічирпованого сигналу

В. В. Гладун¹, О. В. Іванов¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

viktor.hladun00@gmail.com, alexntuu@gmail.com

Анотація

У доповіді розглядається неперервний у часі множинний квазічирпований сигнал, що спостерігається на фоні адитивного сильно або слабо залежного випадкового шуму. Для оцінювання невідомих параметрів цього сигналу запропоновано метод оцінки найменших квадратів (ОНК). У доповіді розглянуто асимптотичні властивості ОНК досліджуваного сигналу та отримано теореми про сильну консистентність та асимптотичну нормальність ОНК невідомих параметрів квазічирпованого сигналу.

Ключові слова: квазічирпований сигнал; оцінка найменших квадратів; сильно/слабо залежний стаціонарний гауссівський процес; сильна консистентність; асимптотична нормальність.

Моделі класичних синусоїдних сигналів, що спостерігаються на фоні шумів різного походження, широко використовуються в обробці мовних текстів, у медицині, зокрема, кардіографії, сейсмології, астрономії, теорії передавання сигналів та інших галузях. Синусоїдний сигнал можна записати у вигляді

$$X(t) = \sum_{j=1}^N (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t)) + \varepsilon(t), \quad N \geq 1, \quad (1)$$

де $t \in [0, +\infty]$ (або $t \in \mathbb{N}$ якщо розглядаються моделі з дискретним часом), A_j^0, B_j^0 є амплітудами, ϕ_j^0 є частотами гармонічних коливань, ε – випадковий шум, що маскує сигнал.

Ще однією важливою тригонометричною моделлю в теорії обробки сигналів є модель синусоїдного сигналу із лінійною частотною модуляцією. В англійській літературі модель такого сигналу називають *chirp signal model* (див. [Kundu, Nandi, 2021]). В україномовній літературі можна зустріти відповідний термін «чирпований сигнал». Сигнали такого типу застосовуються у радарній техніці

у якості зондуючих імпульсів. Чирпований сигнал можна записати у наступному вигляді:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N'} (C_j^0 \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) + D_j^0 \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2)) + \varepsilon(t), \quad N' \geq 1. \quad (2)$$

У порівнянні з моделлю (1), тут присутні додаткові параметри ψ_j^0 , які в англійській літературі називаються *chirp rates*. Ці параметри контролюють швидкість зростання початкових частот коливань ϕ_j^0 .

Важливою модифікацією моделей (1) та (2) є модель вигляду

$$X(t) = \sum_{j=1}^N (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t)) + \sum_{k=1}^{N'} (C_k^0 \cos(\psi_k^0 t^2) + D_k^0 \sin(\psi_k^0 t^2)) + \varepsilon(t), \quad (3)$$

що є сумою синусоїдного сигналу (1) та чирпованого сигналу (2) з початковими частотами $\phi_j^0 = 0$. У формулі (3) A_j^0 , B_j^0 , C_k^0 , D_k^0 – амплітуди, ϕ_j^0 – частоти, ψ_k^0 – *chirp rates*, які ми будемо називати темпами частот.

Модель (3) розглядається у роботі [Grover, Kundu, Mitra, 2021]. Автори називають дану модель *chirp-like signal model*. Ми будемо називати такий сигнал квазічирпованим. Такий вибір моделі автори вказаної роботи зробили завдяки наступним обставинам. По-перше, стверджується, що модель (3) демонструє той самий фізичний ефект, що і модель (2). Таким чином, ця модель може бути так само добре застосована у прикладних статистичних задачах, як і модель (2). По-друге, модель (3) можна також розглядати як узагальнення моделі (1), якщо покласти $C_k^0 = D_k^0 = 0$, $k = \overline{1, N'}$.

У нашій доповіді ми розглядаємо модель квазічирпованого сигналу з неперервним часом для випадку $N = N'$ та отримуємо властивості консистентності та асимптотичної нормальності ОНК параметрів цього сигналу.

Отже, нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

де

$$g(t, \theta^0) = \sum_{j=1}^N (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t) + C_j^0 \cos(\psi_j^0 t^2) + D_j^0 \sin(\psi_j^0 t^2)),$$

$$\theta^0 = (A_1^0, B_1^0, \phi_1^0, C_1^0, D_1^0, \psi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \phi_N^0, C_N^0, D_N^0, \psi_N^0)^*,$$

$(A_j^0)^2 + (B_j^0)^2 > 0$, $(C_j^0)^2 + (D_j^0)^2 > 0$, $j = \overline{1, N}$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ – випадковий шум, що задовольняє наступним вимогам.

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

A2.

(i) Процес ε , що задовольняє умову **A1(i)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \tilde{L}(1/|\lambda|)|\lambda|^{\alpha-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, де $\tilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.

(ii) Спектральна щільність процесу ε , що задовольняє умову **A1(ii)**, має четвертий спектральний момент.

Припустимо також, що істинні значення амплітуд $A_j^0, B_j^0, C_j^0, D_j^0$, $j = \overline{1, N}$, є різними числами, а істинні значення кутових частот ϕ_j^0 , $j = \overline{1, N}$, та темпу частот ψ_j^0 , $j = \overline{1, N}$, є різними додатними числами. Для деяких фіксованих чисел $0 \leq \underline{\phi} < \overline{\phi} < +\infty$, $0 \leq \underline{\psi} < \overline{\psi} < +\infty$ розглянемо множини

$$\Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi}) = \{\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N : \underline{\psi} < \psi_1 < \dots < \psi_N < \overline{\psi}\},$$

$$\Phi(\underline{\phi}, \overline{\phi}) = \{\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in \mathbb{R}^N : \underline{\phi} < \phi_1 < \dots < \phi_N < \overline{\phi}\},$$

такі, що $\phi^0 = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in \Phi(\underline{\phi}, \overline{\phi})$, $\psi^0 = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi})$.

Розглянемо монотонно неспадні сім'ї відкритих множин $\Phi_T \subset \Phi(\underline{\phi}, \overline{\phi})$, $\Psi_T \subset \Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi})$, $T > T_0 > 0$, що містять вектори ϕ^0, ψ^0 , такі, що $\left(\bigcup_{T>T_0} \Phi_T\right)^c = \Phi^c(\underline{\phi}, \overline{\phi})$, $\left(\bigcup_{T>T_0} \Psi_T\right)^c = \Psi^c(\underline{\psi}, \overline{\psi})$, і виконується наступна вимога розрізнення параметрів.

$$\text{B. (i)} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ \phi \in \Phi_T^c}} T(\phi_{j+1} - \phi_j) = +\infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\phi \in \Phi_T^c} T\phi_1 = +\infty;$$

$$(ii) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ \psi \in \Psi_T^c}} T^2(\psi_{j+1} - \psi_j) = +\infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{\psi \in \Psi_T^c} T^2\psi_1 = +\infty.$$

Означення. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \phi_{1T}, C_{1T}, D_{1T}, \psi_{1T}, \dots, A_{NT}, B_{NT}, \phi_{NT}, C_{NT}, D_{NT}, \psi_{NT})^*$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{6N}$, де амплітуди $A_j, B_j, j = \overline{1, N}$, приймають будь-які значення, а параметри $\phi_j, \psi_j, j = \overline{1, N}$ приймають значення у множині $\Phi_T^c \times \Psi_T^c, T > T_0 > 0$, називається ОНК параметра θ^0 .

Сформулюємо теорему про консистентність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. Доведення цієї теореми можна знайти у розділі 2 роботи [Ivanov, Hladun, 2025].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **A1** та **B**. Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 у тому сенсі, що $A_{jT} \rightarrow A_j^0, B_{jT} \rightarrow B_j^0, T(\phi_{jT} - \phi_j^0) \rightarrow 0, C_{jT} \rightarrow C_j^0, D_{jT} \rightarrow D_j^0, T^2(\psi_{jT} - \psi_j^0) \rightarrow 0$ м.н., при $T \rightarrow \infty, j = \overline{1, N}$.*

Далі, використовуючи теорему 1, отримуємо теорему про асимптотичну нормальність ОНК θ_T . Доведення цієї теореми наведено у розділі 3 роботи [Ivanov, Hladun, 2025].

Теорема 2. *Нехай виконано умови **A1**, **A2** та **B**. Тоді нормована ОНК $(T^{1/2}(A_{1T} - A_1^0), T^{1/2}(B_{1T} - B_1^0), T^{3/2}(\phi_{1T} - \phi_1^0), T(C_{1T} - C_1^0), T(D_{1T} - D_1^0), T^3(\psi_{1T} - \psi_1^0), \dots, T^{1/2}(A_{NT} - A_N^0), T^{1/2}(B_{NT} - B_N^0), T^{3/2}(\phi_{NT} - \phi_N^0), T(C_{NT} - C_N^0), T(D_{NT} - D_N^0), T^3(\psi_{NT} - \psi_N^0))^*$ є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma)$ при $T \rightarrow \infty$, де Σ є матрицею порядку $6N$, що задана формулами (106)-(109) у роботі [Ivanov, Hladun, 2025].*

Зазначимо, що коваріаційна матриця Σ є виродженою, і $\text{rank}(\Sigma) = 5N$.

Перелік посилань

Grover R., Kundu D., Mitra A. (2021). Asymptotic Properties of Least Squares Estimators and Sequential Least Squares Estimators of a Chirp-like Signal Model Parameters. *Circuits Systems and Signal Processing*, vol. 40, no. 11, pp. 5421–5465. <http://doi.org/10.1007/s00034-021-01724-7>.

Ivanov A., Hladun V. (2025). Asymptotic Properties of the LSE for Chirp-Like Signal Parameters. *Austrian Journal of Statistics*, vol. 54, no. 1, pp. 33–60. <https://doi.org/10.17713/ajs.v54i1.1965>.

Kundu D., Nandi S. (2021). On Chirp and some Related Signal Analysis: a Brief Review and some New Results. *Sankhya A*, vol. 83, no. 2, pp. 844–890. <https://doi.org/10.1007/s13171-021-00242-7>.

Реалізація сценарію узагальненої переміжності у динамічній системі Ресслера

О. О. Горчаков¹

¹*Інститут математики НАН України, Київ, Україна*

`o.horchakov@imath.kiev.ua`

Анотація

Встановлено здійснення нового сценарію узагальненої переміжності типу “хаос–хаос” в ідеальній детермінованій динамічній системі Ресслера.

Ключові слова: хаотичний атрактор; ідеальна динамічна система; узагальнена переміжність.

В теорії динамічних систем широко відомі три “класичних” сценарії переходу до детермінованого хаосу. Це сценарії Фейгенбаума, Помо–Манневілья та Афраймовича–Неймарка [Skiadas, 2016]. Ці сценарії реалізуються при переходах до хаосу у переважній більшості досліджуваних динамічних систем. Останніми роками були описані нові сценарії переходів “хаос–хаос” [Shvets, Sirenko, 2012] [Shvets, 2021]. Під такими переходами розуміються переходи від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу. Одним з таких нових сценаріїв є так звана узагальнена переміжність. При здійсненні сценарію переміжності за Помо–Манневільлем, за одну жорстку біфуркацію, відбувається перехід від граничного циклу до хаотичного атрактора. Причому такий перехід включає дві фази: ламінарну та турбулентну. При здійсненні сценарію узагальненої переміжності відбувається перехід від хаотичного атрактора одного типу до хаотичного атрактора іншого типу. Або навіть переходи від хаотичного атрактора до гіперхаотичного атрактора. Але замість ламінарної фази виникає значно більш складна груболамінарна фаза [Shvets, 2021].

Зауважимо, що сценарій узагальненої переміжності був вперше описаний при дослідженні неідеальних, за Зоммерфельдом–Кононенком, динамічних систем [Kononenko, 1969], [Krasnopolskaya, Shvets, 1991]. У роботі [Horchakov, Shvets, 2024] була встановлена реалізація такого сценарію узагальненої переміжності і для ідеальної динамічної системи Лоренца.

Метою данної роботи є встановлення реалізації нового сценарію узагальненої переміжності для ідеальної динамічної системи Ресслера. Отже, розглянемо систему Ресслера. Ця система має широке застосування у сучасній нелінійній динаміці.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ex_2, \\ \dot{x}_3 &= f + x_3(x_1 - m),\end{aligned}$$

Тут x_1, x_2, x_3 – фазові змінні, а e, f, m – параметри системи.

За допомогою ряду чисельно-аналітичних методів, зокрема алгоритму Бенеттіна та ін., методу Ено, методу Рунге–Кутти були побудовані та досліджені основні динамічні характеристики атракторів системи Ресслера. На підставі аналізу спектрів ляпуновських характеристичних показників, фазопараметричних характеристик, фазових портретів, перерізів Пуанкаре та розподілів природних інваріантних мір були виявлені переходи “хаос–хаос” у просторі параметрів системи Ресслера за сценарієм узагальненої переміжності. Підтверджена ознака можливості реалізації такого сценарію, раніше описана для системи Лоренца у роботі [Horchakov, Shvets, 2024].

Перелік посилань

- C.H. Skiadas (2016). *Handbook of Applications of Chaos Theory*. Chapman and Hall/CRC, 952 p.
- A.Yu. Shvets, V.O Sirenko (2012). Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, № 2. pp. 185–192.
- A.Yu. Shvets (2021). Overview of Scenarios of Transition to Chaos in Nonideal Dynamic Systems. *Springer Proceedings in Complexity*. Springer, Cham., pp. 853–864,
- V.O. Kononenko (1969). *Vibrating system with a limited power-supply*. Iliffe, London, 236 p.
- T.S. Krasnopolskaya A.Yu. Shvets, (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply , *8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms*. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci. , Vol. 1 pp. 181–184
- O.O. Horchakov, A.Yu. Shvets (2024). Generalized Scenarios of Transition to Chaos in Ideal Dynamic Systems *System research and information technologies*, vol. 3, pp. 64–75.

Класифікація навчальної поведінки майбутніх інженерів при вивченні дисциплін математичного циклу

І. М. Гураль¹, Л. Р. Смоловик¹

¹*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу*

`liliana.smolovyk@nung.edu.ua`

Анотація

За допомогою кластерного аналізу визначено підгрупи студентів з різними моделями мотивації та навчальної поведінки при вивченні дисциплін математичного циклу. За підсумками кластерного аналізу отримано чотири значущо різні профілі студентів щодо мотиваційних переконань, самоефективності, стратегій саморегуляції, академічних досягнень та проблем при вивченні математичних дисциплін. Запропоновано метод класифікації студентів в одержані групи.

Ключові слова: кластерний аналіз; дискримінантний аналіз; математика; мотивація, навчальна поведінка; профілювання студентів.

Процес навчання в вищому навчальному закладі в зв'язку з реалізацією нових освітніх програм і посиленню ролі та постійної оптимізації самостійної роботи студентів визначається індивідуальними особливостями суб'єктної позиції студентів у навчанні та професійному розвитку. Тому важливою задачею є визначення груп студентів зі схожим рівнем сформованості навчальної діяльності. Таке профілювання здобувачів освіти дозволяє викладачам краще розуміти саморегульоване навчання студентів для застосування ефективних стратегій викладання. Наприклад, кластеризація профілів студентів може використовуватися при розробці адаптивних навчальних інструментів (Mojarad, Essa & Baker, 2018), для визначення уподобань в стилі навчання (Pasinaa et al., 2019).

Проведено кластерний аналіз майбутніх інженерів щодо мотиваційних переконань та навчальної діяльності при вивченні дисциплін математичного циклу. Аналіз базувався на зборі даних (анкет) виявлених власних переконань студентів. В анкетах пропонувалось оцінити мотиваційні переконання та навчальну діяльність за п'ятибальною шкалою від 1 – повністю не згоден до 5 – повністю згоден.

Класифікація (поділ) студентів на групи виконана за допомогою кластерного аналізу. Застосована деревовидна кластеризація за методом Варда (Ward's method), використовуючи евклідову відстань (див., наприклад, Murtagh, Legendre, 2014). Всі розрахунки виконані з використанням програмного середовища статистичних розрахунків R (R Core Team, 2024) та середовища розробки RStudio.

За підсумками кластерного аналізу отримано чотири значущо різні профілі студентів щодо мотиваційних переконань, самоефективності, стратегій саморегуляції, академічних досягнень та проблем при вивченні математичних дисциплін. Студенти з 1-го кластеру зацікавлені у вивченні математики: вони вважають її корисною для майбутніх освітніх та кар'єрних прагнень, в них достатньо високий рівень знань з математики і вони впевнені в здатності оволодіти знаннями та навичками з математичних дисциплін в університеті. При цьому в них найнижча тривожність під час контрольних заходів з математичних дисциплін і для них математичні дисципліни нескладні. Студентами другого кластеру математичні дисципліни сприймаються як нецікаві, складні. Вони до деякої міри розуміють корисну цінність цих дисциплін і прикладають якісь зусилля до навчання, найбільше хвилюються під час контрольних заходів. Але рівень знань, як і самоефективність у цих студентів невисокі. Студенти з третього кластеру прикладають найбільше зусиль для вивчення дисциплін математичного циклу, вони самоефективні і досягають хорошого рівня знань. Вони вважають математику скоріше цікавою і корисною для майбутніх освітніх та кар'єрних прагнень, хоча для них математичні дисципліни достатньо складні для опанування. Вони хвилюються під час контрольних заходів. Студенти з четвертого кластеру прикладають найменше зусиль для вивчення математичних дисциплін, які вважають нецікавими і некорисними. В них найнижчий рівень знань і самоефективність. Вони не переживають на контрольних заходах і не вважають математику складною. Однозначно студенти з цього кластеру не зацікавлені у навчанні.

Після вивчення особливостей груп, другим кроком стала побудова правила класифікації. Для класифікації нового об'єкта (студента) у побудовані та вивчені кластери використовувався лінійний дискримінантний аналіз. Використовуючи координати в просторі дискримінантних функцій центрів кластерів та середніх значень характеристик, можна визначити до якого кластера слід віднести досліджуваний об'єкт.

Розуміння типології студентів може дати орієнтири для вибудовування програм консультування та підтримки студентів, а також для планування навчального процесу та вдосконалення змісту і методів технічної освіти.

Перелік посилань

Mojarad, S., Essa, A., Mojarad, S., & Baker, R. S. (2018). *Data-driven learner profiling based on clustering student behaviors: learning consistency, pace and effort*.

In Intelligent Tutoring Systems: 14th International Conference, ITS 2018, Montreal, QC, Canada, June 11–15, 2018, Proceedings 14 (pp. 130-139). Springer International Publishing.

Irene Pasinaa, Goze Bayrama, Wafa Labiba, Abdelhakim Abdelhadia, Mohammad Nurunnabi (2019). *Clustering students into groups according to their learning style*. MethodsX 6. pp. 2189–2197.

Murtagh, Legendre, 2014 – Murtagh, F., Legendre, P. (2014). *Ward's Hierarchical Agglomerative Clustering Method: Which Algorithms Implement Ward's Criterion?* J Classif 31: 274–295. <https://doi.org/10.1007/s00357-014-9161-z>.

R Core Team, 2024 – R Core Team (2024). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <https://www.R-project.org/>.

Застосування фрактального аналізу для прогнозування довгострокових тенденцій на українському фондовому ринку

О. В. Залевська¹, О. С. Гулянський², Р. В. Коник²

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

²*Ірпінський ліцей інноваційних технологій, Ірпінь, Україна*

o.zalevska@kpi.ua

Анотація

У роботі представлено результати застосування фрактального аналізу для дослідження довгострокових тенденцій на українському фондовому ринку. Проведено емпіричне дослідження часових рядів індексу UX та акцій провідних емітентів за період 2009–2024 рр. із застосуванням R/S-аналізу та показника Херста. Виявлено статистично значущі закономірності у формуванні довгострокових трендів та підтверджено гіпотезу щодо фрактальної природи ринкових процесів.

Кореляційний аналіз підтвердив, що показник Херста є незалежним аналітичним індикатором. Кореляція між цінами активів та історичною волатильністю виявилася вдвічі вищою у порівнянні з традиційними коефіцієнтами. Отже, показник Херста не є просто похідною від інших показників, таких як ціна чи волатильність, а виступає окремим інструментом для аналізу довгострокових ринкових трендів. Застосування показника Херста доцільно для довгострокових інвесторів. На короткострокових періодах цей показник втрачає свою прогностичну силу через високу мінливість даних та екстремальні коливання, які часто не мають реального зв'язку з фундаментальними економічними факторами. Таким чином, застосування фрактального аналізу доцільне переважно для аналізу тривалих часових інтервалів.

Ключові слова: показник Херста; фондовий ринок; фрактальний аналіз; індикатор; довгострокове прогнозування.

Фондовий ринок є важливим об'єктом дослідження для економістів, інвесторів та аналітиків, оскільки він відображає динаміку економічних процесів і ринкових настроїв. Складність ринкових механізмів та їхня залежність від численних факторів ускладнюють створення універсальних математичних моделей для точного прогнозування.

У дослідженні представлено комплексний аналіз застосування фрактальної методології для оцінки динаміки українського фондового ринку. Емпірично досліджено часові ряди індексу UX та акцій провідних емітентів за період 2009–2024 рр.

із застосуванням R/S-аналізу та показника Херста. Виявлено статистично значущі закономірності у формуванні довгострокових трендів та підтверджено гіпотезу щодо фрактальної природи ринкових процесів, що узгоджується з дослідженнями Мандельброта [2].

Дослідження ґрунтується на гіпотезі фрактального ринку (ФМН), що розширює класичну теорію ефективного ринку [1] через врахування нелінійної природи фінансових процесів. Методологічним підґрунтям слугує R/S-аналіз [3], розроблений Херстом та удосконалений Мандельбротом [4].

Формалізація R/S-аналізу базується на рівнянні:

$$\log(R/S)_n = \log(c) + H \times \log(n)$$

(1)

де H – показник Херста, n – часове вікно спостереження, R/S – нормований розмах варіації, c – константа масштабування.

Доцільно аналізувати показник Херста в динаміці, порівнюючи його з триваючим в цей час трендом українському фондовому ринку в задежності від часу та ціни в вказаний момент часу в період з 2009 до 2024 роки.

Проведений аналіз показав, що показник Херста за весь досліджуваний період для всіх інструментів знаходиться в діапазоні від 0,6 до 0,82, що свідчить про персистентність українського фондового ринку та перевагу трендових рухів.

Табл. 1: Параметри фрактальності досліджуваних інструментів

Фінансовий інструмент	Показник Херста (H)	Стандартне відхилення
Індекс UX	0,7471	0,0324
CEEN	0,7721	0,0418
BAVL	0,8264	0,0287
DOEN	0,8115	0,0356
KVBZ	0,7883	0,0392
MHP	0,5996	0,0445

Одним із ключових результатів проведеного аналізу є виявлення позитивної тенденції зростання акцій компанії “МНР”. В кінці 2013 та 2016 років коефіцієнт Херста точно спрогнозував початок та закінчення спадаючого тренду акції. В 2023 році експонента на повільному падінні досягла значення в 0,39, але зі зростанням ціни в 2024 році теж виросла – значення 0,7 свідчить про ймовірне продовження зростання акцій МНР, отже, вони привабливі для інвестування.

Після тривалого періоду зниження, починаючи з 2011 року, ці акції демонструють ознаки стабільного відновлення. Це створює сприятливі умови для довгострокових інвестицій. Водночас акції Райффайзен Банку показали унікальне значення Показник Херста — 1,07 у 2009 році, що є рідкісним явищем на фінансових ринках і свідчить про значну структурну стійкість цих активів у той період.

Доцільно аналізувати показник Херста в динаміці, порівнюючи його з триваючим в цей час трендом на українському фондовому ринку, а значення показника Херста в задежності від часу та ціни в період з 2009 до 2024 роки.

Проведене дослідження українського фондового ринку виявило, що значення показника Херста для різних фінансових інструментів коливається в діапазоні від 0,6 до 0,82. Такі значення є переконливим свідченням наявності стійких трендових рухів на ринку, що підтверджує гіпотезу про фрактальну природу ринкових процесів. У ході дослідження було встановлено високу ефективність показника Херста для довгострокового аналізу та прогнозування, проте його застосування для короткострокових періодів виявилось обмеженим через значну волатильність даних та наявність екстремальних коливань, що не завжди корелюють з фундаментальними економічними факторами.

Аналіз окремих інструментів показав цікаві результати. Зокрема, акції компанії «МНР» продемонстрували позитивну динаміку після тривалого періоду спаду, що створило сприятливе середовище для довгострокових інвестицій. Особливо примітним виявилось унікальне значення показника Херста для акцій Райффайзен Банку, яке досягло 1,07 у 2009 році, що свідчить про виняткову структурну стійкість цього активу в зазначений період.

Методологія дослідження виявила певні обмеження. Фрактальний аналіз показав нижчу ефективність при короткострокових прогнозах через високу ринкову волатильність. Крім того, для досягнення точніших результатів необхідно враховувати специфіку ринку та часові інтервали дослідження.

Перспективи подальших досліджень охоплюють кілька напрямків. По-перше, це розробка комбінованих моделей, що поєднують фрактальний аналіз з іншими методами, такими як машинне навчання та економетричні моделі. По-друге, планується розширення досліджень на інші сегменти фінансового ринку України, включаючи ринок облігацій та валютний ринок, а також застосування методології до міжнародних ринків для порівняльного аналізу.

Перелік посилань

- [1] Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business*, 38(1), 34–105.
- [2] Mandelbrot, B. B. (1972). Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1(3), 259–290.
- [3] Peters, E. E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Wiley Finance.
- [4] Cont, R. (2001). Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.

Складні процеси відновлення: асимптотична поведінка і застосування у фінансовій і актуарній математиці, теорії надійності і теорії масового обслуговування

Н. М. Зінченко¹

¹*Київський столичний університет ім. Бориса Грінченка,
Київ, Україна*

nm.zinchenko@kubg.edu.ua

Анотація

Аналіз асимптотики складних процесів відновлення $D(t)$ є дієвим інструментом дослідження їх можливих застосувань у фінансах і страхуванні та у різноманітних технічних дисциплінах. З цією метою наводимо цілий ряд граничних теорем для $D(t)$, зокрема твердження типу «сильного принципу інваріантності», що дають достатні умови апроксимації процесів $D(t)$ за допомогою вінеровського процесу чи стійкого процесу і слугують підґрунтям для подальшого дослідження швидкості зростання складних процесів відновлення $D(t)$ і флуктуації їх приростів.

Ключові слова: складний процес відновлення; складний процес Пуассона; процеси ризику; граничні теореми; сильний принцип інваріантності; закон повторного логарифму.

Процеси відновлення $N(t)$ і складні процеси відновлення – це випадкові процеси, що тісно пов'язані з класичною схемою сум незалежних випадкових величин. Нехай $\{z_i, i \geq 1\}$ – невід'ємні незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.), $Z(x) = \sum_{i=1}^{[x]} z_i$, $x > 0$, $Z(0) = 0$. **Процес відновлення (рахуючий процес)** визначається як

$$N(t) = \inf\{x \geq 0 : Z(x) > t\}.$$

Нехай $\{X_i, i \geq 1\}$ інша послідовність н.о.р.в.в. незалежних від $\{z_i, i \geq 1\}$, $S(t) = \sum_{i=1}^{[t]} X_i$, $t > 0$, $S(0) = 0$.

Означення 1. *Складний процес відновлення* визначається співвідношенням

$$D(t) = S(N(t)) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i. \quad (1)$$

Складні процеси відновлення в теорії масового обслуговування, в теорії черг та в теорії надійності часто інтерпретують, як загальний час очікування обслуговування на інтервалі часу $[0, t]$, час безвідмовної роботи системи і т.п.; у фінансовій математиці – як загальну зміну ринкової вартості до моменту часу t ; в актуарній (страховій) математиці – як загальну суму звернень до страхової компанії на відшкодування збитків на інтервалі часу $[0, t]$. Наприклад, в *класичній динамічній моделі ризику Крамера – Лундберга* процес ризику $U(T)$, що описує зміни резервного капіталу страховика для певного портфелю страхових договорів, визначається як

$$U(t) = u + ct - D(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (2)$$

де розміри виплат $\{X_i, i \geq 1\}$ – н.о.р.в.в. з функцією розподілу (ф.р.) $F(x)$ та скінченним математичним сподіванням $m = EX_1$, $\{z_i, i \geq 1\}$ – моменти надходження вимог на виплати, u – початковий капітал, c – швидкість (інтенсивність) надходження страхових внесків, $N(t)$ – процес надходження вимог – процес Пуассона, проміжки часу між надходженнями вимог мають експоненційний розподіл. Отже, тут $D(t)$ – *складний процес Пуассона*. У більш загальній ситуації (*модель Спарре – Андерсена*) $N(t)$ – процес відновлення. Подальше узагальнення моделі колективного ризику приводить до розгляду процесів ризику зі *стохастичними преміями*:

$$U^*(t) = u + \Pi(t) - D(t) = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} y_i - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (3)$$

де $N(t)$ і $N_1(t)$ – незалежні процеси відновлення, $N(t)$ моделює кількість позовів, $N_1(t)$ моделює кількість страхових полісів, придбаних на інтервалі часу $[0, t]$, $\{X_i, i \geq 1\}$ – розміри позовів, $\{y_i, i \geq 1\}$ – вартості страхових полісів.

Страховика часто цікавить знаходження такого показника як *ймовірність банкрутства* $\psi(U) = P(U(t) < 0 \text{ для деякого } t > 0)$, що впливає на визначення обсягу резерву та вартості страхових полісів. Оскільки знайти точні формули для $\psi(U)$ вдається лише в окремих випадках, потужним інструментом дослідження процесу ризику і процесу сумарних виплат $D(t)$ є граничні теореми, що дозволяють дослідити асимптотичну поведінку $U^*(t)$, $U(t)$, $D(t)$ і відповідно оцінити $\psi(U)$ в залежності від вимог, що накладаються на випадкові величини (в.в.) $\{X_i, i \geq 1\}$, $\{y_i, i \geq 1\}$ та процеси відновлення $N(t)$ і $N_1(t)$.

Далі наведемо ряд граничних теорем, в яких сформульовані достатні умови, що допускають майже напевне апроксимацію $D(t)$ і $U(t)$ за допомогою вінеровського

або стійкого процесу, де похибка апроксимації є не випадковою функцією. Клас подібних тверджень об'єднують спільною назвою *сильний принцип інваріантності*.

Теорема 1. *Нехай для складного процесу відновлення $D(t)$ виконуються умови:*

(i) $E|X_1|^{p_1} < \infty$, $E|z_1|^{p_2} < \infty$, $Ez_1 = 1/\lambda > 0$, $p = \min\{p_1, p_2\} > 2$, $EX_1 = m$, $Var X_1 = \sigma^2$, $Var z_1 = \tau^2$; позначимо $\nu^2 = \lambda\sigma^2 + \lambda^3 m^2 \tau^2$, тоді $\{X_i\}$ та $N(t)$ можна побудувати на одному ймовірнісному просторі разом з вінерівським процесом $W(t)$ так, щоб

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |S(N(t)) - \lambda mt - \nu W(t)| = o(T^{1/p}); \quad (4)$$

(ii) якщо $p = 2$, тоді права частина (4) дорівнює $o(T \ln \ln T)^{1/2}$;

(iii) якщо $E \exp(uX_1) < \infty$, $E \exp(uz_1) < \infty$ для всіх $u \in (0, u_0)$, то права частина – це $O(\ln T)$.

Далі припустимо, що $\{X_i\}$ належать області нормального притягання α -стійкого закону з параметрами $1 < \alpha < 2$, $|\beta| \leq 1$, тоді апроксимуючий процес для $D(t)$ – це стійкий процес $Y_\alpha(t)$ (умова $\alpha > 1$ забезпечує існування скінченного мат.сподівання), і будемо використовувати наступне:

Умова (C): існують $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ і $l > \alpha$ такі, що для $|u| < a_1$

$$|f(u) - g_{\alpha,\beta}(u)| < a_2 |u|^l,$$

де $g_{\alpha,\beta}(u)$ – характеристична функція (х.ф.) стійкого закону з параметрами α, β , $f(u)$ – х.ф. в.в. $(X_1 - EX_1)$, коли $1 < \alpha < 2$, і х.ф. в.в. X_1 , коли $0 < \alpha \leq 1$.

Теорема 2. *Якщо $\{X_i\}$ задовольняє умові (C) з $1 < \alpha < 2$, $|\beta| \leq 1$, $Ez_1^2 < \infty$. Тоді $\{X_i\}$, $\{z_i\}$, $N(t)$ можна визначити разом з α -стійким процесом $Y_\alpha(t) = Y_{\alpha,\beta}(t)$, $t \geq 0$ так, щоб*

$$|S(N(t)) - m\lambda t - Y_{\alpha,\beta}(\lambda t)| = o(t^{1/\alpha - \varrho_1}), \quad \varrho_1 \in (0, \rho_0), \quad (5)$$

для деякого $\varrho_0 = \varrho_0(\alpha, l) > 0$.

Наслідок 1. *Твердження теорем 1, 2 виконуються, коли $N(t)$ – однорідний процес Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$.*

Теорема 3. *Нехай $\{X_i\}$ задовольняє умові (C) з $1 < \alpha_1 < 2$, а $\{z_i\}$ задовольняє (C) з $1 < \alpha_2 < 2$, $\alpha_1 < \alpha_2$, тоді*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |D(t) - m\lambda t - Y_{\alpha_1,\beta_1}(\lambda t)| = o(T^{1/\alpha_1 - \varrho_2}) \text{ a.s.} \quad (6)$$

для деякого $\varrho_2 = \varrho_2(\alpha_1, l) > 0$.

Наведені твердження (4) – (6) типу сильного принципу інваріантності з підходящою похибкою апроксимації дозволяють легко переносити відомі результати стосовно асимптотики вінерівського або α -стійкого процесу на асимптотичну поведінку складних процесів відновлення, зокрема на складні процеси Пуассона. Наприклад, поєднуючи твердження теореми 1 і закон повторного логарифму для вінерівського процесу, отримуємо аналог закону повторного логарифму для складних процесів відновлення:

Теорема 4. *Якщо $\{X_i\}$ і $\{z_i\}$ незалежні послідовності н.о.р.в.в. з $EX_1 = m < \infty$, $0 < Ez_1 = 1/\lambda < \infty$, $\sigma^2 = VarX_1 < \infty$, $\tau^2 = Varz_1 < \infty$, то м.н.*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|D(t) - m\lambda t|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = \nu, \quad \nu^2 = \lambda\sigma^2 + \lambda^3 m^2 \tau^2. \quad (7)$$

Коли ж доданки належать області притягання стійкого закону $G_{\alpha, \beta}$, тоді маємо:

Теорема 5. *Нехай $\{X_i, i \geq 1\}$ задовольняє (C) з $1 < \alpha < 2$ та $\beta = -1$, а $Ez_1^2 < \infty$. Тоді м.н.*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{D(t) - m\lambda t}{t^{1/\alpha} (B^{-1} \ln \ln t)^{1/\theta}} = \lambda^{1/\alpha}, \quad (8)$$

$$B = B(\alpha) = (\alpha - 1)\alpha^{-\theta} |\cos(\pi\alpha/2)|^{1/(\alpha-1)}, \quad \theta = \alpha/(\alpha - 1). \quad (9)$$

Більш детально ця проблематика розглянута в роботах [Zinchenko, 2007], [Zinchenko, 2010], [Zinchenko, 2015].

Теореми 4 – 5 (формули (7) – (9)) дають змогу дослідити питання, стосовно швидкості зростання процесів ризику і їх приростів, як в класичних моделях Крамера–Лундберга і Спарре–Андерсена, так і для більш складних моделей із стохастичними преміями (3). Нижче наведено один з таких результатів, більше можна знайти в [Zinchenko, 2014], [Zinchenko, 2018], [Zinchenko, 2019].

Теорема 6. *Якщо в моделі (3) премії/вартості страхових полісів $\{z_i\}$, вимоги/збитки $\{X_i\}$, проміжки між надходженням вимог $\{z_i\}$ та надходженням премій $\{Z_i^*\}$ мають скінченні дисперсії, $EX_1 = m$, $Ez_1 = 1/\lambda$, $EZ_1^* = 1/\lambda^*$, $EY_1 = \mu$, $Var(X_1) = \sigma_x^2$, $Var(Y_1) = \sigma_y^2$, $Var(z_1) = \tau^2$, $Var(Z_1^*) = \tau_1^2$, тоді м.н.*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|Q(t) - (\lambda^* \mu - \lambda m)t|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = \sigma^*,$$

$$de (\sigma^*)^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2, \quad \nu_1^2 = \lambda\sigma_x^2 + (\lambda^*)^3 \mu^2 \tau_1^2, \quad \nu_2^2 = \lambda^* \sigma_y^2 + \lambda^3 m^2 \tau^2.$$

Перелік посилань

Zinchenko N.M. (2007). The strong invariance principle for renewal and randomly stopped processes. *Theory of Stoch. Processes*, vol. 13, no. 4, pp. 233–245.

Zinchenko N.M. (2010). Strong invariance principle for a superposition of random processes. *Theory of Stoch.Processes*, vol. 16, no. 1, pp. 130–138.

Zinchenko N.M. (2015). Almost Sure Approximation of the Superposition of the Random Processes. *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 17, no. 1, pp. 235–250.

Zinchenko N.M. (2014). Strong limit theorems for the risk process with stochastic premiums. *Markov Processes and Related Fields*, vol. 20, no. 3, pp. 527–544.

Zinchenko N.M. (2018). Limit Theorems for Compound Renewal Processes: Theory and Applications. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM Journal)*, no. 3, pp. 355–368.

Zinchenko N.M. (2019). The Rate of Growth and Fluctuations of Compound Renewal Processes. *Book of Abstracts of the 19-th ASMDA (Applied Stochastic Models and Data Analysis, ASMDA 2019 and DEMOGRAPHICS), 11–14 June*, Florence, Italy, p.188. no. 3, p.p. 355–368.

Оптимізаційні моделі банківської діяльності

Т. В. Іваненко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

tivanenko2015@gmail.com

Анотація

У доповіді наведено основні етапи створення математичних моделей для вирішення проблем оптимізації різних аспектів банківської діяльності. Наведено приклад динамічної оптимізаційної моделі банківської діяльності.

Ключові слова: цільовий параметр, керовані змінні, некеровані детерміновані, стохастичні та невизначені змінні.

Математичні методи дають широкі можливості для створення різноманітних оптимізаційних моделей в області фінансової, інвестиційної, зокрема банківської діяльності. Ці моделі можуть бути загальними, які враховують діяльність банку у цілому, або частковими, що досліджують окремі аспекти банківської діяльності. Наприклад, моделі формування оптимального портфеля активів, моделі управління інвестиційним портфелем, модель визначення оптимальної величини власного капіталу, модель управління активами та пасивами банку з метою зниження ризику ліквідності банку та інші.

Розглянемо основні етапи такого моделювання [Волошин, Мащенко, 2006]:

1. Формулювання проблеми, яку необхідно вирішити.
2. Визначення цільових показників (критеріїв ефективності), оптимальне значення яких призведе до вирішення поставленої проблеми.
3. Встановлення множини змінних та параметрів, що впливають на обрані показники.
4. Розподіл змінних на групи за такими критеріями: керовані, на які може впливати керівництво банку, та некеровані – зовнішні щодо фінансової установи; детерміновані або стохастичні; за ступенем впливу на цільовий показник, за можливістю прогнозування їхніх значень тощо.
5. Формалізація оптимізаційної задачі, яка полягає у визначенні функціональних залежностей між цільовими показниками та змінними і параметрами,

залежностями між різними групами змінних, встановленні множини допустимих значень кожної змінної.

6. Розв'язання поставленої задачі відповідними математичними методами, з використанням певного програмного забезпечення, отримання результатів у вигляді числових значень змінних і цільового показника.

7. Аналіз отриманих результатів, оцінка адекватності моделі. Коригування моделі за необхідності.

8. Формулювання висновків та рекомендацій керівництву банку щодо їх дій для досягнення поставленої мети.

Загальний вид оптимізаційної моделі банку може бути, наприклад, таким: необхідно досягти оптимального значення одного показника при прийнятних рівнях інших. Проблема полягає у тому, що залежність між показниками призводить до того, що покращення одного з них погіршує інші. Цей зв'язок існує між основними цільовими показниками інвестиційно-банківської діяльності: прибутковістю, ризиком та ліквідністю. Вхідні змінні моделі поділяють на керовані $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, що залежать від керівництва банку, та некеровані, що характеризують зовнішнє середовище банку, трьох типів: $\vec{y}_1 = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m})$ – детерміновані; $\vec{y}_2 = (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2k})$ – стохастичні, щодо яких відомі їхні закони розподілу та числові характеристики, та $\vec{y}_3 = (y_{31}, y_{32}, \dots, y_{3p})$ – невизначені, щодо яких відома лише область їх можливих значень, але самі значення чи закони їх розподілу невідомі. Наприклад, компонентами вектора $\vec{x}$ можуть бути обсяги активів і пасивів банку та їх структура, процентні ставки, розподіл прибутку банку, розмір дивідендних виплат тощо. До $\vec{y}_1$ можуть входити розмір облікової ставки НБУ, норми обов'язкових резервів за різними видами залучених коштів, економічні нормативи щодо достатності капіталу, кредитного ризику, та інші нормативи, встановлені Національним банком. До $\vec{y}_2$ та $\vec{y}_3$ можна віднести показники макроекономічної ситуації, у якій працює банк, індикатори фінансових ринків, індекс інфляції, валютний курс у визначений момент часу. У випадку динамічної моделі однією із змінних буде момент часу t , а частину наведених компонентів векторів $\vec{x}$, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{y}_3$ можна вважати функціями часу [Грушко, Іваненко, 2014].

Тоді цільовий показник можна виразити функціоналом: $Z = Z(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, t)$, який, залежно від змісту показника, може бути оптимізований у різні способи: $Z = Z(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, t) \rightarrow \max(\min)$ або $Z = Z(\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, t) \{>, <, =\} Z_0$. Якщо задача полягає у максимізації прибутку банку за тривалий період часу, то слід враховувати основну концепцію фінансової математики: зміну вартості грошей у часі, і максимізувати дисконтований чистий грошовий потік, згенерований банківськими операціями за цей період. Якщо критерієм оптимальності є ризик банківської діяльності, то спочатку слід визначити, що розуміти під цим поняттям: ймовірність відхилення у бік погіршення реально отриманих результатів фінансово-економічної діяльності банку від очікуваних, або величину таких відхилень, або врахувати обидва показники. Формалізувати показник ризику можна за допомогою стан-

дартного відхилення σ , або дисперсії σ^2 , або коефіцієнта варіації $CV = \frac{\sigma}{M(P)}$, де $M(P)$ – середнє очікуване значення прибутку P (profit). Ліквідність банку означає його здатність виконати свої зобов'язання вчасно та в повному обсязі. Ця здатність забезпечується відповідністю між активами та пасивами банку за строками та сумами. Тоді, для зменшення ризику ліквідності, банку доцільно мати активи з вищою ліквідністю, ніж зобов'язання, проте такий дисбаланс призведе до зниження прибутковості. Наприклад, найбільш ліквідним активом є касова готівка, але вона взагалі не приносить прибутку банку. Натомість довгострокові кредити мають найвищі кредитні ставки, але й найнижчу ліквідність.

Обмеження моделі – це записані у математичній формі умови, що накладають на змінні, наприклад, балансове рівняння, що встановлює рівність активів та пасивів банку в кожний момент часу, умови невід'ємності змінних, що впливає з їх економічного змісту. Для динамічних задач обмеження можуть бути задані диференціальними рівняннями [Вітлінський, Терещенко, Савіна, 2016].

При розв'язанні оптимізаційних задач використовують методи з таких розділів математики: у статичних детермінованих задачах – математичне програмування (лінійне, нелінійне, цілочислове); за умов ризику – методи теорії ймовірностей та математичної статистики, метод Монте-Карло, стохастичне програмування; за умов невизначеності – теорію ігор, у динамічних детермінованих задачах – методи варіаційного числення і теорії оптимального керування, динамічне програмування; у стохастичних динамічних задачах – теорію випадкових процесів.

Наведемо приклад оптимізаційної динамічної моделі банківської діяльності. Розглянемо відрізок часу $[t_0; t_n]$, де t_0 – поточний момент, а t_n – горизонт планування. Нехай метою банку є збільшення вартості власного капіталу OC (own capital) на момент закінчення періоду. Тоді цільовою функцією (1) оптимізаційної задачі буде математичне сподівання деякої функції корисності F власного капіталу банку. F має бути неперервною, монотонно зростаючою та опуклою на своїй області визначення.

$$Z = M(F(OC_{t_n})) \rightarrow \max \quad (1)$$

Система обмежень:

$$OC_{t_n} = OC_{t_0} \cdot \prod_{k=1}^n (1 + P_{t_k}) \quad (2)$$

$$P_{t_k} = \frac{\pi_{t_k}}{OC_{t_k}} \quad (3)$$

$$\pi_{t_k} = \sum_{i=1}^m r_{ik}^A \cdot A_{ik} - \sum_{j=1}^h r_{jk}^D \cdot D_{jk} - C(A_{ik}, D_{jk}) \quad (4)$$

$$A_{ik} = A_{ik-1} + \Delta A_{ik-1} \quad (5)$$

$$D_{jk} = D_{jk-1} + \Delta D_{jk-1} \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m A_{ik} \leq \sum_{j=1}^h D_{jk} + OC_k \quad \forall k = 0, \dots, n \quad (7)$$

$$r_{ik}^A > 0, \quad A_{ik} > 0, \quad r_{jk}^D > 0, \quad D_{jk} > 0, \\ \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, h, \quad \forall k = 0, \dots, n \quad (8)$$

Обмеження (2) визначає величину власного капіталу банку на кінець періоду. Її отримано шляхом нарощення початкового значення власного капіталу OC_{t_0} за складними змінними процентними ставками P_{tk} , що діяли в k -ий період, протягом n періодів. Ставка P_{tk} – норма прибутку на капітал у k -му періоді (3). π_{tk} – чистий прибуток банку за k -ий період (4). Його можна обчислити як суму процентного доходу банку за активними операціями, зменшеному на суму процентних витрат на залучення ресурсів та суму операційних видатків банку. У обмеженні (4) A_{ik} – середня сума i -го активу у k -ий період, r_{ik}^A – процентна ставка (наприклад, кредитна) відповідного активу. D_{jk} – середня сума j -го ресурсу у k -ий період, r_{jk}^D – процентна ставка (наприклад, депозитна) відповідного зобов'язання. $C(A_{ik}, D_{jk})$ – операційні витрати, тобто усі інші витрати банку, окрім процентних, які він несе під час залучення та розміщення коштів у k -му періоді. Зміна активів та пасивів банку в кожному періоді відносно попереднього виражені обмеженнями (5) і (6). Нерівність (7) є балансовою, і в найкращому випадку виконується як рівність. (8) – умови невід'ємності, які також визначають керовані змінні. На практиці процентні ставки лише певною мірою можна вважати керованими змінними, оскільки, якщо банк працює у конкурентному середовищі, то величина ставок, у першу чергу, диктується ринком. Але керівництво банку може допускати певні відхилення ставок від середніх по фінансовому ринку.

Перелік посилань

- Волошин О.Ф., Мащенко С.О. (2006). *Моделі та методи прийняття рішень. Навчальний посібник*. Київ: Київський університет
- Грушко В.І., Іваненко Т.В. (2014). Оптимізація структури кредитного портфеля комерційного банку. *Вісник Національного банку України*, № 2(216), с. 28–32
- Вітлінський В.В., Терещенко Т.О., Савіна С.С. (2016). *Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація. Навчальний посібник*. Київ: КНЕУ

Моделювання банківської діяльності з позиції мікроекономіки

Т. В. Іваненко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

tivanenko2015@gmail.com

Анотація

У доповіді розглянуто модель комерційного банку як виробничого підприємства, що працює на ринку банківських послуг в умовах досконалої конкуренції, монополії, олігополії. Для кожного рівня конкурентного середовища наведено математичну модель максимізації прибутку банку.

Ключові слова: коефіцієнти еластичності, індекс Лернера, модель Монті-Кляйна, рівновага Курно.

Розглянемо банк як «виробниче підприємство», яке надає фінансові послуги. Тобто діяльність банку – це посередництво між суб'єктами ринку, які мають тимчасово вільні фінансові ресурси, і тими, які їх потребують. Банк купує ці ресурси у перших, шляхом прийняття їх на депозити, та продає другим, шляхом надання кредитів або придбання цінних паперів. Можливості банку з проведення посередницьких операцій з фінансовими ресурсами визначає виробнича функція банку, тобто функція, яка пов'яже його вхідні параметри з вихідними. Виробничі моделі банку розглядають у контексті ринкової конкуренції: 1) в умовах досконалої конкуренції, коли банк не впливає на величину процентних ставок, вони диктуються ринком; 2) поведінка монополістичного банку (модель Монті-Кляйна); 3) моделі банку в умовах олігополії.

Розглянемо математичну модель діяльності банку в умовах досконалої конкуренції. У найпростішому випадку результат його діяльності залежатиме від двох змінних: D – суми коштів, залучених на депозити, і K – суми наданих кредитів. Тоді функцію витрат з управління кредитами та депозитами позначимо $C(D, K)$. Балансове рівняння банку у спрощеному вигляді можна записати так: $K + R + M = D$, де R – сума обов'язкових резервів, які НБУ встановлює за ставкою α від суми залучених на депозити коштів, тому $R = \alpha D$, а M – чиста позиція банку, тобто сумарне сальдо між обсягами фінансових вимог та зобов'язань. В умовах досконалої конкуренції на ринку банківських послуг кожний банк приймає ринкові

значення кредитних та депозитних ставок: r_K та r_D відповідно. Тоді прибуток банку π може бути розрахований за формулою (1):

$$\pi = r_K \cdot K + r \cdot M - r_D \cdot D - C(D, K), \quad (1)$$

де r – ставка доходу на капітал, що діє на міжбанківському ринку. Тоді $r \cdot M$ – доходи або видатки банку по його чистій позиції на міжбанківському ринку. Оскільки чиста позиція банку $M = (1 - \alpha) D - K$, тоді функція прибутку набуде вигляду (2):

$$\pi = (r_K - r) \cdot K + (r(1 - \alpha) - r_D) \cdot D - C(D, K). \quad (2)$$

Таким чином, прибуток є функцією двох змінних: D і K , і задача його максимізації може бути розв'язана методом дослідження функції на екстремум. Необхідні умови екстремуму мають вигляд (3):

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial D} = (r(1 - \alpha) - r_D) - \frac{\partial C(D, K)}{\partial D} = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial K} = (r_K - r) - \frac{\partial C(D, K)}{\partial K} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

З системи (3) знаходимо критичну точку (D^*, K^*) . За достатніми умовами екстремуму можна показати, що функція прибутку досягає максимуму в точці (D^*, K^*) . З наведеної моделі можна зробити висновки щодо дій банку в умовах досконалої конкуренції: для досягнення максимального прибутку банк має залучати депозити у такому обсязі, щоб граничні витрати на управління ними $\frac{\partial C(D, K)}{\partial D}$ дорівнювали $r(1 - \alpha) - r_D$. Тоді $r(1 - \alpha) - r_D$ – норма витрат на депозитні операції банку. При цьому обсяг кредитів, що має надавати банк, повинен бути таким, щоб граничні витрати на управління кредитами $\frac{\partial C(D, K)}{\partial K}$ складали $r_K - r$, де $r_K - r$ – норма доходу від кредитної діяльності.

Поведінку банку-монополіста розглянемо на прикладі моделі Монті-Кляйна [Klein, 1987] [Monti, 1972]. На відміну від умов досконалої конкуренції на ринку банківських послуг, де змінними є лише обсяги депозитів та кредитів, а процентні ставки по них – сталими, в умовах монополії банк має змогу змінювати ці ставки. Нехай $K(r_K)$ та $D(r_D)$ – обсяги кредитів та депозитів, які банк може надати або залучити залежно від відповідних ставок. Оскільки процентні ставки є ціною на гроші, то функція $K(r_K)$ монотонно спадає, а $D(r_D)$ – монотонно зростає на своїй області визначення. Знайдемо обернені функції: $r_K(K)$ та $r_D(D)$ і підставимо їх у функцію прибутку (2). У цій моделі ставка r є параметром, зовнішнім щодо розглядуваного банку, наприклад, встановленим НБУ. Тепер функція прибутку (4) виглядатиме так:

$$\pi = (r_K(K) - r) \cdot K + (r(1 - \alpha) - r_D(D)) \cdot D - C(D, K). \quad (4)$$

Необхідні умови екстремуму (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial D} = -r'_D(D) \cdot D + (r(1 - \alpha) - r_D) - \frac{\partial C(D, K)}{\partial D} = 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial K} = r'_K(K) \cdot K + (r_K - r) - \frac{\partial C(D, K)}{\partial K} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Із системи (5) знайдемо критичну точку (D^*, K^*) , з якої визначимо (r_D^*, r_K^*) , можна показати, що це точка максимуму. Розрахуємо коефіцієнт еластичності попиту на кредити (6), залежно від кредитної ставки, та коефіцієнт еластичності пропозиції депозитів (7), залежно від ставки по депозитах:

$$\varepsilon_K = K'(r_K) \frac{r_K}{K(r_K)} < 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon_D = D'(r_D) \frac{r_D}{D(r_D)} > 0 \quad (7)$$

Враховуючи розв'язок системи (5) та формули (6), (7) можна отримати рівняння (8) і (9), які представляють собою індекси Лернера:

$$-\frac{1}{\varepsilon_D} = \frac{r_D^* - (r(1 - \alpha) - C'_D)}{r_D^*} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_K} = \frac{r_K^* - (r + C'_K)}{r_K^*} \quad (9)$$

Індекс Лернера L – це відношення різниці між ціною та маржинальними витратами до ціни: $L = \frac{P - MC}{P} = \frac{1}{\varepsilon}$ [Базилевич, Базилевич, Ігнатюк, Слухай, 2008]. В умовах досконалої конкуренції індекс Лернера дорівнює 0 (ціна дорівнює маржинальним витратам, $\varepsilon \rightarrow \infty$), а чим більших значень набуває $|L|$, тим більшою є монопольна влада банку ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Ситуація, за якої на ринку банківських послуг працює один банк-монополіст, є суто теоретичною. Більш реалістичною є ситуація олігополії з обмеженою кількістю банків. Нехай у банківському секторі працює n банків, а функція витрат на управління активами та пасивами є лінійною для кожного j -го банку: $C_j(D_j, K_j) = aD_j + bK_j$, $\forall j = \overline{1, n}$, $a, b \in \mathbb{R}$. При цьому сума, яку всі n банків можуть залучити на депозити, $D = \sum_{j=1}^n D_j$, а обсяг кредитів, який може надати банківська

система, $K = \sum_{j=1}^n K_j$. Оптимальним розв'язком для j -го банку є пара (D_j^*, K_j^*) , що максимізує його функцію прибутку (10):

$$\pi_j = (r_k(K) - r) \cdot K_j + (r(1 - \alpha) - r_D(D)) \cdot D_j - C(D_j, K_j). \quad (10)$$

По банківській системі буде спостерігатись рівновага по Курно [Базилевич, Базилевич, Ігнатюк, Слухай, 2008], тобто такий стан, при якому кожний банк максимізує свій прибуток, за умови, що решта банків мають обсяги депозитів і кредитів (D_i^*, K_i^*) , $\forall i = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Це означає, що вектор розмірності $2 \times n$ $\{(D_j^*, K_j^*), j = \overline{1, n}\}$ задає такий стійкий стан банківської системи, при якому кожному банку не вигідно відхилитись від нього, за умови, що всі інші банки також дотримуються своїх стратегій. Позначимо частку депозитів та кредитів кожного j -го банку w_j , $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, тоді $D_j = w_j \cdot D$, $K_j = w_j \cdot K$. Тоді умови (5) набудуть вигляду (11):

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_j}{\partial D_j} = -r'_D(D) \cdot w_j D + r(1 - \alpha) - r_D - a = 0, \\ \frac{\partial \pi_j}{\partial K_j} = r'_K(K) \cdot w_j K + r_K - r - b = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогічно попереднім перетворенням отримаємо співвідношення для оптимального розв'язку:

$$-\frac{w_j}{\varepsilon_D} = \frac{r_D^* - (r(1 - \alpha) - a)}{r_D^*}, \quad (12)$$

$$-\frac{w_j}{\varepsilon_K} = \frac{r_K^* - (r + b)}{r_K^*}. \quad (13)$$

Рівності (12) і (13) узагальнюють отримані раніше результати, оскільки при $w_j = 1$ маємо ситуацію з банком-монополістом, а при $w_j \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$ – ринок досконалої конкуренції. Тобто співвідношення (12), (13) визначають ступінь конкурентності у банківському секторі.

Перелік посилань

Klein M. (1987). Theory of banking firm. *The Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 3, pp. 423-445.

Monti M. (1972). *Deposit, credit, and interest rate determination under alternative bank objectives*. Mathematical methods of finance. Amsterdam: North-Holland

Базилевич В.Д., Базилевич К.С., Ігнатюк А.І., Слухай С.В. (2008). *Мікроекономіка: Підручник*. За ред. В.Д. Базилевича. – 2-ге вид., перероб. і доп. – Київ: Знання, – 679с., с. 381-444

Моделювання природного освітлення

В. А. Кіосак¹, Є. В. Патрашку¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури,
Одеса, Україна*

vkiosak@ukr.net

Анотація

Вивчаються моделі освітлення похилих поверхонь, побудовані на основі даних для горизонтальних поверхонь. Порівнюються моделі для обчислення коефіцієнтів дифузії. Розглядаються ізотропні моделі, що застосовуються для моделювання освітлення похилих поверхонь.

Ключові слова: природне освітлення; коефіцієнт дифузії; ізотропна модель.

Міста – це найважливіший суб'єкт, що формує добробут людини. У зв'язку з цим компактність забудови є загальною стратегією розвитку міст. Позитивні ефекти ущільнення міст такі, як зменшення енергетичних потреб при опаленні, охолодженні та мобільності, а також можливість ефективного використання земельних ділянок, широко визнаються. Однак підвищення щільності забудови гостро ставить проблему освітлення будівель та приміщень, зокрема природного освітлення. Вимірювання освітленості, в основному, проводять на горизонтальних поверхнях і рідше на похилих. Тому необхідна оцінка значень сонячного випромінювання на похилих поверхнях за даними, які обчислені на горизонтальних поверхнях [Raihani, 2025]. Аналогічна потреба виникає при встановленні сонячних панелей зі стаціонарним нахилом. В світі розроблена достатня кількість моделей транспозиції. Вони залежать від географічного положення місця, для якого ведуться обчислення. Наприклад, сонячні панелі зі стаціонарним нахилом встановлюють під кутом до горизонталі, що дорівнює широті місця розташування.

Транспозиційні моделі можна поділити на дві групи:

- а) ізотропні моделі;
- б) анізотропні моделі.

Для ізотропних моделей інтенсивність дифузного освітлення вважається рівномірною. Анізотропні моделі розглядають з двома або трьома параметрами. Для

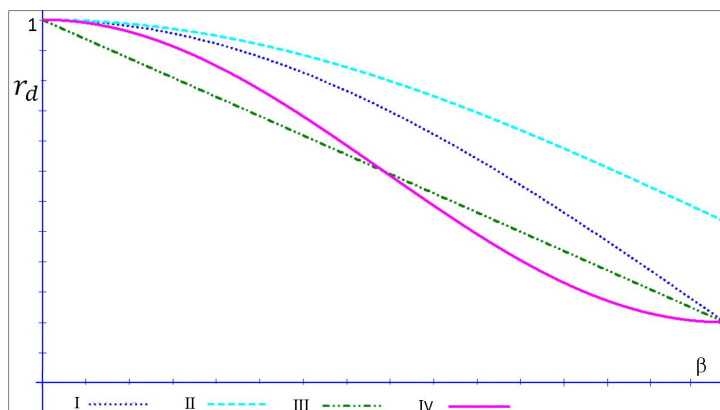


Рис. 1: Моделі для обчислення коефіцієнта дифузії

нахиленої до горизонтальної площини під кутом β поверхні освітленість обчислюється як сума прямого випромінювання, розсіяного випромінювання та відбитого від землі чи інших поверхонь

$$I_{g\beta} = I_{h\beta} + I_{d\beta} + I_{r\beta}.$$

Якщо звести величини до наявних даних, тобто до освітленості горизонтальної площини, то формула набирає вигляду

$$I_{g\beta} = r_b I_{bh} + r_d I_{dh} + r_r I_{gh},$$

тут r_b, r_d, r_r є коефіцієнтами випромінювання, дифузії та відбивання відповідно. Величини I_{bh}, I_{dh}, I_{gh} вимірюються для горизонтальної поверхні. Нас буде цікавить коефіцієнт дифузії r_d .

Розглянуті наступні ізотропні моделі (Рис.1) для обчислення коефіцієнта дифузії:

$$I. \quad r_d = \left(\frac{1 + \cos \beta}{2} \right).$$

Ця модель вперше була використана в 1963 році [Liu, Jordan, 1963].

Модель, яка називається моделлю Коронакіса [Koronakis, 1986] має вигляд

$$II. \quad r_d = \left(\frac{2 + \cos \beta}{3} \right).$$

Лінійна модель [Tian, Davies-Colley, Gong, Thorrold, 2001] була запропонована в 2001 році.

$$III. \quad r_d = \left(1 - \frac{\beta}{180}\right).$$

Бадеску [Badescu, 2002] повертається до тригонометричному вигляду моделей

$$IV. \quad r_d = \left(\frac{3 + \cos 2\beta}{4}\right).$$

Вивчена можливість їх застосування в умовах України в залежності від географічної широти місця, для якого моделюється стан природного освітлення.

Перелік посилань

Liu B.Y.H., Jordan C. (1963). The Long-Term Average Performance of Flat-Plate Solar Energy Collectors: With Design Data for the U.S., Its Outlying Possessions and Canada. *Solar Energy*, vol. 7, pp. 53-74. [http://dx.doi.org/10.1016/0038-092X\(63\)90006-9](http://dx.doi.org/10.1016/0038-092X(63)90006-9)

Koronakis P.S. (1986). On the Choice of the Angle of Tilt for South Facing Solar Collectors in the Athens Basin Area. *Solar Energy*, vol. 36, pp. 217-225. [https://doi.org/10.1016/0038-092X\(86\)90137-4](https://doi.org/10.1016/0038-092X(86)90137-4)

Tian Y.Q., Davies-Colley R.J., Gong P., Thorrold B.W. (2001). Estimating solar radiation on slopes of arbitrary aspect. *Agricultural and Forest Meteorology*, vol. 109, no 1, pp. 67-74. [https://doi.org/10.1016/S0168-1923\(01\)00245-3](https://doi.org/10.1016/S0168-1923(01)00245-3)

Badescu V. (2002). 3D isotropic approximation for solar diffuse irradiance on tilted surfaces. *Renew. Energy*, vol. 26, no. 2., pp. 221-233. [https://doi.org/10.1016/S0960-1481\(01\)00123-9](https://doi.org/10.1016/S0960-1481(01)00123-9)

Raihani H. (2025). Estimating Hourly Solar Irradiations On A Tilted Surface In Rabat, Morocco: Performance of Different Transposition Models. *Rev. Gest. Soc. Ambient*, vol. 19., no. 1, pp. 1-24. <https://doi.org/10.24857/rgsa.v19n1-012>

Математичний аналіз SIR моделі Кермака–Маккендріка

І. Т. Косович¹, І. М. Черевко¹

¹ *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна*

`kosovych.i.hor@chnu.edu.ua`, `i.cherevko@chnu.edu.ua`

Анотація

Наведено базові припущення та структуру узагальненої епідеміологічної SIR моделі. Досліджено ряд якісних властивостей SIR моделі: існування розв'язку початкової задачі, аналіз динаміки здорових, інфікованих та одужавших осіб, які дозволяють зробити висновки про поведінку пандемії на макрорівні.

Ключові слова: SIR модель, структура популяції при пандемії, моделювання процесів епідеміології, математичний аналіз SIR моделі.

Вступ. Поширення інфекційних захворювань являє собою складне явище з великою кількістю непередбачуваних факторів. Створення математичних моделей поширення інфекцій є важливим елементом для дослідження складної динаміки поширення захворювання.

Найпоширенішими моделями розповсюдження інфекційних захворювань є SIR-модель (Susceptible-Infected-Recovered) та багаточисельні її узагальнення, які ділять популяцію на три різні групи: здорові особи, що можуть підхопити інфекцію (S); заражені особи, що переносять хворобу (I), і ті, хто одужав і перестав розповсюджувати хворобу (R) [1, 2]. У найпростіших SIR моделях здійснюються базові припущення, наприклад, що кожен має однакові шанси підхопити вірус від інфікованої людини, оскільки популяція ідеально і рівномірно змішана, і що всі люди з хворобою однаково заразні, поки не помруть або не одужають.

Поширеним підходом для моделювання процесів у епідеміології є імітаційне моделювання за допомогою мультиагентного методу, який забезпечує можливість експериментувати з параметрами моделі та отримати різні сценарії розвитку подій [3, 4].

Дослідження SIR моделей у вигляді системи диференціальних рівнянь дозволяє описати поведінку динаміки захворювання на макрорівні зберігаючи високий рівень абстрагування [5, 6].

Аналіз SIR моделі. Класична модель епідемії виглядає наступним чином [1, 2, 5, 6]:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta IS, \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \gamma I, \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -\gamma I,\end{aligned}\tag{1}$$

де β та γ – коефіцієнти темпів інфікування та одужання при епідемії.

Наведемо ряд якісних властивостей SIR моделі (1), які дозволяють зробити висновки про поведінку динаміки пандемії на макрорівні.

Введемо позначення

$$x = \begin{pmatrix} S \\ I \\ R \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta iS \\ \beta iS - \gamma I \\ \gamma i \end{pmatrix},\tag{2}$$

тоді систему диференціальних рівнянь (1) запишемо у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = f(x).\tag{3}$$

Враховуючи позначення (2), якобіан для функції $f(x)$

$$I(f) = \begin{pmatrix} -\beta i & -\beta S & 0 \\ \beta i & \beta S - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}\tag{4}$$

складається із лінійних функцій, які є неперервними і обмеженими на обмеженій множині D . Тоді функція $f(x)$, визначена співвідношенням (2), є локально Ліпшицевою [7] і має місце теорема.

Теорема 1. *Розв'язок початкової задачі для SIR моделі (1) існує та єдиний.*

Позначимо $N = S(0) + I(0) + R(0)$ загальну чисельність популяції в початковий момент часу. Додавши всі три рівняння системи (1), маємо

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0.$$

Це означає, що $N(t)$ є сталою величиною.

Оскільки $\frac{dS(t)}{dt} < 0$ для всіх t , тоді функція $S(t)$ є монотонно спадною і додатною, отже існує

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_{\infty}.$$

Аналогічно існує

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = R_{\infty}.$$

Число інфікованих може мати немонотонну поведінку, спочатку збільшуватись до деякого максимального рівня, а потім зменшуватись до нуля. Необхідною і достатньою умовою збільшення кількості інфікованих є умова

$$\frac{\beta S(0)}{\gamma} > 1.$$

Розділивши перше рівняння системи (1) на другу, одержимо

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{\beta}{\gamma} S.$$

Розв'язуючи одержане рівняння, маємо

$$S = S(0)e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} \geq S(0)e^{-\frac{\beta}{\gamma}N} > 0.$$

Таким чином, не всі сприйнятливі особи захворіють. Цей факт підтверджується спостереженнями під час пандемії COVID-19.

Проінтегрувавши перше рівняння системи (1), одержуємо

$$S(0) - S_{\infty} = \beta \int_0^{\infty} S(t)I(t)dt > \beta S_{\infty} \int_0^{\infty} I(t)dt.$$

Із останньої нерівності, оскільки $\int_0^{\infty} I(t)dt$ збіжний, дістаємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0.$$

Це означає, що епідемія з часом спадає і закінчується.

У SIR моделі (1) не враховуються індивідуальні властивості об'єктів, оскільки процес поширення інфекції дискретний. Перевагою цієї моделі є те, що вона описує великомасштабну поведінку динаміки на мікрорівні. Простота SIR моделі полегшує її як числове, так і аналітичне дослідження, але також, ймовірно, надто спрощує складні епідеміологічні процеси.

Перелік посилань

- [1] N. Bacaër (2011). McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer, London, pp. 89–96.

- [2] J. Satsuma, R. Willox, A. Ramani, B. Grammaticos, A. Carstea (2004). Extending the SIR epidemic model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 336, no. 3, pp. 369–375.
- [3] Чумаченко Д.І., Чумаченко Т.О. (2023). *Імітаційне моделювання епідемічних процесів: прикладні аспекти: монографія*. Х.: ФОП Панов А.М., 300 с.
- [4] Черевко І.М., Косович І.Т. (2024) Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. Т. 45, № 2, Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», С. 276–285.
- [5] Carvalho A.M., Goncalves S. An analytical solution for the Kermack-McKendrick model. (2021). *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 566, no. 15, 125659.
- [6] Khan H., Mohapatra R.N., Vajravelu K., Liao S.J. (2009). The explicit series solution of SIR and SIS epidemic models. *Appl. Math. Comput.*, 38, pp. 653-669.
- [7] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. *Диференціальні рівняння*. (2010). К.: Київський університет, 527 с.

Застосування факторного аналізу в психології

Н. В. Круглова¹, О. О. Диховичний¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

natahak@ukr.net

Анотація

В роботі досліджено основні критерії визначення розмірності MIRT моделей для психологічних тестувань: критерій Хала, критерій Кайзера та паралельний аналіз. Ці методи застосовано для визначення розмірностей моделей, які описують дані, отримані на основі психологічних опитувань “Кількісні відношення”, “Переплутані лінії”. Подібні опитувальники затверджені при психологічно-професійному відборі кандидатів у ВВНЗ та навчальних центрах за дефіцитними спеціальностями. Визначено розмірності моделей для цих опитувальників за кожним критерієм та зроблено порівняльний аналіз.

Ключові слова: MIRT, IRT, критерій Хала, критерій Кайзера, паралельний аналіз, факторний аналіз, розмірність моделі.

Напрями застосування факторного аналізу у психології

Факторний аналіз широко використовується в психологічних дослідженнях для виявлення латентних конструкцій, що лежать в основі складних поведінкових і когнітивних процесів. Серед основних напрямів його застосування виділяють:

1. Розробка та валідація психологічних тестів і шкал. За допомогою факторного аналізу визначають, чи відповідають завдання тесту очікуваній меті опитування. Наприклад, тести Гілфорда повинні визначати одновимірну структуру.
2. Вивчення структури інтелекту. Можна використовувати факторні моделі, щоб пояснити когнітивні здібності людини. Наприклад, вербальні, математичні чи просторові навички.

3. Дослідження психічного здоров'я. Факторний аналіз застосовують для визначення основних компонентів депресії, тривожності, розладів obsесивно-компульсивного характеру на основі опитувальників.
4. Аналіз даних опитувань. За допомогою факторного аналізу у складних наборах даних визначаються головні фактори, що пояснюють основні тенденції у відповідях респондентів.
5. Розуміння поведінкових патернів. Дослідження латентних характеристик поведінки, таких як звички чи стратегії реагування на навколишні подразники, дозволяє визначити основні механізми, які визначають поведінку людини.
6. Розробка адаптивних тестів. У MIRT факторний аналіз є основою при створенні тестів, які адаптуються до рівня здібностей респондентів, покращуючи точність і ефективність оцінювання.
7. Крос-культурні дослідження. Факторний аналіз використовується для дослідження інваріантності тестів у різноманітних культурах для адаптації психологічних інструментів.

У цій статті буде розглянуто методи визначення кількості факторів у факторному аналізі: критерій Хала, емпіричний критерій Кайзера та паралельний аналіз. Ми ці критерії будемо розглядати як один із етапів MIRT аналізу для визначення розмірностей MIRT моделей. У психології розмірність MIRT моделі вказує на кількість основних психологічних характеристик особистості, які визначає психологічний опитувальник.

Опис критеріїв визначення розмірності моделі

Критерій Хала [Finch, 2023] призначений для визначення кількості факторів моделі. Використовує штрафну функцію, яка враховує розмір вибірки, кількість змінних та параметрів. Визначається скоригований показник відповідності за формулою:

$$CAF(k) = GOF(k) - (n + p - 2k) \ln \left(\frac{N}{2\pi} \right),$$

де $CAF(k)$ – скоригований показник відповідності, $GOF(k)$ – показник відповідності моделі, n – кількість стовпчиків у матриці первинних балів, p – кількість параметрів моделі, k – кількість факторів (розмірність моделі), N – об'єм вибірки.

Критерій Кайзера [Finch, 2023] являється найпростішим та найбільш поширеним методом визначення кількості факторів. Базується на такому алгоритмі: залишати фактори з власними числами матриці, які більші за 1. Має суттєві обмеження при малих вибірках та не враховує випадкову дисперсію та структуру кореляційної матриці.

Паралельний аналіз [Finch, 2023] вважається найточнішим методом визначення кількості факторів.Порівнюються власні значення емпіричних даних з власними значеннями випадково згенерованих матриць. Забезпечує найбільш точні результати при достатньому об’ємі вибірки.

Опис психологічних методик. Основні результати

Методика “Кількісні відношення” [Корнійчук, 2021] використовується для оцінювання логічного мислення, коли на основі деяких відомих понять чи висловів робляться висновки про відношення, предмети, процеси або явища. Іспитникам пропонується 18 логічних завдань. Кожне питання має декілька посилянь (умов), що визначають відношення між деякими літерами. Орієнтуючись на ці умови, потрібно вказати відношення між об’єктами за допомогою знаків > чи <. Тест на “Кількісні відношення” виконало 793 іспитника. До матриці первинних балів застосовано критерії Кайзера, Хала, паралельний аналіз. Результати наведено у таблиці 1.

Критерій	Розмірність моделі
Кайзера	3
Хала	3
Паралельний аналіз	3

Табл. 1: Кількісні відношення

Кожен критерій визначив однакову кількість факторів – 3. Можна виділити наступні латентні характеристики іспитників, які оцінює даний опитувальник: здатність до абстрактного узагальнення, алгоритмічне мислення, здатність до встановлення числових закономірностей. Опитувальник **“Переплутані лінії”** містить 15 питань. Методика оцінює рівень концентрації та стійкість уваги в умовах впливу перешкод. Цей тест виконував 781 іспитник. Результати аналізу матриці первинних балів наведено у таблиці 2.

Критерій	Розмірність моделі
Кайзера	1
Хала	1
Паралельний аналіз	1

Табл. 2: Переплутані лінії

Знову всі критерії показали однакову кількість факторів – 1. На основі цього

аналізу можна визначити, що основною латентною характеристикою іспитника, яку оцінює опитувальник є рівень концентрації уваги.

Висновки

До матриць первинних балів результатів тестувань на основі методик “Кількісні відношення” та “Переплутані лінії” було застосовано ЕФА аналіз. Визначено, що методика “Кількісні відношення” оцінює 3 латентні характеристики іспитників, а методика “Переплутані лінії” – 1. Всі критерії показали однакові результати. Отже, факторний аналіз можна успішно застосовувати не тільки у педагогіці, а й у психології як етап визначення розмірностей MIRT і IRT моделей [Reckase, 2009]. На основі проведених досліджень можна стверджувати, що результати тестування за методикою “Переплутані лінії” краще досліджувати за допомогою моделей IRT, а для результатів тестування за методикою “Кількісні відношення” краще застосовувати багатовимірну теорію тестів (MIRT), оскільки розмірність перевищує одиницю.

Перелік посилань

Finch W.H. (2023). A Comparison of Methods for Determining the Number of Factors to Retain with Exploratory Factor. Analysis of Dichotomous Data. *Psych.*, vol. 5, pp. 1004–1018. DOI: <https://doi.org/10.3390/psych5030067>.

Затверджено Корнійчуком С. (2021). *Комплексна методика професійно-психологічного відбору кандидатів на навчання у ВВНЗ та навчальних центрах за дефіцитними спеціальностями*. Київ.

Reckase M.D. (2009). Multidimensional item response theory. *New York: Springer*.

Математичні аспекти динамічного розрахунку круглих пластин на неоднорідній пружній основі

Ю. С. Крутий¹, А. О. Перпері¹, Д. В. Величко¹

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури,
Одеса, Україна*

yurii.krutii@gmail.com, a.perperi@odaba.edu.ua,
velychko.engineer@gmail.com

Анотація

Наведено точний розв'язок диференціального рівняння вільних осесиметричних коливань круглих суцільних пластин, що опираються на неоднорідну пружну основу Вінклера. Ґрунтуючись на точному розв'язку, розроблено аналітичний метод розрахунку на вільні коливання суцільних круглих пластин.

Ключові слова: суцільна кругла пластина; неоднорідна пружна основа; аналітичний метод.

Авторами розглянуто задачу про вільні осесиметричні коливання круглих пластин радіуса a , сталої циліндричної жорсткості D , що опираються на суцільну неоднорідну пружну основу Вінклера. Неоднорідність основи задається змінним коефіцієнтом постелі $k(r)$, який у загальному випадку може являти собою будь-яку неперервну функцію. Для $k(r)$ прийнято подання $k(r) = k_0 B(r)$, де k_0 — значення коефіцієнта постелі в деякій характерній точці пластини; $B(r)$ — безрозмірна неперервна функція, що виражає закон зміни коефіцієнта постелі від радіальної координати r .

Математична проблема полягає в розв'язанні відповідного диференціального рівняння коливань, яке в амплітудному стані має вигляд

$$D\Delta\Delta w(r) + (k_0 B(r) - \rho h \omega^2)w(r) = 0, \quad (1)$$

де $\Delta = d^2/dr^2 + 1/r \cdot dr/dr$ — оператор Лапласа, $w(r)$ — амплітудна функція прогинів, що залежить тільки від радіальної координати r , ω — невідома частота вільних коливань, ρ — щільність матеріалу, h — товщина пластини.

Знайшовши фундаментальні функції $X_n(r)$, $Y_n(r)$ ($n = 1, 2$) рівняння (1), матимемо його загальний розв'язок

$$w(r) = C_1 X_1(r) + C_2 X_2(r) + C_3 Y_1(r) + C_4 Y_2(r), \quad (2)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — сталі інтегрування. Функції $X_n(r)$, $Y_n(r)$ ($n = 1, 2$) знайдено методом прямого інтегрування, який розвинуто у роботі [Крутий, 2016]. При цьому для $Y_n(r)$ ($n = 1, 2$) мають місце подання

$$Y_n(r) = X_n(r) \ln \frac{r}{a} + Z_n(r) \quad (n = 1, 2).$$

Загалом формула (2) придатна для дослідження коливань суцільних та кільцевих пластин. Однак дане повідомлення присвячено саме суцільним пластинам, тому наразі із умови скінченності прогину в центрі пластини $r = 0$, матимемо $C_3 = C_4 = 0$.

Фундаментальні функції $X_n(r)$ ($n = 1, 2$) визначаються наступною сукупністю формул:

$$X_n(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-K)^k \Omega^{2m} \alpha_{n,m,k}(r) \quad (n = 1, 2); \quad (3)$$

$$\alpha_{n,0,0}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} \quad (n = 1, 2); \quad (4)$$

$$\alpha_{n,m,0}(r) = \frac{1}{(2^{2m}(n+2m-1)!)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4m-2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad (5)$$

$$\alpha_{n,0,k}(r) = \frac{1}{a^4} \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r B(r) \alpha_{n,0,k-1}(r) dr dr dr dr \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (6)$$

$$\alpha_{n,m,k}(r) = \frac{1}{a^4} \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r (B(r) \alpha_{n,m,k-1}(r) + \alpha_{n,m-1,k}(r)) dr dr dr dr \quad (7)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots) (k = 1, 2, 3, \dots),$$

де $K = a^4 k_0 / D$, $\Omega^2 = a^4 \rho h \omega^2 / D$.

Для простоти чисельної реалізації, після апроксимації функції $B(r)$ рядом Маклорена

$$B(r) = B_0 + B_1 \left(\frac{r}{a}\right) + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \dots + B_j \left(\frac{r}{a}\right)^j + \dots \quad (8)$$

інтегральні рекурентні співвідношення (6), (7), трансформуються до степеневих рядів

$$\alpha_{n,0,k}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-2} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,0,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (9)$$

$$\alpha_{n,m,k}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4(m+k)-2} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,m,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (10)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Коефіцієнти цих рядів обчислюються за наступними рекурентними формулами:

$$c_{n,0,0,0} = 1; \quad c_{n,0,0,j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots); \quad (11)$$

$$c_{n,m,0,0} = \frac{1}{(2^{2m}(n+2m-1)!)^2}; \quad c_{n,m,0,j} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots)(j = 1, 2, 3, \dots); \quad (12)$$

$$c_{n,0,k,j} = \frac{1}{p_{n,0,k,j}^2} \sum_{i=0}^j B_{j-i} c_{n,0,k-1,i} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots); \quad (13)$$

$$c_{n,m,k,j} = \frac{1}{p_{n,m,k,j}^2} \left(c_{n,m-1,k,j} + \sum_{i=0}^j A_{j-i} c_{n,m,k-1,i} \right) \quad (14)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots),$$

де

$$p_{n,m,k,j} = (2n + 4(m + k) + j - 4)(2n + 4(m + k) + j - 2).$$

Таким чином, розроблено аналітичний метод дослідження вільних осесиметричних коливань круглих суцільних пластин, що опираються на неоднорідну пружну основу Вінклера. Даний метод повністю визначається формулами (2)-(5) та (8)-(14).

Перелік посилань

Крутий, Ю. С. (2016). *Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами.*, (Дис. д-ра техн. наук). Луцький національний технічний університет, Луцьк.

Метод Кьоніга-Егерварі в алгоритмах роєвої оптимізації для задач криптоаналізу

О. О. Кубайчук¹, А. А. Іщенко¹, В. В. Прухніцька¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

o.kubaychuk@gmail.com

Анотація

Розглянуто приклад частотного криптоаналізу із застосуванням метаевристичного підходу, Показана доцільність інтеграції методу Кьоніга-Егерварі до алгоритмів АСО.

Ключові слова: криптоаналіз; роєвий інтелект; задача про оптимальні призначення; комбінаторна оптимізація.

Застосування алгоритмів комбінаторної оптимізації (наприклад, еволюційних та роєвих алгоритмів) дозволяє отримувати оптимальні/субоптимальні розв'язки для задач криптоаналізу у комбінаторно-оптимізаційній постановці. Характерно, що за такого підходу метод шифрування є малозначущим але, при цьому, повинен існувати простий механізм перевірки якості згенерованих оптимізаційним алгоритмом кандидатів на розв'язок задачі криптоаналізу.

У [Кубайчук, 2023] розглянуто особливості застосування алгоритму *Ant Colony Optimization* (ACO) до деяких задач криптоаналізу. У [Кубайчук, Іщенко, 2021] розглядається варіант застосування АСО до криптоаналізу блокових шифрів. Під блоком, в даному випадку, розуміється послідовність літер певного алфавіту фіксованої довжини.

Для оцінки якості варіанту розшифрування тексту (текст певною мовою), обирають, наприклад, *функцію Якобсена*. Критерієм оптимальності ключа l є величина:

$$R_l = Q_l \cdot \sum_{i=1}^{n-1} r_{i,i+1} \quad (1)$$

де $r_{i,i+1}$ -ймовірність того, що за символом, який знаходиться у позиції i слідує символ позиції $i + 1$ для результату дешифрування на ключі l (ймовірність біграм є цілком визначеною для конкретної мови і її знаходять з відповідних таблиць),

Q_l -корегуючий параметр узгодженості результату розшифрування на ключі l з текстом на конкретній мові (значення параметра можна отримати, наприклад, скориставшись функцією Якобсена). Задачу про оптимальну перестановку символів криптотексту запропоновано розглянути як *задачу про оптимальні призначення*.

Нехай $C = \|c_{ij}\|, i, j = 1, \dots, n$ матриця витрат, пов'язаних з призначенням i -того виконавця на j -ту роботу. Потрібно знайти матрицю $X = \|x_{ij}\|, i, j = 1, \dots, n$, що мінімізує (максимізує, тоді замість матриці C беруть матрицю $-C$) цільову функцію:

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (2)$$

при виконанні обмежень

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ або } 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Розв'язати задачу (2)-(5) - означає вибрати n елементів у матриці C по одному з кожного рядка і по одному з кожного стовпчика так, щоб сума вибраних елементів була мінімальною (максимальною).

Стосовно поставленої задачі криптоаналізу, c_{ij} - ймовірність того, що символ в позиції i блоку шифротексту перейде у позицію j .

Висновки. Розглянуто приклад частотного криптоаналізу із застосуванням метаевристичного підходу, а саме, із використанням одного з алгоритмів роевого інтелекту - алгоритму АСО. Результатом кожної ітерації алгоритму АСО є відповідна матриця ймовірностей переходу символів блоку шифротексту. Оптимальний варіант перестановки символів на ітерації узгоджується з розв'язком задачі про оптимальні призначення. Для її розв'язання обрано метод Кьоніга-Егерварі.

Перелік посилань

Кубайчук О. О. (2023). Особливості застосування алгоритму АСО до деяких задач криптоаналізу. *Наукоємні технології*. vol. 58, no. 2, pp. 141–148.

Кубайчук О. О., Іщенко А. А. (2021). Модифікація мурашиного алгоритму для криптоаналізу блокових шифрів. Матеріали конференції «Інформаційно-телекомунікаційні системи і технології та кібербезпека: нові виклики, нові завдання». Київ, ІСЗЗІ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021, pp. 69-70.

Використання математики в кібербезпеці

О. Р. Кузьмич¹

¹*ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

olakuzmic05@gmail.com

Анотація

У цій роботі досліджується роль математики в кібербезпеці, розглядаються основні математичні розділи, що використовуються для захисту інформаційних систем, а також аналізуються ключові алгоритми та теореми, які забезпечують безпеку даних. Особлива увага приділяється криптографії, яка базується на теорії чисел, алгебрі та модульній арифметиці, а також методам аналізу загроз за допомогою теорії ймовірностей і статистики. Також розглядаються застосування теорії графів у моделюванні мереж і виявленні атак, оцінка складності алгоритмів та методи стеганографії. Робота підкреслює важливість глибокого розуміння математичних методів для створення ефективних систем кіберзахисту.

Ключові слова: кібербезпека, математика, криптографія, теорія чисел, модульна арифметика, алгоритм RSA, еліптичні криві, теорія ймовірностей, статистика, теорія графів, алгоритм Дейкстри, OSPF, обчислювальна складність, стеганографія

Кібербезпека — це одна з найбільш динамічних і важливих галузей сучасного світу, яка спрямована на захист інформаційних систем, мереж та даних від несанкціонованого доступу, атак і зловживань. Успіх цієї сфери значною мірою залежить від точного використання математичних методів та алгоритмів. Математика є основою для багатьох механізмів, що забезпечують безпеку, зокрема криптографії, аналізу вразливостей і систем виявлення вторгнень.

Метою даної роботи є дослідження ролі математики в кібербезпеці, розгляд основних математичних розділів, що застосовуються в цій галузі, а також розкриття ключових алгоритмів та теорем, які забезпечують захист інформації.

Математика в кібербезпеці є надзвичайно важливою, і одним із її ключових напрямів є криптографія. Вона базується на теорії чисел, алгебрі та модульній арифметиці. Наприклад, алгоритм RSA використовує великі прості числа для шифрування даних. При цьому вибираються два великі прості числа, їхній добуток використовується як частина відкритого ключа, а розшифрування можливе лише за наявності секретного ключа, який обчислюється за допомогою обернених модульних операцій. Аналогічно, алгоритми еліптичних кривих (ECC) використовують властивості точок на спеціальних математичних кривих, що забезпечує високу криптографічну стійкість при меншій довжині ключа.

Крім криптографії, важливим напрямком є теорія ймовірностей і статистика, які застосовуються для аналізу загроз та виявлення аномалій у мережах. Наприклад, якщо припустити, що поведінка користувачів у мережі підпорядковується нормальному розподілу, то значні відхилення від середнього значення (більше ніж на три стандартні відхилення) можуть свідчити про потенційну кібератаку. Подібні методи широко застосовуються в системах аналізу поведінки (UEBA – User and Entity Behavior Analytics) та в алгоритмах машинного навчання для прогнозування атак.

Ще однією важливою сферою є теорія графів, яка використовується для моделювання комп'ютерних мереж, виявлення вразливостей та аналізу шляхів атак. Комп'ютерна мережа може бути представлена у вигляді графа, де вершини – це пристрої, а ребра – з'єднання між ними. Використовуючи алгоритм Дейкстри, можна знайти найкоротший шлях, яким хакер може проникнути в систему, а пошук у глибину (DFS) допомагає відстежити поширення шкідливого програмного забезпечення. Також цей алгоритм використовується в динамічному протоколу маршрутизації OSPF (Open Shortest Path First). Завдяки алгоритму Дейкстри кожен маршрутизатор може будувати свою таблицю маршрутизації, визначаючи найоптимальніші маршрути до всіх інших вузлів у мережі.

Не менш важливою є оцінка складності алгоритмів та методів атак. Теорія обчислювальної складності дозволяє визначити, наскільки ефективними є методи шифрування та наскільки швидко їх можна зламати. Наприклад, для brute-force атаки на пароль довжиною 8 символів, що складається з літер та цифр (алфавіт із 62 символів), загальна кількість комбінацій дуже велика (понад трильйон варіантів), а при швидкості перебору 1 мільярд комбінацій на секунду його можна зламати приблизно за 2,5 дні. Це показує важливість використання довших і складніших паролів.

Ще одним математичним методом захисту є стеганографія, яка дозволяє приховувати інформацію в мультимедійних файлах. Один із найпоширеніших методів – LSB (Least Significant Bit), коли останні біти кольорових компонентів зображення замінюються на біти секретного повідомлення. Наприклад, якщо піксель має значення RGB (11001010, 10100110, 11100011), то можна змінити останній біт кожного компонента для приховування інформації.

Таким чином, математика відіграє ключову роль у кібербезпеці, забезпечуючи криптографічний захист, аналіз загроз, виявлення атак та оцінку ризиків. Глибоке розуміння математичних методів дозволяє створювати ефективніші системи захисту та протистояти кіберзлочинцям. Для того, щоб стати професіоналом у сфері кібербезпеки, необхідно добре володіти криптографією, теорією графів, ймовірностями та алгоритмікою..

Перелік посилань

Стеглов В.К., Беркман Л.Н. (2001). Телекомунікаційні мережі *техніка.*,

Остапов С.Е., Євсєєв С.П (2000). *Кібербезпека: сучасні технології захисту.*

Ланцюгове A_2 -представлення дійсних чисел: сучасні результати та відкриті проблеми

О. П. Макарчук¹

¹*Інститут математики НАН України, Київ, Україна*

makolpet@gmail.com

Анотація

В доповіді розглядається ланцюгове A_2 -представлення з алфавітом $\{\alpha_1; \alpha_2\}$ ($0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$) чисел відрізка $[\alpha_1; \alpha_2]$. Здійснюється огляд основних результатів та відкритих проблем по відношенню до відповідного представлення.

Ключові слова: ланцюгове A_2 -представлення; алфавіт; метричні задачі; лебегівська структура.

Нехай $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Добре відомо [1], що для кожного $t \in [\alpha_1; \alpha_2]$ існує послідовність (b_n) кожен член якої рівний α_1 або α_2 і

$$t = [b_1, \dots, b_n, \dots].$$

Останнє зображення називається ланцюговим A_2 -зображенням. Зчисленна множина (A_2 -бінарних) чисел $t \in [\alpha_1; \alpha_2]$ має відповідно два A_2 -зображення виду

$$[b_1, \dots, b_n, \alpha_1, (\alpha_1, \alpha_2)] = [b_1, \dots, b_n, \alpha_2(\alpha_2, \alpha_1)],$$

де круглі дужки символізують період, в той час як всі інші (A_2 -унарні) числа відрізка $[\alpha_1; \alpha_2]$ мають єдине A_2 -зображення.

Розглянемо відображення

$$T([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots].$$

Для A_2 -бінарних чисел домовимся використовувати A_2 -зображення з періодом (α_1, α_2) .

Для числа x розглянемо послідовність підхідних дробів $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$. Нехай (ξ_n) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, що набувають значень α_1 та α_2 з ймовірностями $p_{(\alpha_1)n}$ та $p_{(\alpha_2)n}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots].$$

Нехай $\lambda(\cdot)$ — класична міра Лебега, $\eta(\cdot)$ — міра Лебега-Стільтєса, що відповідає абсолютно неперервній функції розподілу

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{x+2\alpha_2}\right) + \ln\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3\alpha_1}\right)}{2\ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)} \quad \forall x \in [\alpha_1; \alpha_2],$$

з щільністю

$$p(x) = \frac{2\alpha_2 - 2\alpha_1}{2\ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)} \cdot \frac{1}{(x + 2\alpha_1)(x + 2\alpha_2)} \quad \forall x \in [\alpha_1; \alpha_2].$$

Топологічна структура ланцюгового A_2 -представлення детально описана в [Дмитренко, Кюрчев, Працьовитий, 2009]. Деякі результати по відношенню до метричних результатів та лебегівської структури випадкової величини були отримані в [Працьовитий, Кюрчев, 2009], [Pratsiovytyi, Kyurchev, 2009]. Сучасними результатами по відношенню до ланцюгового A_2 -представлення є наступні

1. Задача Гаусса-Кузьміна для ланцюгових A_2 -дробів.

Теорема 1. *Нехай*

$$g_n(x) = \lambda(T^{-n}([\alpha_1; x])) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x).$$

Існує $C > 0$ та $\gamma \in (0; 1)$ такі, що

$$|g_n(x) - g(x)| \leq C \cdot \gamma^{\sqrt{n}} \quad \forall n \in N, x \in [\alpha_1; \alpha_2].$$

$$g(x) = (\alpha_2 - \alpha_1)\eta([\alpha_1; x]) = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{\ln\left(\frac{x+2\alpha_1}{x+2\alpha_2}\right) + \ln\left(\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3\alpha_1}\right)}{2\ln(\alpha_1 + \alpha_2) - \ln(2)}$$

2. Метричні результати для ланцюгових A_2 -дробів.

Теорема 2. *Позначимо*

$$G = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \ln(x)p(x)dx$$

Для майже всіх чисел $x \in [\alpha_1; \alpha_2]$ виконуються умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q_n} = e^G,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\lambda(\Delta_n)} = e^{-2G}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right|} = e^{-2G}.$$

3. Лебегівська структура розподілу ξ .

Теорема 3. *Розподіл ξ є чистим причому дискретним тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{(\alpha_1)n}; p_{(\alpha_2)n}\} > 0.$$

сингулярним тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{(\alpha_1)n}; p_{(\alpha_2)n}\} = 0.$$

Наразі відкритою залишається гіпотеза: для алфавіту $\{\alpha_1 = 0, 5; \alpha_2 = 1\}$ чи кожне раціональне число відрізка $[0, 5; 1]$ є A_2 -бінарним? Ланцюгове A_2 -представлення може бути використане в криптографії.

Перелік посилань

Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. (2009). Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел та його геометрія. *Укр. мат. журн.*, vol. 61, no. 4, pp. 452–463.

Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В. (2009). Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2 -дробом з незалежними елементами. *Теорія ймовір. та матем. статист.* vol. 81, no. 4, pp. 139–154.

Pratsiovytyi M., Kyurchev D. (2009). Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements. *Random Oper. Stochastic Equations*. vol. 17, no. 1, pp. 91–101.

Метод оптимального розподілу інвестицій на основі нечіткого виведення типу 2

В. Ю. Матковський¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

matkovskiy3vlad@gmail.com

Анотація

Розподіл інвестицій є важливим аспектом економічної системи, що характеризується високим рівнем невизначеності та нелінійною поведінкою. Для ефективного прогнозування та підтримки рішень у сфері інвестування застосовується нечітка логіка, зокрема системи нечіткого виводу типу 2 (T2FLS). На відміну від класичних методів, вони дозволяють враховувати невизначеність завдяки функціям нечіткої приналежності другого типу. Використання таких моделей сприяє підвищенню точності прийняття рішень, оптимізації інвестиційного процесу та зниженню ризиків у фінансовій сфері.

Ключові слова: інвестиції; розподіл; прогнозування; невизначеність; нечітка логіка; нечіткі множини; фазифікація; дефазифікація; функція приналежності; нечіткі правила; фінанси; економіка.

Розподіл інвестицій відіграє ключову роль в економічній системі, а його прогнозування є важливим завданням у фінансовій сфері. Через нелінійність і хаотичність цього процесу дані можуть бути невизначеними або неповними. Ефективним методом підтримки рішень є нечітка логіка, запропонована Лотфі Заде в 1960-х роках як засіб обробки невизначеності та двозначності, що узагальнює класичну теорію множин.

З часом дослідження виявили вдосконалення нечіткої логіки, які краще відображають її справжнє значення, тобто лінгвістичне вираження вхідних змінних, включаючи невизначеність, що виникає через неясну або двозначну інформацію. Три основні підходи нечіткої логіки: нечіткі множини типу 1 (T1FS), інтервальні нечіткі множини типу 2 (IT2FS) та загальні нечіткі множини типу 2 (GT2FS).

Перший підхід є найпростішою формою нечіткої логіки, а також найбільш поширеним і застосовним. Більш складний підхід представлений IT2FS, де вводиться поняття невизначеності у вигляді інтервалів. Незважаючи на складність обчислень порівняно з T1FS, вони покращують загальну нечітку модель за рахунок більшої

стійкості до зовнішнього шуму [Castro, Sanchez, Gonzalez, Melin, and Castillo, 2018].

Нечітка логіка широко використовується в багатьох областях не тільки тому, що вона дозволяє обробляти неповні або невизначені дані, а й тому, що її інструменти були спрощені з використанням параметризованих нечітких систем.

Проблема невизначеності вирішується за допомогою систем нечіткого виводу типу 2, завдяки якій розробляється нечітка система для підтримки інвестиційних рішень. Нечітка система 2-го типу приймає відкладене значення в якості вхідних даних, перетворює його за допомогою функції-члена 2-го типу і має на увазі нечіткі правила в нечіткій системі.

Вихідні дані нечіткої системи, яка представлена у вигляді функції нечіткої приналежності 2-го типу, приведеної до функції нечіткої приналежності 1-го типу, розшифровує її до точного значення і забезпечує підтримку прийняття рішень для майбутнього розвитку процесу розподілу інвестицій.

Модель, створена за допомогою систем нечіткого виводу типу 2, може слугувати інструментом для підтримки прийняття рішень інвесторами.

Нечітка логіка використовується в широкому спектрі задач прийняття рішень, таких як управління ризиками, фінанси, економіка та менеджмент, а також у прогнозуванні погоди, фізиці та багатьох інших областях. Зручність використання нечіткої логіки величезна, головним чином через те, що вона дозволяє працювати з мисленням людини, на відміну від нейронних мереж або генетичних алгоритмів.

Нечітка логіка заснована на здатності працювати з вкрай невизначеними, неточними або хаотичними файлами даних. Заде [Zadeh, 1968] розробив прийнятні методи для опису цієї невизначеності за допомогою нечітких множин замість складних математичних формулювань. Очевидною перевагою нечітких моделей є можливість представлення даних за допомогою лінгвістичних якісних концепцій, а не кількісних даних [Rustum, 2009]. Нечітка логіка складається з трьох основних механізмів, якими є фазифікація, механізм логічного висновку і дефазифікація. Функції-члени дозволяють продемонструвати нечітку множину. Крім того, нечіткі правила “якщо-то” представляють погляди і висновки експертів у своїй області, які можуть бути легко обчислені.

Метод нечіткої логіки дозволяє системі використовувати переваги моделювання середовища, що імітує когнітивну поведінку людини, і дозволяє використовувати мовний ввід для розпізнавання невизначеності записів. Таким чином, мета систем нечіткого виводу - надати людині наочне уявлення про вирішення проблем. Не втрачаючи загальності, це нечітка множина елементів, які допускають для своїх членів різні ступені приналежності в діапазоні $[0, 1]$. Таким чином, ступінь подібності кожної вхідної змінної в такій нечіткій множині визначається функцією приналежності [Wan, Chen, and Dong, 2021].

Нечітка приналежність до типу 1 функції визначається точними і однозначними значеннями в діапазоні $[0, 1]$, тоді як функція нечіткої приналежності типу 2 може бути розроблена для кожної вхідної змінної в області. Більше того, можна ствер-

джувати, що функція приналежності до T2FLS може обробляти більш високий рівень невизначеності порівняно з функцією приналежності до T1FLS [Khairuddin, Hasan, Hashmani, and Azam, 2021].

Це досягається за рахунок обліку різних ступенів невизначеності (FOU) в поєднанні з тривимірною природою нечітких множин 2-го типу. Вторинна функція членства пов'язана зі ступенем членства. Коли ця вторинна функція-член приймає при максимальній невизначеності значення 1 в певному інтервалі $[a, b]$, формується нечітка множина інтервалу типу 2. Ключовими елементами нечітких множин інтервалу типу 2 є область невизначеності (FOU), верхня функція приналежності (UMF) і нижня функція приналежності (LMF). Максимальна невизначеність, виражена у вторинній функції приналежності, дорівнює 1, тому нечіткий набір інтервалів типу 2 може бути спрощений. Нечіткі множини пов'язані з лінгвістичними термінами, які є частиною нечітких правил, обумовлених твердженнями [Ferreuta, Nagras, Kern, and Owusu, 2018].

Структура T2FLS дуже схожа на структуру T1FLS. Реальні змінні спочатку перетворюються в блоці фазифікації в лінгвістичні змінні, причому лінгвістичні змінні базуються на базових лінгвістичних змінних. Зазвичай використовується від трьох до семи атрибутів цієї базової змінної. Ступінь атрибута даної змінної в наборі представлений математичною функцією. У T2FLS доступно кілька типів фазифікації. Якщо отримані дані є ідеальними, змодельованими у вигляді чіткого набору, дані з шумом і дані з стаціонарним шумом моделюються як нечіткі множини типу 1, а нестаціонарний шум моделюється як нечіткі набори типу 2. Останній тип фазифікації не може бути виконаний в T1FLS. Системи нечіткої логіки 2-го типу представлені можливістю використання функції розподілу, яка може бути записана, наступним чином

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}, \quad (1)$$

де x — перша змінна, $J_x \subseteq [0, 1]$ — перший нечіткий розподіл x , u — друга змінна, і $((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u))$ є другим нечітким розподілом можливостей у точці x .

Мендель [Mendel] визначає метод IT2FLS, в якому використовується узагальнений інтервальний нечітко заданий інтервал. Вимога для розподілу вторинних можливостей є умовою нормальності, що означає, що елементів повністю розподілені по x , які визначаються наступним чином: IT2FLS — це

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}, \quad (2)$$

де x — перша змінна, $J_x \subseteq [0, 1]$ — перший можливий розподіл x , u — друга змінна, і $(x, \mu_{\tilde{A}}(x, u))$ — другий можливий розподіл x .

Для IT2FLS X — це верхній розподіл $\bar{\mu}(x)$ і нижній розподіл $\underline{\mu}(x)$ - розподіли

ймовірностей типу 1, невизначеність впливу $\bar{X}(\text{FOU}(\tilde{X}))$ визначається як

$$\text{FOU}(\tilde{X}) = \bigcup_{x \in X} J_s = \{(x, y) : J_X = [\underline{\mu}(x), \underline{\mu}(x)]\} \quad (3)$$

Висновок. Таким чином, системи нечіткого виведення типу 2, можуть бути досить вагомим інструментом для знаходження розв'язку задачі оптимального розподілу інвестицій в умовах невизначеності. Дані системи виводу зможуть знайти оптимальне рішення, яке допоможе зробити найбільш вигідні інвестиції з максимально можливим прибутком.

Перелік посилань

Castro J.R., Sanchez M.A., Gonzalez C.I., Melin P., Castillo O. (2018). A new method for parameterization of general type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Information and Engineering*, vol. 10, no. 1, pp. 31–57.

Zadeh L.A. (1968). Probability measures of fuzzy events. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 23, no. 2, pp. 421–427.

Rustum R. (2009). *Modelling Activated Sludge Wastewater Treatment Plants Using Artificial Intelligence Techniques (Fuzzy Logic and Neural Networks)*. Heriot-Watt University, Edinburgh, UK.

Wan S.P., Chen Z.H., Dong J.Y. (2021). An integrated interval type-2 fuzzy technique for democratic–autocratic multicriteria decision making. *Knowledge-Based Systems*, vol. 214, p. 214.

Khairuddin S.H., Hasan M.H., Hashmani M.A., Azam M.H. (2021). Generating clustering-based interval fuzzy type-2 triangular and trapezoidal membership functions: a structured literature review. *Symmetry*, vol. 13, no. 2.

Ferreya E., Hagraas H., Kern M., Owusu G. (2018). Enabling field force operational sustainability: a big bang-big crunch type-2 fuzzy logic system for goal-driven simulation. In *Proceedings of the 2018 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, pp. 2223–2230, Bangalore, India.

Mendel J.M. (2001). *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic*. Prentice Hall, Systems, CA, Los Angeles.

Статистична оцінка та перевірка гіпотез для імпульсної перехідної функції

А. О. Мельник¹, І. В. Розора^{1,2}

¹*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна*

²*Національний технічний університет України “Київський
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, Україна*

melinik2011@univ.kiev.ua

Анотація

В роботі досліджується фізично здійснима однорідна лінійна система з імпульсною перехідною функцією (ІПФ), яка визначена на обмеженій області. Вхідний сигнал припускається стаціонарним гаусівським випадковим процесом, представленим як скінченна сума з некорельованими членами. Використовується метод сумісної емпіричної корелограми для оцінювання ІПФ, аналізуються його статистичні властивості. Отримані результати дозволяють розробити непараметричний критерій перевірки ІПФ.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція; сумісна емпірична корелограма; швидкість збіжності; статистичний критерій; перевірка гіпотез.

Розглянемо лінійну однорідну систему з дійснозначною імпульсною перехідною функцією (ІПФ) $H(\tau)$, визначеною на обмеженій області $\tau \in [0, \Lambda]$. Вихідний сигнал $Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ системи пов'язаний з вхідним сигналом $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ за допомогою інтегрального рівняння:

$$Y(t) = \int_0^{\Lambda} H(\tau) X(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $H(\tau) \in L_2([0, \Lambda])$ – імпульсна перехідна функція системи.

Задача полягає у статистичному оцінюванні $H(\tau)$ на основі спостережень вхідного $X(t)$ і вихідного $Y(t)$ сигналів. Вхідний процес $X(t)$ є стаціонарним гаусовим процесом з нульовим математичним сподіванням і може бути представлено

у вигляді такого ряду:

$$X_N(u) = \sum_{k=1}^N \xi_k \varphi_k(u) + \sum_{k=1}^N \eta_k \psi_k(u),$$

де $\{\varphi_k(t), \psi_k(t)\}, k \geq 1$ – ортонормований базис в $L_2([0, \Lambda])$, а ξ_k, η_k – некорельовані гауссові випадкові величини.

Оцінку для $H(\tau)$ в точці $\tau, \tau > 0$; визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми між вхідним та вихідним процесами:

$$\hat{H}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) X(t - \tau) dt,$$

де $T > 0$ – параметр середнього. Цей підхід до оцінювання ІПФ було детально вивчено в роботах [Розора, 2018, Buldygin, Utzet, Zaiats, 2004].

Розглянемо систему функцій

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right), \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sin\left(\frac{2k\pi t}{\Lambda}\right), k \geq 1 \right\}$$

яка є ортонормованим базисом у $L_2([0, \Lambda])$.

Коефіцієнти розкладу $H(\tau)$ у цьому базисі визначаються як:

$$a_k = \int_0^\Lambda H(\tau) \varphi_k(\tau) d\tau = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(\tau) \cos\left(\frac{2k\pi\tau}{\Lambda}\right) d\tau \quad k \geq 1,$$

$$b_k = \int_0^\Lambda H(\tau) \psi_k(\tau) d\tau = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(\tau) \sin\left(\frac{2k\pi\tau}{\Lambda}\right) d\tau \quad k \geq 1.$$

Вхідний сигнал $X_N(t)$ можна представити у вигляді ряду:

$$X_N(u) = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sum_{k=1}^N \left(\xi_k \cos\left(\frac{2k\pi u}{\Lambda}\right) + \eta_k \sin\left(\frac{2k\pi u}{\Lambda}\right) \right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

де ξ_k, η_k – некорельовані гауссові випадкові величини.

Розглянемо наступні умови:

Умова А. Функція $H(\tau)$ двічі диференційовна на $[0, \Lambda]$. Функції $H(\tau)$ і $H'(\tau)$ є неперервними на $[0, \Lambda]$, а також виконуються нерівності

$$I_0 = I_0(\Lambda) = \int_0^\Lambda |H(\tau)| d\tau < \infty,$$

$$I_1 = I_1(\Lambda) = \left(\int_0^\Lambda |H'(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} < \infty,$$

$$I_2 = I_2(\Lambda) = \int_0^\Lambda |H''(\tau)| d\tau < \infty.$$

Умова В. Виконується рівність

$$H(0) = H(\Lambda).$$

Умова В означає, що дія імпульсу на відрізку $[0, \Lambda]$ повністю завершується. Якщо ця умова не виконується, можна застосувати поворот графіка на кут $\arctan \frac{H(\Lambda) - H(0)}{\Lambda}$.

Позначимо

$$d = |H'(0)| + |H'(\Lambda)|.$$

Лема. [Kozachenko, Rozora, 2023] Нехай виконуються умови А, В. Тоді справедливі оцінки:

$$|H^*(\tau) - \mathbb{E}[\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)]| \leq \frac{\Lambda(d + I_2(\Lambda))}{2\pi^2 N},$$

$$\text{Var}[\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)] \leq \frac{\Lambda^3(\Lambda + 2)I_1^2(\Lambda)}{\pi^4 T^2} \left(2 - \frac{1}{N}\right)^2,$$

де $H^*(\tau) = H(\tau) - a_0$, $a_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(\tau) d\tau$, а $I_1(\Lambda)$ і $I_2(\Lambda)$ визначені в умові А.

Якщо $T, N \rightarrow \infty$, то оцінка $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ набуває асимптотичної незміщеності та конзистентності.

Теорема. Нехай виконуються умови А, В. Тоді для

$$\varepsilon \geq \left(\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1 \right) p} \right) \Lambda^{\frac{1}{p}} \gamma_0 + \Lambda h_{N,\Lambda}^* \right)^p$$

справедлива оцінка

$$P \left\{ \int_0^\Lambda |H^*(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)|^p d\tau > \varepsilon \right\} \leq 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \Lambda h_{N,\Lambda}^*) \sqrt{2}}{\Lambda^{\frac{1}{p}} \gamma_0}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \Lambda h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2} \Lambda^{\frac{1}{p}} \gamma_0} \right\}.$$

На основі отриманих результатів можна побудувати метод перевірки гіпотез про форму ІПФ. Для цього було запропоновано статистичний критерій, який базується на теоремі про швидкість збіжності в просторі $L_p([0, \Lambda])$ оцінки ІПФ [Rozora, Melnyk, 2025]. Нульова гіпотеза $H_0: H(\tau) = H_0(\tau)$ проти альтернативної $H_a: H(\tau) \neq H_0(\tau)$. Статистика тесту має вигляд:

$$\int_0^\Lambda |H(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)|^p d\tau > \varepsilon^*,$$

де ε^* — критичне значення, що обирається так, щоб задовольняти рівень значущості δ .

У симуляційному дослідженні було розглянуто конкретну функцію $H(\tau) = \tau(e^{-\tau} - e^{-\Lambda})$, для якої були знайдені мінімальні значення параметра T для різних комбінацій точності ε , рівня значущості δ і числа членів у ряді N . У процесі симуляцій було встановлено, що необхідні значення T зменшуються при збільшенні N , що підтверджує теоретичні результати [Rozora, Melnyk, 2025].

Розроблений метод може бути застосований для аналізу лінійних систем у різних галузях, таких як обробка сигналів, автоматичне управління, економетрика та океанологія. У задачах ідентифікації систем можна використовувати отримані результати для перевірки адекватності моделей, що описують поведінку реальних процесів.

Перелік посилань

Buldygin V., Utzet F., Zaiats V. (2004). Asymptotic normality of cross-correlogram estimators of the response function. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, vol. 7, pp. 1–34.

Kozachenko Y., Rozora I. (2016). Cross-correlogram estimators of impulse response functions. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 93, pp. 79–91.

Kozachenko Y., Rozora I. (2023). On statistical properties of the estimator of impulse response function. *Stochastic Processes, Statistical Methods, and Engineering Mathematics*, vol. 408, pp. 563–586.

Rozora I., Melnyk A. (2025). Statistical Estimation and Hypothesis Testing on Impulse Response Function. *Austrian Journal of Statistics*, vol. 54, no. 1, pp. 200–213.

Розора І.В. (2018). Про швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі $L_p(T)$. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, no. 4, pp. 36–41.

Проблеми обробки інформації судочинства України та NLP-технології штучного інтелекту

С. С. Мірко¹, П. П. Маслянко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

sergymirko@gmail.com

Анотація

Сучасне судочинство України стикається з рядом проблем, зокрема залежністю від людського чинника, обмеженою гнучкістю, значними витратами часу та ресурсів. Обробка правової інформації ускладнена її масштабністю, нестандартною структурою та необхідністю постійного оновлення. Використання NLP-технологій та штучного інтелекту дозволяє автоматизувати аналіз юридичних текстів, покращити розуміння правових норм і пришвидшити судові процеси. Запропонований розмірково-пошуковий алгоритм забезпечує ефективну обробку та формування правових позицій для підготовки судових рішень.

Ключові слова: судочинство; штучний інтелект; NLP; автоматизація; правова інформація.

1 Вступ

Традиційні методи обробки інформації судочинства мають ряд важливих недоліків, таких як залежність від людських ресурсів, відсутність гнучкості та значне споживання ресурсів. Ці проблеми включають:

- **Залежність від людського прийняття рішень.** Судочинство традиційно спирається на рішення суддів, прокурорів та адвокатів, що включає аналіз справи, тлумачення норм і винесення рішень [1].
- **Використання прецедентів.** Судді використовують попередні рішення як орієнтири для ухвалення нових рішень, що забезпечує узгодженість правозастосування [1].
- **Обмежена гнучкість.** У випадках правової невизначеності судді мають враховувати контекст для прийняття рішення [1].

- **Затрати часу та ресурсів.** Судові процеси вимагають значних людських, фінансових та інформаційно-комунікаційних ресурсів, що затягує їх розгляд [1].

2 Особливості юридичних даних

Юридична інформація має такі характерні риси:

- **Неструктурованість.** Правова інформація часто представлена у вигляді тексту, що містить закони, судові рішення, юридичні коментарі тощо, зазвичай у нестандартизованому форматі. Для трансформації таких даних у структурований формат застосовуються методи обробки природної мови (NLP) [1].
- **Масштабність і складність.** Правова інформація зазвичай має великий обсяг і складну структуру. Наприклад, законодавчі акти або судові рішення можуть налічувати сотні сторінок. Крім того, різні правові сфери вимагають спеціалізованих знань і підходів до аналізу. [1].
- **Актуальність.** Право є динамічною галуззю, де законодавство та судова практика постійно змінюються. Тому правові бази даних потребують регулярного оновлення, щоб відображати останні зміни [1].
- **Приватність і безпека.** Правова інформація часто містить чутливі дані. Це вимагає суворих заходів із забезпечення конфіденційності, таких як анонімізація даних і контроль доступу [1].

3 Застосування NLP та ШІ в судочинстві

Встановлені проблеми та особливості юридичних інформаційних ресурсів спонукають правників, математиків та інженерів до пошуку методів, моделей та інструментальних засобів для вирішення цих проблем. Одним із таких підходів до вирішення вказаних проблем можуть бути методи, моделі та інструментальні засоби штучного інтелекту [2]. Штучний інтелект, зокрема великі мовні моделі, мають великий потенціал покращити ефективність і якість судових процесів, що стає особливо важливим у умовах зростаючого навантаження на суди.

- **Аналіз юридичних документів.** LLM можуть перевіряти граматику, структуру речень і виділяти ключові елементи (спірні питання, норми права, сторони, докази), спрощуючи підготовку до розгляду.
- **Генерація юридичного контенту.** ШІ створює позови, контракти, судові звіти на основі базових даних, що прискорює підготовку документів [1].

- **Розпізнавання мови.** Автоматизує створення протоколів судових засідань, зменшуючи неточності ручного запису [1].
- **Юридичні консультації.** ШІ надає поради на основі правових баз, знижуючи навантаження на адвокатів [1].
- **Пошук оптимальних рішень.** Аналізуючи бази рішень, ШІ пропонує найкращі варіанти, сприяючи справедливості [1].
- **Логічний аналіз справ.** ШІ оцінює релевантність доказів і формує обґрунтування для судових рішень [1].
- **Автоматизація судових процедур.** Зменшує адміністративне навантаження автоматизуючи рутинні задачі, підвищуючи швидкість розгляду справ [1].

Розмірково-пошуковий алгоритм спрямований на формування та обробку правових позицій, а не повних текстів судових рішень. Такий підхід дозволяє зменшити вплив нерелевантного контенту та збільшити кількість розглянутих ситуацій. Створення правової позиції здійснюється в декілька етапів.

- З кожного судового рішення витягуються посилання на правові норми, що використовуються (статті кодексів або законів).
- Для коректної роботи LLM створюється база даних структурованих правових норм. Наприклад, якщо згадується “ст. 234 ч. 2 КПК”, модель отримує лише текст, що стосується другої частини статті 234 КПК, а не всю статтю.
- Формується правова підказка судового рішення, яка складається з текстів використаних правових норм у судовому рішенні.
- Використовуючи підказки, LLM визначає послідовність думок щодо правових норм, що складається з таких елементів:
- На основі послідовності думок створюється висновок про коректне застосування правових норм та їх взаємодію. Цей висновок являє собою правову позицію.

Розмірково-пошуковий алгоритм використовує три основних компоненти.

1. Компонент пошуку:

- Пошук релевантних правових позицій у зовнішній базі знань за пошуковим запитом користувача.

2. Компонент формування альтернатив:

- Ранжування правових позицій для усунення схожих позицій і забезпечення різноманітності дерева альтернатив.
- Генерація дерева альтернатив LLM на основі релевантних позицій. Дерево зберігається між ітераціями для подальшого розширення.
- Агрегація дерева за допомогою LLM, що вибирає найкращу альтернативу для вирішення задачі.

3. Компонент генерації відповіді:

- Валідація дерева альтернатив LLM для видалення нерелевантних гілок.
- Генерація остаточної відповіді на основі валідованого дерева.
- Агент вирішує, чи завершувати роботу алгоритму, чи продовжувати генерацію.

Алгоритм циклічно створює, обрізає та розширює дерево альтернатив, самостійно обираючи інструменти чи завершуючи розгляд, що забезпечує йому саморефлексію та адаптивність у вирішенні правових задач.

4 Висновки

- Визначено основні проблеми судочинства України, зокрема залежність від людських рішень, високі витрати часу та складність обробки юридичних даних.
- Обґрунтовано доцільність використання NLP та штучного інтелекту для автоматизації аналізу судових документів і пошуку релевантних рішень.
- Запропоновано алгоритм, що будує дерево альтернатив для ефективного аналізу судових рішень, підвищуючи точність правових позицій.
- Порівняльний аналіз підтвердив конкурентоспроможність запропонованого алгоритму та його переваги у автоматизації пошуку судових рішень.

Перелік посилань

- [1] J. Lai, W. Gan, J. Wu, Z. Qi, and P. S. Yu, "Large Language Models in Law: A Survey," *arXiv preprint arXiv:2312.03718*, 2023.
- [2] П.П. Маслянко, С.С. Мірко, "Концептуальна модель NLP-системи пошуку релевантної правової позиції на множині судових рішень судочинства України", *Наукові вісті КПП*, No 1–4, с. 71–85, 2023. <https://doi.org/10.20535/kpissn.2023.1-4.310302>

Інтелектуальний аналіз даних в задачах освітньої сфери

І. В. Нерода¹, Є. Б. Кондрук¹, В. А. Нерода¹

¹ *Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна*

innahorvat@uzhnu.edu.ua

Анотація

Робота присвячена дослідженню застосування інтелектуального аналізу даних в освітній сфері, зокрема в контексті персоналізації навчання та прогнозування результатів навчання. У ній розглядаються основні методи та алгоритми, які використовують для обробки та аналізу великих обсягів освітніх даних, що дозволяє адаптувати навчальний процес до індивідуальних потреб студентів.

Ключові слова: інтелектуальний аналіз даних; персоналізація навчання; прогнозування навчання.

Вступ

В сучасному світі, де технології все більше впливають на усі сфери нашого життя, освітня галузь не може залишатися поза увагою. Використання інтелектуального аналізу даних в освіті стає невід'ємною складовою стратегій розвитку освітніх систем та підвищення якості навчання. Новітні технології дозволяють збирати та аналізувати величезні обсяги даних, що відкриває безліч можливостей для оптимізації навчального процесу, адаптації до потреб кожного учня та впровадження інноваційних підходів до навчання та виховання.

Інтелектуальний аналіз даних в освітній сфері виходить за рамки звичайних методів аналізу результатів навчання. Він надає змогу збирати, обробляти та інтерпретувати дані про студентів, навчальні програми та навчальні процеси, щоб зрозуміти їх ефективність та виявити можливості для поліпшення. Завдяки використанню алгоритмів машинного навчання та штучного інтелекту можна робити оцінку успішності, прогнозувати успішність студентів, а також персоналізувати навчання для кожного учня, сприяючи його індивідуальному розвитку та досягненню найкращих результатів. Такий підхід до аналізу даних у сфері освіти може зробити навчання більш ефективним, доступним та адаптивним до потреб сучасного суспільства.

Мета дослідження полягає у окресленні завдань сфери освіти вирішення яких можливе із використанням інтелектуального аналізу даних.

Персоналізація навчання

Персоналізоване навчання набуває все більшої популярності, особливо з розвитком інформаційних технологій і сучасних освітніх ресурсів для навчання. Кожна людина індивідуальна і має різні знання, різну пам'ять, різну швидкість навчання. Інтелектуальний аналіз відіграє важливу роль у вдосконаленні процесів навчання та сприяє персоналізації навчання, яка полягає в адаптації процесу навчання до потреб та можливостей кожного конкретного учня. Це може бути досягнуто за допомогою аналізу даних про учнів, їхні досягнення, стилі навчання, інтереси та потреби [1].

З метою персоналізації навчання використовуються різні підходи, включаючи використання адаптивних платформ, які за допомогою інтелектуального аналізу можуть аналізувати поведінку та відповіді студентів на завдання та тестування, щоб ідентифікувати їхні сильні та слабкі сторони. На основі цього аналізу платформи навчання можуть автоматично адаптувати навчальний контент, пропонуючи індивідуалізовані завдання та матеріали, які найбільше відповідають потребам кожного учня.

Персоналізовані рекомендації із використанням інтелектуального аналізу даних можуть аналізувати історію навчання та інтереси учнів, щоб надавати персоналізовані рекомендації щодо додаткових матеріалів, курсів або занять, які відповідають їхнім потребам та інтересам.

Іншим аспектом персоналізації є інтеграція соціальних елементів у навчальний процес. Групові проекти і співпраця між студентами створюють середовище, яке підтримує активну участь учнів і розвиває їхні соціальні навички. Наприклад, групові проекти та співробітництво між студентами можуть бути адаптовані до індивідуальних стилів навчання, що дозволяє учням взаємодіяти один з одним і обмінюватися знаннями. Це не лише збільшує мотивацію, але й збільшує розвиток навичок командної роботи [2].

Аналіз взаємодії з контентом може відстежувати, як учні взаємодіють з навчальним контентом, таким як відео, текстові матеріали або інтерактивні завдання, дозволяючи ідентифікувати проблемні місця та надавати додаткову підтримку учням, які мають труднощі з розумінням певних концепцій. Автоматизований зворотний зв'язок може автоматично надавати зворотний зв'язок учням щодо їхнього навчального прогресу та рекомендації щодо подальших кроків. Це допомагає учням розуміти їхні сильні та слабкі сторони та сприяє самооцінці та саморозвитку [3].

Всі ці методи допомагають створити персоналізоване навчання, яке враховує унікальні потреби, інтереси та особливості кожного учня, підвищуючи ефективність навчання та стимулюючи активну участь.

Прогнозування результатів навчання

Прогнозування результатів навчання — це процес використання алгоритмів

машинного навчання та статистичних методів для передбачення успішності учнів, їхнього навчального прогресу та інших важливих аспектів навчального процесу. Цей підхід дозволяє навчальним закладам оптимізувати освітні програми, вдосконалити процеси викладання та забезпечити персоналізовану підтримку студентам.

Для проведення прогнозування спочатку необхідно зібрати велику кількість даних, які включають: інформація про учнів: рівень знань, успішність на попередніх курсах, академічні інтереси та характеристики навчального процесу: методи навчання, час, витрачений на виконання завдань, оцінки за тестові роботи тощо.

Після збору даних вони піддаються аналізу з використанням різноманітних моделей машинного навчання. Залежно від конкретної задачі можуть бути застосовані: алгоритми класифікації — для прогнозування того, чи зможе студент успішно завершити певний курс або програму навчання або регресійні моделі — для прогнозування середнього балу або рівня знань студента після завершення навчального курсу [4, 6].

Після того, як модель навчиться наявним даним, її можна застосувати для прогнозування результатів нових студентів або для ідентифікації тих, хто може потребувати додаткової підтримки. У [5] представлено інтелектуальну модель прогнозування результатів навчання в контексті електронного навчання. Останні дослідження, також, вказують на потенціал штучного інтелекту (ШІ) у вдосконаленні процесів прогнозування. Завдяки здатності ШІ аналізувати великі обсяги даних, навчальні заклади можуть отримати більш точні прогнози щодо успішності учнів. Наприклад, ШІ може виявити тенденції відвідуваності та виконанні завдання, що дозволяє вчителям реагувати на проблеми [7].

Цей підхід може допомогти університетам та навчальним закладам оптимізувати навчальні програми, вдосконалювати процеси викладання та навчання, а також забезпечувати персоналізовану підтримку студентам для досягнення їхніх академічних цілей.

Висновки

Інтелектуальний аналіз даних у сфері освіти відкриває нові можливості для персоналізації навчання та покращення прогнозування результатів, що потребує активної інтеграції технологій у навчальні програми та методику викладання. Це дозволяє вчителям та навчальним закладам ефективніше спілкуватися зі студентами, адаптуючи навчальні програми для відповідності потребам кожного учня. Персоналізовані підходи до навчання можуть підвищити зацікавленість студентів та їхню мотивацію до успіху. При цьому важливо враховувати етичні аспекти, такі як конфіденційність даних та справедливе використання результатів аналізу. Розвиток цієї галузі потребує подальших досліджень і інновацій для максимального використання її потенціалу у покращенні процесів навчання та результатів освіти.

Дослідження в області інтелектуального аналізу даних в освітній сфері мають великий потенціал для подальшого розвитку, особливо в контексті персоналізації

навчання та прогнозування результатів навчання.

Перелік посилань

- [1] Gavriushenko, M., Lindberg, R. S., & Khriyenko, O. (2017). Smart educational process based on personal learning capabilities. In EDULEARN proceedings. IATED Academy.
- [2] Lokareva, G. V., & Bazhmina, E. A. (2021). Персоналізація в освіті: управління студентами власною траєкторією навчання засобами цифрових технологій. *Information Technologies and Learning Tools*, 86(6), 187.
- [3] Luan, H., Geczy, P., Lai, H., Gobert, J., Yang, S. J., Ogata, H., ... & Tsai, C. C. (2020). Challenges and future directions of big data and artificial intelligence in education. *Frontiers in psychology*, 11, 580820.
- [4] Namoun, A., & Alshantiti, A. (2020). Predicting student performance using data mining and learning analytics techniques: A systematic literature review. *Applied Sciences*, 11(1), 237.
- [5] Ravichandran, M., & Kulanthaivel, G. (2015, February). Intelligent prediction model for learners outcome forecasting in e-learning. In 2015 International Conference on Computing and Communications Technologies (ICCCT) (pp. 7-11). IEEE.
- [6] Khan, A., & Ghosh, S. K. (2021). Student performance analysis and prediction in classroom learning: A review of educational data mining studies. *Education and information technologies*, 26(1), 205-240.
- [7] Znayshov. (2025, January 20). Огляд можливостей штучного інтелекту для покращення якості навчання та натхнення учнів. https://znayshov.com/News/Details/osvita_novoho_pokolinnia_top_5_mozhlyvosti_shi

Математичне моделювання динаміки передачі інфекційних захворювань з використанням СДР

О. В. Панічек¹, О. А. Тимошенко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

panichekalex@gmail.com

Анотація

Ми вивчаємо застосування стохастичних диференціальних рівнянь в задачах епідеміології та досліджуємо стохастичну математичну модель динаміки захворювання на туберкульоз з метою покращення розуміння процесів передачі вірусних інфекцій та прогнозування динаміки розвитку епідемії.

Ключові слова: SIR-модель; диференціальні рівняння; вінерівський процес.

Прогнозування динаміки популяції, змін в смертності та народжуваності, змін довільних соціальних та демографічних показників - є корисними для розуміння загальної демографічної ситуації та обґрунтування дій стосовно її покращення. Загальні моделі поширення захворювань охоплюють різноманітні підходи та методології, які застосовуються для аналізу та прогнозування епідеміологічних процесів. Одними з найпоширеніших є моделі SIR (Susceptible-Infectious-Recovered), які дають змогу оцінити динаміку захворюваності, виявити критичні точки для втручання та моделювати ефективність заходів, таких як вакцинація чи карантин.



Рис. 1: Схема переходів між основними класами SIR-моделі.

Результати роботи Кермака і Маккендріка (1927) є одними з фундаментальних досліджень у галузі математичного моделювання епідемій. Ця робота стала початком систематичного застосування математичних підходів до аналізу динаміки інфекційних захворювань. Саме в [1] для базової моделі SIR, була запропонована

система диференціальних рівнянь, яка описує динаміку поширення інфекції в популяції.

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt, \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))dt, \\ dR(t) = \gamma I(t)dt, \end{cases} \quad (1)$$

Коефіцієнт β визначає швидкість передачі інфекції, враховуючи ймовірність зараження та частоту контактів між сприйнятливими S та інфікованими I . Коефіцієнт γ — швидкість одужання. Кількість сприйнятливих S зменшується через зараження з імовірністю βSI , кількість інфікованих I зростає через нові зараження і зменшується через одужання γI . Кількість одужалих R зростає зі швидкістю γI .

Загальна чисельність популяції постійна: $S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{const}$, де N — розмір популяції.

Система рівнянь (1) є основою для багатьох сучасних моделей епідемій і дозволяє аналізувати такі важливі для епідеміології явища та величини, як пік епідемії, базове репродуктивне число R_0 , ефекти вакцинації населення тощо.

Багато науковців приділяли увагу SIR-моделям. У літературі присутні дослідження математичних моделей, що ґрунтуються на використанні звичайних диференціальних рівнянь різних типів, розроблених для вивчення поширення захворювань (див. наприклад, [2]).

У дійсності поширення інфекційних захворювань залежить не лише від детермінованих закономірностей. Випадкові фактори суттєво впливають на динаміку епідемій, особливо у невеликих популяціях або на початкових етапах спалаху інфекційної хвороби. Врахування цих факторів дає змогу точніше прогнозувати розвиток епідемії та оцінювати можливі сценарії її перебігу.

Тому поруч з математичними детермінованими моделями епідемій, згодом почали досліджувати стохастичні, що враховують випадковість у контактах між людьми, мутації вірусу та зміни навколишнього середовища ([3]).

Моделі інфекційних захворювань з урахуванням таких випадковостей створюються шляхом модифікації детермінованих диференціальних рівнянь, які описують динаміку популяцій. До кожного детермінованого рівняння системи додають стохастичні доданки, які відображають випадкові коливання (волатильність). Для моделювання цих коливань використовують диференціали за Вінерівськими процесами, що дозволяють врахувати стохастичний шум у системі. Наприклад, найпростіша модифікована SIR-модель (1) може виглядати так:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_S S(t)dW_S(t); \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))dt + \sigma_I I(t)dW_I(t); \\ dR(t) = \gamma I(t)dt + \sigma_R R(t)dW_R(t), \end{cases} \quad (2)$$

де $\sigma_S, \sigma_I, \sigma_R$ — коефіцієнти волатильності для відповідних станів); W_S, W_I, W_R — незалежні Вінерівські процеси, що моделюють випадкові впливи.

На теперішній час існує багато наукових робіт, в яких на основі найпростішої стохастичної моделі зміни популяції залежно від типу інфекції (COVID-19, віспа, СНІД, малярія, туберкульоз) та з урахуванням факторів, таких як карантин і вакцинація, створюється модель, яка описує динаміку епідемій для конкретної хвороби.

Однією з ключових задач є перевірка коректності моделі, зокрема визначення, чи всі змінні залишаються фізично реалістичними (додатними) в часі. Важливим завданням є пошук стаціонарних станів системи, які описують стабільний стан популяції, наприклад, умови та час повного зникнення хвороби або встановлення її ендемічного рівня. Серед актуальних проблем також виділяють аналіз умов зникнення хвороби шляхом оцінки базового репродуктивного числа R_0 , яке показує середню кількість нових заражень, спричинених одним інфікованим у сприйнятливій популяції: якщо $R_0 < 1$, інфекція зникає, а якщо інакше ($R_0 > 1$), вона поширюється. Не менш важливим є завдання оцінки швидкості поширення хвороби, що дозволяє визначити динаміку змін кількості інфікованих. Крім того, до основних задач належить визначення умов оптимального контролю, зокрема аналіз стратегій втручання, таких як вакцинація чи карантин, які мінімізують поширення інфекції. Це включає розробку оптимальних умов для зниження R_0 нижче одиниці або зведення кількості інфікованих до мінімуму. Усі ці аспекти є важливими для розуміння динаміки хвороби та впровадження ефективних стратегій боротьби з нею.

Ми досліджуємо динаміку туберкульозу в Україні ([4]), де захворюваність залишається однією з найвищих у світі. Війна погіршує ситуацію, збільшуючи випадки захворювання через обмежений доступ до медичної допомоги та поширення медикаментозно-стійких форм.

$$\begin{cases} dS = \left[(1-p)\theta + bV + \alpha R - \mu_1 S - \frac{\beta c I}{N} S \right] dt + \sigma_1 S dW_1, \\ dV = \left[p\theta - \frac{\gamma \beta c I}{N} V - (b + \mu_1) V \right] dt + \sigma_2 V dW_2, \\ dI = \left[\frac{\beta c I}{N} S + \frac{\gamma \beta c I}{N} V - (\mu_1 + \mu_2 + r) I \right] dt + \sigma_3 I dW_3, \\ dR = [rI - \alpha R - \mu_1 R] dt + \sigma_4 R dW_4. \end{cases} \quad (3)$$

Тут початкові значення $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$, а $W_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ — незалежні вінерівські процеси. Інтенсивності цих процесів позначаються через σ_i , а загальна чисельність популяції визначається як $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$.

Вакцинований клас V збільшується за рахунок народжуваності з набуттям часткового імунітету.

Вразливий клас S збільшується за рахунок народжуваності, вакцинованих та тих, хто одужав R .

Усі класи підлягають природній смертності μ_1 та смертності від хвороби μ_2 .

Модель враховує ймовірність інфікування через контакти, ефективність вакцинації та швидкість одужання.

Теорема 1. Система (3), має єдиний розв'язок, $(S(t), V(t), I(t), R(t))$, за початкової умови $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ при $t \geq 0$, і цей розв'язок залишиться додатним з ймовірністю 1.

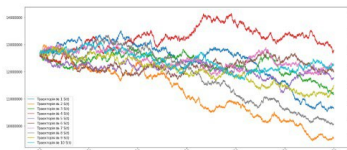


Рис. 2. Зміна популяції осіб S , що сприйнятливі до бактерій туберкульозу.

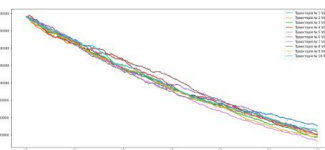


Рис. 4. Зміна поведінки процесу V , що відповідає популяції вакцинованих осіб.

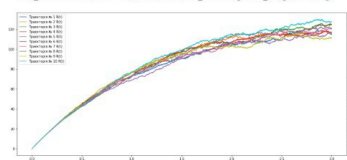


Рис. 3. Поведінка процесу R - популяції осіб, які є стійкими до захворювання.

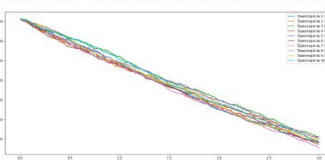


Рис. 5. Поведінка траєкторій процесу I , що описує клас інфікованих осіб.

Перевірено, що модель коректно визначена, всі змінні залишаються додатними з плином часу. У подальших дослідженнях планується визначити R_0 , яке забезпечить зникнення хвороби.

Перелік посилань

- [1] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G. (1927). *Cotributions to the Mathematical Theory of Epidemics-I*. Proceedings of the Royal Society, 700–721.
- [2] Huang G. and Takeuchi Y. (2011). Global analysis on delay epidemiological dynamic models with nonlinear incidence, *J. of Mathematical Biology* vol. 63, no. 1, pp. 125–139.
- [3] Allen L. (2003). *Stochastic Processes with Applications to Biology*, Pearson, N. J.
- [4] Млавець, Ю. Ю., Панічек, О. В., & Тимошенко, О. А. (2024). Математичне моделювання динаміки передачі туберкульозу з використанням диференціальних рівнянь збурених за допомогою вінерівських процесів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 45(2), 97–109.

Використання штучного інтелекту в задачах неруйнівного контролю

Д. В. Паренюк¹, О. П. Івко¹, А. В. Паренюк¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

pdv091943-ames@l111.kpi.ua

Анотація

У приведеній роботі показано використання методів штучного інтелекту для задач неруйнівного контролю. На прикладі виявлення та класифікації дефектів у моделі рейки Р50 було використано алгоритм «найближчого сусіда» для навчання нейромережі в середовищі JASP, який показав високу ефективність розпізнавання дефектів. Для оптимізації обробки даних було застосовано вторинні характеристики вибірок. Було проведено верифікацію отриманих результатів шляхом використання статистичних критеріїв, котра підтвердила високу ефективність застосування штучного інтелекту у автоматизації процесу неруйнівного контролю.

Ключові слова: штучний інтелект; неруйнівний контроль; акустика; статистичний аналіз.

Машинне навчання є одним із способів застосування штучного інтелекту у сучасній промисловості, яке базується на виявленні закономірностей у даних, котрі розглядаються. Алгоритми машинного навчання можуть відрізнятися між собою, однак загалом вони навчаються на сотнях та тисячах прикладів. Існує багато моделей штучного інтелекту, що застосовують методику «проб і помилок». Основою машинного навчання є застосування нейронних мереж - комп'ютерних систем, які базуються на використанні математичних моделей. Ці моделі застосовують у своїй роботі велику кількість моделей нейронів, котрі беруть за основу людські. У неруйнівному контролі однією із основних задач є не просто виявлення дефекту, а й його класифікація. Це може виконуватись як людиною оператором, так і спеціально навченим на відповідних даних штучним інтелектом (машиною).

Для того, щоб провести навчання машини (штучного інтелекту) необхідно надати їй для навчання набір даних, що містять у своєму складі характеристики різних груп об'єктів, котрі досліджуються. Для використання підходять як первинні (отримані напряму під час дослідження або вимірювання) так і вторинні (отримані під час обробки масиву даних статистичними або математичними методами).

У наведеній роботі у якості первинного масиву даних використовуються вимірювання, виконані на моделі рейки Р50, що наявна на базі кафедри АМЕС. У

цій моделі розглядалися сигнали від наявних у моделі рейки болтового отвору та пропили біля нього. Отримані результати були зведені у вибірки. Загалом було отримано 30 вибірок. Кожна вибірка являє собою 12 значень глибини (відстані до отвору чи пропили) та встановленого у налаштуваннях приладу підсилення, знятих на кожному міліметрові області вимірювань. Вимірювання виконувались перетворювачем П121-2.5-45-М-003 та дефектоскопом УДЗ-71. Важливою перевагою використання вторинних даних (у розглянутому випадку - мінімальне, максимальне та середнє значення кожної із вибірок) є менший об'єм досліджуваних даних - тобто зменшення вимог до пристроїв, що обробляють отримані дані та спрощення загальної будови приладів, особливо при обробці великих масивів даних для роботи з протяжними дефектами.

Робота із нейромережею була виконана у програмі JASP, де було розглянуто метод «найближчого сусіда» для навчання нейромережі. Цей метод працює порівнюючи нові дані із тим масивом, що вже відомий навченій машині. Були використані вторинні данні для болтового отвору та пропили. У методі використувався параметр $k=2$, тобто алгоритм визначав два найближчих зразки за двома найближчими параметрами. Результат роботи показав стовідсоткову ефективність навчання нейромережі, що показано на Рис 1.

	DepthMEAN	dBMEAN	Results of testing
1	84.858	53.75	Sawed
2	87.12	57.3	Sawed
3	86.63	57.2	Sawed
4	87.58	56.2	Sawed
5	87.04	56	Sawed
6	87.66	57.2	Sawed
7	81.28	54.9	Sawed
8	84.17	56.4	Sawed
9	81.28	56.4	Sawed
10	82.8	56.1	Sawed
11	106.827	56.256	BoltHole
12	107.387	56.254	BoltHole
13	105.498	56.466	BoltHole
14	107.401	56.265	BoltHole
15	105.901	56.321	BoltHole
16	105.458	56.433	BoltHole
17	105.067	56.303	BoltHole
18	104.945	56.237	BoltHole
19	105.661	56.479	BoltHole
20	105.802	56.465	BoltHole
21	105.273	56.419	BoltHole
22	106.482	56.423	BoltHole
23	87.746	54.796	Sawed

Рис. 1: Отримані результати навчання нейромережі.

Також була виконана перевірка отриманих результатів шляхом використання статистичних критеріїв [1]. Було застосовано параметричний критерій Стюдента (Т-тест) із застосуванням формули (1), де

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (1)$$

- $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ — середні значення двох вибірок,
- s_p^2 — зведена оцінка дисперсії, яка обчислюється за формулою (2):

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (2)$$

де:

- s_1^2, s_2^2 — вибіркові дисперсії,
- n_1, n_2 — обсяги вибірок.

що показав наявність статистично значимої різниці між групами результатів для різних дефектів. Можливість використання цього критерію було досліджено шляхом, показаним у роботі [2]. Характер розподілу величин у вибірці при цьому наведено на Рис 2.

Застосування статистичних методів аналізу показало високу точність навчання нейромережі та підтвердило можливість її застосування для ідентифікації дефектів різних типів.

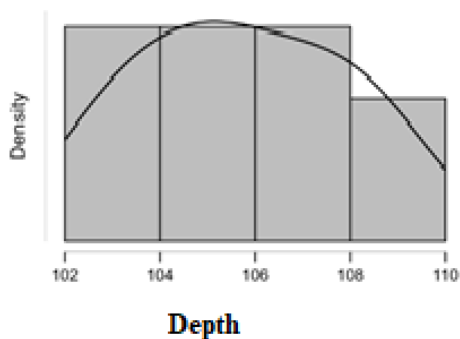


Рис. 2: Характер розподілу даних у вибірці

Перелік посилань

- [1] Orcan F. (2020). Parametric or Non-parametric: Skewness to Test Normality for Mean Comparison. *Int. J. Assess. Tools Educ.*, vol 7, no 2, pp 255–265.
- [2] Паренюк Д. В. (2023). Алгоритм встановлення характеру розподілу значень у вибірці малого розміру. *XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, Тези доповідей*, pp. 182–183.

Використання математики при формуванні графічних зображень

О. Н. Романюк¹, В. П. Майданюк¹, О. В. Романюк¹

¹*Вінницький національний технічний університет,
Вінниця, Україна*

rom8591@gmail.com

Анотація

Проаналізовано використання математики при формування графічних зображень.

Ключові слова: комп'ютерна графіка; математика; рендеринг; кватерніони; сферична геометрія; матричні перетворення.

Комп'ютерна графіка (КГ) [1] відіграє важливу роль у сучасному світі. Вона застосування в дизайні, розвагах, науці, медицині та освіті та дозволяє створювати детальні візуалізації, що сприяє кращому розумінню проектів перед їхнім втіленням. У ігровій індустрії [2] КГ використовується для створення складних сценаріїв та інтерактивних світів, забезпечуючи глибокий іммерсивний досвід. У кіно та анімації [2] графіка є ключовим елементом для створення спецефектів. В науці вона використовується для візуалізації складних даних і моделей, а в медицині [3] для створення 3D-моделей органів, що допомагає у плануванні операцій. Також комп'ютерна графіка [1] є невід'ємною частиною веб-дизайну [4] та інтерфейсів користувача, поліпшуючи їх зручність та естетику [5]. В освіті, графічні симуляції та ігри [2] використовуються для навчання та тренування, забезпечуючи інтерактивний та ефективний підхід до здобуття знань.

Математика відіграє важливу роль у комп'ютерній графіці, забезпечуючи методи та інструменти, які дозволяють створювати, маніпулювати та візуалізувати цифрові зображення та тривимірні сцени. Геометрія забезпечує використання математичних принципів, зокрема лінійної алгебри, для маніпулювання геометричними формами. Це включає перетворення [1], такі як масштабування, перенесення, та обертання об'єктів у просторі. Інтерполювання [5] часто використовується для створення гладких переходів між кольорами або текстурами на поверхнях [6].

Множина математичних функцій і алгоритмів використовуються для інтерполяції [1] значень, щоб забезпечити плавність та реалістичність зображень. Математичні алгоритми використовуються для перетворення векторних графічних даних у піксельні зображення, що відображаються на екрані. Математичні розрахунки використовуються для моделювання взаємодії світла з об'єктами. Це включає вирахування як пряме освітлення, так і відбиття світла від одного об'єкта на інший. Такі моделі, як закони затухання світла та моделі відбиття, базуються на фізичних законах, але виражені через математику. Математика використовується для відображення текстур на тривимірних об'єктах, що вимагає перетворення координат текстури в координати пікселів.

Лінійна алгебра використовується для опису і маніпулювання точками, векторами, матрицями та лінійними перетвореннями. Це основа для перетворень в тривимірному просторі.

Диференціальне та інтегральне числення застосовується для моделювання змінних властивостей, таких як освітлення і тіні, а також для обчислення об'ємів, площ поверхонь та інших атрибутів, пов'язаних з графічними об'єктами.

Чисельні методи використовуються для розрахунку апроксимацій рішень математичних задач, які не можуть бути розв'язані аналітично.

Теорія імовірностей та статистика використовується в алгоритмах, які залежать від випадковості або для аналізу великих даних, наприклад, у методах Монте-Карло для рендеринга.

Сферична геометрія [6, 7] має важливе значення у комп'ютерній графіці, особливо у таких аспектах, як моделювання, анімація та візуалізація. У тривимірних сценах сферичні координати часто використовуються для опису позиції камер, світла або інших об'єктів. Це дозволяє легко обчислювати кути та відстані між об'єктами в сцені. Сферична геометрія може використовуватися для створення реалістичних анімацій руху об'єктів у тривимірному просторі, особливо коли об'єкти повинні рухатися вздовж кривих або по поверхні сфер. У КГ сферичні об'єкти можуть використовуватися для створення складних об'ємних сцен, які вимагають точного врахування кривизни та інших геометричних властивостей. Сферичні проекції використовуються для створення панорамних зображень, які можуть бути інтегровані в додатки віртуальної реальності. Техніки сферичної геометрії дозволяють реалізувати складні алгоритми освітлення.

Інтерполяція та апроксимація [1, 5, 8] є важливими математичними методами, які знаходять широке застосування у КГ для створення гладких зображень, анімацій, і текстур з дискретних даних. Інтерполяція [1, 5, 8] використовується для визначення проміжних значень на основі дискретного набору відомих даних. Часто використовується для розрахунку кольорів точок текстури між відомими пікселями, що допомагає у створенні гладких та реалістичних зображень на поверхнях об'єктів [8]. Інтерполяція дозволяє створювати плавні анімації шляхом визначення проміжних станів об'єктів між ключовими кадрами, що забезпечує

натуралістичні рухи.

Апроксимація використовується для створення моделей, які найкраще відповідають заданому набору даних, але не обов'язково проходять через усі точки даних. Використовується для створення поверхонь, які описують форму об'єкта на основі набору вимірюваних даних, наприклад, при скануванні реальних об'єктів або при створенні тривимірних моделей з фотографій. Апроксимація може використовуватися для зниження складності графічних моделей без істотної втрати деталізації, що допомагає підвищити продуктивність графічних додатків. Апроксимаційні методи можуть бути використані для ефективного обчислення ефектів освітлення, таких як тіні та відблиски, з мінімальними витратами обчислювальних ресурсів.

Останнім часом часто використовують кватерніони. Вони є частиною чотиривимірного числового простору і мають особливі властивості, які роблять їх оптимальними для представлення орієнтацій та обертань у 3D просторі. Кватерніони забезпечують плавність і стабільність при анімації обертань завдяки можливості використання сферичної лінійної інтерполяції. Цей метод дозволяє обчислити проміжні обертання між двома орієнтаціями так, що швидкість обертання залишається постійною. Обертання на основі кватерніонів може бути виконано швидше та з меншими вимогами до пам'яті, ніж матричні перетворення. Компонування обертань за допомогою кватерніонів можна здійснювати простою операцією множення, що є менш складною та більш надійною, ніж відповідні операції з матрицями обертань.

Інтегральне числення, яке разом із диференціальним численням становить основу математичного аналізу, відіграє значущу роль в багатьох аспектах комп'ютерної графіки. Цей розділ математики використовується для обчислення площ, об'ємів, та інших величин. Інтегральне числення використовується для розрахунку освітленості сцен, враховуючи внесок від різних джерел світла та їх взаємодію з матеріалами поверхонь. Методи глобального освітлення, такі як радіозіті і методи трасування променів, часто використовують інтеграли для точного обчислення освітленості. Техніки Монте-Карло, які використовують випадкові зразки для апроксимації складних інтегралів, широко застосовуються для симуляції освітлення в комп'ютерній графіці. Це дозволяє візуалізувати реалістичні ефекти, такі як м'які тіні, глибина різкості, та індиректне освітлення. Інтегральне числення використовується для моделювання та анімації динамічних систем, таких як рідини і тканини. Воно допомагає в розрахунках, пов'язаних з в'язкістю, тиском та об'ємними змінами.

Матриці в КГ використовуються для перетворення об'єктів у 2D та 3D просторах, таких як переміщення, масштабування, обертання та інші трансформації. Матричні операції лежать в основі багатьох алгоритмів комп'ютерної графіки, зокрема для рендерингу 3D-сцен, анімацій, моделювання об'єктів і створення віртуальних середовищ. Вони застосовуються в різних аспектах розробки ігор, включаючи графіку, фізику, анімацію, і керування камерою. Матричні операції у

відеоіграх мають вирішальне значення для створення динамічних, інтерактивних і візуально привабливих ігрових сцен.

Використання математики не лише поліпшує якість та реалістичність візуальних ефектів, але й забезпечує оптимізацію процесів, знижуючи вимоги до обчислювальних ресурсів. Таким чином, математика є необхідним інструментом у галузі сучасної комп'ютерної графіки, що дозволяє створювати все більш складні та реалістичні цифрові світи.

Перелік посилань

- [1] Романюк О. Н., Романюк О. В., Чехмestрук Р. Ю. (2023). *Комп'ютерна графіка: навчальний посібник*. Вінниця: ВНТУ.
- [2] Романюк О. Н., Романюк О. В., Ціхановська О. М., Котлик С. В. (2021). Вимоги до розробки комп'ютерних ігор. *Матеріали I Всеукраїнської науково-технічної конференції молодих вчених, аспірантів та студентів «Комп'ютерні ігри та мультимедіа як інноваційний підхід до комунікації»*, Одеса, 25–26 березня 2021 р., pp. 73–77.
- [3] Романюк С. О., Павлов С. В., Романюк О., Тітова Н. В. (2020). Інтелектуалізовані високопродуктивні системи планування пластичних і реконструктивних операцій на обличчі людини. *Опт-ел. інф-енерг. техн.*, vol. 40, no. 2, pp. 57–65.
- [4] Романюк О. Н., Кательніков Д. І., Косовець О. П. (2007). *Веб-дизайн і комп'ютерна графіка: навчальний посібник*. Вінниця: ВНТУ.
- [5] Петух А. М., Обідник Д. Т., Романюк О. Н. (2007). *Інтерполяція в задачах контурного формування: монографія*. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця.
- [6] Романюк О. Н., Чорний А. В. (2004). Реалізація рендерингу Фонга з використанням сферично-кутової інтерполяції. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, no. 1, pp. 66–72.
- [7] Романюк О. Н., Мельников О. М. (2006). Адаптивна нормалізація векторів нормалей при визначенні дифузної та спекулярної складової кольору. *Реєстрація, зберігання і обробка даних*, vol. 8, no. 3, pp. 11–19.
- [8] Романюк О. Н., Чорний А. В. (2006). *Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об'єктів: монографія*. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця.

Вплив запізнювання на регулярну та хаотичну динаміку неідеальної динамічної системи “бак з рідиною-електродвигун”

І. А. Сеїт-Джеліль

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ilmiseitdzeli117@gmail.com

Анотація

Розглянута неідеальна, за Зоммерфельдом-Кононенком, динамічна система “бак з рідиною - електродвигун” з урахуванням впливу факторів запізнювання. Встановлено, що наявність запізнювання може призвести до якісної зміни типів атракторів досліджуваної системи. Так регулярні атрактори системи можуть стати хаотичними, а хаотичні перетворитися у регулярні.

Ключові слова: запізнювання; регулярні атрактори; хаотичні атрактори.

В роботі [Krasnopolskaya, Shvets, 1991] була побудована математична модель неідеальної динамічної системи “бак з рідиною - електродвигун”. Була запропонована модель такої системи з урахуванням наявності двох факторів запізнювання, яка має вигляд

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1(\tau)}{d\tau} &= \alpha p_1(\tau) - [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau))]q_1(\tau) + \\
 &\quad + B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))p_2(\tau); \\
 \frac{dq_1(\tau)}{d\tau} &= \alpha q_1(\tau) + [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau))]p_1(\tau) + \\
 &\quad + B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))q_2(\tau) + 1; \\
 \frac{d\beta(\tau)}{d\tau} &= N_3 - \mu_1 q_1(\tau - \rho) + N_1 \beta(\tau); \\
 \frac{dp_2(\tau)}{d\tau} &= \alpha p_2(\tau) - [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau))]q_2(\tau) - \\
 &\quad - B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))p_1(\tau); \\
 \frac{dq_2(\tau)}{d\tau} &= \alpha q_2(\tau) + [\beta(\tau - \delta) + \frac{A}{2}(p_1^2(\tau) + q_1^2(\tau) + p_2^2(\tau) + q_2^2(\tau))]p_2(\tau) - \\
 &\quad - B(p_1(\tau)q_2(\tau) - p_2(\tau)q_1(\tau))q_1(\tau).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Фазові змінні p_1, q_1 та p_2, q_2 є амплітудами коливань вільної поверхні рідини за першою і другою основними домінантними модами відповідно; фазова змінна β пропорційна швидкості обертання вала електродвигуна; τ — безрозмірний час; α — коефіцієнт в'язкого демпфування; μ_1 — коефіцієнт пропорційності вібраційного моменту; N_1 — кут нахилу статичної характеристики електродвигуна. Параметри A і B є константами, що залежать від радіуса резервуара R і висоти наливої в нього рідини $-d$; N_3 — мультипараметр, який залежить від радіуса резервуара, довжини кривошипа та власної частоти основного тону коливань вільної поверхні [Krasnopolskaya, Shvets, 1991]. Параметр δ це запізнювання впливу імпульсу електродвигуна на бак з рідиною, а параметр ρ - запізнювання зворотного впливу коливань бака на функціонування двигуна.

Метою роботи є дослідження впливу значень параметрів δ та ρ на динамічні режими системи 1. За допомогою ряду чисельно-аналітичних методів, таких як метод Рунге-Кутти, метод Бенеттина та ін., метод Ено, були побудовані та досліджені фазові портрети, фазо-параметричні характеристики, спектри ляпуновських характеристичних показників, карти динамічних режимів [Shvets, Makaseyev, 2012]. На підставі цих досліджень були виявлено, що зі збільшенням значення запізнювання система може змінити характер динаміки як з регулярного на хаотичний, так і навпаки, з хаотичного на регулярний. Знайдено і описано реалізацію нових сценаріїв переходу до хаосу [Shvets, 2021] при біфуркаціях за запізнюванням.

Перелік посилань

Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu (1991). Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply. *8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms*. Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci., vol. 1, pp. 181–184.

Shvets A.Yu., Makaseyev A.M. (2012). Chaotic oscillations of nonideal plane pendulum systems. *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal*, № 1, pp. 195–204.

Shvets A. Yu. (2021). Overview of Scenarios of Transition to Chaos in Nonideal Dynamic Systems. *Springer Proceedings in Complexity*. Springer, Cham., vol. 3, pp. 853–864.

Оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ -субгауссовими величинами позовів

В. В. Селіванов¹, О. І. Василик¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

vasylyk@matan.kpi.ua

Анотація

Досліджується модель ризику, у якій процес ризику є сумою випадкової кількості позовів, розміри яких задаються φ -субгауссовими випадковими величинами з певною заданою функцією φ , а кількість позовів описується пуассонівським процесом. Отримано оцінку ймовірності банкрутства в такій моделі ризику.

Ключові слова: φ -субгауссові випадкові величини; ймовірність банкрутства; процес ризику.

Часто в прикладних дослідженнях для ефективного моделювання багатьох існуючих випадкових процесів використовуються гауссові випадкові процеси. Проте наразі відомо, що деякі з процесів актуарної та фінансової математики, які раніше вважалися гауссовими, не є такими, хоч і можуть бути близькими до них, через що виникла необхідність у дослідженні більш загальних класів випадкових процесів, зокрема, класу φ -субгауссових випадкових процесів. Детальному викладу теорії φ -субгауссових випадкових процесів присвячена монографія [Василик, Козаченко, Ямненко, 2008].

В роботах Ямненка Р.Є. зі співавторами [Ямненко, Василик, 2007], [Yamnenko, 2006], [Yamnenko, Lamin, 2022] теорія φ -субгауссових випадкових величин та процесів застосовується до задач знаходження оцінок ймовірності виходу траєкторій випадкових процесів за рівень, заданий деякою кривою. Такі задачі мають пряме застосування в теорії масового обслуговування, наприклад, для оцінювання ймовірності переповнення буфера для черги, та в страховій математиці для оцінювання ймовірності банкрутства в моделях ризику.

У даній доповіді буде представлено деякі результати магістерської дисертації [Селіванов, 2024], в якій продовжується дослідження моделей ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат з метою оцінювання ймовірності банкрутства у випадку деякої заданої функції φ .

Означення 1. [Василик, Козаченко, Ямненко, 2008] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ є монотонно зростаючою при $x > 0$ та мають місце границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

Означення 2. [Василик, Козаченко, Ямненко, 2008] N -функція Орліча задовольняє умову Q , якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ — стандартний імовірнісний простір, T — деякий параметричний простір.

Означення 3. [Василик, Козаченко, Ямненко, 2008] Нехай φ — N -функція, яка задовольняє умову Q . Центрована випадкова величина ξ є φ -субгауссовою випадковою величиною, якщо $\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Якщо випадкова величина ξ є φ -субгауссовою, то кажуть, що вона належить простору φ -субгауссових величин $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$, використовуючи для цього таке позначення:

$$\xi \in \mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega).$$

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то простір $\mathbf{Sub}_{\frac{x^2}{2}}(\Omega) = \mathbf{Sub}(\Omega)$ називається субгауссовим.

Теорема 1. [Buldygin, Kozachenko, 2000] Простір $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln \mathbf{E} \exp\{\lambda \xi\})}{\lambda},$$

де $\varphi^{(-1)}$ — обернена до φ функція.

Означення 4. [Василик, Козаченко, Ямненко, 2008]

Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається φ -субгауссовим процесом, якщо він задовольняє такі умови при всіх $t \in T$: $X(t) \in \mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$, $\sup_{t \in T} X(t) < +\infty$.

Розглянемо $X(t)$ — класичну модель ризику, що задається таким виразом:

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = u + ct - S(t), \quad t \in [a; b], \quad c = C - m\mu > 0, \quad (1)$$

де u — початковий капітал, C — інтенсивність надходження премій, m — середній розмір виплат, $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, $t \in [a; b]$, — процес ризику, та:

1. N_t — процес Пуассона, $\mathbf{E}(N_t) = \mu t$,
2. Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $\mathbf{E}(Y_i) = 0$,
3. N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \dots)$ — незалежні,
4. випадкові величини Y_i належать до простору $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$, де

$$\varphi(x) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \frac{x^2}{\omega}, & \text{якщо } |x| < 1; \end{cases} & \text{якщо } 2 < \omega < 3, \\ \frac{|x|^\omega}{\omega}, & x \in \mathbb{R}, \text{ якщо } 1 < \omega \leq 2; \end{cases}$$

Теорема 2. [Селіванов, 2024] Нехай випадковий процес $X(t)$ задається виразом (1) та задовольняє умови 1.-4. Тоді для всіх $p \in A$, де

$$A = \begin{cases} (0; 1), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) > \frac{1}{4}, \quad \tau_\varphi(Y_1) \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \\ \left(1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1); 1\right), & \text{якщо } \frac{1}{4} < \tau_\varphi(Y_1) \leq \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \\ (0; p_-) \cup (p_+, 1), & \text{якщо } \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}} \leq \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4}, \\ ((0; p_-) \cup (p_+, 1)) \cap \left(1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1); 1\right), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4}, \quad \tau_\varphi(Y_1) < \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}; \end{cases}$$

$$p_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau_\varphi(Y_1)}}{2}, \quad p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau_\varphi(Y_1)}}{2};$$

виконуються нерівності

$$P\left\{\sup_{t \in [a; b]} (S(t) - ct) > u\right\} \leq Z_0(u),$$

$$P\left\{\sup_{t \in [a; b]} (S(t) - ct) < -u\right\} \leq Z_0(u),$$

$$P\left\{\sup_{t \in [a; b]} |S(t) - ct| > u\right\} \leq 2Z_0(u),$$

де

$$Z_0(u) = \inf_{(\lambda; p) \in L} e^{2-b\mu} \frac{2^{2-p}}{p^{4-2p}} \cdot \exp \left\{ b\mu \exp \left\{ \frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega} \left(\frac{\lambda}{1-p} \right)^\omega \right\} + \right. \\ \left. + \frac{2\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} \lambda^\omega + \frac{(b-a)}{2} \frac{p^4}{1-p^2} \lambda - (u+bc)\lambda \right\},$$

L — множина значень $(\lambda; p)$ таких, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)} \left(1 + \left[\left(\frac{\omega c}{\mu \tau_\varphi(Y_1)} \frac{1-p}{p^{\omega-1}} \right)^{\frac{1}{\omega-1}} - 1 \right] \mathbb{I}_{\{p \in K\}} \right), \\ 0 < \lambda < 1, \\ p \in A; \end{cases}$$

$$K = \left\{ p \left| \frac{\mu \tau_\varphi(Y_1)}{\omega c} p^{\omega-1} + p - 1 > 0 \right. \right\}, \quad \mathbb{I}_{\{p \in K\}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } p \in K, \\ 0, & \text{якщо } p \notin K. \end{cases}$$

Отримані результати застосовано до процесів ризику, у яких страхові виплати мають субгауссовий розподіл та двосторонній розподіл Вейбулла.

Перелік посилань

Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ -субгауссові випадкові процеси: Монографія. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. — 232 с.

Селіванов, В. В. Оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ -субгауссовими величинами позовів : магістерська дис. : 111 “Математика” / Селіванов Віктор Васильович. — Київ, 2024. — 34 с.

Ямненко Р.Є., Василик О.І. Деякі властивості випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками // Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика. — 2007. — Вип. 1. — С. 133–148.

Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

Yamnenko R. Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion // Theory of Stochastic Processes. — 2006. — Т. 12 (28), № 3-4. — С. 261–275

Yamnenko, R., Lamin, A. (2022). Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ -sub-Gaussian claims. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences, (2), 20–27.

Застосування рангових коефіцієнтів для оцінки узгодженості рейтингів за різними факторами

О. О. Синявська¹, А. М. Тегза¹

¹ДВНЗ “Ужгородський національний університет”,
Ужгород, Україна

olga.synyavska@uzhnu.edu.ua, antonina.tegza@uzhnu.edu.ua

Анотація

Робота присвячена застосуванню парних рангових коефіцієнтів Спірмена, Кендалла та множинного коефіцієнту конкордації при дослідженні міри узгодженості оцінок різних показників рейтингової успішності університетів світу.

Ключові слова: коефіцієнт рангової кореляції Спірмена; коефіцієнт рангової кореляції Кендалла; коефіцієнт конкордації Кендалла; рівень значущості.

У випадку участі в експертизі декількох експертів в їх оцінках можуть бути розбіжності. Важливе значення має величина цих розбіжностей. Для аналізу розбіжності та узгодженості експертних оцінок застосовуються коефіцієнти рангової кореляції Спірмена, Кендалла та конкордації Кендалла.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена. Для оцінки сили зв'язку між ознаками X та Y у випадку, коли між ними існує нелінійний зв'язок або вибіркові дані не розподілені за нормальним законом використовують коефіцієнт рангової кореляції Спірмена.

Припустимо, що спостерігаються дві змінні X та Y і маємо n спостережень. Знайдемо їхні ранги, позначаючи як $(R_1, \dots, R_n)$ і $(S_1, \dots, S_n)$ відповідно.

За відсутності однакових рангів, коефіцієнт кореляції Спірмена обчислюється за формулою [Телейко, Чернова, 2007]:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^3 - n};$$

де d_i — різниці між рангами i -го значення X та відповідного значення Y .

Його значення змінюється у межах від -1 і до $+1$. Коли думки експертів збігаються, то коефіцієнт буде дорівнювати 1 . Якщо ж навпаки – думки експертів протилежні, то коефіцієнт дорівнювати -1 . Чим ближче абсолютне значення коефіцієнта рангової кореляції до одиниці, тим тіснішим є зв'язок між факторами.

Для перевірки значущості обчисленого коефіцієнта Спірмена застосовують критерій Стюдента [Телейко, Чернова, 2007].

Коефіцієнт рангової кореляції Кендалла (коефіцієнт τ Кендалла)

Коефіцієнти рангової кореляції Спірмена і Кендалла близькі один до одного за формулами розрахунків і за результатами (рис.1). Коефіцієнт Кендалла є альтернативою коефіцієнта рангової кореляції Спірмена, який доцільно застосовувати для вибірок малих розмірів або для категоризованих змінних.

Ідея застосування коефіцієнту рангової кореляції Кендалла базується на порівнянні пар спостережень. Для пари спостережень (x_i, y_i) , (x_j, y_j) кажуть, що вони узгоджені, якщо $x_i < x_j$ та $y_i < y_j$ або $x_i > x_j$ та $y_i > y_j$. А саме, порядок (i, j) однаковий в обох змінних. Така пара спостережень називається узгодженою, якщо $x_i < x_j$ та $y_i > y_j$ або $x_i > x_j$ та $y_i < y_j$. Зауважимо, що якщо існує рівність, то пари спостережень не є ні узгодженими, ні неузгодженими. Нехай через n_c і n_d позначимо кількість узгоджених і неузгоджених пар відповідно. Коефіцієнт Кендалла обчислюється за формулою: $\tau = \frac{n_c - n_d}{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

Якщо дві змінні додатно корельовані, то має бути більше узгоджених пар, ніж неузгоджених пар. З іншого боку, якщо дві змінні мають від'ємну кореляцію, то спостерігатиметься більше неузгоджених пар, ніж узгоджених пар.

Коефіцієнт рангової кореляції Кендалла приймає значення від -1 до 1 . Чим ближчим є значення $|\tau|$ до 1 , тим тіснішим є зв'язок між оцінками різних експертів.

Для перевірки значущості зв'язку між ознаками необхідно спостережуване значення коефіцієнта рангової кореляції Кендалла порівняти з його критичним значенням [Ольвінська, Самотоєнкова, 2015].

Коефіцієнт конкордації Кендалла. Найбільш цікавим практичним використанням рангової кореляції є питання про розгляд кореляційного зв'язку декількох ранжувальних рядів. Для цього застосовують коефіцієнт множинної рангової кореляції (коефіцієнт конкордації Кендалла), який оцінює ступінь узгодженості думок кількох експертів про ранжування чинників за даною ознакою.

Якщо ранги для кожної ознаки не повторюються, то коефіцієнт конкордації Кендалла обчислюється за формулою:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}, \quad S = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m r_{ij} - \frac{m(n+1)}{2} \right)^2,$$

де m – кількість експертів, n – кількість об'єктів, що порівнюються; r_{ij} – ранг, присвоєний i -му об'єкту j -им експертом.

Якщо зустрічаються пов'язані ранги, тобто ранги, що повторюються, то коефіцієнт конкордації розраховують з врахуванням кількості таких повторень [Legendre, 2015].

Цей коефіцієнт змінюється в межах 0 до 1. Чим ближчим він є до 1, тим вищим є ступінь узгодженості думок експертів.

Значимість зв'язку між ознаками перевіряється за критерієм χ^2 з $(n - 1)$ ступенями свободи.

Приклад 1. Файл *World University Rankings 2023.csv* [Дані, 2023] містить всесвітній рейтинг університетів і включає 1799 університетів у 104 країнах, що робить його найбільшим і найрізноманітнішим рейтингом університетів на сьогодні. Таблиця містить 100 перших за рейтингом університетів і базується на 13 ретельно відкаліброваних показниках ефективності, які вимірюють ефективність закладу в чотирьох сферах: викладання, дослідження, передача знань і міжнародна співпраця.

Перша колонка визначає узагальнений рейтинг університетів за всіма показниками. Починаючи з дев'ятої колонки містяться рейтинги за показниками, які характеризують ефективність закладу в чотирьох сферах, про які згадано вище. Перед застосуванням різних статистичних критеріїв, для загальної оцінки ситуації, можна візуалізувати ці рейтинги для окремо взятих університетів. Для прикладу порівняно Оксфордський університет (1-й за загальним рейтингом) і Паризький політехнічний інститут (95-тий за рейтингом). Як бачимо, з рис.1, Оксфордський університет має всі високі бали, крім оцінки доходу університету від партнерств та комерційної діяльності. Натомість, Паризький інститут має загалом низькі бали, проте бал, що показує рівень міжнародної співпраці (а також інші аспекти глобального впливу університету) оцінюється досить високо.

Для аналізу узгодженості між загальним рейтингом та різними показниками досліджено коефіцієнти Спірмена та Кендалла. Використовуючи коефіцієнт конкордації Кендалла, досліджено міру узгодженості оцінок між різними групами показників. Деякі результати виведені на рис.1.

Як за Спірменем ($r = 0.89$), так і за Кендалла ($\tau = 0.73$) із загальним рейтингом найбільш корелюється бал, що характеризує рівень дослідницької роботи університету. Причому ймовірнісний рівень прийняття нульової гіпотези є дуже малим, отже, приймаємо альтернативну гіпотезу і кажемо, що обидва коефіцієнти є значущими. Натомість між загальним рейтингом і рівнем міжнародної співпраці університету практично відсутня кореляція, що ми і спостерігали в частковому випадку на графічних прикладах Оксфордського університету і Паризького інституту.

Якщо дослідити множинну рангову групову кореляцію для всіх показників (починаючи з восьмої колонки), то очікувано одержали низький рівень узгодженості: коефіцієнт конкордації рівний 0.34. Перевіривши за критерієм χ^2 гіпотезу про



Рис. 1: Результати аналізу

рівність нулю цього коефіцієнта, одержали, що потрібно прийняти альтернативну гіпотезу, а отже, що цей коефіцієнт є значущим, але малим.

Натомість, якщо дослідити рангову кореляцію для трьох показників – загальний бал університету, що розраховується на основі сукупності певних критеріїв, бал, який відображає якість викладання в університеті та бал, що характеризує рівень дослідницької роботи університету, то одержуємо високий рівень узгодженості оцінок між даними показниками ($W = 0.75$) і він є значущим за критерієм χ^2 .

Перелік посилань

Телейко А.Б., Чорней Р.К. (2007). *Математико-статистичні методи в соціології та психології*. Київ: МАУП.

Ольвінська Ю.О., Самоєнкова О.В. (2015). Використання методу рангової кореляції при аналізі розвитку малого підприємництва. *Вісник соціально-економічних досліджень*, вип. 3, №. 58, pp. 160–169.

Legendre P. (2015). Species associations: the Kendall coefficient of concordance revisited. *JABES*, vol. 10, no. 2, pp. 226–245. <https://doi.org/10.1198/108571105X46642>

Джерело статистичних даних:

<https://www.kaggle.com/datasets/richardson/the-world-university-rankings-2011-2023>

Тривимірні звідні псевдоріманові простори

А. А. Соловйов¹, Л. О. Рашкова¹

¹Одеський Національний Університет імені І. І. Мечнікова,
Одеса, Україна

andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua

Анотація

У роботі досліджено звідні тривимірні псевдоріманові простори, встановлено їхні тензорні властивості, зокрема залежності між тензорами Річчі та кривини, а також доведено їхню рекурентність. Отримані результати можуть бути корисними для подальших досліджень у диференціальній геометрії та загальній теорії відності, теоретичній механіці при моделюванні фізичних процесів.

Ключові слова: псевдоріманові простори; тривимірні простори; звідні простори; рекурентні простори; Річчі-рекурентні простори.

Нехай V_n — псевдорімановий простір з метричним тензором g_{ij} , $n > 2$. Рімановий простір V_n називається (локально) звідним, якщо в деякому околі D кожної його точки M може бути вибрана така система координат $y^1, y^2, \dots, y^n$ відносно якої основна метрична форма має вигляд:

$$I = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b + g_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta, a, b, c = \overline{1, k}, \alpha, \beta, \gamma = \overline{k+1, n}.$$

Тут g_{ab} передбачаються залежними тільки від $x^1, x^2, \dots, x^k$, а $g_{\alpha\beta}$ — тільки від $x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n$.

Тензорною ознакою звідності псевдоріманового простору, яка була розглянута у [Doikov, Kiosak, 2020], є існування в ньому двічі коваріантного симетричного коваріантно сталого ідемпотентного тензору a_{ij} . Умова інтегрування тензору a_{ij} з урахуванням тотожності Річчі має вигляд

$$a_{i\alpha}R_{jkl}^\alpha + a_{\alpha j}R_{ikl}^\alpha = 0, \quad (1)$$

де R_{ijk}^h — тензор Рімана. З урахуванням алгебраїчної тотожності Б'янки проциклювавши рівняння (1) по індексах i, k, l отримаємо

$$a_{i\alpha}R_{jkl}^\alpha + a_{\alpha k}R_{jli}^\alpha + a_{\alpha l}R_{jik}^\alpha = 0.$$

Домножимо це рівняння на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k з урахуванням симетричності тензору a_{ij} :

$$a_{i\alpha}R_{\cdot l}^{\alpha} = a_{\alpha l}R_{\cdot i}^{\alpha}.$$

Таким чином, має місце

Теорема 1. *В звідних псевдоріманових просторах тензор a_{ij} комутує з тензором Річчі R_{ij} .*

У тривимірних псевдоріманових просторах тензор кривини записується у вигляді

$$R_{ijkl} = P_{il}g_{jk} - P_{ik}g_{jl} + P_{jk}g_{il} - P_{jl}g_{ik}. \quad (2)$$

Домножимо це рівняння на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k :

$$R_{il} = P_{il} + P g_{il}, \quad P \stackrel{\text{def}}{=} P_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \quad (3)$$

Рівняння (3) домножимо на g^{il} та згорнемо по індексах i, l і підставимо отримане значення P у співвідношення (3):

$$P_{il} = R_{il} - \frac{R}{4}g_{il}.$$

Отриманий вираз для P_{il} підставимо у (2)

$$R_{ijkl} = R_{il}g_{jk} - R_{ik}g_{jl} + R_{jk}g_{il} - R_{jl}g_{ik} - \frac{R}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}) \quad (4)$$

а цей, далі, підставимо у умову інтегрування тензору a_{ij} , відображене у (1)

$$\begin{aligned} & a_{\alpha i}(R_{\cdot l}^{\alpha}g_{jk} - R_{\cdot k}^{\alpha}g_{jl} + \delta_l^{\alpha}R_{jk} - \delta_k^{\alpha}R_{jl} - \frac{R}{2}(\delta_l^{\alpha}g_{jk} - \delta_k^{\alpha}g_{jl})) + \\ & + a_{\alpha j}(R_{\cdot i}^{\alpha}g_{lk} - R_{\cdot k}^{\alpha}g_{il} + \delta_l^{\alpha}R_{ik} - \delta_k^{\alpha}R_{il} - \frac{R}{2}(\delta_l^{\alpha}g_{ik} - \delta_k^{\alpha}g_{il})) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Проальтернуємо отриману рівність по індексах j, l , перепозначимо індекси i та l та додамо до (5). Отриману рівність домножимо на g^{jk} та згорнемо по індексах j, k :

$$6a_{\alpha l}R_{\cdot i}^{\alpha} - 2a_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}g_{il} - a_{il}R - 2aR_{li} + Ra_{li} = 0 \quad (6)$$

і, далі, домножимо на a_k^l з урахуванням ідемпотентності тензору a_{ij} , згорнемо по індексу l та замінемо індекс k на l :

$$a_{\alpha l}R_{\cdot i}^{\alpha} = a_{il}\frac{1}{2(3-a)}(2a_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R - Ra).$$

Тобто згортка $a_{\alpha l} R_{\cdot i}^{\alpha}$ виражається через a_{il} з коефіцієнтом. Врахуємо це у (6):

$$a_{il} = u g_{il} + v R_{il}, \quad (7)$$

де

$$u = (3 - a) \frac{2a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - Ra}{2(3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - Ra)}$$

$$v = (3 - a) \frac{a}{3a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - Ra}.$$

Таким чином, доведена

Теорема 2. *Тензор a_{il} , отриманий із тензорної ознаки звідності тривимірних псевдоріманових просторів, має вигляд (7).*

Зауважимо, що якщо $v = 0$, то $a_{il} = u g_{il}$, що є характерним для просторів Ейнштейна, у яких кривизна є сталою. Однак у просторах, розглянутих у цій роботі, це, загалом, не виконується. Таким чином, $v \neq 0$.

У тотожність (1) підставимо (7) з урахуванням $v \neq 0$.

$$R_{\alpha j} R_{ikl}^{\alpha} = -R_{\alpha i} R_{jkl}^{\alpha} \quad (8)$$

Вираз (4) домножимо на g^{im} , згорнемо по індексу i та підставимо замість індексу m індекс i . Отриманий вираз для тензора Рімана підставимо у (8), домножимо на g^{ik} , згорнемо по індексах i, k

$$R_{\alpha j} R_l^{\alpha} = \frac{1}{6} (3R_{jl} R + g_{jl} (2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R^2)) \quad (9)$$

Таким чином, доведено

Наслідок 1. *Тензор Річчі у звідних тривимірних псевдоріманових просторах має вигляд (9).*

При розгляданні (7) врахуємо ідемпотентність a_{il} . У отриману рівність підставимо вираз (9)

$$R_{il} v (1 - 2u - \frac{vR}{2}) = g_{il} (u^2 - u + \frac{v^2}{6} (2R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - R^2)).$$

Отримуємо, що тензор Річчі виражається через метричний тензор із деяким коефіцієнтом, що є характерним для просторів Ейнштейна, у яких кривизна є сталою. Однак у просторах, розглянутих у цій роботі, це, загалом, не виконується. Таким чином, отримана тотожність справедлива лише у випадку, коли коефіцієнти при

метриці та при тензорі Річчі одночасно дорівнюють нулю. Розглянемо коефіцієнт при тензорі Річчі:

$$1 - 2u - \frac{vR}{2} = 0 \quad (10)$$

Рівність (7) продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m з урахуванням коваріантної сталості тензору a_{il}

$$u_{,m}g_{il} + v_{,m}R_{il} + vR_{il,m} = 0 \quad (11)$$

та домножимо на g^{il} , згорнемо по індексах i, l : $-3u_{,m} = v_{,m}R + vR_{,m}$. З іншої сторони, продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m рівність (10): $-3u_{,m} = v_{,m}R + vR_{,m}$. Різниця цих двох рівнянь дає $u_{,m} = 0$. Перша рівність у зв'язку з $u_{,m} = 0$ набуває вигляду

$$v_{,m}R + vR_{,m} = 0. \quad (12)$$

Врахуємо $u_{,m} = 0$ у (11)

$$R_{il,m} = -\frac{v_{,m}}{v}R_{il}. \quad (13)$$

Простори, в яких коваріантна похідна тензорів Рімана або Річчі виражається через їх добуток з деяким іншим тензором або вектором були детально розглянуті у статті [Kiosak, Kusik, Isaiev, 2022]. Простори, у яких виконується (13) називають Річчі-рекурентними. Таким чином, доведена

Теорема 3. *Тривимірні звідні псевдоріманові простори Річчі-рекурентні.*

Рівність (4) продиференціюємо коваріантно за напрямком x^m з урахуванням (13) та (12)

$$R_{ijkl,m} = \frac{R_{,m}}{R}R_{ijkl}$$

Простори, у яких виконується (12) називають рекурентними. Таким чином, доведено, що тривимірні звідні псевдоріманові простори рекурентні.

Перелік посилань

D. Doikov., V. Kiosak. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2302, no 1. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>

Kiosak, V., Kusik, L., Isaiev, V. (2022). Geodesic Ricci-symmetric pseudo-Riemannian spaces. *Proceedings of the International Geometry Center*. vol. 15, no 2, pp. 110–120. <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i2.2224>

Властивості екстремумів сум зважених випадкових процесів із класів $V(\varphi, \psi)$

Д. В. Тихоненко¹, Р. Є. Ямненко¹

¹КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

tykhonenko.dmytro@gmail.com

Анотація

Вивчається оцінка ймовірності виходу суми незалежних випадкових процесів $\{X_i(t), t \in T\}$, що належать класам $V(\varphi, \psi)$, зважених деякими неперервними функціями $w_i(t)$, означених на компактній множині, за рівень $\epsilon > 0$, що заданий деякою, монотонно зростаючою кривою $\{f(t), t \in T\}$.

Ключові слова: оцінка; незалежний випадковий процес; неперервна функція; компактна множина; субгауссівський простір.

Оцінка ймовірностей є важливим процесом в багатьох сферах життя. Без неї неможливо уявити функціонування банківських установ, страхових чи фармакологічних компаній тощо.

Ми узагальнимо результати, отримані в статті [Kozachenko, Yamnenko, 2014], для зваженої суми незалежних процесів з класів $V(\varphi, \psi)$, розглянувши наступні функціонали

$$\sup_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^n w_i(t) X_i(t) - f(t) \right), \quad \inf_{t \in T} \left(\sum_{i=1}^n w_i(t) X_i(t) - f(t) \right),$$

де $f(t)$ є неперервною функцією яка, до прикладу, може описувати фінансові надходження в бюджет страхової компанії.

Теоретичні відомості щодо субгауссівських випадкових процесів, на які ми будемо опиратися надалі, були широко описані в книзі [Buldygin, Kozachenko, 2000].

Умова 1. N -функція φ задовільняє умову Q якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \alpha > 0$. Відзначимо що α може бути нескінченною в тому числі.

Означення 1. Нехай φ є N -функцією Орліча що задовільняє умову 1. Випадкова величина ξ належить простору $\text{SUB}_\varphi(\Omega)$ (простір φ -субгауссівських випадкових

величин), якщо вона центрована, тобто $\mathbf{E}\xi = 0$, функція моментів $\mathbf{E} \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ та існує константа $a > 0$ така що нерівність

$$\mathbf{E} \exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda))$$

виконується для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$.

Умова 2. Неперервна функція $f = \{f(t), t \in T\}$ задовільняє умову F якщо

$$|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u, v)),$$

де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ є деякою монотонно зростаючою невід'ємною функцією.

Умова 3. Незалежні сепарабельні випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in B\}$, $i = \overline{1, n}$, з класів $V(\varphi_i, \psi_i)$ задовільняють умову Σ якщо норми $\gamma_i(u) = \tau_{\psi}(X_i(u)) < \infty$ та існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\{\sigma_i(h), h \geq 0\}$ що $\sigma_i(h) \rightarrow 0$ коли $h \rightarrow 0$, $\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_{\varphi_i}(X_i(t) - X_i(s)) \leq \sigma_i(h)$, and $\sigma(h) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sigma_i(h) < \infty$.

Умова 4. Нехай $r = \{r(u), u \geq 1\}$ неперервна функція така, що $r(u) > 0$ коли $u > 1$ і функція $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \geq 0$, випукла. Незалежні сепарабельні випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in B\}$ з класів $V(\varphi_i, \psi_i)$ задовільняють умову R якщо вони задовільняють умову 3 та інтеграл за ентропією є скінченним для всіх $p \in (0, 1)$

$$I_{\sigma}(\beta, p) = \frac{1}{\beta p} \int_0^{\beta p} r \left(N_B(\sigma^{(-1)}(u)) \right) du < \infty, \quad (1)$$

де $\beta > 0$ є таким числом, що $\beta \leq \sigma \left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t, s) \right)$.

Теорема 1. Нехай незалежні сепарабельні випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in B\}$ з класів $V(\varphi_i, \psi_i)$ задовільняють умову 4 і неперервна функція $f = \{f(t), t \in T\}$ задовільняє умову 2. Тоді для всіх $p \in (0; 1)$ та $x > 0$ виконуються наступні нерівності

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} \left(\sum_{i=1}^n X_i(t) - f(t) \right) > x \right\} = \mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in B} \left(\sum_{i=1}^n X_i(t) - f(t) \right) < -x \right\} \leq Z_r(p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} \left| \sum_{i=1}^n X_i(t) - f(t) \right| > x \right\} \leq 2Z_r(p, \beta, x),$$

$$\begin{aligned} & \text{де } \theta_{\psi}(\lambda, p) = \sup_{u \in B} \left((1-p) \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\lambda \gamma_i(u)}{1-p} \right) - \lambda f(u) \right) \text{ та } Z_r(p, \beta, x) = r^{(-1)}(I_{\sigma}(\beta, p)) \times \\ & \times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \theta_{\varphi}(\lambda, p) + p \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(\frac{\lambda \beta}{1-p} \right) + \lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x \right) \right\}. \end{aligned}$$

Наступні результати були отримані в статті [Tykhonenko, Yamnenko, 2023] та базуються на узагальненні теореми 1 з [Kozachenko, Yamnenko, 2014].

Умова 5. Незалежні сепарабельні випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in B\}$, $i = \overline{1, n}$, з класів $V(\varphi_i, \psi_i)$ зв'язані неперервними функціями $\{w_i(t), t \in B\}$ задовільняють умову $W\Sigma$ якщо норми $\gamma_i(u) = \tau_\psi(X_i(u)) < \infty$ та існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\{\sigma_i(h), h \geq 0\}$ що $\sigma_i(h) \rightarrow 0$ коли $h \rightarrow 0$,

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \tau_{\varphi_i}(w_i(t)X_i(t) - w_i(s)X_i(s)) \leq \sigma_i(h), \text{ та } \sigma(h) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sigma_i(h) < \infty.$$

Умова 6. Нехай $r = \{r(u), u \geq 1\}$ неперервна функція така що $r(u) > 0$ коли $u > 1$ і функція $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \geq 0$, є випуклою. Незалежні сепарабельні випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in B\}$ з класів $V(\varphi_i, \psi_i)$ задовільняють умову $RW\Sigma$ якщо вони задовільняють умову 5 та інтеграл за ентропією (1) є скінченним.

Теорема 2. Нехай незалежні сепарабельні випадкові процеси $X_i = \{X_i(t), t \in B\}$ з класів $V(\varphi_i, \psi_i)$ зв'язані неперервними функціями $\{w_i(t), t \in B\}$ задовільняють умову 6 та неперервна функція $f = \{f(t), t \in B\}$ задовільняє умову 2. Тоді для всіх $p \in (0; 1)$ та $x > 0$ виконуються наступні нерівності

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} \left(\sum_{i=1}^n w_i(t) X_i(t) - f(t) \right) > x \right\} \leq Z_r(p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \inf_{t \in B} \left(\sum_{i=1}^n w_i(t) X_i(t) - f(t) \right) < -x \right\} \leq Z_r(p, \beta, x),$$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \in B} \left| \sum_{i=1}^n w_i(t) X_i(t) - f(t) \right| > x \right\} \leq 2Z_r(p, \beta, x),$$

$$\begin{aligned} de \theta_\psi(\lambda, p) &= \sup_{u \in B} \left((1-p) \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\lambda w_i(u) \gamma_i(u)}{1-p} \right) - \lambda f(u) \right) \text{ та } Z_r(p, \beta, x) = r^{(-1)}(I_\sigma(\beta, p)) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ \theta_\psi(\lambda, p) + p \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(\frac{\lambda \beta}{1-p} \right) + \lambda \left[\sum_{k=2}^{\infty} \delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^{k-1})) - x \right] \right\}. \end{aligned}$$

Перелік посилань

Buldygin V.V., Kozachenko Y.V. (2000). *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-0533-6.

Kozachenko Y.V., Yamnenko R.Y. (2014). Application of φ -sub-Gaussian random processes in queueing theory. *Modern Stochastics and Applications. Series: Springer Optimization and Its Applications*, vol. 90, pp. 21–38.

Tykhonenko D.V., Yamnenko R.Y. (2023). Supremum Distribution of Weighted Sum of Random Processes from Orlicz Spaces of Exponential Type with Continuous Deviation. *Austrian Journal of Statistics*, vol. 52, no. SI, pp. 94–106.

Майже ейнштейнові напівзвідні простори

Ю. С. Федченко¹, О. В. Лесечко², Я. Г. Мар'янюк²

¹Одеський національний технологічний університет, Одеса, Україна

²Одеська державна академія будівництва та архітектури,
Одеса, Україна

fedchenko20@ukr.net

Анотація

Розглядаються напівзвідні псевдоріманові простори з алгебраїчними умовами на тензор Річчі та тензор Рімана. Для майже ейнштейнових та слабо рекурентних просторів знайдено вид тензорної ознаки напівзвідності та вивчені деякі їх властивості. Дослідження ведуться локально в тензорній формі.

Ключові слова: тензор Рімана; тензор Річчі; напівзвідні простори; майже ейнштейнові простори; слабо рекурентні простори.

Напівзвідним розкладом метрики псевдоріманового простору V_n ($n > 2$) з метричним тензором g_{ij} називають її представлення в виді

$$ds^2 = ds_1^2(x^1, x^2, \dots, x^r) + \sigma(x^1, x^2, \dots, x^r) ds_2^2(x^{r+1}, x^{r+2}, \dots, x^n).$$

Тут ds_1^2 та ds_2^2 — самостійні метрики, що залежать від різних координат, а функція σ залежить лише від координат ds_1^2 .

Простір V_n , що допускає хоча б один напівзвідний розклад називають *напівзвідним*. Напівзвідні простори [Fedchenko, Ogorodnichuk, Ugoľnikov, 2022] узагальнюють звідні простори.

Для того, щоб псевдоріманів простір V_n був напівзвідним необхідно та достатньо, щоб в ньому існував симетричний ідемпотентний тензор, не пропорційний метричному, такий, що

$$b_{\alpha i} b_j^\alpha = b_{ij}, \quad (1)$$

$$b_{ij,k} = u_i b_{jk} + u_j b_{ik}. \quad (2)$$

Тут $u_i = u_{,i} = \partial_i u$ — деякий градієнтний вектор, кома — знак коваріантної похідної, а $b_j^i = b_{\alpha j} g^{\alpha i}$, g^{ij} — елементи оберненої матриці до g_{ij} .

Рівняння (1) та (2) називають *тензорною ознакою напівзвідності псевдоріманових просторів* [Doikov, Kiosak, 2020].

Розглянемо напівзвідні псевдоріманові простори з умовами алгебраїчного характеру, що накладаються на тензор Річчі.

Тензор E_{ij} такий, що

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij},$$

називають *тензором Ейнштейна*.

Тоді тензор D_{ij} , для якого

$$E_{ij} - D_{ij} = 0,$$

називають *тензором деформації тензора Ейнштейна*. Для просторів Ейнштейна $D_{ij} = 0$.

Простори, в яких тензор деформації тензора Ейнштейна має вигляд

$$D_{ij} = \lambda_i \lambda_j,$$

називають *майже ейнштейновими просторами*. Де λ_i — деякий не нульовий градієнтний вектор [Kiosak, Savchenko, Khniunin, 2020].

Мають місце теореми:

Теорема 1. Для напівзвідних псевдоріманових просторів $V_n (n > 2)$ тензор деформації тензора Ейнштейна задовольняє умові

$$b_{\alpha i} D_i^\alpha - b_{\alpha i} D_i^\alpha = 0.$$

Теорема 2. В напівзвідних псевдоріманових майже ейнштейнових просторах вектор λ_i із рівняння

$$R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} = \lambda_i \lambda_j.$$

є власним вектором матриці тензора b_{ij} , а власне число приймає значення 0 або 1.

Теорема 3. В напівзвідних майже ейнштейнових псевдоріманових просторах вектор u_i із рівняння (2) задовольняє умові

$$b(u_{i,i} - u_i u_i) = (u_{\alpha}^{\alpha} - u_{\alpha} u^{\alpha} + \frac{R}{n}) b_{li} + e \lambda_l \lambda_i - b_{\alpha\beta} R_{ij}^{\alpha\beta},$$

де e приймає значення 0 або 1.

Псевдоріманові простори, в яких виконується умова

$$\rho_l R_{ijk}^h + \rho_j R_{ikl}^h + \rho_k R_{ilj}^h = 0,$$

називають *слабо рекурентними просторами* [Kiosak, Latysh, Kuz'mich, 2024].

Теорема 4. *В напівзвідних слабо рекурентних просторах вектор u_i задовольняє одній із умов*

$$b(u_{i,j} - u_i u_j) = (u_{\alpha,}^{\alpha} - u_{\alpha} u^{\alpha} + b^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}) b_{ij} - b_{\alpha\beta} R_{ij}^{\alpha\beta},$$

$$u_{l,i} - u_i u_l + u_{\alpha} u^{\alpha} b_{il} = c \tau_l \tau_i,$$

$$u_{i,j} - u_i u_j + u^{\alpha} u_{\alpha} b_{ij} = b_i^{\alpha} R_{\alpha j} - R_{ij}.$$

Таким чином, знайдемо умови, яким за необхідністю задовольняє вектор із тензорної ознаки напівзвідності для майже ейнштейнових просторів та слабо рекурентних псевдоріманових просторів.

Перелік посилань

Fedchenko Yu., Ogorodnichuk I., Ugol'nikov A. (2022). Pseudo-Riemannian spaces with semireducible metrics. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2522, no. 120001. <https://doi.org/10.1063/5.0100795>.

Doikov D., Kiosak V. (2020). On the Schwarzschild model for gravitating objects of the Universe. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2302, no. 040001. <https://doi.org/10.1063/5.0033657>.

Kiosak V., Savchenko S., Khniunin S. (2020). On the typology of quasi-Einstein spaces. *AIP Conference Proceedings*, vol. 2302, no. 040003. <https://doi.org/10.1063/5.0033700>.

Kiosak V., Latysh O., Kuz'mich V. (2024). Split curvature. *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 17, no. 3, pp. 232-243. <https://doi.org/10.15673/pigc.v17i3.2817>.

Роль математичних методів у геоінформаційній розвідці (GEOINT)

Д. О. Чередько¹

¹*ІСЗЗІ КПП ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

denischeredko@gmail.com

Анотація

Геоінформаційна розвідка (GEOINT) інтегрує географічні дані, інформаційні технології та математичні підходи для опрацювання просторової інформації. Важливість математичних методів у цій сфері є визначальною, адже вони дозволяють формувати ефективні рішення у сферах безпеки, екологічного моніторингу та стратегічного планування.

Ключові слова: геоінформаційна розвідка (GEOINT); просторові дані; математичні методи; нейронні мережі; кригінг; K-means; штучний інтелект; супутникові знімки; аналіз даних.

Геоінформаційна розвідка (GEOINT) є міждисциплінарною галуззю, що об'єднує математичне моделювання, географічні інформаційні системи та алгоритми штучного інтелекту. У [Goodchild, Hill, 2008] зазначається, що основна мета GEOINT полягає в інтеграції математичних моделей і алгоритмів для отримання та аналізу просторових даних, що дає змогу обґрунтовано приймати рішення в різних сферах діяльності, таких як безпека та екологічний моніторинг.

Одним із ключових напрямів GEOINT є аналіз супутникових знімків для ідентифікації змін у міській забудові після природних катастроф. Використання нейронних мереж, зокрема Convolutional Neural Networks (CNN), забезпечує можливість розпізнавання масштабних руйнувань. [Zhou, Liao, 2019] підкреслюють важливість застосування таких інструментів для покращення якості даних та розпізнавання змін у ландшафті.

Просторове моделювання відіграє значну роль у GEOINT. Один із широко застосовуваних методів – кригінг – допомагає прогнозувати рівень забруднення повітря в регіонах із недостатнім числом датчиків. Це дозволяє створювати точні екологічні карти та приймати зважені управлінські рішення. У [Sutton, Barto, 2018] наведено приклади застосування методів машинного навчання для прогнозування і аналізу просторових даних.

Застосування математичних моделей дозволяє ефективно аналізувати переміщення об'єктів, таких як військова техніка, морські судна або навіть міграція тварин. Наприклад, моделі Маркова використовуються для прогнозування можливих маршрутів кораблів та визначення ймовірних точок їх зупинки у реальному часі. Це має велике значення для забезпечення морської безпеки, моніторингу торговельних шляхів і захисту кордонів.

Кластеризаційні методи, такі як алгоритм K-means, є незамінними у виявленні зон підвищеної активності, наприклад, у регіонах з нелегальним вирубуванням лісів. Це дозволяє оперативно визначати проблемні території та планувати заходи з їх моніторингу.

Штучний інтелект відіграє ключову роль у автоматизації аналізу геопросторових даних. Алгоритми глибокого навчання здатні розпізнавати військові об'єкти та інші ключові елементи на супутникових знімках. Наприклад, сучасні геоінформаційні платформи, такі як Google Earth Engine, дозволяють виявляти зміни ландшафту, прогнозувати ризики стихійних лих (повені, зсуви ґрунту) та сприяти оперативному реагуванню на надзвичайні ситуації.

Висновки. Математика є основою геоінформаційної розвідки, адже саме вона забезпечує можливість створення ефективних методів аналізу, візуалізації та прогнозування. У сучасному світі, де обсяг геопросторових даних стрімко зростає, роль математичних методів стає дедалі важливішою. Це відкриває нові перспективи для управління ресурсами, забезпечення безпеки та моніторингу навколишнього середовища.

Перелік посилань

Goodchild M. F., Hill L. L. (2008). *Introduction to Geospatial Information Science and Technology*. Wiley.

Zhou Q., Liao H. (2019). *Geospatial Data Analysis: New Techniques and Tools for Spatial Information Systems*. Springer.

Sutton R. S., Barto A. G. (2018). *Reinforcement Learning: An Introduction*. MIT Press.

II

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

METHODS OF TEACHING MATHEMATICS AND MODERN EDUCATIONAL TECHNOLOGIES IN HIGHER EDUCATION

Visualization in Maple for Learning Differential Calculus

O. M. Shevtsova¹

¹*National University 'Kyiv-Mohyla Academy', Kyiv, Ukraine*

`o.shevtsova@ukma.edu.ua`

Abstract

Visualization plays a crucial role in understanding concepts in Differential Calculus [Arcavi, 2003].

Maple is a comprehensive general-purpose computer algebra system. It is used primarily in educational and scientific research in mathematics and engineering. Maple offers many visualization tools. Using Maple, students can explore functions, analyze their derivatives, and draw tangent lines. In this paper, we consider two problems and their visualization in Maple by providing graphical representations of a function and its tangent.

Keywords: Differential Calculus; Derivative; Tangent line equation; Cubic function; Maple.

1 Find the Function Equation

Cubic functions are useful tools in learning outcomes of Differential Calculus [Alt, 2014]. They illustrate behavior of a derivative of a function, critical points, concavity, and inflection points. Since a cubic function has both a local maximum and a local minimum, students can explore key concepts such as the first and second derivative tests. Cubic functions are widely used in physics, engineering, and economics to model real-world problems involving rates of change.

1.1 Problem 1

A cubic function has a maximum point $H(0, 3)$. The equation of the tangent line at the point $P(1, y_p)$ is $3x + y = 4$. Find the equation of the function.

1.2 Solution to Problem 1

A cubic function is a polynomial function of degree 3 and is of the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where a , b , c , and d are real numbers and $a \neq 0$. Substituting $x = 0$ into $f(x)$, we get $d = 3$.

Since $H(0, 3)$ is a maximum, the derivative $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ must be equal to zero at $x = 0$. Setting $f'(0) = 0$, we get $c = 0$.

Since the function passes through the point $P(1, y_p)$, we set $f(1) = y_p$ which must satisfy the equation $a + b + 3 = 1$.

Also, since the derivative at $x = 1$ must be equal to the slope of the tangent, we get the condition $3a + 2b = -3$. Now we write the system of equations:

$$\begin{cases} a + b + 3 = 1, \\ 3a + 2b = -3. \end{cases}$$

Solving for a and b , we get $a = 1$, $b = -3$. Thus, the function equation is $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. The final visualization of the problem is presented in Fig.1.

```
with(plots);  
f := x^3 - 3*x^2 + 3;  
t := 4 - 3*x;  
ft := plot([f, t], x = -3 .. 4, y = -7 .. 7,  
color = [blue, magenta]);  
p_PH := plot([[1, 1], [0, 3]], font = [TIMES, BOLD, 20],  
style = point, color = "DarkBlue",  
symbolsize = 20, symbol = solidcircle);  
t_PH := textplot([[1, 1, "P"], [0, 3, "H"]], color = "DarkBlue",  
'align' = {'above', 'right'}, 'font' = [TIMES, BOLD, 20]);  
plots[display]([ft, p_PH, t_PH]);
```

1.3 Problem 2

The cubic function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, given by the equation $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ passes through the points $P(-2, -1)$ and $Q(1, 2)$. The tangent to the curve f at the point P has a slope of $k = 4$. Find the function equation of f .

1.4 Solution to Problem 2

Since the point $P(-2, -1)$ lies on the curve $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ we get the equation $4a - 2b + c = 7$. Similarly, since the point $Q(1, 2)$ lies on the curve $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ we obtain the equation $a + b + c = 1$.

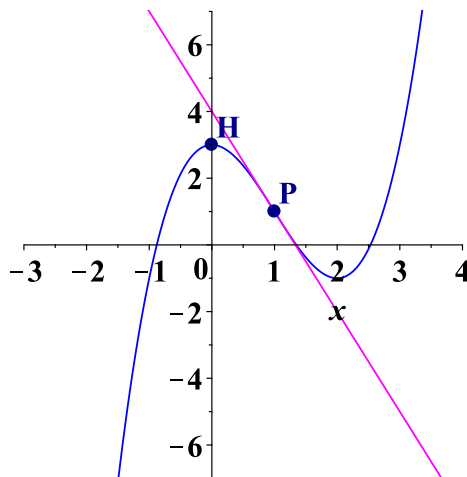


Figure 1: Visualization of Problem 1.

The condition that the derivative of $f(x)$ is $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ and the slope at the point $P(-2, -1)$ is 4 leads to the equation $-4a + b = -8$. Then, solving the system:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 7, \\ a + b + c = 1, \\ -4a + b = -8, \end{cases}$$

we get the values $a = 2, b = 0, c = -1$. Thus the function equation is: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

1.5 Visualization to Problem 2

To visualize problem 2, (Fig.2), we use the following Maple commands:

```
with(Student[Calculus1]);
f := x^3 + 2*x^2 - 1;
tf := Tangent(f, x = -2);
with(plots);
ft := plot([f, tf], x = -3 .. 2,
           y = -6 .. 8, color = [blue, magenta]);
PQ := plot([[ -2, -1], [1, 2]],
           color = "DarkGreen",
           font = [TIMES, BOLD, 10],
```

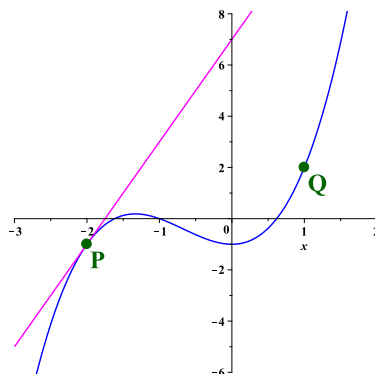


Figure 2: Visualization of Problem 2.

```

style = point,
symbolsize = 20,
symbol = solidcircle);
sP := textplot([[ -2, -1, "P"],
[1, 2, "Q"]],
'font' = [TIMES, BOLD, 20],
style = point,
color = "DarkGreen",
'align' = {'below', 'right'});
plots[display]([ft, PQ, sP]);

```

2 Conclusion

Visualization is essential for grasping concepts of Differential Calculus. Maple allows students to visualize 2-D and 3-D plots, and create beautiful and informative animations. The purpose of the paper is to get students involved in learning mathematics including graphical representation using Maple tools.

References

- Arcavi A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 52, pp. 215–241.
- Alt A. (2014). A Laboratory on Cubic Polynomials. *Crux mathematicorum*, vol. 40, no. 5, pp. 207–210.

Generalized Bernoulli equation as a source for generating tasks of increased complexity

H. Ya. Tuluchenko¹

¹*National Technical University 'Kharkiv Polytechnic Institute',
Kharkiv, Ukraine*

tuluchenko@ukr.net

Abstract

The technology of creating problems of increased complexity based on generalized ordinary Bernoulli differential equations is considered.

Keywords: generalized Bernoulli equation; advanced problems.

Problems of increased complexity play a key role in the development of mathematical abilities of students who have a high level of previous training. Such problems stimulate students to creative search, develop their ability to abstract thinking and ingenuity. Successfully solving complex problems increases the student's self-esteem, his confidence in his abilities and motivates him to further study.

When developing such tasks, the teacher must maintain a balance between complexity and accessibility. The tasks should be complex enough to stimulate students' critical thinking, but at the same time understandable for solving. A task that is too complex can demotivate students, and one that is too simple will not produce the desired effect.

Problems of increased complexity are of particular methodological interest when they allow not only varying numerical parameters but also modifying the structure of the problem itself while preserving its core idea. This potential can be fully realized when developing advanced problems in the topic 'Ordinary Differential Equations'.

Scientists are exploring different ways to generalize Bernoulli's ordinary differential equation. Consider the generalization proposed in [Azevedo, Valentino, 2017]:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)h(y) = Q(x)g(y), \quad (1)$$

where $P(x)$ and $Q(x)$ are known functions; $h(y)$ and $g(y)$ are known functions from unknown function $y(x)$.

The authors of the aforementioned work demonstrated that given a relationship between known functions:

$$h(y) = g(y) \cdot \int \frac{dy}{g(y)}, \quad (2)$$

equation (1) can be transformed into a linear equation:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x) \quad (3)$$

by substitution:

$$u = \frac{h(y)}{g(y)}. \quad (4)$$

To create training examples, it is recommended to choose functions such as the function $g(x)$ for which the integral of formula (2) is calculated analytically. For example:

$$(a^2 + y^2), \quad \frac{a^2 + y^2}{y}, \quad \cos^2 y, \quad \frac{1}{\ln y}, \quad \frac{a + \exp(y)}{\exp(y)} \quad etc.$$

The values for the coefficients $P(x)$ and $Q(x)$ should be selected from linear equations found in abundance in various collections of higher mathematics problems. This ensures that we obtain an equation that has an exact solution and can be solved using the aforementioned algorithm.

Example. Solve ODE:

$$2 \cdot \frac{dy}{dx} + \cos x \cdot \sin 2y = \sin 2x \cdot \cos^2 y. \quad (5)$$

Solution process. From equation (5) we find that in this case:

$$P(x) = \cos(x), \quad Q(x) = \frac{1}{2} \sin(2x), \quad h(y) = \frac{1}{2} \sin(2y), \quad g(y) = \cos^2 y.$$

We verify that relation (2) holds:

$$\cos^2 y \cdot \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 y \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{2} \sin 2y = h(y).$$

We apply the substitution (4) to the given equation:

$$u = \operatorname{tg} y.$$

and we obtain a linear equation of the form (3):

$$\frac{du}{dx} + \cos x \cdot u = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

We solve the last equation in the traditional way and find its general solution:

$$u = \sin x - 1 + C \exp(-\sin x).$$

We return to the desired function $y(x)$ and have the general solution of the given equation:

$$\operatorname{tg} y = \sin x - 1 + C \exp(-\sin x).$$

Note that the transformations omitted from this abstract have a separate educational value for students.

A promising direction for continuing work on the topic of abstract is the creation of an interactive application that facilitates the generation of problems based on the generalized Bernoulli equation. The implementation of this idea together with students who have sufficient programming skills allows for the full realization of interdisciplinary connections and the visual demonstration of the effectiveness of the integration of various sciences.

References

Azevedo D., Valentino, M.C. (2017). Generalization of the Bernoulli ODE. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no. 48(2), pp. 256–260. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1201599>

Про математичні моделі випадкового досліджу

В. В. Бакун¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

bakun@matan.kpi.ua

Анотація

Побудовано різні математичні моделі випадкового досліджу для однієї і тієї ж ймовірнісної задачі. Наведено нові приклади задач для геометричної моделі випадкового досліджу.

Ключові слова: математична модель випадкового досліджу; простір елементарних подій; геометрична ймовірність.

Базовим компонентом розв'язання задач з теорії ймовірності є побудова математичної моделі S випадкового досліджу, себто його ймовірнісного простору, який складається з простору елементарних подій Ω , σ -алгебри $\mathfrak{U}_\sigma$ або алгебри подій $\mathfrak{U}$ та ймовірності P , означеній на ній. Якщо розуміння третього елемента математичної моделі, як правило, не складає труднощів для студентів, то чітке описання простору елементарних подій досліджу та хоч якась згадка про σ -алгебру подій часто відсутні у їх роботах, позаяк ці елементи моделі студенти, можливо, вважають очевидними.

Справді, у випадку дискретного випадкового досліджу σ -алгеброю його подій, на якій і означають ймовірність, є сукупність всіх підмножин простору елементарних подій. Тоді як сам простір елементарних подій Ω не є однозначно заданим і може бути вибраним у різний спосіб. Розглянемо, наприклад, найпростішу задачу.

Задача 1. *Нехай студенти групи з восьми осіб у довільному порядку утворюють чергу для захисту бакалаврських дипломних проєктів. Знайти ймовірність того, що два зазначених студента будуть захищати свої проєкти один за одним.*

1-й спосіб. Припишемо кожному студенту його номер за списком групи. Тоді за елементарні події у першій моделі досліджу $S(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ можна вибрати перестановки чисел $1, 2, \dots, 8$

$$\omega = (x_1; x_2; \dots; x_8),$$

у яких на i -му місці стоїть номер x_i студента, що захищає свій проект i -м у черзі.

2-й спосіб. За елементарні події першої моделі досліді $S'(\Omega', \mathfrak{U}', P')$ також виберемо перестановки чисел $1, 2, \dots, 8$

$$\omega' = (y_1; y_2; \dots; y_8),$$

у яких на i -му місці стоїть номер місця y_i у черзі, під яким захищає свій проект i -й студент за списком групи.

Хоча перестановки ω і ω' різні, але між ними, так як і між всіма іншими подіями цих моделей досліді $A \in \mathfrak{U}$ та $A' \in \mathfrak{U}'$, існує взаємно однозначна попарна відповідність така, що

$$P(A) = P(A').$$

Отже, такі моделі S та S' можна назвати *тотожними* або *еквівалентними* та позначати як $S \sim S'$.

3-й спосіб. За елементарні події третьої моделі досліді $S''(\Omega'', \mathfrak{U}'', P'')$ виберемо, скажімо, упорядковані пари

$$\omega'' = (x; y),$$

елементи яких є ті номери місць, під якими опинилися у черзі зазначені студенти. Очевидно, що множина Ω'' є повною групою подій з алгебри $\mathfrak{U}''$, елементи якої мають такі самі ймовірності, що і у моделі S' , тож модель S'' можна називати *збідненням* (*утисненням*, *укрупненням*) математичної моделі S' (чи S) та можна позначати як $S'' \sqsubset S'$.

4-й спосіб. За елементарні події четвертої моделі досліді $S'''(\Omega''', \mathfrak{U}''', P''')$, подібно до попереднього випадку, виберемо неупорядковані пари

$$\omega''' = \{x; y\}$$

номерів місць, під якими опинилися у черзі зазначені студенти. Тоді $S''' \sqsubset S''$.

Ще більша варіативність математичної моделі випадкового досліді можлива у задачах, що допускають геометричне означення ймовірності. Так майже у кожному підручнику з теорії ймовірності можна знайти таку задачу про зустрічі.

Задача 2. *Нехай дві особи X і Y домовилися зустрітися у проміжок часу протягом 60 хв. (починаючи з певного моменту часу), до того ж той, хто прийде першим, має чекати не більше 15 хв. Знайти ймовірність події A , яка полягає у тому, що зустріч відбудеться, якщо кожен з них може прийти на місце зустрічі рівноможливо у будь-який момент часу протягом обумовленого проміжку.*

Як правило у цій задачі пропонується за елементарні події випадкового досліді вибрати упорядковані пари чисел $\omega = (x, y)$, де число x – це момент появи на місці

зустрічі особи X , а число y – особи Y (якщо їх вимірювати у хвилинали, починаючи від обумовленого моменту часу). Тоді матимемо

$$\Omega = \{\omega = (x; y) : x \in [0; 60], y \in [0; 60]\} = [0; 60] \times [0; 60],$$

$$A = \{\omega = (x; y) \in \Omega : |x - y| \leq 15\}.$$

У той же час за елементарні події досліду можна покласти упорядковані пари $\omega' = (x, y)$, у яких x – це момент появи на домовленому місці зустрічі першої людини (особи X чи особи Y), а y – це час, який пройшов після моменту появи на зустрічі першої людини до моменту появи на ній другої. У такому разі

$$\Omega' = \{\omega' = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 60\},$$

$$A = \{\omega' = (x; y) \in \Omega : y \leq 15\}.$$

Задача 3. У півкрузі радіуса $a > 0$ навмання вибрано точку M . Знайти ймовірність того, що довжина відрізка $[0, M]$ менша за половину радіуса півкруга, а гострий кут нахилу відрізка до діаметра півкруга менший за $\frac{\pi}{4}$ радіан, якщо t . O – це середина діаметра.

Як і до цього, нехай A – це подія, що зазначена в умові.

1-й спосіб. Проводимо вісь абсцис вздовж діаметра півкруга з центром у його середині, а вісь ординат – у напрямку дуги півкруга. За елементарні події досліду ω вибираємо координати т. M у побудованій декартовій системі координат:

$$\Omega = \{\omega = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\},$$

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}, y \leq |x| \right\}.$$

2-й спосіб. Проводимо полярну піввісь вздовж діаметра півкруга з центром у його середині. За елементарні події досліду ω' вибираємо координати т. M у полярній системі координат:

$$\Omega' = \{\omega' = (\rho; \varphi) : 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\},$$

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \rho \leq \frac{a}{2}, \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Ці дві моделі випадкового досліду не тотожні між собою.

Важливо зауважити, що подія, яка, скажімо, полягає в тому, що довжина відрізка $[O, M]$ є раціональним числом, не є елементом алгебри подій досліду, на якій означена ймовірність.

Ще декілька нових задач на геометричну модель випадкового досліджу.

Задача 4. З кінців хорди AB , що стягує центральний кут у φ радіан ($\varphi < \pi$), навмання в бік центра кола відкладають хорди AC і BD . Знайти ймовірність того, що: а) хорди AC і BD перетнуться між собою; б) трикутник, утворений перетином хорд, містить центр кола.

Задача 5. На протилежних сторонах квадрата навмання вибрані дві точки, через які проведено січну, що ділить його на дві частини. Знайти ймовірність того, що: а) площа хоча б однієї частини квадрата менша третини його площі; б) січна утворює зі стороною квадрата гострий кут більший за $\frac{\pi}{3}$.

Задача 6. На прилеглих до однієї вершини сторонах прямокутника, що мають довжини a та $2a$ одиниць, навмання вибрано по одній точці, через які проведено січну, яка ділить його на дві частини. Знайти ймовірність того, що площа утвореного трикутника менша за ka^2 ($0 < k < 1$).

Задача 7. На сторонах AB і AC правильного трикутника навмання обирають по одній точці M_1 і M_2 . Знайти ймовірність того, що довжина відрізка M_1M_2 буде меншою за середню лінію трикутника.

Задача 8. На нижній стороні квадрата зі дзеркальними сторонами навмання обрано точку, з якої під навмання обраним кутом пущено світловий промінь в середину квадрата. Знайти ймовірність того, що промінь відіб'ється не менше двох разів від бокової сторони квадрата до моменту перетину з верхньою, якщо довжина сторони квадрата дорівнює одиниці.

Задача 9. На сторонах AB і AD квадрата навмання обирають по одній точці M_1 і M_2 . Знайти ймовірність того, що: а) обидва гострі кути трикутника M_1AM_2 будуть більшими за $\frac{\pi}{6}$ радіан; б) медіана AE трикутника M_1AM_2 буде більшою за пів сторони квадрата.

Розглянемо задачу на умовну ймовірність.

Задача 10. Три студентки і три студента, які товаришують між собою, в один і той же день здають екзамени: дві студентки – з функціонального аналізу, два студенти – з комплексного аналізу, а двоє інших – з теорії ймовірностей. Хтось один з них вже здав екзамен, відомо, що це дівчина. Знайти ймовірність того, що вона здавала іспит з теорії ймовірностей, якщо рівноможливо це міг бути будь-хто з них.

Звісно, можна розв'язати задачу, застосувавши формулу Баєса. Але простіше побудувати за умовами задачі ймовірнісний простір у такий спосіб: нехай двоє зі студенток, скажімо, Катерина і Оксана, мають здавати іспит з функціонального аналізу, а третя, нехай буде Олена, – з теорії ймовірностей. Тоді, якщо відомо, що іспит здала дівчина, то з ймовірністю одна третя це може бути Олена.

Спеціалізовані програмні пакети та їх роль у курсі вищої математики

О. І. Баліна¹, І. С. Безклубенко¹, О. В. Богданов², Ю. П. Буценко²

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури*

²*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

armchairdoc@ukr.net

Анотація

Розглядається комплекс питань, пов'язаних з використанням у нормативних курсах вищої математики, які викладаються у технічних університетах, спеціалізованих математичних програмних пакетів.

Ключові слова: курс вищої математики, математичні програмні пакети.

Ознайомлення студентів зі спеціалізованими програмними пакетами та їх використання у курсі вищої математики, характерному для технічних вишів, є відносно новою задачею, яка постала перед викладачами відповідних курсів лише останнім часом. Традиційним є підхід, який спирається на використання лише «ручки та паперу», у крайньому разі – калькулятора та електронних таблиць для деяких чисельних розв'язків. Зрозуміло, що головною задачею викладача математики при роботі зі студентами є ознайомлення їх з результатами та методами математичної теорії, яке супроводжується прикладами застосування цих методів та результатів у відповідній предметній області. Давно відійшли у минуле часи, коли частиною курсу математики були обчислювальні методи, вивчення яких забезпечувалось обчислювальним практикумом! Зростання ролі математики для сучасного інженера призвело до запровадження, у переважній більшості випадків, окремих курсів обчислювальної математики або, принаймні, появи у курсах інформатики (програмування) вагомих розділів, присвячених розгляду обчислювальних алгоритмів. У той же час, доступність онлайн-калькуляторів та інших програмних засобів аж до використання елементів штучного інтелекту викликало надмірне захоплення студентів використанням «несанкціонованих» методів розв'язання тих практичних завдань, які традиційно пропонуються їм при вивченні курсів вищої математики. З врахуванням вищевказаних факторів, питання щодо використання у такого роду курсах спеціалізованих програмних пакетів виглядає дещо несподіваним, проте

на користь такого «нововведення» також існують вагомі аргументи. По-перше, профільні кафедри у багатьох випадках наполегливо виступають саме за якнайтісніше залучення програмних засобів до розв'язання задач, з якими знайомляться студенти у математичних курсах. Це пояснюється як вимогами тих підприємств та організацій, що працевлаштовують їх випускників, так і специфікою використання набутих студентами математичних знань у загальноінженерних та спеціальних курсах, до того ж, як виявляється, курси програмування (інформатики) та обчислювальної математики (навіть у випадку його наявності у бакалаврський програмі) не забезпечують з різних причин належної підготовки студентів у сенсі використання сучасних програмних рішень для якнайшвидшого отримання результату з необхідною точністю при використанні математичних методів. У той же час, на наш погляд, ці програмні засоби є наразі необхідними (наприклад, нинішній рівень шкільної освіти та ситуація з викладанням нарисної геометрії у вишах практично не дають можливості уникнути використання засобів на зразок GeoGebra) та виявляються навіть корисними для кращого засвоєння студентами навчального матеріалу. На думку авторів, доцільним є поєднання традиційного викладу теоретичного матеріалу з демонстрацією практичного застосування математичних програм, а також концентрація контрольних міроприємств не тільки на реалізації стандартних алгоритмів, але й на аналізі обраних методів та їх особливостях. Перш за все, виникає питання щодо вибору конкретного пакету, який не тільки буде використовуватися конкретним викладачем зі своїми студентами у даному курсі, але й буде експлуатуватися цими студентами у подальшому за узгодженням з іншими викладачами. До найпоширеніших належать такі пакети як Maple, MathCAD, MATLAB, Scilab, Wolfram Mathematica та інші [1, 2]. Зрозуміло, що вони відрізняються інтерфейсами, можливостями, платформами (доступними для використання операційними системами), та, що вельми істотно, розповсюдженням їх вільно або ж через платну ліцензію. Вибір конкретного пакету потребує узгодження позицій усіх «внутрішніх споживачів» – викладачів математики, програмування, загально інженерних та спеціальних дисциплін, ймовірно, прийняття рішення щодо використання певного такого пакету на рівні методичної ради вишу, або, принаймні, методичної комісії кожного факультету (інституту) що є його структурним підрозділом. Другою проблемою, на наш погляд, є розподіл функцій між вищезгаданими «споживачами». Справа у тому, що при вивченні студентами курсів інформатики (програмування), зазвичай можливості ознайомлення їх з такого роду пакетами виявляються дуже обмеженими. Ще у більшій мірі це стосується власне математичних курсів. У той же час, навіть наявність курсу (зовсім не обов'язкова!), який умовно може називатись, наприклад, «Введення в обчислювальну математику», зазвичай не вирішує проблеми вчасного та свідомого оволодіння студентами застосуваннями математичних пакетів! Справа у тому, що з огляду на навчальні плани, такий курс зазвичай викладається дещо запізно та виявляється перевантаженим. Як видається авторам, вихід з такої ситуації можли-

вий лише за умови максимального узгодження дій викладачів трьох вищезгаданих курсів, наприклад, програма курсу інформатики мусить неодмінно включати у себе знайомство з інтерфейсами математичних пакетів, навчання студентів верстанню математичних текстів, вводу даних у числовому та символьному виглядах при використанні конкретних програм. Відповідно, у курсі вищої математики з'являється можливість, на основі отриманих студентами знань та умінь, ілюструвати вивчення кожної з тем курсу прикладами застосування програмних засобів. Звернімось, наприклад, до курсу аналітичної геометрії (або відповідних розділів у курсі вищої математики). Одним з основних його елементів є теорія матриць, яка розглядається, перш за все, з точки зору алгебри таких об'єктів. Ґрунтовне розуміння студентами математичних розрахунків з матрицями та тензорами є основою для подальшого навчання. Крім того, це базовий елемент для роботи з системами лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР). При вивченні систем лінійних алгебричних рівнянь, на наш погляд, необхідно обов'язково звертати увагу студентів на залежність кількості арифметичних операцій, яких потребує кожен зі стандартних методів розв'язування СЛАР, від кількості її рівнянь, що зумовлює неможливість їх «ручної» реалізації при достатньо великих розмірностях систем, дуже корисною є також демонстрація ефекту накопичення обчислювальної похибки, що призводить до появи істотної нев'язки – різниці між лівими та правими частинами рівнянь системи, отриманої в результаті її розв'язку. Таким чином обґрунтовується практична необхідність використання у цьому випадку ітераційних методів, тобто заміни точних методів наближеними! Звичайно, вельми корисним є ознайомлення студентів зі специфічними алгоритмами розв'язання «розріджених» систем, які найчастіше зустрічаються у практичних застосуваннях. Третью, добре знайомою кожному викладачу математики, і не лише, проблемою є необхідність боротьби із несанкціонованим використанням студентами математичних пакетів у якості онлайн-калькуляторів при виконанні завдань для самостійної роботи та, особливо, при проходженні ними контрольних заходів. Необхідно зазначити, що у таких випадках має місце не тільки ухилення студентів від нормального процесу навчання (отримання належних знань, умінь, навичок) та кричуще порушення принципів академічної доброчесності, але й створення ілюзії здобуття ними умінь та навичок володіння можливостями використання математичних пакетів, що неможливе без ґрунтового засвоєння курсу математики! Звичайно для уникнення такого роду ексцесів використовуються такі заходи як:

- проведення роз'яснювальної роботи зі студентами, спрямованої на доведення до них викладених вище наслідків неузгодженого з викладачами математики використання математичних пакетів; обов'язкові співбесіди («захисти») при виконанні студентами самостійних завдань – домашніх робіт, типових розрахунків, розрахунково-графічних робіт, контроль вищезгаданих робіт щодо наявності у них добре відомих викладачам специфічних ознак застосування онлайн-калькуляторів: відсутності проміжних перетворень, нестандартних позначень тощо; за можливо-

сті, проведення контрольних заходів тільки офлайн, з відповідним контролем за роботою студентів; у випадку проведення контрольних заходів онлайн, шляхом підбору завдань, які пропонуються для виконання студентам намагатися уникнути можливості використання ними онлайн-калькуляторів.

Лише після опанування студентами теоретичних основ проведення базових розрахунків, розуміння змісту можливих для конкретної задачі перетворень, ми бачимо можливість широкого застосування математичного програмного пакету. Автори свідомі того, що викладені вимоги, в умовах визначеного обсягу дисциплін з вищої математики, досить важко реалізувати. Тому пропонуємо доповнювати стандартні навчальні плани додатковими короткотривалими відео матеріалами з використання математичних пакетів для відповідних лекційних тем.

Нарешті останньою (за порядком розгляду, проте не за значенням!) з актуальних проблем цієї тематики є сукупність питань, пов'язаних з «безпосередньо-дидактичним» використанням математичних пакетів, тобто застосуванням їх студентами не замість традиційних методів набуття знань, умінь та навичок, а у процесі отримання останніх. Слід зазначити, що, наприклад, пакет Scilab не може виступати у якості «дидактичного інструменту», оскільки він насправді не є допоміжним засобом, оволодіння ним є однією з цілей навчального процесу, до того ж він не містить у своєму функціоналі можливостей символічних перетворень, що, на наш погляд, є абсолютно необхідним для використання у практичних заняттях зі студентами [3].

Перелік посилань

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_software
2. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_open-source_software_for_mathematics
3. Emmanuel Kwadzo Sallah (2021). Use of Maple Software to Reduce Senior High School Students' Errors in Integral Calculus. *African Journal of Educational Studies in Mathematics and Sciences*, vol. 17, no. 2. 2021.

Методика вивчення теми «Застосування похідної» в шкільному курсі математики

А. М. Гурич¹

¹*ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна*

ttoolliik0210@gmail.com

Анотація

У роботі розглянуто методику викладання теми «Застосування похідної» у шкільному курсі математики. Проаналізовано основні труднощі, з якими стикаються учні, та запропоновано ефективні методи навчання. Наведено приклади завдань, що сприяють кращому засвоєнню матеріалу.

Вступ

Вивчення похідної є важливою складовою шкільного курсу математики, адже вона не лише слугує основою для подальшого вивчення аналізу, а й має численні практичні застосування. Зокрема, похідна використовується для дослідження поведінки функцій, розв'язання задач оптимізації та інших реальних проблем. Проте практика показує, що учні часто стикаються з труднощами при розумінні та застосуванні цього поняття. Саме тому методика викладання цієї теми потребує особливої уваги.

1 Основні аспекти методики викладання.

Візуалізація та графічний аналіз. Для кращого розуміння учнями застосувань похідної доцільно використовувати графічний підхід. Побудова графіків функцій та їхніх похідних допомагає наочно пояснити поняття монотонності, екстремумів і точок перегину. Використання динамічних математичних програм, таких як GeoGebra, значно полегшує цей процес [Гончаренко, 2003].

Практичні завдання та реальні приклади. Важливим аспектом є використання прикладів, які пов'язані з реальним життям. Наприклад, задачі на оптимізацію можна моделювати через знаходження найкоротшого шляху, максимального

обсягу або мінімальних витрат матеріалів. Це допомагає учням усвідомити практичну цінність математичних знань.

Поетапне пояснення алгоритмів. Учням слід пояснювати розв'язання задач із застосуванням похідної покроково, з детальним аналізом кожного етапу [МОН України, 2021]. Найкраще для цього підійде алгоритм для кожного виду завдання, один з яких ми розглянемо.

2 Приклад задачі «Проміжки зростання і спадання функції».

Шкільна практика показує, що дану тему слід починати з ілюстрацій. Визначаємо, на яких проміжках функція зростає, а на яких спадає, тобто як змінюються її значення залежно від аргументу. Для розв'язання задач даного типу доречно використовувати алгоритм, з яким потрібно ознайомити учнів.

Щоб знайти проміжки зростання і спадання функції $f(x)$, потрібно виконати такі кроки [Богомолів, 2020]:

1. Знайти першу похідну $f'(x)$.
2. Знайти критичні точки, прирівнявши похідну до нуля або знайти точки, в яких вона не існує:

$$f'(x) = 0 \quad \text{або} \quad f'(x) \text{ не існує.}$$

3. Розбити числову пряму на інтервали, використовуючи знайдені критичні точки.
4. Дослідити знак похідної на кожному інтервалі (підставити довільні точки з інтервалів у похідну).
 - Якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає.
 - Якщо $f'(x) < 0$, то функція спадає.
5. Записати висновки про проміжки зростання та спадання.

Приклад: Розглянемо функцію: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

- 1) Знайдемо першу похідну:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 2x) = 3x^2 - 6x + 2.$$

- 2) Знайдемо критичні точки.

Прирівнюємо похідну до нуля: $3x^2 - 6x + 2 = 0$. Знайдемо корені квадратного рівняння:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}.$$

Спростуємо:

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

Отже, критичні точки:

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

3) Розбиваємо числову пряму на інтервали.

Отримані точки розбивають область визначення функції на три інтервали:

$$(-\infty, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad (x_2, +\infty).$$

4) Досліджуємо знак похідної на кожному інтервалі.

Візьмемо тестові точки в кожному інтервалі та підставимо їх у похідну:

- Для $x = -1$ (з інтервалу $(-\infty, x_1)$):

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) + 2 = 3 + 6 + 2 = 11 > 0, \quad \text{функція зростає.}$$

- Для $x = 1$ (з інтервалу (x_1, x_2)):

$$f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 2 = 3 - 6 + 2 = -1 < 0, \quad \text{функція спадає.}$$

- Для $x = 2$ (з інтервалу $(x_2, +\infty)$):

$$f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 2 = 12 - 12 + 2 = 2 > 0, \quad \text{функція зростає.}$$

Побудова таблиці знаків:

x	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+

5) Висновки:

Отже:

- Функція зростає на інтервалах $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.
- Функція спадає на інтервалі (x_1, x_2) .

Функція спочатку зростає, потім спадає, а потім знову зростає. Це означає, що у точці x_1 є максимум, а у точці x_2 — мінімум.

3 Використання інформаційно-комунікаційних технологій.

Сучасні технології значно розширюють можливості викладання теми. Використання інтерактивних онлайн-симуляцій, онлайн-тестів і навчальних відео підвищує мотивацію учнів та сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Додатково, використання навчальних мобільних додатків, таких як Photomath або Wolfram Alpha, дає змогу учням самостійно перевіряти розв'язки та досліджувати властивості функцій у режимі реального часу. Онлайн-платформи на кшталт Coursera та Khan Academy можуть бути корисними для отримання додаткових пояснень та відеоуроків, що допомагають учням глибше зрозуміти матеріал.

Використання інтерактивних дошок (наприклад, Jamboard або Microsoft Whiteboard) у процесі викладання дозволяє вчителю пояснювати матеріал у режимі реального часу, взаємодіяти з учнями та разом аналізувати побудовані графіки або розв'язки задач [Дмитренко, 2020].

Загалом, впровадження цифрових технологій у навчання похідної не лише підвищує ефективність викладання, а й розвиває у школярів цифрову грамотність, що є важливим у сучасному світі.

Висновок

Ефективне викладання теми «Застосування похідної» у шкільному курсі математики потребує комплексного підходу, що включає використання візуалізації, реальних прикладів, алгоритмічного підходу та інформаційних технологій. Застосування цих методів сприятиме не лише глибшому розумінню теми, а й формуванню у школярів навичок аналітичного мислення та математичного моделювання.

Сучасний підхід до навчання повинен враховувати різномірне підготовку учнів, їхні інтереси та можливості. Застосування інтерактивних інструментів і цифрових технологій дозволяє зробити процес навчання більш гнучким, адаптивним та ефективним. Використання платформ для тестування та симуляцій дає можливість учням самостійно аналізувати математичні явища та експериментувати з функціями, що значно підвищує рівень розуміння матеріалу.

Перелік посилань

Богомолов Є.А. (2020). *Основи математичного аналізу*. Київ: Освіта.

Міністерство освіти і науки України. (2021). *Методичні рекомендації для викладання математики у старшій школі*.

Гончаренко С.М. (2003). *Теорія та методика навчання математики*. Київ: Освіта.

Дмитренко О.О. (2020). Використання інформаційних технологій у викладанні математики. *Педагогічні науки*.

Застосування штучного інтелекту у створенні та аналізі тестових завдань з вищої математики

О. О. Диховичний¹, Н. В. Круглова¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

`a.dyx@ukr.net`

Анотація

В роботі досліджено застосування відкритої версії 4.0 ChatGPT для створення і аналізу тестових завдань з вищої математики. Головним питанням дослідження є: Чи можна за допомогою ШІ покращити процес дистанційного контролю знань з вищої математики та полегшити роботу викладача? Для цього досліджено створення нових тестових завдань; тиражування існуючих; отримання завдань з «гарними» відповідями, запобігання академічній недоброчесності. Центральне місце відведено питанню статистичного аналізу складених тестів на основі відомих методик, зокрема, Класичної Теорії Тестів, IRT, MIRT. Отримано позитивне підтвердження можливості їхнього застосування.

Ключові слова: тестові завдання з вищої математики, ChatGPT, Класична Теорія Тестів, IRT, MIRT

Очевидно, що дистанційна освіта в сучасних українських реаліях неперервних бомбардувань залишається майже єдиною можливою. Найважливіша її складова – це контроль знань. Але йому притаманні традиційні проблеми, серед яких виділимо:

1. Порушення академічної доброчесності;
2. Контроль якості тестів.

Перша є головною. Завдяки онлайн-формату студенти мають більше можливостей для списування, використання сторонніх матеріалів, або допомоги третіх осіб під час тестів та іспитів. Для боротьби з цими проблемами застосовують різні методи [Круглова, Диховичний, 2022], зокрема:

- Застосування творчих та багатокрокових тестових завдань, так званих, «embedded answers», реалізованих в MOODLE;
- Збільшення кількість однорідних варіантів завдань, з постійною їх зміною.

Зрозуміло, що це призводить до додаткових надмірних навантажень на викладача. До того ж виникає питання якості створених у великій кількості нових завдань. Враховуючи надзвичайно низький рівень шкільної математичної підготовки, завдання повинні бути зрозумілими і мати «прості», «гарні» відповіді, не містити помилок. І знову виникає додаткове навантаження на викладача.

Отже, потрібен помічник. Ми спробували звернутися до безкоштовної (що теж важливо для викладачів) версії 4.0 ChatGPT. Які питання нам вдалось перевірити:

1. Створення «embedded answers». Так. Це можливо до певного рівня складності завдань. Якщо вимагати від ChatGPT ускладнення рівня завдань, то починається формування некоректних завдань.
2. Тиражування однотипних завдань одного рівня складності. Так. Можливо.
3. Формування «зрозумілих і простих» відповідей. Так. Можливо.
4. Формулювання завдань, для розв'язання яких студенти не можуть застосовувати ChatGPT.

Розглянемо детальніше 4-те. Студенти використовують, як правило, ChatGPT для розв'язання окремих математичних завдань. Ми для створення багатокрокових завдань «embedded answers» використовуємо спеціалізовані програми шаблони [Kruglova, Dykhovychnyi, 2023]. Використовуючи програми-шаблони, можна створити певне завдання, яке не розв'язується коректно за допомогою ChatGPT і, отже, виконує свою контролюючу функцію.

Окрім дослідження можливостей створення нових питань ставилась задача перевірки загальної якості тесту у цілому. Теоретичну базу для такого аналізу складають Класична Теорія Тестів (СТТ), Item Response Theory (IRT) та її багатовимірне розширення MIRT.

На основі матриці відповідей студентів можна попросити ChatGPT розрахувати такі класичні статистичні показники якості тесту як: коефіцієнт надійності Кронбаха; кореляційну матрицю відповідей; провести аналіз вибору дистракторів завдань множинного вибору. Отримані результати співпадають зі значеннями, отриманими без ШІ.

Особливу увагу було приділено можливості застосування IRT та MIRT. Якщо вказати вибір відповідного пакету мови R, наприклад, ltm, то у випадку одновимірної моделі результати оцінювання латентних параметрів та побудова характеристичних кривих виявляються цілком коректними. Навіть, за допомогою відповідних інструкцій можна проаналізувати ансамбль характеристичних кривих і зробити

висновок щодо складності та розрізняльної можливості окремих тестових завдань. За допомогою використання функцій пакету `mirt` можна провести вибір розмірності моделі на підставі проведення:

- Exploratory Factor Analysis (EFA);
- Оцінки параметрів моделей (CFA);
- Перевірки адекватності.

При цьому ChatGPT забезпечує коректність виклику відповідних функцій пакету з адекватними результатами роботи. Отримані висновки співпадають з результатами дослідження, проведеного в [Попрожук, Круглова, Диховичний, 2023].

Висновки

Безкоштовна версія 4.0 ChatGPT може бути ефективним помічником при створенні та аналізі тестових завдань з вищої математики. Головна задача викладача полягає у точній постановці задачі, розумінні результатів, які він хоче отримати, та у коректних інструкціях для ChatGPT.

Перелік посилань

Круглова Н. В., Диховичний О. О. (2022). Добір математичної моделі для аналізу тестових завдань типу «вбудовані відповіді» з математичних дисциплін. *Інформаційні технології і засоби навчання*, vol. 87, no. 1, pp. 166–184. DOI: <https://doi.org/10.33407/itlt.v87i1.4487>.

Kruglova, O. Dykhovychnyi and M. Poprozhuk (2023). Technologies for creating and analyzing tests in advanced mathematics. *The Sixth Baltic-Nordic Conference on Survey Statistics – BaNoCoSS-2023*, 21-25 August 2023, Helsinki, pp. 68–70.

Попрожук М. О., Круглова Н. В., Диховичний О. О. Вибір розмірності моделі MIRT для аналізу тестів з вищої математики. *Тези XI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків*, 11-13 травня 2023, Український державний університет імені Михайла Драгоманова, с.127–128.

Інноваційні підходи до формування математичних компетентностей студентів в умовах цифровізації вищої освіти

Л. М. Зошак¹

¹*Івано-Франківська філія Університету «Україна»,
Івано-Франківськ, Україна*

lilya2707@gmail.com

Анотація

У тезах розглядаються інноваційні підходи до формування математичних компетентностей студентів у контексті цифровізації вищої освіти. Проаналізовано використання електронних навчальних платформ, адаптивних систем, штучного інтелекту, віртуальної та доповненої реальності, гейміфікації, математичного моделювання та хмарних технологій у навчальному процесі. Особливу увагу приділено персоналізованому та інтерактивному навчанню, що сприяє підвищенню мотивації студентів і ефективності засвоєння математичних знань. Визначено перспективи застосування цифрових технологій для вдосконалення математичної освіти у вищих навчальних закладах.

Ключові слова: цифровізація освіти, математичні компетентності, електронні навчальні платформи, адаптивне навчання, гейміфікація, штучний інтелект, віртуальна реальність, хмарні технології, математичне моделювання, інноваційні методи навчання

Цифровізація вищої освіти створює нові можливості для формування математичних компетентностей студентів, забезпечуючи гнучкість у навчанні, інтерактивність та персоналізований підхід. Традиційні методи викладання математики доповнюються або замінюються інноваційними технологіями, що сприяють підвищенню мотивації, доступності та ефективності освітнього процесу.

Одним із ключових аспектів цифровізації є використання електронних навчальних платформ, які забезпечують доступ до інтерактивних курсів, відеолекцій, тестових завдань і адаптивних систем контролю знань. Такі платформи, як Moodle, Coursera, Khan Academy, дозволяють студентам самостійно опановувати матеріал

у зручний для них час, що сприяє розвитку навичок самонавчання та критичного мислення. Наприклад, у Moodle викладач може створити курс з алгебри або математичного аналізу, додати автоматизовані тести та форуми для обговорення.

Штучний інтелект і машинне навчання відкривають можливості для персоналізованого навчання, оскільки адаптивні системи можуть аналізувати прогрес студентів і пропонувати індивідуальні завдання відповідно до їхніх потреб. Наприклад, ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) – адаптивна система, що визначає рівень знань студента та надає матеріал відповідної складності.

Важливу роль відіграють віртуальні та доповнені реальності, що дозволяють візуалізувати абстрактні математичні поняття. Наприклад, використання GeoGebra 3D допомагає студентам досліджувати геометричні фігури у просторі, а AR-симуляції дозволяють взаємодіяти з математичними об'єктами у реальному середовищі, що особливо корисно для вивчення векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Гейміфікація є ще одним ефективним інструментом, який підвищує зацікавленість студентів у вивченні математики. Використання ігрових механік, таких як математичні квести, онлайн-турніри, рейтингові системи, сприяє більшому залученню студентів до навчального процесу. Наприклад, застосування Kahoot! або Quizizz у навчанні дає змогу студентам у форматі гри проходити перевірку знань з математичних дисциплін.

Онлайн-симуляції та математичні моделювання відіграють важливу роль у формуванні математичних компетентностей студентів, оскільки дозволяють застосовувати теоретичні знання в реальних умовах. Замість пасивного запам'ятовування формул і методів, студенти залучаються до активного вирішення задач, які моделюють реальні процеси. Такий підхід підвищує інтерес до навчання, допомагає краще зрозуміти сутність математичних концепцій і розвиває навички критичного мислення та аналітичного підходу.

MATLAB є одним із найпотужніших інструментів для математичного моделювання, що дозволяє студентам створювати точні моделі динамічних систем, таких як механічні коливання, електричні ланцюги або економічні моделі. Наприклад, студенти можуть моделювати коливання маятника з урахуванням сили тертя або розраховувати оптимальні траєкторії для робототехнічних систем. MATLAB пропонує широкий спектр вбудованих функцій для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь, аналізу даних і візуалізації результатів у вигляді графіків і анімацій, що полегшує сприйняття складних концепцій.

Wolfram Mathematica забезпечує ще ширші можливості завдяки своїй потужній системі символьних обчислень. Студенти можуть використовувати Mathematica для аналітичного розв'язання диференціальних рівнянь, спрощення виразів, дослідження функцій, виконання інтегралів і рядів. Наприклад, у курсах математичного аналізу можна досліджувати поведінку функцій, знаходити їхні границі, обчислювати похідні та інтеграли. Mathematica також дозволяє створювати інтерактивні

додатки, що дає можливість студентам візуально досліджувати математичні явища та краще розуміти зв'язок між змінними.

Колаборативне навчання та використання хмарних технологій відіграють важливу роль у формуванні математичних компетентностей студентів, оскільки сприяють спільному розв'язанню задач, обміну знаннями та розвитку навичок командної роботи.

Одним із найпопулярніших інструментів для колективної роботи є Google Docs, який дозволяє студентам спільно редагувати тексти, створювати таблиці з розрахунками, складати математичні звіти та аналізувати результати досліджень. Вбудовані коментарі та функція чату дозволяють обговорювати питання та отримувати зворотний зв'язок.

Для оформлення математичних документів, що містять складні формули та доведення, використовується Overleaf – онлайн-платформа для роботи з LaTeX. Overleaf дає змогу студентам спільно писати наукові статті, лабораторні роботи та дипломні проекти, зберігаючи високий рівень типографічного оформлення. Наприклад, при написанні дослідження з теорії ймовірностей студенти можуть використовувати спеціальні LaTeX-команди для форматування формул Байєсової теорема або розрахунку математичних очікувань складних розподілів.

Ще одним потужним інструментом для колаборативного навчання є Jupyter Notebook – інтерактивне середовище для програмування мовою Python, яке широко використовується у чисельних розрахунках, математичному моделюванні та аналізі даних. У цьому середовищі студенти можуть разом працювати над кодом, створювати математичні моделі, будувати графіки функцій та автоматизувати обчислення.

Окрім цього, хмарні технології сприяють більш ефективному викладанню математики через спільні освітні ресурси, такі як Google Drive, OneDrive або Dropbox, які дозволяють зберігати та обмінюватися навчальними матеріалами, відеоінструкціями, електронними підручниками та зразками розв'язання задач. Використання онлайн-дошок, таких як Miro або Jamboard, дозволяє викладачам і студентам візуально пояснювати математичні концепції, будувати графіки, аналізувати статистичні дані та розв'язувати рівняння в інтерактивному форматі.

Таким чином, цифровізація вищої освіти вносить значні зміни у формування математичних компетентностей студентів. Це відкриває нові перспективи для викладачів та студентів, забезпечуючи їм сучасні інструменти для опанування математичних дисциплін.

Перелік посилань

Буйницька О., Василенко С. Корпоративний стандарт цифрової компетентності викладача університету. *Електронне наукове фахове видання "Відкрите освітнє*

е-середовище сучасного університету», (12), 1–20. <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2022.121>.

Morze N., Vasylenko S., Gladun M. Шляхи підвищення мотивації викладачів університетів до розвитку їх цифрової компетентності. *Електронне наукове фахове видання "Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету"*, (5), 160–177. <https://doi.org/10.28925/2414-0325.2018.5.160177>.

Використання середовища Geogebra в математичній підготовці студентів економічних спеціальностей. *Modern information technologies and innovation methodologies of education in professional training methodology theory experience problems*, 70, 24–34. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2023-70-24-34>.

Роль цифрового освітнього середовища закладу вищої освіти у формуванні диджитальної культури студентів. *Modern information technologies and innovation methodologies of education in professional training methodology theory experience problems*, 71, 5–21. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2024-71-5-22>.

Інноваційні підходи до формування методичної культури майбутнього викладача математики в освітньому середовищі університету

М. М. Ковтонюк¹, О. М. Соя¹

¹*Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна*

`kovtonyukmm@vspu.edu.ua`

Анотація

У статті розглянуто актуальність проблеми та роль освітнього середовища університету у формуванні методичної культури майбутнього викладача математики. Інноваційні підходи до її формування в умовах сучасного освітнього середовища університету розкрито через використання різноманітних форм і методів навчання відповідно до виокремлених цільових завдань.

Ключові слова: методична культура; майбутній викладач математики; освітнє середовище університету; інноваційні підходи.

Сучасний етап розвитку суспільства характеризується стрімким зростанням вимог до якості математичної освіти. Тому особливого значення набуває професійна підготовка майбутніх викладачів математики, здатних ефективно здійснювати педагогічну діяльність в умовах динамічних змін. Формування професійної культури викладача для закладів вищої й фахової передвищої освіти, зокрема викладачів математики, є вкрай важливим питанням для України. Автори статті визначають професійну культуру викладача математики як інтегровану динамічну властивість особистості, яка проектує його загальну культуру в галузі професії, є синтезом математичної, науково-методичної та педагогічної культур і реалізується в умовах синергетичного освітнього простору з використанням цифрових технологій [Ковтонюк, Соя, 2024]. Науково-методична культура викладача математики – це складова його професійної культури, яка поєднує здатність до проведення наукових досліджень, розроблення навчально-методичного продукту, впровадження сучасних методик викладання і навчання на основі інноваційних підходів.

Інноваційні підходи у підготовці педагогів реалізуються через сучасні тенденції розвитку освіти, освітні можливості ІІІ, цифровізацію та інтеграцію новітніх технологій у закладах вищої освіти. Освітнє середовище університету відіграє ключову роль у формуванні методичної культури майбутнього викладача математики, яка розкривається через систему науково-методичних знань, умінь, навичок з математики й педагогіки; креативний підхід до навчання й викладання; здатність до рефлексії та самовдосконалення, досвід творчої діяльності та розвиток особистісних якостей, спрямованих на ефективну організацію освітнього процесу з математики з використанням сучасних методик і технологій. Виключну роль у формуванні методичної культури майбутнього викладача математики відіграють передовий науково-педагогічний досвід викладачів-новаторів в освітньому середовищі альма-матер (лат. *alma mater*) та співпраця студентів з досвідченими наставниками на базах педагогічної, асистентської та переддипломної практик. Успішність розв'язання завдань викладачем математики визначається специфікою його науково-педагогічної діяльності та залежить від реалізації ним пізнавальної, проектувальної, конструювальної, організаційно-практичної, комунікативної, діагностичної функцій [Ковтонюк, Левицька, 2022], які реалізуються у віртуальному математичному освітньому просторі, що є частиною в управлінсько-ступеневій моделі (рис. 1).



Рис. 1: Освітній простір викладача математики в управлінсько-ступеневій моделі підготовки бакалаврів і магістрів [Ковтонюк, Левицька, 2022].

Наприклад, вебсайт викладача <http://www.kovtonyuk.inf.ua> зручний тим, що на ньому можна розмістити всю необхідну інформацію локально, користуватися сайтом може будь-хто, в будь-який час і в будь-якому місці. Також на сайті можна розмістити інформацію у довільному форматі: відео, підручники, статті, посилання на інші сайти, опитування та різноманітні рубрики.

Формування і розвиток методичної культури викладача математики відбувається у магістратурі, де передбачена відповідна додаткова спеціальність. Інноваційні підходи до її формування передбачають використання різноманітних форм і методів навчання відповідно до виокремлених цільових завдань. Інтерактивні методи

навчання: робота в малих групах, мозковий штурм тощо – спонукають до аналізу методів і прийомів навчання з метою теоретичного обґрунтування найбільш ефективних з них. Активні методи навчання: проблемне навчання, кейс-метод, метод проєктів [Soia, Kovtoniuk, Kosovets, Petrovych, 2024], ділові ігри, тренінги, гейміфікація [Захар, 2021] тощо – розкривають можливості щодо розроблення та впровадження інноваційних методів, форм і технологій навчання, їх удосконалення, пов’язане із специфікою різних математичних дисциплін. Змішане навчання: поєднання традиційних форм навчання з елементами дистанційного навчання, цифровізація освіти, використання онлайн ресурсів, електронних посібників, віртуальних лабораторій [Андрієнко, 2022] тощо – інтенсифікує розроблення навчального контенту [Ковтонюк, Клімішина, Леонова, Соя, 2023], діагностичних робіт, робочих програм і силабусів, ведення сайтів і блогів. Самостійна робота спрямована на поглиблення теоретичних знань, розвиток практичних вмінь та навичок, формування досвіду творчої діяльності; адаптацію навчальних матеріалів відповідно до потреб цільової аудиторії [Сидоренко, 2023], написання, редагування навчальних підручників, посібників, практикумів тощо.

Під час аналізу методів і прийомів навчання з метою теоретичного обґрунтування найбільш ефективних з них рекомендуємо виокремлювати основні поняття математичної дисципліни і, користуючись принципом фундування, показувати, як здійснюється накопичення математичних знань, поглиблення та абстрагування математичних понять, застосування їх до моделювання реальних процесів і формування цілісної картини наукових і методичних компетентностей майбутнього викладача математики (рис. 2).

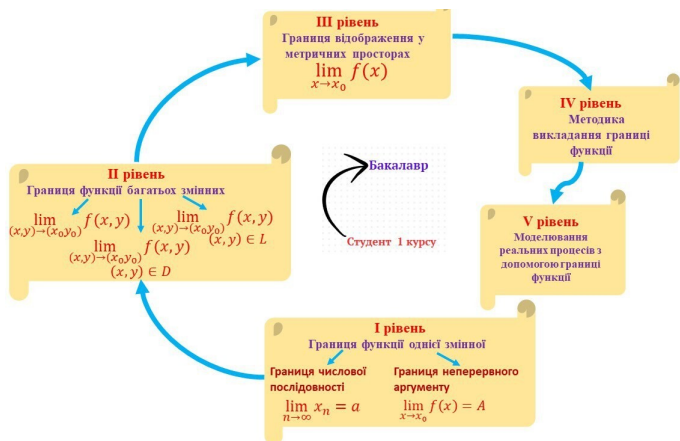


Рис. 2: Схема фундування базового поняття «Границя функції» (авторська розробка).

На рис. 2 подано схему фундування поняття «Границя функції», яке є основним об'єктом математичного аналізу, а граничний перехід є головним методом дослідження (неарифметична операція, що використовується для дослідження функції в околі точки або на нескінченності). Виділення, систематизація і реалізація наскрізних тем (а також спіралей фундування) у математичному аналізі мають явну професійну спрямованість, оскільки єдність цієї навчальної дисципліни в реалізації наскрізної теми виступає перш за все єдиною формою (границя, похідна, неперервність...), яка потім конкретизується, вибудовуючись в дидактично виправданий ланцюг. Послідовне проведення цієї ідеї формує у здобувачів вищої освіти важливе професійне вміння бачити за єдиною формою різноманітний зміст, об'єднаний єдиною логічною основою. Розвиток цієї змістової лінії формує у майбутніх викладачів математики вміння: будувати математичні моделі; ставити математичні задачі; вибирати найбільш вдалий математичний метод і алгоритм для розв'язування задачі; застосовувати для розв'язування задачі чисельні методи, сучасні математичні пакети й цифрові технології.

Що стосується розроблення та впровадження інноваційних методів, форм і технологій навчання у підготовці майбутнього викладача математики, їх удосконалення відповідно до специфіки різних математичних дисциплін, то сюди можна віднести: електронні таблиці; електронні бібліотеки (підручники); презентації; тренажери; тестові завдання; віртуальні лабораторні роботи; операційні системи; бази даних; сайти; відео курси тощо. Електронні таблиці зручно використовувати при вивченні багатьох математичних дисциплін, зокрема для виконання лабораторних робіт, які потребують багато обчислень та можуть бути громіздкі для виконання вручну. Тестові завдання надзвичайно актуальні під час онлайн навчання. Це зумовлено тим, що їх неважко складати, за допомогою них можна швидко та ефективно перевірити якість та рівень засвоєння знань студентами. Також є можливість автоматично побачити статистичні дані з успішності за підсумками проведеної роботи. Електронні підручники/посібники, які активно використовуються у підготовці майбутнього викладача математики, мають додаткові можливості порівняно з паперовими аналогами: збільшення кількості малюнків, їх якості та кольоровості; наявність різноманітних гіперпосилань; присутність додаткового матеріалу, який не вносили до звичайного підручника аби не перевантажувати його обсяг [Ковтонюк, Клімішина, Леонова, Соя, 2023]. Системи комп'ютерної математики з елементами програмування дозволяють виконувати найрізноманітніші математичні операції та перетворення алгебраїчних виразів заданих в чисельній та символьній (змінні, функції, поліноми, матриці тощо) формах. Сучасні системи містять функції практично з усіх розділів сучасної математики, підтримують інтерактивну візуалізацію, одну чи кілька мов програмування, і часто дозволяють комбінувати алгоритми, математичні формули, текст, графіку, діаграми чи анімацію зі звуком, а також результати обчислення в одному файлі. Таких систем наразі є чимало, зокрема це Maple, Maxima, Geogebra, Mathematica, Derive, MATLAB,

MathCAD, Advanced Grapher, SMath Studio тощо. Кожна з цих програм має як свої переваги, так і недоліки.

Важливо зазначити, що формування методичної культури є безперервним процесом, який триває протягом усього професійного життя викладача. Університет створює фундамент, надає необхідні знання та навички, але подальший розвиток методичної майстерності залежить від самого викладача, його прагнення до самовдосконалення та професійного зростання. Перспективними напрямками подальших досліджень є розробка та впровадження в освітній процес університету інтегрованих програм з формування методичної культури майбутніх викладачів математики, дослідження впливу різних чинників на ефективність цього процесу. З огляду на стрімкі зміни в освітньому середовищі важливо продовжити дослідження впливу інноваційних технологій на підготовку викладачів математики та розробити рекомендації для вдосконалення навчальних програм педагогічних університетів.

Перелік посилань

Андрієнко Л.П. (2022). Дистанційне навчання: виклики та перспективи. *Освітній процес в умовах цифровізації*, Київ: НАН України, pp. 110–123.

Захар А.А. (2021). Використання інтерактивних методів навчання в сучасній педагогіці. *Науковий журнал «Освіта XXI століття»*, no. 3(45), pp. 88–92.

Ковтонюк М.М., Клімішина А.Я., Леонова І.М., Соя О.М. (2023). *Практикум з диференціального числення функцій багатьох змінних*. Вінниця: ВНТУ.

Ковтонюк М.М., Левицька М.В. (2022). Формування віртуального освітнього математичного простору як інтелектуального ресурсу викладача університету. *Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас»*, vol. 6, pp. 33–47.

Ковтонюк М.М., Соя О.М. (2024). Особливості формування професійної культури викладача математики. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*, vol. 1, no. 2, pp. 183–199.

Soia O., Kovtoniuk M., Kosovets O., Petrovych S. (2024). Project-Based Learning as an Integration of Critical Thinking and Teamwork Skills of Future Teachers of Mathematics and Computer Science. *Faure, E., et al. Information Technology for Education, Science, and Technics. ITEST 2024. Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*, vol. 222, pp. 385–399.

Сидоренко П.І. (2023). Інтеграція математичної освіти в міждисциплінарному просторі. *Збірник наукових праць «Сучасна освіта»*, no. 2(10), pp. 67–75.

Інформаційні технології та наукові знання в контексті підвищення якості математичної освіти

Т. О. Кононович¹, Ю. Г. Подошвелев¹

¹*ПНПУ імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна*

ptkm@ukr.net

Анотація

Представлено досвід використання інформаційно-інтерактивних доробків при вивченні дисциплін фізико-математичного циклу. Встановлено, що при створенні інтерактивного контенту для дистанційного навчання необхідно використовувати добірку прийомів візуалізації навчальної інформації. Ефективними є інтерактивні навчальні посібники у форматі pdf, створені засобами LaTeX-технологій, в які інкапсульовано відеозаписи лекційних і практичних занять. Тексти підручників та навчальних посібників, що розміщені на освітніх онлайн-платформах, важливо фрагментувати відеоматеріалами теоретичного та практичного змісту. Для розуміння сутності математичних знань плідною є дослідницька робота студентів в межах певної наукової теми. Такий підхід дозволяє розширити освітнє поле навчальних курсів, створити умови для набуття навичок щодо практичних застосувань теорії при розв'язуванні прикладних задач.

Ключові слова: математична освіта, математичний аналіз, диференціальні рівняння, інформаційні технології, інтерактивний контент, наукова проблема, теорія тригонометричних рядів, теорія наближення функцій.

Сучасний етап реформування національної системи освіти пов'язаний із непростими викликами. Досвід викладання дисциплін фізико-математичного циклу на факультеті комп'ютерних наук, математики, фізики та економіки висвітлює низку проблем. Простежується кілька негативних тенденцій: зниження якості математичної підготовки випускників шкіл; невідповідність рівня їх знань вимогам, що забезпечують успішне опанування навчальним матеріалом у закладах вищої освіти; систематичне зменшення загального обсягу годин на опанування дисциплін фізико-математичного циклу без урахування складності матеріалу; тенденція збільшення годин самостійної роботи при зменшенні аудиторної незалежно від специфіки предмету вивчення; неготовність студентів до самостійного опанування

навчального матеріалу. Всі ці негативні чинники суттєво впливають на процес і результат підготовки фахівців-математиків.

Необхідність спільної роботи студента і викладача засвідчує досвід викладання курсів математичного, функціонального, комплексного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь. При вивченні цих дисциплін важливою є робота за кількома напрямками. По-перше, опановувати теоретичний матеріал, працюючи із текстами підручників. Вони представляють не лише поняття і факти, але й розкривають, через доведення, логіку руху математичної думки. Для розуміння часто неявної, прихованої сутності математичних знань варто працювати з підручниками та навчальними посібниками, написаними різними авторами. По-друге, розв'язувати задачі, які не лише передбачають реалізацію певних алгоритмів, а й спонукають продукувати та відпрацьовувати логіку математичного мислення. Усе це реалізувати в сучасних реаліях навчального процесу вищої школи непросто.

З метою підвищення ефективності вивчення дисципліни «Математичний аналіз» розроблено курс із більш, ніж 40 відеозаписів реальних лекційних і практичних занять, проведених в умовах дистанційного навчання. Представлення кожної теми є результатом багаторічного досвіду викладання та пошуку індивідуальних методів і прийомів пояснення непростих теоретичних положень, тлумачення найскладніших для розуміння питань, демонстрування важливості знання теорії для розв'язування практичних задач. Особлива увага зосереджена на вступі до аналізу, центральною складовою якого є теорія границь, а важливим для подальшого результатом – опанування основного методу математичного аналізу, методу границь.

Вище зазначений контент викладено на освітній платформі Moodle (див.: <http://moodle.pnpu.edu.ua/course/view.php?id=171>). До кожної теми курсу разом із відеолекціями доєднано фрагменти текстів підручників, навчальних посібників, збірників задач із відповідним матеріалом теоретичного та практичного змісту, на який здійснювалось посилання у процесі проведенні заняття або який слід опрацювати самостійно. Такий підхід спонукає до першого кроку серйозної роботи з математичними текстами, де кожен символ чи слово може бути надважливим. Цінність самих відеоматеріалів не лише у забезпеченні індивідуального режиму самостійної роботи студентів, але й у можливості віртуальної присутності на реальному занятті свого викладача.

Розробити та дослідити різні сценарії викладання дисципліни «Диференціальні рівняння» дозволили симуляції, підґрунтям яких є можливості tex-мови програмування. При розробці навчального посібника використано бібліотеки пакетів для системи LaTeX. Створений у форматі pdf посібник уміщує: імплементацію інтерактивних формул для організації системи взаємопов'язаних посилань; динамічний інтерактивний контент, спрямований на математичну історіографію (студент може детально ознайомитися з біографіями видатних учених, їх доробками, переглянути різні підходи щодо доведення теорем, ознайомитися з історією пошуку розв'язків диференціальних рівнянь); можливості додавання та корегування коментарів у

режимі реального часу; інтерактивну графіку; ланцюги різнорівневих інтерактивних тестів, що дозволяють студенту простежити помилки, оцінити рівень знань, отримати необхідну додаткову інформацію; відеолекції відомих фахівців теорії диференціальних рівнянь, українською та англійською мовами; вправи до кожної теми, при розв'язанні яких студент може перевірити себе, застосовувати інтерактивні можливості Maple [Подошвелев, 2016, Подошвелев, Серов, 2024].

Для розуміння сутності наукового математичного знання та його зв'язків із практичними застосуваннями ефективним видається залучення студентів до спільної роботи з викладачем у межах наукових тем, пов'язаних із розширенням області знань дисциплін, що вивчаються [Кононович, 2024]. Очевидно, що до такої праці залучається лише частина студентів, які мають інтерес до науково-дослідної діяльності та виконують у межах певної теми курсові, бакалаврські, магістерські кваліфікаційні роботи. Прикладом є діяльність наукової студентської проблемної групи «Задачі теорії наближення функцій та суміжні питання», учасники якої представляють результати своєї роботи у збірнику наукових праць факультету [Слаба, 2019, Шаравара, 2020, Барш, 2021].

Дослідницькі задачі, з якими знайомляться і працюють студенти, належать до теорії тригонометричних рядів та теорії наближення функцій. Наприклад, однією з таких є задача знаходження умов інтегровності тригонометричних рядів – умов на коефіцієнти синус- або косинус-ряду, за яких він буде рядом Фур'є своєї суми. Її розв'язання має давню історію й представлено низкою важливих результатів: В. Юнга, С. Сідона, Л. Тонеллі, А. М. Колмогорова, Ч. Мура і Л. Чезарі, Р. Боаса, С. О. Теляковського (огляд – див. [Telyakovsky, 1964]). На сьогодні результати С. О. Теляковського є одними із найзагальніших, їх називають умовами Боаса-Теляковського (там само).

Аналогічна задача сформульована і для кратних тригонометричних рядів, до того ж існує ряд цікавих результатів її розв'язання, пов'язаних із різними способами підсумовування кратного ряду. Зазначимо, що аналог умов Боаса-Теляковського для кратних тригонометричних рядів встановлено П. В. Задереєм [Zaderey, 1992].

Проблемною групою вивчаються також застосування згаданих результатів у теорії наближення функцій. Одними з таких можуть бути задачі встановлення оцінок величини найкращого наближення періодичних сумовних функцій через їх коефіцієнти Фур'є. Так, прикладом застосування є встановлена оцінка зверху найкращого наближення тригонометричними поліномами функцій, заданих тригонометричними рядами, коефіцієнти яких задовольняють умови Боаса-Теляковського, а також наслідки цього результату для функцій, що належать вужчим класам – задовольняють умови С. Сідона, А. М. Колмогорова [Кононович, 2002]. Оцінки виражені через коефіцієнти ряду, яким задається функція, а умови Боаса-Теляковського забезпечують його належність до рядів Фур'є, як і той факт, що сама сума ряду є функцією сумовною.

Отже, наукові знання та інформаційні інтерактивні технології можуть усуча-

снити математичну освіту вищої школи та будуть сприяти підвищенню її якості.

Перелік посилань

Барिश О.О. (2021). Порівняльний аналіз умов інтегровності тригонометричних рядів. *Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету*. Полтава: Астроя. С. 15–16.

Кононович Т.О. (2002). Оцінка найкращого наближення тригонометричними поліномами функцій, що задовольняють умови Боаса-Теляковського. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України*. К.: Ін-т математики НАН України. Т. 35. С. 47–67.

Кононович Т.О. (2024). Робота наукової проблемної групи у контексті підвищення якості математичної освіти. *Матеріали VI Всеукраїнської науково-практичної конференції «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи»*. Полтава : ПНПУ імені В. Г. Короленка. С. 65–66.

Подошвелев Ю.Г. (2016) *Система LaTeX: інтерактивний навчальний посібник*. Полтава : ПНПУ. 190 с. <http://dspace.pnpu.edu.ua/handle/123456789/6929>

Подошвелев Ю.Г., Серов М.І. (2024) *Диференціальні рівняння в прикладах і задачах: інтерактивний навчальний посібник*. Полтава : ПНПУ. 386 с.

Слаба Я.Р. (2019). Розв'язання основної задачі теорії наближення функцій у просторі L . *Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету*. Полтава : Астроя. С. 26–27.

Шаравара Я.А. (2020). Проблема інтегровності тригонометричних рядів в теорії рядів Фур'є. *Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету*. Полтава : Астроя. С. 30–31.

Telyakovsky S.A. (1964). Conditions for the integrability of trigonometric series and their application to the study of linear methods of summation of Fourier series. *News of the USSR Academy of Sciences. Math. series*, vol. 28, no. 6, pp. 1209–1236.

Zaderey P.V. (1992). On the integrability conditions for multiple trigonometric series. *Ukr. Mat. Journal*, vol. 44, no 3, pp. 340–365.

Оцінювання математичних компетентностей студентів-логістів в умовах дистанційного навчання

О. А. Лагода¹, І. П. Кудзіновська²

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

²*Київський авіаційний інститут, Київ, Україна*

Lahoda.Oksana@l111.kpi.ua

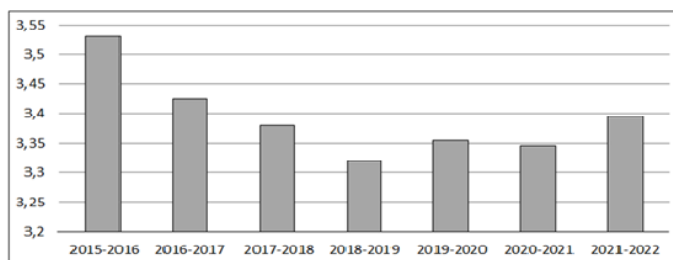
Анотація

Розглянуто проблематику оцінювання навчальних досягнень студентів в умовах дистанційного навчання. Проаналізовано фактори негативного впливу на об'єктивність оцінювання навчальних досягнень студентів-логістів та шляхи її підвищення при викладанні математичних дисциплін. Надано методичні рекомендації щодо оптимізації процесу оцінювання. Більшість з цих підходів залишається корисними інструментами для викладачів і за умов навчання офлайн.

Ключові слова: оцінювання навчальних досягнень студентів; дистанційна освіта; математичні дисципліни.

У зв'язку з інтенсивним розвитком комп'ютерних комунікаційних технологій дистанційне навчання набуває все більшої популярності та поширеності як форма здобуття освіти. Впровадження дистанційного навчання в Україні значно прискорилося в останні роки у зв'язку із запровадженням карантинних обмежень з метою протидії поширенню COVID-19 та початком широкомасштабних воєнних дій у країні [Kuharenko, Bondarenko, 2020], [Oleshko, Rovnyagin, Godz, 2021], [Kovalchuk, 2021], [Kulchyńska, 2020]. У цьому контексті першочергового значення набувають питання забезпечення якості дистанційного навчання, зокрема, аспекти, що стосуються об'єктивного оцінювання навчальних досягнень студентів. Перехід на дистанційне навчання, особливо у сфері математичних дисциплін, зумовив значні труднощі у проведенні поточного контролю. Зокрема, стало неможливим оцінювання знань студентів шляхом розв'язання задач біля дошки чи виконання самостійних робіт під безпосереднім наглядом викладача. Крім того, у період воєнного стану часті повітряні тривоги, відсутність світла та якісного Інтернету значно ускладнюють проведення занять та опитувань у режимі

реального часу, а об'єктивність оцінювання в асинхронному форматі викликає певні сумніви, оскільки студенти мають змогу використовувати сторонні ресурси, включаючи інтернет-сайти, що надають готові розв'язання. На практиці спостерігаються випадки, коли студент не може відповісти на запитання викладача під час відеоконференції, проте надсилає бездоганно виконану контрольну роботу. З метою аналізу об'єктивності оцінювання автори здійснили моніторинг середнього балу студентів бакалаврату денної форми навчання Національного авіаційного університету за період 2015/2016 – 2021/2022 навчальних років.



Гістограма демонструє поступове зниження значень середнього балу, починаючи з 2018–2019 навчального року, що можна пояснити загальним спадом рівня математичної підготовки випускників шкіл. Внаслідок цього студенти молодших курсів стикаються зі значними труднощами в опануванні математичних дисциплін. Однак після запровадження дистанційного навчання у другому семестрі 2019–2020 навчального року спостерігається несподіване зростання середнього балу студентів, яке ще більше посилилося після введення воєнного стану.

Зазначені зміни не можна пов'язувати з підвищенням рівня самоконтролю здобувачів освіти або зростанням їхньої мотивації до навчання. Основна причина цього полягає у відсутності взаємодії між викладачем та більшістю студентів під час онлайн занять. Натомість оцінювання робіт, надісланих на перевірку, не може забезпечити належного рівня об'єктивності. Як зазначається у дослідженні [Kuharenko, Bondarenko, 2020], перехід на дистанційну форму навчання загалом негативно вплинув на відвідуваність занять студентами та систематичність їхнього навчання. Воєнний стан території України ще більше загострив ці проблеми: значна частина студентів почала демонструвати зниження успішності з різних об'єктивних і суб'єктивних причин. Проте дані гістограми суперечать цьому спостереженню, що дає підстави припустити наявність необ'єктивності у процесі оцінювання. Таким чином, вдосконалення методів оцінювання у дистанційному навчанні залишається актуальним завданням. У роботі [Drozd, 2019] в якості форми контролю знань студентів запропоновано короткочасні контрольні роботи, які дають можливість на

кожному занятті, витрачаючи зовсім короткий час, перевірити, як студенти засвоїли основні факти, формули та поняття розділу, що розглядався на попередньому занятті. Окрім того, проведення контролю на початку кожної пари стимулює студентів до щоденної систематичної роботи, що, безумовно, є запорукою ґрунтовного опанування навчальної дисципліни. Вважаємо за доцільне доповнити набір підходів до оцінювання математичних компетентностей наступним комплексом заходів, який може стати ефективним інструментом не лише перевірки знань та умінь студентів, а й сприятиме зростанню якості оволодіння матеріалом.

Крок 1. Для стимулювання регулярного виконання домашніх завдань пропонується так звана «випадкова перевірка виконання домашнього завдання». Це означає, що під час якихось пар семестру всім студентам буде запропоновано надіслати дві випадково обрані задачі (просту і складну) з випадково обраних домашніх завдань на перевірку. На підставі такої перевірки виставляється максимальна оцінка за всі ДЗ, якщо надіслані обидві задачі і 75%, якщо лише проста. **Переваги:** 1) щоб отримати максимальну оцінку, студенту потрібно робити всі ДЗ; 2) легко перевірити академічну доброчесність (однакові роботи анулюються); 3) викладач не витрачає багато часу на перевірку.

Крок 2. Після проходження будь-якого тесту впродовж 5-10 хв після його закінчення надсилаються фотографії розв'язків. В надісланій роботі теж випадково перевіряється одна задача, відповідь до якої була правильною згідно до автоматичної перевірки. На підставі цього виставляється оцінка. **Переваги:** 1) щоб отримати високу оцінку, потрібно вміти це робити руками або, принаймні, не бездумно використовувати онлайн-розв'язання; 2) можна розраховувати на підвищення оцінки, якщо помилка була несуттєвою; 3) викладач контролює проходження тесту і водночас заощаджує час на перевірі.

Крок 3. Усний захист розрахункової (домашньої контрольної) роботи. Оскільки незалежно від нашого ставлення до цього чат GPT та інші онлайн сервіси для розв'язування задач вже стали невід'ємною частиною навчання, викладачам потрібно керувати цим процесом, а не лише обурюватися його загрозливо негативним впливом. Замість репетитора чи навіть живої консультації у викладача студенти просять чат GPT не лише розв'язати задачу, а й пояснити незрозуміле для них. Важливо, щоб опитування на захисті перевіряли не володіння тим чи іншим алгоритмом, а розуміння логіки розв'язування задач, зв'язок даної задачі з іншими та цілісне засвоєння тієї чи іншої математичної компетентності.

Питання можуть бути доволі творчими, навіть провокативними. Наприклад, «Чи навчилися ви ділити на нуль?», «Чим відрізняється визначник від матриці?», «Які застосування визначника (матриці) ви знаєте?», «Яка, на вашу думку, головна відмінність між скалярним та векторним добутком?», «Що спільного у рівнянь площин та прямих у просторі з векторами?», «Який три методи знаходження границь користуються найбільшою популярністю серед студентів?», «Як пов'язане логарифмічне диференціювання з логарифмами?», «Яку функцію виберете для ди-

ференціювання: параметрично задану чи неявно задану і чому?», «Які найпростіші перші три-чотири етапи аналізу підінтегральної функції ви запропонуєте новачку перед знаходженням первісної?», «Чому інтегрування частинами так назвали?», «Як пов'язане розв'язування алгебраїчних рівнянь з інтегруванням?» «Наведіть приклади функцій, які при x прямує до 2, прямують а) до 0; б) до двох різних чисел; 3) до нескінченності» тощо. **Переваги:** 1) навіть вдало замаскувавши чат GPT, студент не зможе «в прямому ефірі» скористатися підказками на ці питання; 2) такі опитування стимулюють не просто пам'ятати алгоритми, а й розуміти суть того, що робиш; 3) розвивають навик формулювання своїх думок вербально, адже вміння пояснити те, що робиш постраждало чи не найбільше під час практично безмовного (з боку студентів) дистанційного навчання.

Контроль навчальних досягнень відіграє важливу роль у забезпеченні зворотного зв'язку між викладачем і студентом, дозволяючи оцінити відповідність отриманих знань, навичок та умінь нормативним вимогам, а також вчасно коригувати навчальний процес. Проблема об'єктивної оцінки знань студентів на підставі тестів чи надісланих на електронну пошту робіт за умови легкої доступності різноманітних онлайн-сервісів залишається актуальною та, очевидно, не має простого способу вирішення. Запропоновано варіанти підвищення об'єктивності оцінювання студентів під час дистанційного навчання. Більшість з цих підходів залишаються корисними інструментами для викладачів і за умов навчання офлайн.

Перелік посилань

Kuharenko V. M., Bondarenko V. V. (2020). *Emergency distance learning in Ukraine: Monograph*. Kharkiv: Published by KP «City Printing House». 409 p.

Oleshko A. A., Rovnyagin O. V., Godz V. R. (2019). Improvement of distance learning in higher education in conditions of pandemic restrictions . *State administration: improvement and development* , no. 1 DOI: 10.32702/2307-2156-2021.1.3

Kovalchuk T. (2021). Distance learning in institutions of higher education: risks and prospects for development. <https://nubip.edu.ua/node/100736>,

Kulchynska N. Z. (2020). Effective tools for monitoring students' knowledge when organizing distance learning in modern educational conditions. *In Modern information technologies and innovative teaching methods: experience, trends, prospects. Materials VI International science and practice internet conf. Ternopil.*, pp. 129–131.

Drozd V.V. (2019). About the best tactical “weapons” of the teacher. *Mathematics in Modern Technical University*, no. 1, pp. 25–31.

До питання використання штучного інтелекту при вивченні математичних та технічних дисциплін

І. Ю. Мельник¹, Н. М. Задерей², Г. Д. Нефьодова², М. О. Хохотва²

¹*Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна*

²*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

n_gd-fmf@111.kpi.ua

Анотація

Розглянуто можливості використання систем штучного інтелекту як інструменту підтримки навчального процесу студентів при вивченні математичних та технічних дисциплін. Проаналізовано потенціал технологій ШІ у контексті освітнього процесу.

Ключові слова: штучний інтелект, освітній процес, верифікація інформації.

Застосування штучного інтелекту є досить активним в освіті, зокрема, при викладанні вищої математики та технічних дисциплін. Розглянемо як переваги, так і низку недоліків застосування ШІ.

- Інтерактивність навчальних платформ.

Багато провідних університетів (Стенфорд, Гарвард, МТІ тощо) з допомогою платформ ШІ адаптують рівень складності завдань згідно попередніх успіхів студентів. Перевагами служать індивідуальний підхід, ефективність вивчення складних тем, точність перевірки та зворотній зв'язок у реальному часі. Недоліками можна назвати обмеження у розумінні контексту, надмірна стандартизація оцінювання, недостатній рівень доступу та навичок студентів при використанні новітніх технологій [Selwyn, 2016].

- Віртуальні помічники.

Чат-боти, голосові асистенти миттєво допомагають студентам у самостійному виконанні складних завдань, громіздких розрахунків 24/7 без обмежень та у різних форматах (текст, таблиці, формули, графіки, відео). Зазначимо, що при цьому

для ІІІ не досяжні складні специфічні питання, деталі, оригінальні рішення тощо. Так само, як і відсутні мотиваційний та емоційний моменти, що є важливим у навчанні.

- Дослідження та аналіз масиву значної кількості даних для персоналізації навчання.

При аналізі великих масивів даних в університетах використовують ІІІ для визначення взаємодії студентів з викладеним матеріалом, виявлення прогалин у навчанні. Наприклад, на основі аналізу відповідей на тести чи домашні завдання можна визначити які з розділів математики не є засвоєними студентами та адаптувати матеріал за потреби. Своєчасна додаткова допомога при цьому є забезпеченням успіхів у навчанні. Хоча занепокоюють проблеми конфіденційності, надмірного покладання на шаблони та типові завдання, можливість втрати здатності до креативного, нестандартного, критичного мислення.

- Обробка природної мови (Natural Language Processing – NLP).

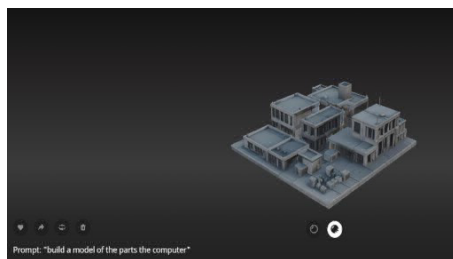
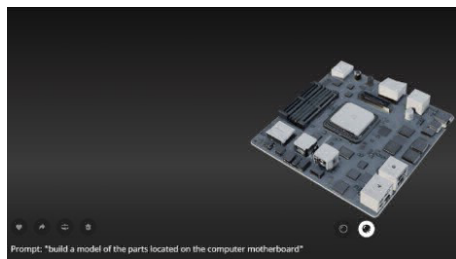
Штучний інтелект, керований NLP, слугує віртуальним помічником у навчанні. Студенти, наприклад, задають питання природною мовою: «Як застосувати метод підстановки для інтегрування?». ІІІ надає пояснення, підказки і покроковий розв'язок. Форма навчання при цьому зручна, інтерактивна, не потребує наставництва чи очікування додаткових консультацій. Недоліком є обмежене розуміння контексту, ІІІ обробляє конкретне завдання без взаємодій із попередніми чи наступними частинами роботи, при цьому можливі непорозуміння з уявленнями студентів. Особливі труднощі виникають зі складними запитаннями: на дуже складні або абстрактні математичні запитання штучному інтелекту може бути важко надати адекватні відповіді.

- Складні математичні системи та їх моделювання.

Для вивчення деяких важливих математичних теорій, таких, наприклад, як теорія диференціальних рівнянь, ряди та інтеграл Фур'є, теорія хаосу тощо ІІІ ефективно використовує візуалізацію та моделювання. Зазначимо, що у Стенфордському університеті, наприклад, широко застосовують інтерактивні моделі для вивчення таких складних абстрактних понять. Студенти з допомогою ІІІ можуть бачити в реальному часі, як працює дана математична модель, що значно полегшує розуміння складних концепцій. Можна проводити цікаві експерименти в реальному часі, тобто, студенти можуть тестувати гіпотези і отримувати миттєві результати [Jurafsky, 2023]. Хоча моделювання та візуалізація можуть бути корисними, але вони не замінюють глибокого теоретичного розуміння предмету. Труднощі тут

виникають технічного плану: виникає потреба у відповідному програмному забезпеченні та технічній підтримці для створення досить складних математичних чи технічних моделей.

Наведемо приклад використання ШІ на заняттях студентів I курсу технічних спеціальностей Київського університету імені Бориса Грінченка з теми «Вступ до спеціальності» за допомогою сервісу <https://www.tripo3d.ai/> для побудови 3-Д моделей. Наприклад, модель компонентів, розташованих на материнській платі комп'ютера.



Штучний інтелект попри великі можливості для ефективного опрацювання нового матеріалу має свої виклики та обмеження, а саме: необхідність верифікації отриманої інформації, ризик надмірної залежності від ШІ, етичні аспекти використання, технічні обмеження систем тощо [Smith, 2023], [Brown, 2023].

Стверджуючи про неабиякий потенціал технологій штучного інтелекту в освітньому процесі, зазначимо, що ключовим є баланс між використанням ШІ і традиційними методами викладання, щоб забезпечити максимальну ефективність надання вищої освіти без втрати студентами самостійності, фундаментальних знань та критичного мислення.

Перелік посилань

Selwyn N. (2016). *“Education and Technology: Key Issues and Debates”*. (2 Edition) Bloomsbury Publishing, 232 с.

Jurafsky D., Martin J. H. (2023). *“Speech and Language Processing”*. (3rd Edition) Stanford University, 623 с.

URL: https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/ed3book_jan72023.pdf

Smith. J. (2023). *“AI in Education: Current Trends and Future Perspectives”*. AI & Society, 38(1), C. 12-25.

Brown. R. (2023). *“The Impact of AI Tutoring Systems on Student Performance”*. Journal of Educational Technology, 41(3), C. 201-215.

Інноваційні підходи підтримки математичної освіти в умовах викликів

К. К. Москвичова¹, І. В. Орловський¹, О. Б. Пелехата¹,
О. А. Тимошенко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

moskvychovakateryna@gmail.com, i.v.orlovsky@gmail.com,
pelehataob2015@gmail.com, otymoshenkokpi@gmail.com

Анотація

Досліджуються проблеми підтримки математичної освіти в кризових ситуаціях, таких як пандемія COVID-19 та війна в Україні. Особлива увага приділяється інноваційним технологіям та підходам, які спрямовані на підвищення рівня математичних знань студентів та їхньої успішності у STEM-дисциплінах.

Ключові слова: Moodle; покроковий тест; step-by-step test; STACK.

Сучасна математична освіта стикається з численними викликами, пов'язаними як із глобальними кризами, такими як пандемія COVID-19, так і з локальними потрясіннями, зокрема в умовах триваючої війни в Україні. Ці виклики вимагають впровадження інноваційних підходів, що відповідають концепції STEM-освіти (наука, технології, інженерія, математика) та здатні забезпечити безперервність навчального процесу, адаптивність до умов індивідуального розвитку студентів і доступ до якісних освітніх матеріалів.

Дистанційна освіта, як ключовий компонент STEM-підходу, стала невід'ємною частиною освітнього процесу. Вона забезпечує студентам можливість отримувати знання незалежно від їхнього місцезнаходження, використовуючи технології, що сприяють активному навчанню, інтеграції міждисциплінарних концепцій та розвитку критичного мислення. У контексті математичної освіти особливо важливо створити цифрове середовище, яке не лише забезпечує доступ до навчальних матеріалів, а й сприяє ефективній самоперевірці та розвитку прикладних навичок.

У КПІ ім. Ігоря Сікорського функціонує платформа дистанційного навчання Sikorsky, яка працює на основі системи Moodle. На платформі створено численні дистанційні курси, які забезпечують доступ до навчальних матеріалів і тестових завдань різного типу.

Система Moodle дозволяє розробляти тести на множинний вибір, встановлення відповідності, перетягування елементів у тексті тощо. Використовуючи тип питання «Вбудовані відповіді» (Embedded answer questions) та мову розмітки HTML, група викладачів кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей (МАТАТІ) почали створювати тести складної структури, які включають послідовність завдань для перевірки знань студентів з математичних дисциплін (див. Рис 1.). Покроко-

Питання 3

Завершено

Макс. оцінка до 7,00

Відмітити питання

Редагувати питання

Задано вектор $\vec{a} = 6\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}$. Знайдіть:

Увага!

Дотримуйтесь таких правил унесення даних:

- записуйте відповідь без пробілів;
- дробові числа записуйте звичайним нескоротним дробом, без виділення цілої частини, використовуючи $\frac{}{}$.

а) проєкції вектора на осі координат:

$\text{pr}_{Ox}\vec{a} =$, $\text{pr}_{Oy}\vec{a} =$, $\text{pr}_{Oz}\vec{a} =$

б) довжину вектора:

$|\vec{a}| =$

в) координати орта вектора:

$\vec{a}^0 = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{7}{12} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{3}{4} \right) \cdot \vec{k}$

Рис. 1: Приклад тесту покрокового типу системи Step-by-Step test

ві тести, відомі як «Step-by-Step test», перевіряють не лише кінцевий результат, а й процес розв'язання задач, що підвищує об'єктивність оцінювання знань. Їх розробка вимагає створення алгоритму, який враховує можливості платформи Moodle [1]. У КПІ ім. Ігоря Сікорського такі тести були розроблені для усіх тем освітнього компоненту «Вища математика» і вже більше шести років успішно використовуються в освітньому процесі. Основні переваги «Step-by-Step test»: перевіряється не лише кінцевий результат, але й основні етапи розв'язання задачі, що зменшує ризик випадкових вгадувань; у цифровому середовищі тести відтворюють традиційний формат письмового оцінювання; покрокова структура з лінійним алгоритмом забезпечує точність і узгодженість завдань, а також підвищує надійність оцінювання; вимога покрокового розв'язання дозволяє студентам краще зрозуміти логіку виконання завдання і уникати типових помилок.

Водночас існують і недоліки. Навіть незначні синтаксичні помилки у відповідях можуть призвести до некоректного оцінювання, що не завжди відображає реальний рівень знань студента. Також виникають труднощі у створенні якісних тестових завдань, де потрібно вводити складні математичні вирази, такі як дроби, корені, степеневі та показникові функції. Це обумовлено проблемами їх коректного відображення у тестовій формі. У завданнях системи «Step-by-Step test» довелося розробити правила для коректного запису таких виразів (див. Рис. 2),

ознайомлення з якими під час тестування вимагало від студентів додаткового часу та могло вплинути на їхній кінцевий результат. Для того, щоб зменшити вплив вище зазначених факторів, було звужено спектр запропонованих завдань, а також впроваджено попереднє ознайомлення студентів зі структурою та типами тестових завдань. Однак ці заходи також мали свої обмеження.

Обчислити інтеграл

$$\int (3x - 1)(x + 4)^{1/2} dx.$$

Увага!
Дотримуйтесь таких правил унесення даних:

- записуйте відповідь без пробілів;
- дробові числа записуйте звичайним нескоротним дробом, без виділення цілої частини, використовуючи $\frac{a}{b}$;
- при записі функцій:
 - степені записуйте за допомогою знаку $^{\wedge}$. Наприклад,

Вираз	Запис у коментарі
$(x-1)^3$	$(x-1)^{\wedge}3$
$\sqrt{x^5}$	$x^{\wedge}(5/2)$
 - використовуйте стандартні позначення функцій, записуючи аргумент у дужках. Наприклад,

Вираз	Запис у коментарі
e^x	$e^{\wedge}x$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln \frac{x}{2}$	$\ln(x/2)$
- знак множення не записувати або, у разі необхідності, записувати як * , а знак ділення записувати як $/$. Наприклад,

Вираз	Запис у коментарі
$\frac{\sin x}{2x}$	$1/2 \sin x / x$
$x \sin x$	$x^{\ast} \sin(x)$

Розв'язання.

$$I = \int (3x - 1)(x + 4)^{1/2} dx = \int_{x=t-4}^{x=t-4} (3t-13)t^{1/2} dt = \int_{t=0}^{t=14} (3t-13)t^{1/2} dt = 3t^{\wedge}14/14 - 13t^{\wedge}3/3 + C,$$

І, повертаючись до початкової змінної, отримуємо відповідь.

Відповідь: $I = 3(x+4)^{\wedge}14/14 - 13(x+4)^{\wedge}3/3 + C.$

Рис. 2: Приклад тесту з описом правил введення математичних виразів

Для подолання цих недоліків ми почали процес впровадження плагіну STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel). Цей інструмент оцінює математичні завдання, перевіряючи не лише кінцеві відповіді, а й логіку розв'язання [2]. STACK дозволяє користувачам у режимі реального часу перевіряти коректність введення математичних виразів, включаючи символічні обчислення, рівняння та графіки. Це значно спрощує роботу зі складними формулами та знижує ризик помилок. Наприклад, у задачах на інтегрування плагін дає змогу перевірити застосування правил інтегрування та фінальний результат (див. Рис. 3). Такий підхід дозволяє виявити, на якому етапі студент припустився помилки.

Однією з ключових переваг STACK є здатність розпізнавати складні математичні вирази, такі як многочлени, дробі, інтеграли, похідні та системи рівнянь. Плагін дозволяє вводити відповіді у звичному математичному форматі, мінімізуючи ризик втрати балів через технічні неточності. STACK Moodle забезпечує персоналізований зворотний зв'язок і систему підказок для ефективного навчання.

Цей інструмент для автоматизованого оцінювання математичних завдань актив-

Питання 1

Частково правильно

Бали: 0,50 з 1,00

Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int 7 \cdot x \cdot \sin(2 \cdot x) dx =$$

u = 7*x

7 · x

dv = sin(2*x)

sin(2 · x)

du = 7

7 dx

v = -(cos(2*x)/2)

- cos(2x) / 2

=

$$-7/2 \cdot x^2 \cdot \cos(2 \cdot x) - 7/4 \cdot \sin(2 \cdot x) + c$$

Your last answer was interpreted as follows:

$$-\frac{7}{2} \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{7}{4} \cdot \sin(2 \cdot x) + c$$

The variables found in your answer were: [c, x]

Інтеграл обчислюється, використовуючи інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\int 7 \cdot x \cdot \sin(2 \cdot x) dx = \left[\begin{matrix} u = 7 \cdot x & dv = \sin(2 \cdot x) dx \\ du = 7 dx & v = -\frac{\cos(2 \cdot x)}{2} \end{matrix} \right] =$$

$$= 7 \cdot x \cdot \frac{\cos(2 \cdot x)}{2} - \int -\frac{\cos(2 \cdot x)}{2} 7 dx$$

$$= \frac{7 \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2} - \int -\frac{7 \cdot \cos(2 \cdot x)}{2} dx$$

$$= \frac{7 \cdot \sin(2 \cdot x)}{4} - \frac{7 \cdot x \cdot \cos(2 \cdot x)}{2} + c$$

Рис. 3: Приклад тесту створеного за допомогою плагіну STACK

но вдосконалюється за підтримки проєктів ЄС і сьогодні є одним із найефективніших засобів для адаптивного навчання математики та дисциплін STEM [3]. Його розширення та впровадження в Україні має особливе значення в умовах війни, яка суттєво вплинула на освітні процеси. Українські університети та студенти стикаються з багатьма викликами, зокрема обмеженим доступом до якісних навчальних матеріалів, і STACK здатний ефективно вирішити ці проблеми. Тому поєднання методів реалізації завдань у системі «Step-by-Step test» і можливостей STACK дозволяє створити більш комплексну та студент-орієнтовану систему, яка ефективно застосовується як у формальному, так і в неформальному навчальному середовищі. Оновлені курси сприятимуть розвитку математичних компетенцій, необхідних для успіху в STEM-дисциплінах, а також підвищенню готовності до технологічних викликів.

Перелік посилань

- [1] Омельчук Т. С., Орловський І. В., Тимошенко О. А. (2018). Особливості створення та аналіз якості покрокових тестів з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, *Сьома міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті»* 27–28 грудня, 2018.- Київ - С. 268-271.
- [2] Zerva K. & Sangwin C. J. (2019). Developing STACK assessments in Edinburgh, STACK DEMO.
- [3] Sangwin Ch, (2013). *Computer Aided Assessment of Mathematics*, Oxford University Press.

Власні вектори та власні числа в лінійній алгебрі та статистиці за допомогою функцій MS Excel

О. В. Мулик¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

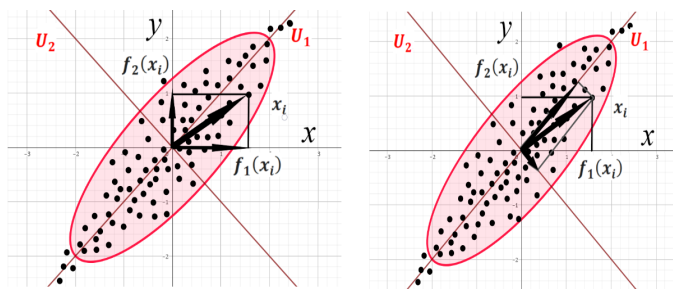
mulyk.olena@gmail.com

Анотація

Розглянуто зміст власних векторів і власних чисел для методу головних компонент через побудову канонічного рівняння еліпса методом повороту системи координат та розподілу вибірових даних вздовж певного напрямку. Наведено приклад знаходження матриці Грама та можливість скорочення простору факторів відповідно до її власних значень.

Ключові слова: власні вектори, власні числа, матриця Грама.

Прикладні статистичні методи, такі як метод головних компонент (PCA – Principal Component Analysis), методи факторизації матриць (NMF – Non-negative matrix factorization, ICA – Independent component analysis) базуються на різних концепціях лінійної алгебри таких, як власні числа, власні вектори, ортогональні матриці, що детально вивчаються в курсі лінійної алгебри, а також, спектральній теоремі (Spectral Decomposition Theorem), на яку не припадає великої уваги за браком часу. Більш загальний метод SVD (Singular Value Decomposition), матриця Грама та інші методи факторизації матриць не розглядається в базовому курсі, але уявлення про можливість їх застосування є бажаною для розуміння популярних статистичних методів скорочення простору ознак без втрати інформативності. Процес розкладу матриці на добуток кількох простіших матриць, які містять корисну інформацію про вихідні дані використовується для спрощення обчислень, зменшення розмірності даних, знаходження прихованих закономірностей та виявлення найбільш вагомих факторів, що впливають на результат тощо. Аналіз головних компонент (PCA) є складовою частиною факторного аналізу і, загалом існує доволі простий спосіб показати студентам на прикладі застосування методу факторизації матриць (матриці Грама), геометричний зміст власних векторів та власних чисел.

Рис. 1: Проекція значення x_i вибірових даних.

Розглянемо експериментальні вибірові дані у вигляді матриці $F_{n \times 2}$, яка містить $2n$ елементів у двовимірному просторі ознак. Кожен стовпчик матриці $F_{n \times 2}$ описується функціями $f_1(x_i)$ та $f_2(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ відповідно і які задають певні значення $f_1(x_i) = x_{i1}$ та $f_2(x_i) = x_{i2}$. Хай вибірові дані розподілені в напрямку осі Ox_1 під кутом 45° та нагадаємо знаходження канонічного рівняння еліпса:

$$F = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) \\ \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) \end{pmatrix}, \quad 5x^2 + 5y^2 - 8xy - 8 = 0.$$

Знайдемо канонічне рівняння еліпса за відомим алгоритмом – повернемо систему координат на кут 45° та отримаємо канонічну систему координат. Власні числа матриці $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \in L_1 = 1, L_2 = 9$ та відповідні орти власних векторів:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, [\text{Булдигін та ін., 20011}].$$

Тоді шукане перетворення координат задає матриця H :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \text{ тоді } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ і } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \end{cases}$$

У нових координатах рівняння еліпса набуде вигляду $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{0,(8)}$, де можна побачити, яка піввісь буде більшою за довжину, в цьому випадку – це вісь OU_1 . Тепер повернемося до вибірових даних. Виберемо довільну точку x_i , як показано на малюнку та розглянемо вектор $\vec{V}_i = (f_1(x_i), f_2(x_i))$ з початком в точці $O(0,0)$. Проекції вектора $\vec{V}_i$ на осі Ox та Oy не однакові, але, в середньому, відрізняються не на значну величину і мають зміст відхилення (дисперсії) від осей Ox та Oy . Якщо розглянути проекції цього ж вектора $\vec{V}_i$ на нові осі OU_1 та OU_2 , то нерівність проекцій стає значною і, зрозуміло, що, в середньому, проекція на вісь OU_1 значно більша за проекцію на OU_2 . Тобто відхилення для експериментальних даних

(дисперсія) стає більш проявленим в певному напрямку. Позначимо нові координати для вектора експериментальних даних $\vec{V}_i = (g_1(x_i), g_2(x_i))$. Важливим фактом стає більша концентрація інформації на осі OU_1 з ознакою $g_1(x_i)$ і тепер кожен вектор $\vec{V}_i = (g_1(x_i), g_2(x_i))$ можна обчислювати за такими самими правилами, як і рівняння еліпса:

$$\begin{pmatrix} g_1(x_i) \\ g_2(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_i) \\ f_2(x_i) \end{pmatrix},$$

Тобто маємо функціональні перетворення у вигляді скалярного добутку двох векторів які визначили проєкції вектора $\vec{V}_i$ на нові осі.

Якщо кількість ознак збільшується – простір ознак стає багатовимірним і матриця F буде розміру $n \times m$, де рядки – це спостереження, а стовпці – ознаки. Тоді для знаходження власних чисел використовується матриця Грамма (Gram matrix), що визначається як:

$$G_n = (F_{nm})^T F_{mn} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{pmatrix} \text{ [Zaiontz, 2023]}$$

G_n – це симетрична, додатно напіввизначена матриця (її власні значення невід’ємні), вона містить скалярні добутки всіх пар стовпців матриці F_{nm} . Фактично, це коваріаційна матриця (до нормалізації), яка показує, як змінні залежать одна від одної. Далі потрібно знаходити власні числа і власні вектори матриці G_n за відомим алгоритмом $\det(G_n - L E_n) = 0$, тоді отримані значення власних чисел L_i будуть визначати відхилення (дисперсію), тобто варіацію проєкцій значень матриці F_{mn} на відповідну вісь OU_i ортонормованої системи координат. Схематично це можна зобразити так:

$$\begin{array}{cccc} L_1 & \geq & L_2 & \geq & \dots & \geq & L_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \dots & & \downarrow \\ U_1 & & U_2 & & \dots & & U_n \end{array}$$

Тобто, якщо розташувати власні значення L_i в порядку спадання, то їх значення по величині покажуть, наскільки важлива кожна компонента.

Звісно, обчислювати власні числа і власні вектори для великих масивів даних потрібно у певних середовищах. Реалізуємо практичну задачу функціями MS Excel. Сформуємо за допомогою Data Analysis (Random Number Generation) вибірку даних, що складається з двох незалежних ознак (факторів) $f_1(x_i)$ та $f_2(x_i)$, $i = 1, \dots, 10$, які є Гаусовими випадковими величинами з середнім 0 і дисперсією 1 та лінійною комбінацією $f_3(x_i) = \frac{f_1(x_i) + f_2(x_i)}{2}$. Для знаходження матриці Грамма використовуємо формулу **MMULT(TRANPOSE(B3:D12);B3:D12)**, далі для знаходження власних чисел і власних векторів **eigVECTSym(F3:H5)** (Рис.2).

Запропонований простий приклад допоможе студентам першого курсу розширити погляд на застосування лінійної алгебри в їх майбутніх дослідженнях.

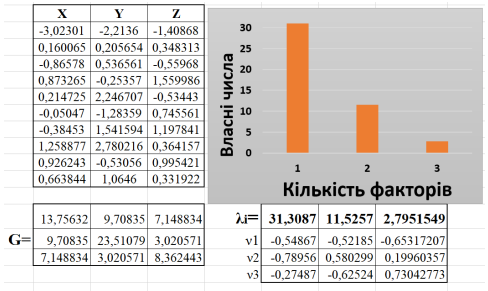


Рис. 2: Знаходження матриці Грамма та власних векторів та власних чисел функціями MS Excel.

Перелік посилань

Charles Zaiontz (2023). *The data analysis for this paper was generated using the Real Statistics Resource Pack software (Release 8.9.1). Copyright (2013–2023).*

Булдигін В. В., Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. (2011). *Лнійна алгебра та аналітична геометрія. Київ:ТВиМС.*

Особливості навчання імітаційного моделювання

Т. В. Підгорна¹, П. Ф. Самусенко²

¹*Державний торговельно-економічний університет, Київ, Україна*

²*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

psamusenko@ukr.net

Анотація

У праці розглядаються деякі аспекти навчання імітаційного моделювання у ЗВО України. Проаналізовано програмне забезпечення, яке доцільно використовувати в навчальному процесі.

Ключові слова: Імітаційне моделювання; системна динаміка.

Математичне моделювання є важливим засобом дослідження багатьох реальних процесів та явищ. При цьому побудова математичної моделі складної системи в аналітичному вигляді часто не доцільна, а іноді, навіть неможлива. Саме тому, останнім часом досить поширеним стає імітаційне моделювання.

Імітаційне моделювання – це процес конструювання моделі реальної системи і проведення експериментів на цій моделі з метою: або зрозуміти поведінку системи, або оцінити в межах певних критеріїв різні стратегії, що забезпечать функціонування даної системи [Кулинич, 2009].

Основні цілі навчання імітаційного моделювання: опанувати етапи імітаційного моделювання; вміти розробляти імітаційні моделі досліджуваних процесів та явищ; вміти використовувати відповідне програмне забезпечення для імітаційного моделювання.

Основними методами імітаційного моделювання є агентний метод, дискретно-подієвий метод та системна динаміка.

Агентне моделювання – метод імітаційного моделювання, що ґрунтується на визначенні впливу одного або декількох автономних агентів на процес функціонування конкретної системи [Мілов, 2019].

Дискретно-подієве моделювання – метод імітаційного моделювання, що передбачає розгляд лише основних подій модельованої системи, наприклад, «очікування вимоги в черзі», «обробка вимог в системі», абстрагуючись від тих подій, вплив яких на досліджувані характеристики системи незначний [Цідило, 2013].

Системна динаміка – метод імітаційного моделювання, що ґрунтується на побудові графічних діаграм причинних зв'язків і глобальних впливів одних параметрів на інші з плином часу. Модель, створена на основі цих діаграм, в подальшому досліджується з використанням програмних засобів [Цідило, 2013].

Програмне забезпечення, що використовується під час імітаційного моделювання, можна поділити на три групи: табличні процесори; прикладне програмне забезпечення; бібліотеки мов програмування.

В свою чергу серед прикладного програмного забезпечення для імітаційного моделювання виокремлюють програмні засоби, в яких реалізовано кілька підходів імітаційного моделювання і програмні засоби, в яких реалізовано окремі підходи імітаційного моделювання. Програми, за допомогою яких можна реалізувати імітаційні моделі, в яких застосовуються різні підходи імітаційного моделювання з візуалізацією процесів моделювання, зазвичай, мають складну процедуру використання ліцензійного програмного забезпечення в освітньому процесі. Разом з тим існують безкоштовні версії програм з певними обмеженнями. Прикладом такої системи є Simio (<https://www.simio.com/>).

Альтернативою використання комерційного програмного забезпечення є застосування вільнопоширюваних програмних засобів. Приклади вільнопоширюваних систем для здійснення імітаційного моделювання: на основі агентно-орієнтованого підходу – NetLogo (<https://ccl.northwestern.edu/netlogo/>), на основі дискретно-подієвого підходу – JeanSim (<https://jaamsim.com/>), на основі системної динаміки – TRUE (<https://www.true-world.com/>). Також для реалізації імітаційних моделей створених на основі різних підходів можна використовувати мови програмування з відповідними бібліотеками, наприклад, бібліотеки мови Python (AgentPy, SimPy, PySD).

Вибір програмного забезпечення залежить від умов навчання. В умовах змішаного навчання потрібно враховувати технічні, організаційні та ліцензійні умови використання відповідного програмного забезпечення.

Перелік посилань

Кулинич М. Б. (2009). Імітаційне моделювання в контексті управлінського аналізу. *Вісн. Нац. ун-ту «Львів. політехніка»*, по. 647, pp. 587–590.

Мілов О. В., Костяк М. Ю., Мілевський С. В., Погасій С. С. (2019). Засоби моделювання поведінки агентів в інформаційно-комунікаційних системах. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наук. праць*, по. 6(58), pp. 63–70.

Цідило І. М., Ковальський Т. І. (2013). Імітаційне моделювання засобами MATLAB у структурі підготовки інженера-педагога. *Наукові записки Тернопільського нац. пед. унів. ім. Володимира Гнатюка. Сер. Педагогіка*, по. 1, pp. 31–39.

Візуалізація навчального матеріалу з математичних дисциплін у вищій школі за допомогою середовища GeoGebra

Л. А. Тютюн¹, О. П. Косовець¹

¹*Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця, Україна*

`kosovets.op@vspu.edu.ua`

Анотація

У даній статті йдеться про візуалізацію навчального матеріалу з математичних дисциплін у вищій школі з використанням динамічного геометричного середовища GeoGebra. Наведено коротку інформацію про це геометричне середовище. Вказуються переваги використання даного програмного засобу. Проілюстровано на конкретних задачах простоту та легкість відтворення розв'язування задач у програмному середовищі GeoGebra.

Ключові слова: математичні дисципліни; візуалізація; динамічне середовище GeoGebra.

У сучасному світі цифрові технології відіграють ключову роль у розвитку інформаційного суспільства. Тому дослідження їх впливу на освіту є надзвичайно важливим. Швидкі зміни в технологіях, виробництві, освіті та комунікації вимагають постійного оновлення вимог до математичної підготовки фахівців.

Ключовим фактором успіху у підготовці освічених, компетентних та технологічно підкованих професіоналів, здатних успішно працювати та сприяти розвитку сучасному світу, є ефективна підготовка майбутніх учителів математики. Ця підготовка має бути орієнтована на впровадження цифрових технологій та інноваційних підходів. [Kovtoniuk, Kosovets, Soia, Pinaieva, 2022]

Тому важливо, щоб студенти мали ґрунтовні математичні знання та вміли створювати математичні об'єкти з визначеними властивостями. Необхідно продовжувати розвивати їхню графічну культуру, заохочувати інтерес до математичних дисциплін через міждисциплінарні зв'язки та наступні зв'язки із вивченими темами, візуалізуючи динаміку побудови рисунків за допомогою цифрових технологій.

Варто також сприяти розвитку самостійності в навчанні, логічного мислення, просторової уяви, пам'яті та активізації розумової діяльності студентів.

Сучасні технічні засоби та мобільні додатки створюють умови для впровадження різноманітних програмних середовищ у навчальний процес, особливо у сфері математичної освіти. Останнім часом особливої популярності набуло використання вільно розповсюджуваного динамічного геометричного середовища GeoGebra. Це чудова математична програма як для навчання, так і самонавчання. Що особливо важливо в умовах змішаного та дистанційного навчання. За її допомогою можливо проектувати конструкції з точками, векторами, сегментами тощо, а однією з її особливих переваг і особливостей є те, що можна динамічно змінювати побудовані геометричні конфігурації та здійснювати дослідження щодо властивостей тієї чи іншої конфігурації.

GeoGebra – це динамічне математичне програмне забезпечення для всіх рівнів освіти, яке об'єднує геометрію, алгебру, електронні таблиці, графіки, статистику та обчислення в одне ціле. Крім того, GeoGebra – це спільнота мільйонів користувачів майже в кожній країні. Вона стала провідним постачальником програмного забезпечення для динамічної математики, що підтримує наукову, технологічну, інженерну та математичну (STEM) освіту та інновації у викладанні та навчанні в усьому світі. [GeoGebra, 2025]

Тому її можна по праву вважати універсальним програмним засобом, що використовується у закладах вищої освіти для підтримки навчання різних геометричних дисциплін, математичного аналізу, вищої математики, алгебри, теорії ймовірності, математичної статистики, дискретного аналізу та інших розділів математики.

Як показує досвід, застосування програми GeoGebra у навчальному процесі надає унікальну можливість: створити динамічні моделі для ілюстрації, візуалізації та демонстрації різних математичних понять, означень, теорем тощо; впровадити конструктивний напрям у навчанні; організувати евристичну діяльність; підготувати навчальні матеріали шляхом співпраці тощо.

Упродовж останніх років під час викладання навчальних дисциплін «Аналітична геометрія», «Конструктивна геометрія», «Основи геометрії», «Диференціальна геометрія і топологія» для студентів математичних спеціальностей. Наприклад, для вивчення розділів «Розв'язування задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки», «Лінії та поверхні другого порядку», «Теореми Дезарга, Паскаля, Бріаншона та дослідження їх частинних випадків», «Перерізи многогранників» тощо, активно використовуємо програмне середовище GeoGebra. На лекційних, практичних і лабораторних заняттях використовуємо візуалізацію динамічності побудови геометричних рисунків, виконаних у даному середовищі. Наведемо приклад тем «Побудова образів простих фігур при інверсії», «Кола Аполлонія».

Задача 1. Побудувати образ ромба при інверсії. (Рис. 1) [Тютюн, 2020]

Задача 2. Дано коло і дві точки, які не лежать на ньому. Побудувати коло, яке проходить через ці точки і дотикається до кола. (Рис. 2) [Тютюн, 2020]

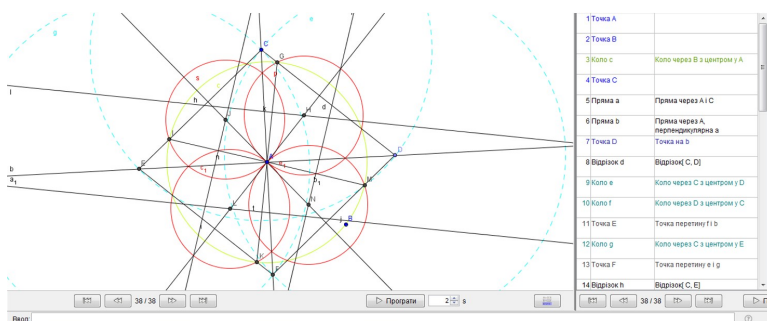


Рис. 1: Побудова образів простих фігур при інверсії.

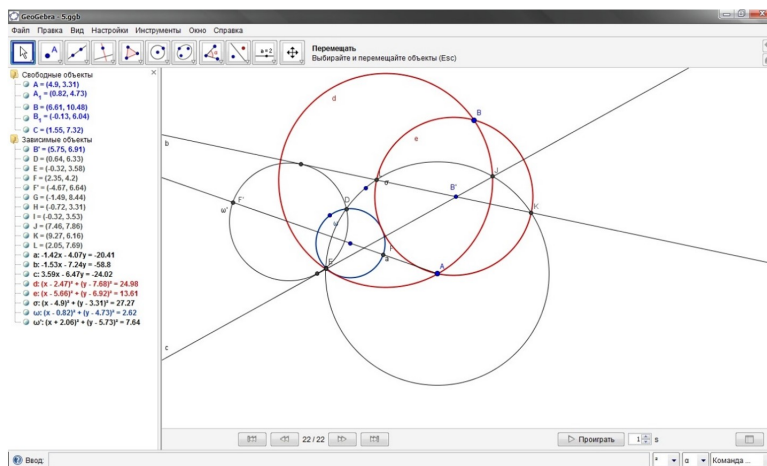


Рис. 2: Кола Аполлонія.

Динамічний рисунок демонструє кроки побудови як анімацію. Тому можна проводити дослідження щодо існування розв'язків та їх кількості. Змінюючи на рисунку початкове положення окремо кожної з заданих точок, кола чи кола інверсії бачимо як змінюватиметься розташування допоміжних, а, отже, і шуканих фігур. Задача може не мати розв'язків (якщо, наприклад, одна з точок, є внутрішньою точкою відносно кола, а друга – зовнішня), може мати тільки один розв'язок (якщо наприклад, точки і лежать на дотичній до кола) і два розв'язки. На рис. 2 задача має два розв'язки. [Тютюн, 2020]

Як показує досвід, візуалізація розв'язків геометричних задач за допомогою таких динамічних рисунків сприяють формуванню світоглядного сприйняття студентами навколишнього світу; розвитку пам'яті. просторової уяви, просторового і

логічного мислення, просторового бачення студента; спонукають його до міркувань щодо конструктивних властивостей заданих і шуканих фігур, які він успішно використовує під час розв'язування наступних задач.

Презентації розроблених до лекційних і практичних занять додатків з динамічними рисунками сприяють: реалізації практичної і прикладної спрямованості вивчення геометрії, використанню міжпредметних і наступнісних зв'язків із вивченими темами, формуванню в студентів графічної культури, інтересу до геометрії як навчальної дисципліни, мотивації їхньої навчальної діяльності. Такі презентації можна використовувати й для індивідуального перегляду. Це відкриває нові можливості для самоосвіти студентів. Студенти також самостійно створюють, моделюють і розробляють комп'ютерні презентації та проекти.

Висновки. Таким чином, залучення динамічного середовища GeoGebra в процес викладання математичних дисциплін у вищій школі веде до оптимізації процесу дослідження розв'язку задачі, сприяє кращому засвоєнню матеріалу та зацікавленості студентів, оскільки вони можуть бачити візуалізацію розв'язку задачі в реальному часі та прогнозувати результати дослідження. Динамічні й графічні можливості програми GeoGebra надають можливість проводити аналіз та спрощувати розв'язання геометричних задач за допомогою створення динамічної моделі досліджуваного об'єкта. Що є основою для того, щоб заняття з математичних дисциплін стали більш змістовними й ефективними. А це, в свою чергу, сприятиме успішній підготовці освічених, компетентних та технологічно підкованих професіоналів.

Перелік посилань

Динамічне середовище GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org/about?lang=uk>

Тютюн Л. А. (2020). Дослідження інверсії та її властивостей за допомогою програми GeoGebra. *Актуальні проблеми математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій*: зб. наук. пр. / С. В. Подолянчук (голова) [та ін.]; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця: ТОВ «Меркьюрі-Поділля», vol. 17, pp. 106–112.

Тютюн Л. А. (2020). Використання програми Geogebra під час розв'язування геометричних задач на побудову за допомогою циркуля та лінійки. *Матеріали міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності*: збірник матеріалів. Вінниця, pp. 73–79.

Kovtoniuk M. M., Kosovets O. P., Soia O. M., Pinaieva O. Y. (2022). Modeling the development process of inclusive education in Ukraine. *Informatyka, Automatyka, Pomiaru w Gospodarce i Ochronie Środowiska*, vol. 12, no. 4, pp. 67–73.

III

ІСТОРІЯ ТОЧНИХ НАУК

HISTORY OF NATURAL SCIENCES

History of complex numbers

I. I. Golichenko¹

¹*Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine*

idubovetska@gmail.com

Abstract

Complex numbers occupy an important place in mathematics and science in general. They are an extension of the real number system and are used to solve many problems in various fields of knowledge. The history of emergence and development of complex numbers is interesting and spans centuries, and has gone through numerous stages of mathematical discoveries.

Keywords: cubic equation; complex numbers.

In the 15th century, the Italian mathematician Scipione del Ferro (1465-1526) managed to derive a formula for the roots of an incomplete cubic equation, [Shastri, 2010], [YangYi Zhao, 2023]:

$$x^3 = cx + d, c > 0, d > 0. \quad (1)$$

The root x is calculated by the formula

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}. \quad (2)$$

This result del Ferro kept in secret for a long time. Being on the verge of death, del Ferro shared the formula with his student Antonio Mario Fiori. In a mathematical duel in 1535, Fiori met the more experienced Italian mathematician Nicolo Tartaglia (1499-1557). Tartaglia won a decisive victory in the duel. He solved all the problems proposed to him and independently derived the formula for the solution of an incomplete cubic equation (1).

In 1539, the Italian mathematician Gerolamo Cardano (1501-1576) persuaded Tartaglia to share formula (2) with him, swearing to keep it secret. More precisely, not a formula, but an algorithm, a step-by-step instruction for finding a solution to equation (1) in the form of a poem. The record in the form of formulas will be invented only in a hundred years.

A little later, Cardano came across the work of del Ferro, the discoverer of the solution (2), and concluded that there was no need for secrecy. He included this formula in his book "The Great Art" (Latin: "Ars magna"), which was published in 1545. Since del Ferro's result was first published in Cardano's book, it went down in history as Cardano's formula.

However, in the case when

$$\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27} < 0$$

formula (2) does not work, since it contains the square root of a negative number. For example, the solution of the equation, [Stillwell, 2001],

$$x^3 = 15x + 4, \quad (3)$$

by formula (2) is of the form

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

On the other hand, verification establishes that $x = 4$ is also a solution. Cardano did not know what to do with this problem.

In 1572 Rafael Bombelli (1526-1572), an Italian mathematician and student of Cardano, published his main work "Algebra". In this work he developed a formal algebra of complex numbers, with the specific goal of reducing the expression

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$$

to the form

$$c + d\sqrt{-1}.$$

He put forward the idea: to leave the square root of a negative number as the square root of a negative number and to consider such numbers as a new type of numbers.

Returning to the solution of equation (3), Bombelli found that

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1}$$

and

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Then Cardano's formula also gives the correct solution to the equation (3):

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Note, $\sqrt{-1}$ is absent both in the problem condition and in its answer. However, we were able to solve the problem only by assuming the existence of $\sqrt{-1}$ and including it in the solution.

Complex numbers were called "imaginary", "impossible" numbers. A hundred years after Bombelli, Leonhard Euler (1707-1783) proposed using the Latin letter i to denote $\sqrt{-1}$. That is

$$i = \sqrt{-1}.$$

In particular, Euler established the connection between the complex exponent and trigonometric functions, which is called Euler's formula:

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x.$$

Imaginary numbers in combination with real numbers form the complex numbers that we know today. For example,

$$\underbrace{2}_{\text{real part}} + i \cdot \underbrace{3}_{\text{imaginary part}}$$

is a complex number.

Thus, cubic equations led to the emergence of new numbers, thanks to which we received more effective and complete mathematics, which can solve quite real problems.

References

Shastri, Anant R. (2010). *Basic Complex Analysis of One Variable*. Publisher: New Central Book Agency Pvt Ltd.
<https://www.math.iitb.ac.in/ars/revbook.pdf>

YangYi Zhao (2023). Discovery of Complex numbers. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, vol. 38, pp. 138–143.
<https://drpress.org/ojs/index.php/HSET/article/view/5785/5596>

Stillwell, J. (2001). *Mathematics and Its History*. 2nd ed. Publisher: Springer.

The use of mathematical methods for modeling the causes and consequences of Intellectual migration

T. Karmadonova¹

¹*Dobrov Institute for Scientific and Technological Potential and Science History Studies of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

takarmadonova@gmail.com

Abstract

Intellectual migration has become a significant global phenomenon, profoundly influencing economic development, scientific research, and innovation processes. Over recent decades, this process has gained a global dimension, with both positive and negative consequences for the sending and receiving countries. This article explores the use of mathematical methods to analyze the causes and effects of intellectual migration. These methods help to understand the driving forces behind migration and their impact on various aspects of economic and social development. The migration of skilled professionals is driven by various economic, social, and cultural factors, including differences in income levels, career opportunities, educational quality, and political stability. In particular, intellectual migration in Ukraine has been exacerbated by the ongoing war with Russia, where individuals are not only seeking professional development but also safety and security. The article discusses the application of mathematical models, such as optimal choice models, differential equations, game theory, and network models, to better understand and predict the dynamics of intellectual migration, as well as to design policies that can both retain talented individuals in their home countries and maximize the benefits for host countries.

Keywords: intellectual migration, mathematical models, brain drain, game theory, network models, migration policies, career opportunities, Ukraine migration.

Intellectual migration is a significant phenomenon in the modern world, substantially impacting the economy, scientific research, and innovation processes. In recent decades, this process has acquired a global dimension, with its consequences having both positive and negative effects on donor and recipient countries of migrants. This article examines the use of mathematical methods to analyze the causes and consequences of intellectual migration. These methods can provide a better understanding of the key drivers of migration and their influence on various aspects of economic and social development.

Various factors, including economic, social, and cultural ones can drive the migration of specialists. Among the key reasons contributing to the brain drain are:

- Differences in income levels and working conditions;
- Opportunities for career growth and professional development;
- The quality of the educational system;
- Social stability and quality of life.

Additionally, migration may respond to constraints in the home country, such as political instability or a lack of academic freedom. For Ukraine, it can also be triggered by the war initiated by Russia, where people seek not only development but also refuge, protection, and safety for themselves and their children.

The use of mathematical models to study migration is explored in works such as those by Adejimi Adeniji et al. [Adeniji, Dansu, Adeniyi, Ale, Ekum, Shatalov, Enoch, 2024], who examine the brain drain phenomenon in Africa through the Japa model — a mathematical framework analyzing the dynamics and drivers of skilled migration. Similarly, Gangan Prathap [Prathap, 2023] investigates brain drain using a soft mathematical model, focusing on the theoretical aspects and implications of intellectual capital migration. However, the insufficient consideration of cultural, economic, and political factors underscores the need for developing universal models to achieve a deeper understanding of this phenomenon.

Various mathematical methods are applied to analyze intellectual migration, such as:

Optimal choice models. These models describe an individual's migration decision as a process in which they choose between various possible alternatives, taking into account their income, living conditions, and career prospects.

The article by Bart Vermeulen, Peter Goos, and Martina Vandebroek explores the inclusion of a no-choice option in conjoint choice experiments to better reflect real-life decision-making, where respondents may decline all available options. The authors develop D-optimal designs for two advanced multinomial logit models and compare them to designs that ignore the no-choice option. They conclude that accounting for the no-choice option has minimal impact on estimation and prediction accuracy, as long as the model used for analysis matches the data-generating process [Vermeulen, Goos, Vandebroek, 2008].

A model incorporating the “no-choice option” can be applied to analyze specialists' decisions to forgo migration when available destination countries do not meet their preferences. This approach enables more accurate modeling of the factors influencing migrants' choices and helps in devising strategies to retain talent.

Differential Equations. Models utilizing differential equations can describe the dynamics of migration over time, predicting changes in the number of highly skilled professionals across different countries.

The model used by Donohue and Piironen [Donohue, Piironen, 2015], which employs differential equations to analyze temporal mismatches in ecology, can be

adapted to study intellectual migration by focusing on gaps between the demand for highly skilled workers and their availability. Using differential equations, this approach allows for the modeling of dynamic interactions between economic and political shifts, labor market needs, and migrant opportunities, helping to assess the long-term impacts of migration and develop strategies to attract and retain skilled professionals.

Game Theory. Game models can be used to analyze interactions between countries and assess the strategies of both sides in the context of migration, including competition for attracting talent. The article by Riensche and Whitney [Riensche, Whitney, 2012] demonstrates how serious games, such as the “Illicit Trafficking Game”, can be used to create global platforms for knowledge exchange, for example, between countries engaged in combating illegal trade. These games and models allow experts from different parts of the world to collaboratively develop solutions to problems such as migration, security, and international trade, which is an example of intellectual migration. For instance, the use of system models in the game helps security experts in various countries develop more effective strategies, exchange experiences, and knowledge to address global issues.

Network Models. These models explore how intellectual migration affects the creation and development of international scientific and professional networks, as well as the exchange of knowledge between countries.

The article by Yao-Li Chuang, Tom Chou, and Maria R. D’Orsogna [Chuang, Chou, D’Orsogna, 2019] presents a network model to study the dynamics between immigrants (guests) and native populations (hosts). The model uses agent-based simulations to explore the conditions under which societies either integrate or segregate, focusing on the balance between cultural adjustment and socioeconomic network remodeling. It shows that rapid cultural adaptation leads to cooperation and integration, while fast changes in social links tend to cause segregation into isolated enclaves. The study examines how factors like migrant population size and government incentives can influence the integration or segregation process, offering insights into the complex dynamics of immigration and cultural interaction.

The main factors influencing migration decisions can be modeled using various mathematical approaches. For example, a model can be constructed where an individual makes a migration decision based on differences in wages and career opportunities between two countries. Using econometric methods, one can assess the degree of influence each of these factors has on the likelihood of migration, as well as analyze how various political or economic changes may affect migration flows.

Intellectual migration can have a significant impact on the economic development of both donor countries and recipient countries of migrants. This impact can be modeled using macroeconomic models that take into account factors such as:

- for donor countries, intellectual migration can lead to the loss of highly skilled professionals (brain drain), which reduces their innovation potential and may slow down economic growth;

- in recipient countries, migration can contribute to an increase in scientific research and innovation activity, leading to higher productivity and competitiveness;
- in recipient countries, there may be a need to integrate migrants into the social and cultural environment, which can lead to both positive and negative social consequences.

The use of mathematical models to forecast migration flows enables the development of effective migration policies. For example, models can be used to: predict the number of migrants based on economic and social changes; develop strategies to attract highly skilled professionals; identify regions most vulnerable to brain drain, and create measures to retain talent.

Intellectual migration is a crucial factor influencing the development of countries and the global economy. Mathematical methods such as econometric models, differential equations, and game theory allow for more accurate analysis of the causes and consequences of migration. This enables governments and international organizations to design more effective migration strategies that help retain talent in donor countries while maximizing the benefits for recipient countries.

References

- Adeniji, A., Dansu, E., Adeniyi, M., Ale, S., Ekum, M., Shatalov, M., Enoch, O. (2024). Japa model: A mathematical framework for analyzing brain drain in Africa. *Scientific African*, vol. 25, pp. 1–22.
- Prathap, G. (2023). A soft mathematical model for brain drain. *Current Science*, vol. 85, no. 5., pp. 593–596.
- Vermeulen, B., Goos, P., Vandebroek, M. (2008). Models and optimal designs for conjoint choice experiments including a no-choice option. *International Journal of Research in Marketing*, vol. 25, no. 2, pp. 94–103.
- Donohue, J.G., Piironen, P.T. (2015). Mathematical modelling of seasonal migration with applications to climate change. *Ecological Modelling*, vol. 299, pp. 79–94.
- Riensch, R.M., Whitney, P.D. (2012). Combining modeling and gaming for predictive analytics. *Secur. Inform.*, vol. 1, no. 1.
- Chuang, Y.-L., Chou, T., D’Orsogna, M.R. (2019). A network model of immigration: Enclave formation vs. cultural integration. *Networks and Heterogeneous Media*, vol. 14(1), pp. 53–77.

Історія машин Тюрінга та роль в алгоритмізації

Б. О. Бережний¹

¹*ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

b.berezhnoy@gmail.com

Анотація

Стаття розглядає проблему розв'язуваності (Entscheidungsproblem), поставлену Давидом Гільбертом, та її зв'язок із формалізацією поняття алгоритму. Описано внесок Алана Тюрінга у розв'язання цієї проблеми через створення абстрактної обчислювальної моделі – машини Тюрінга. Основні компоненти цієї моделі, її значення для обчислюваності та алгоритмічної теорії висвітлені у контексті розвитку комп'ютерних наук. Також розглянуто вплив ідей Тюрінга на створення сучасних комп'ютерів, криптоаналіз під час Другої світової війни.

Ключові слова: машини Тюрінга; алгоритми; розв'язність; обчислення.

На початку 20 століття математики стикалися із завданням формалізації поняття алгоритму – чіткої послідовності механічних кроків, які дозволяють вирішувати математичні задачі. Однією з найважливіших проблем того часу була задача розв'язуваності (Entscheidungsproblem), поставлена Давидом Гільбертом.

Вона полягала у пошуку загального алгоритму, який, беручи на вхід довільне формальне висловлювання, міг би визначити, чи є воно логічно істинним, тобто істинним у всіх можливих моделях. Іншими словами, питання було таким: «Чи існує механічний, алгоритмічний метод, який за скінченну кількість кроків може дати відповідь на те, чи доводиться дане висловлювання в рамках формальної логіки?»

Гільберт прагнув знайти універсальний метод для перевірки істинності довільних висловлювань у формальній логіці. Для розв'язання цієї задачі було необхідно створити строгий опис алгоритму, який міг би працювати виключно за правилами, без людської інтуїції та творчого втручання.

У 1936 році англійський математик Алан Тюрінг опублікував знамениту статтю «On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem» (з англ. «Про обчислювані числа із застосуванням до проблеми розв'язності»). У своїй праці Тюрінг запропонував абстрактну модель обчислювального пристрою, яка згодом отримала назву «машина Тюрінга». Основні компоненти цієї моделі включали:

- Нескінченну стрічку яка поділялася на окремі комірки, кожна з яких може містити символ із заданого скінченного алфавіту. Ця стрічка слугує моделлю оперативної пам'яті.
- Головку для читання яка рухається вздовж стрічки, зчитуючи символи та змінюючи їх відповідно до встановлених правил.
- Скінченну множину внутрішніх станів. Машина перебуває в одному з визначених станів, що визначають її подальшу поведінку.
- Таблицю інструкцій (правила переходів) за допомогою яких машина чітко визначає, яку операцію виконати: змінити символ, перемістити головку (вліво або вправо) та перейти в інший стан.

Таким чином, Тюрінг формалізував інтуїтивне поняття алгоритму, показавши, що будь-який обчислювальний процес може бути представлений як послідовність елементарних операцій, що виконує така машина. Якщо якусь задачу неможливо вирішити за допомогою машини Тюрінга, то згідно з його формулюванням ця задача вважається алгоритмічно нерозв'язною.

Після виходу статті Тюрінга її ідеї залишалися здебільшого теоретичними. Однак під час Другої світової війни він зіграв ключову роль у зламуванні німецької шифрувальної машини «Енігма», що значно вплинуло на військові події. Завдяки його роботі в Bletchley Park, британські криптоаналітики змогли зламати код Енігми, що скоротило війну на кілька років та врятувало мільйони життів.

Після війни його концепції стали основою для створення перших електронних комп'ютерів. У 1945 році він запропонував принципи програмованої обчислювальної машини «ТУЗ» (ACE, Automatic Computing Engine), а в 1948 Тюрінг працював з «МАДАМ» (MADAM, Manchester Automatic Digital Machine) – це були комп'ютери з найбільшою пам'яттю в світі на той час.

Після роботи Тюрінга подібні ідеї були незалежно запропоновані американським математиком Емилем Постом. Обидва дослідники, використовуючи різні підходи, дійшли висновку, що абстрактна машина з нескінченною пам'яттю та скінченною таблицею правил є універсальною моделлю обчислення. Цей висновок ляг під основу так званої тези Черча–Тюрінга, яка стверджує, що всі алгоритми, зрозумілі в інтуїтивному сенсі, можуть бути реалізовані за допомогою машини Тюрінга або еквівалентних моделей.

Одним із найбільш революційних внесків Тюрінга було поняття універсальної машини Тюрінга. Це спеціальна машина, яка, отримавши на вхід опис будь-якої іншої машини Тюрінга разом із відповідними вхідними даними, може імітувати її роботу. Така концепція є предтечею сучасних комп'ютерів – програмований пристрій, де програма та дані зберігаються в єдиній пам'яті. Універсальна машина Тюрінга демонструє, що принципи, закладені в абстрактній моделі, є достатньо потужними для симуляції будь-якого алгоритмічного процесу.

Хоча машина Тюрінга була створена як теоретична модель, її ідеї стали фундаментальними для розвитку комп'ютерних наук. Сучасні комп'ютери базуються на архітектурі фон Неймана, де програми та дані зберігаються в спільній пам'яті – концепція, що безпосередньо походить від універсальної машини Тюрінга. Крім того, поняття алгоритму, яке було формалізовано Тюрінгом, є основою для сучасного аналізу алгоритмічної складності, розробки мов програмування та створення компіляторів. Елементарні операції, що описані в моделях машини Тюрінга, знаходять своє відображення у базових конструкціях програмування, таких як умовні переходи, цикли, рекурсія тощо.

Визнанням внеску Тюрінга в науку стала Премія Тюрінга, заснована Асоціацією обчислювальної техніки (АСМ) на його честь. Ця престижна нагорода щорічно вручається фахівцям, чий внесок у сферу обчислювальної техніки та інформатики мав значний і тривалий вплив. Премія Тюрінга є своєрідним аналогом Нобелівської премії в галузі інформаційних технологій. Вперше її присудили у 1966 році Алану Перлісу за розвиток технології створення компіляторів.

Перелік посилань

Петрова О.О. (2021). *Дослідження роботи машини Тюрінга: навч.-метод. посібник*. 2-ге вид., перероб. і доп. Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 75 с.

О.Л.Темнікова (2021) *Математична логіка та теорія алгоритмів: Конспект лекцій* [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання». – 177 с. – URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/90cfd1e3-1a98-4370-95f3-bd1d677d0e7c/content>

Задача розв'язності [Електронний ресурс] // Wikipedia. – URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B2%27%D1%8F%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96.

Універсальна машина Тюрінга [Електронний ресурс] // Wikipedia. – URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BD%D1%96%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0_%D0%BC%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%B0_%D0%A2%D1%8E%D1%80%D1%96%D0%BD%D0%B3%D0%B0.

Володимир Йосипович Горбайчук — учений і педагог (до 90-річчя від дня народження)

С. Б. Гембарська¹, М. Є. Коренков¹, Ю. І. Харкевич¹

¹*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна*

gembarskaya72@gmail.com



25 січня 2025 року виповнилося 90 років від дня народження відомого українського математика, кандидата фізико-математичних наук, професора Горбайчука Володимира Йосиповича.

Народився Володимир Йосипович 25 січня 1935 року в с. Радостів Томашівського повіту Люблінського воєводства, що в Польщі. Пізніше його родина переїхала на Україну, до Волинської області.

У 1953 році закінчив навчання в Рожищенській середній школі. На визначення майбутнього життєвого шляху учня значний вплив зробив учитель математичних предметів Кицай Михайло Омелянович. В середній школі математику викладав Борис Костянтинович Тоцький, який здобув освіту у Віденському та Варшавському університетах. В шкільні роки Володимир Йосипович підтримував дружні стосунки з майбутніми поетами Йосипом Струцюком та Володимиром Лучуком.

У 1953 році В.Й. Горбайчук стає студентом математичного відділення фізико-математичного факультету Луцького педагогічного інституту імені Лесі Українки. Крім занять він відвідував наукові гуртки і семінари, якими керували професор С.І. Зуховицький та доцент В. К. Дзядик (в майбутньому член-кореспондент НАН України), вивчав додаткову літературу, спеціалізуючись в окремих розділах теорії функцій дійсної та комплексної змінних. Упродовж 1957–1961 років В.Й. Горбайчук вчителював у Камінь-Каширській середній школі, викладаючи математику. У 1961 році був запрошений на викладацьку роботу до Луцького педінституту, де читав різноманітні математичні курси — математичний аналіз, теорію функцій дійсної та комплексної змінних, теорію звичайних диференціальних рівнянь, методи математичної фізики, історію математики, різні спецкурси.

З 1968 по 1971 рік навчався в аспірантурі Інституту математики НАН України. Під керівництвом відомого математика професора П.М.Тамразова Володимир Йосипович успішно захистив у 1972 році кандидатську дисертацію «Про конструктивні і структурні властивості функцій на плоских компактах додаткової місткості».

Основна частина трудової діяльності В.Й. Горбайчука пройшла в Луцькому державному педінституті, згодом Волинському державному університеті імені Лесі Українки. Тут він став професором математики. За його ініціативи в університеті була створена кафедра диференціальних рівнянь та математичної фізики, де він став першим завідувачем і працював до останніх днів свого життя. Минулого року виповнилося 30 років з дня заснування кафедри, яка сьогодні носить назву кафедри теорії функцій та методики навчання математики, і є провідним підрозділом факультету інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Володимир Йосипович працював натхненно і плідно, віддаючи всі свої сили, талант вченого і педагога справі виховання молодих спеціалістів-математиків. Його лекції відзначалися оригінальністю, високим науковим рівнем, методичною досконалістю. Він керував науковим семінаром з теорії функцій та функціонального аналізу, на якому викладачами, аспірантами та студентами розглядалися актуальні питання сучасної математики. Професор В.Й. Горбайчук любив відкривати молоді математичні таланти, підтримував їх, успішно керував науковою роботою студентів та аспірантів. Багато його учнів, колишніх студентів і аспірантів стали знаними спеціалістами математиками, викладачами вузів та середньої школи. Серед відомих вчених, яким він дав путівку в життя, є доктори фізико-математичних наук Задерей П.В., Савчук В.В. та професор Харкевич Ю.І. Його учні Гембарська С.Б., Падалко Н.Й., Піддубний О.М., Товкач Р.В. стали кандидатами фізико-математичних наук і сьогодні працюють на кафедрі, фундатором якої був Володимир Йосипович.

Володимир Йосипович був натхненним популяризатором математики, проводив заняття з учнями, писав роботи для науково-популярних журналів, організовував математичні олімпіади серед учнів та студентів. Він мав унікальну власну

математичну бібліотеку, яка була підґрунтям його різносторонньої математичної ерудиції. Після його смерті ця бібліотека була передана у власність Волинського національного університету імені Лесі Українки.

Викладання математичних дисциплін В.Й. Горбайчук поєднував із інтенсивною та плідною науковою роботою в різних галузях математики. Ним опубліковано понад 100 наукових та науково-методичних робіт у вітчизняних та закордонних виданнях.

Тематика наукових досліджень вченого вражає своєю різноманітністю. Чимало робіт Володимира Йосиповича присвячено дослідженню конструктивних і структурних властивостей функцій на компактах додатньої містності. В них запропоновано опис найширшого класу компактів, для яких можна формулювати задачу про наближення функцій многочленами. Ці дослідження стали основою його кандидатської дисертації.

Низка робіт В.Й. Горбайчука присвячена застосуванню методів теорії апроксимації до вивчення аналітичного продовження гармонійних функцій. В нього є роботи, в яких досліджуються питання про граничні властивості в плоских областях розв'язків рівнянь еліптичного типу. Крім цього, в роботах Володимира Йосиповича розглядалися обернені задачі математичної фізики, коливальність розв'язків рівнянь еліптичного типу, що визначаються полігармонійним оператором.

Відзначимо також роботи стосовно дослідження питань про асимптотику точної верхньої межі відхилення квазігладкої функції від її бігармонійного інтеграла Пуассона в крузі, а також питань про диференційно-різницеві властивості конформних відображень однозв'язних областей.

Методи наближення функцій, дослідження властивостей розв'язків рівнянь математичної фізики, гармонійних та бігармонійних функцій, обернені теореми наближення функцій — це далеко неповний перелік питань, які розглядав Володимир Йосипович в своїх дослідженнях. Крім цього, в його науковій спадщині є також роботи, присвячені питанням історії математики, методики викладання математики та педагогіки Його науковим досягненням в значній мірі сприяли контакти в відомими вченими, з якими він мав зустрічі на наукових конференціях, а також брав участь в реферуванні наукових робіт у міжнародному реферативному журналі «Mathematical Reviews».

Володимир Йосипович був натхненним трудівником і ентузіастом на ниві освіти та математичної науки, чим заслужив повагу і любов своїх колег та студентської молоді. Він був щирою, доброзичливою і водночас принциповою людиною.

Професор Горбайчук Володимир Йосипович палко любив свій рідний Волинський край, його людей, Україну і щиро вболівав за них. Таким і запам'ятався він всім, хто його знав.

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко, видатний український математик, педагог (до 200-річчя від дня народження)

Н. М. Задерей¹, Г. Д. Нефьодова¹, І. Ю. Мельник², М. О. Хохотва¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

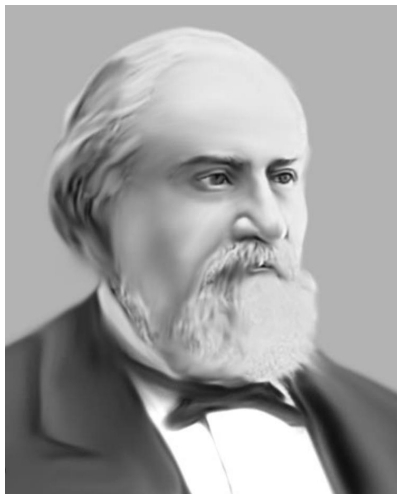
²*Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна*

n_gd-fmf@111.kpi.ua

Анотація

Стаття присвячена висвітленню життєвого шляху, наукової, педагогічної та просвітницької діяльності професора М. Є. Ващенка-Захарченка (31.10.1825—14.08.1912).

Ключові слова: життєвий шлях, методика викладання вищої математики, педагогічна діяльність, наукова діяльність.



Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко народився 31.10.1825 року в селі Маліївка, нині Золотоніський район Черкаської області, у родині нащадка запорізьких козаків. Початкову освіту юнак отримав у Золотоніському повітовому училищі та Другій київській гімназії [Боголюбов, 1995], [Бондаренко, 2015]. У 1845-1846 роках навчався в Київському університеті св. Володимира, де здобув математичну освіту на відділенні філософського факультету. Бажання поглибити свої знання спонукало Михайла Єгоровича продовжити освіту за кордоном. У 1847-1848 роках він навчався у Франції, де прослухав лекції таких всесвітньо-відомих математиків, як Огюстен-Луї Коші та Жозеф Ліувільє у Сорбонні та Колеж де Франс у Парижі. Це визначило напрям його наукових інтересів та заклало основу для

подальших досліджень [Ядренко, Дзюба та ін., 2005], [O'Connor, Robertson, 2009].

У 1852 році після повернення до Київського університету св. Володимира Ващенко-Захарченко склав іспити за увесь курс. У 1862 році Михайло Єгорович захистив магістерську дисертацію «Символічне числення і його застосування до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь». Це дослідження було одним з перших у Російській імперії, де ґрунтовно викладалася теорія операційного числення та її використання до розв'язання диференціальних рівнянь. Чотири роки потім Михайло Єгорович захистив докторську дисертацію з теми «Ріманова теорія функцій складеної змінної», що було однією з перших праць з теорії функцій комплексної змінної у Російській імперії. Дослідження мали значний вплив на розвиток математичної науки в країні [Боголюбов, 1995], [O'Connor, Robertson, 2009].

Восени 1863 року М. Є. Ващенко-Захарченко став приват-доцентом Київського університету св. Володимира, у 1867 році – ординарним професором кафедри чистої математики. Перша його лекція була з теорії ймовірностей, потім з теорії чисел. Педагогічна діяльність професора Михайла Єгоровича була багатогранною та впливовою. Він викладав такі курси, як теорія функцій, різнищеве числення, теорія визначників та теорія форм, аналітична геометрія двох і трьох вимірів, вища алгебра, варіаційне числення, теорія підстановок та її застосування до розв'язання алгебраїчних рівнянь, проєктивна геометрія, вища геометрія.

Михайло Єгорович щоразу удосконалював свої курси, протягом роботи в університеті (1863-1902) написав 12 навчальних посібників, що стали основою математичної освіти: «Теорія визначників і теорія форм» (1877), «Алгебраїчний аналіз або вища алгебра» (1887), «Аналітична геометрія двох і трьох вимірів» (1887), «Варіаційне числення» (1889), «Проєктивна геометрія» (1897) тощо [Боголюбов, 1995], [Ядренко, Дзюба та ін., 2005].

Студенти та колеги зазначали його велику та різноманітну ерудицію. Учнями Михайла Єгоровича були майбутні видатні математики В. Єрмаков (1845-1922), Б. Букреєв (1859-1962), А.-Б. Пшеборський (1871-1941).

Одним зі здобутків Ващенко-Захарченка є популяризація неевклідової геометрії. У 1880 році він здійснив переклад «Начал» Евкліда – «Начала Евкліда з пояснювальним вступом та тлумаченням», доповнивши його вступом та коментарями, де розглянув основи геометрії Лобачевського. Це був суттєвий крок у просуванні нових ідей, які пізніше склали основу сучасної математики [O'Connor, Robertson, 2009].

Окрім викладацької та наукової діяльності, Михайло Єгорович захоплювався історією математики. У 1883 році він видав працю «Історія математики: Історичний нарис розвитку геометрії», де проаналізував досягнення математиків від античності до середньовіччя. Ця книга стала важливим джерелом для істориків науки [Ядренко, Дзюба та ін., 2005]. Академік М.П. Кравчук відмічав: «Ващенко-Захарченко М. Є. був знавцем історії математики, написав з неї низку великих праць, але не зробив жодного самостійного історичного досліджу, обмежився писаннями характеру компілятивного» [Кравчук, 2000].



Особисте життя Ваценка-Захарченка було тісно пов'язане з науково-педагогічною діяльністю. Навесні 1871 року він взяв шлюб з Вірою Миколаївною Мельницькою (31.03.1840-02.08.1895), яка стала його надійною підтримкою та однодумцем. Віра Миколаївна походила з незаможної дворянської родини. Батько, Микола Терентійович – поміщик села Заріччя Вишньоволоцького повіту Тверської губернії. Мати, Єлизавета Карлівна – баронеса Услар. Подружжя мало чотирнадцять дітей, Віра була найстаршою.

У 1850 році Віра Миколаївна вступила до привілейованого закладу, Санкт-Петербурзького училища Ордена св. Єкатерини, де завдяки відмінним успіхам навчалася за державний кошт. Отримала відмінний атестат, досконало вивчила

французьку та німецьку мови. Після закінчення навчання Віра деякий час допомагала матері виховувати молодших дітей, у 1858-1860 роках викладала французьку у Вишньоволоцькій жіночій гімназії [Антонець, 2008].

З 1860 по 1871 рік Віра Миколаївна працювала у Києві класною дамою в Інституті шляхетних дівчат. Педагогічна діяльність у цьому закладі вимагала повної віддачі й терпіння. Стосунки з ученицями Віра Миколаївна засновувала на довірі та повазі, неабиякій чуйності та увазі до проблем і потреб вихованок. Попри складні умови роботи в закритому навчальному закладі, вона стала для багатьох вихованок улюбленою наставницею. Доброзичливість та щирість залишилися в пам'яті вихованок, які з вдячністю згадували її допомогу та підтримку навіть у скрутні моменти [Антонець, 2008].

У 1871 році, після одруження з професором Київського університету Михайлом Ваценком-Захарченком, Віра присвятила себе родині. Кілька років потому Віра Миколаївна вирішила відкрити приватну жіночу гімназію, мріючи надати можливість отримати якісну освіту дівчатам, для яких були зачинені державні освітні установи. Завдяки зусиллям подружжя Ваценка-Захарченко, значному їх матеріальному внеску, підтримці університетських колег, на Бібіковському бульварі (бульвар Тараса Шевченка) у 1878 році гімназія відкрилася. Віра Миколаївна приділяла велику увагу якості викладання, залучала до роботи висококваліфікованих педагогів, створила навчальний заклад, який став одним із провідних у Києві [Антонець, 2008].

Смерть Віри Миколаївни 2 серпня 1895 року могла становити загрозу існуванню гімназії, оскільки, згідно із законом, після смерті утримувача приватна гімназія підлягала закриттю. Проте талант Віри Миколаївни проявився й у створенні життєздатного професійного колективу. Гімназія функціонувала до 1917 року,

керувала нею колишня класна наставниця гімназії Олександра Дучинська. З 1902 року гімназія знаходилася на вул. Тимофіївській (Михайла Коцюбинського, 7) [Антонець, 2008].

М. Є. Ващенко-Захарченко похований у Києві, на Байковому кладовищі. Михайло Єгорович був видатним ученим, талановитим педагогом, за 40 років педагогічної діяльності виховав не одне покоління математиків. Його наукова спадщина складає понад 6,5 тисяч друкованих сторінок, він був одним із засновників Київського фізико-математичного товариства (1890), член-кореспондентом Математичного товариства у Бордо (з 1883). Могила Віри Ващенко-Захарченко знаходилася у Видубицькому монастирі, на жаль, була зруйнована у часи радянської влади.

Вся наукова і педагогічна діяльність Михайла Ващенка-Захарченка тісно пов'язана з Київським університетом, він став першим істориком математики в університеті. Сучасники вважали його реформатором методики викладання математики, адже його підручники вирізнялися новизною, оригінальністю та доступністю мови викладу. Його праця, педагогічна діяльність є значним внеском у розвиток математичної освіти та науки в Україні.

Перелік посилань

Боголюбов. А.Н. (1983). *Математики. Механики. Библиографический справочник*. Київ: Наукова думка, С. 92.

URL:<https://prussia.online/books/matematiki-mehaniki>

Бондаренко В.М. (2015). *До 190-річчя від дня народження Михайла Єгоровича Ващенка-Захарченка (1825–1912)*. Педагогічний музей України Національної академії педагогічних наук України.

URL:https://pmu.in.ua/virtual-exhibitions/190_rokiv_vachenko_zaharchenko/

Ядренко М.Й. редкол.:Дзюба І.М. та ін. (2005). *Ващенко-Захарченко Михайло Єгорович. Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс]*. Київ: Інститут енциклопедичних досліджень НАН України.

URL:<https://esu.com.ua/article-32566>

O'Connor J.J., Robertson E.F. (2009). Mikhail Egorovich Vashchenko-Zakharchenko. *Mathshistory*.

URL:<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Vashchenko/>

Кравчук М.П. (2000). Національний технічний університет України «КПІ»; уклад. Н. О. Вірченко. *Науково-популярні праці*. Київ: НТТУ (КПІ). С. 88-123.

Антонець Н. Б. (2008). *Ващенко-Захарченко Віра Миколаївна*. Osvita.ua.

URL:<https://osvita.ua/vnz/reports/pedagog/1236/>

Історико-філософські аспекти становлення аналітичної геометрії

О. М. Кравчук¹

¹*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна*

olkr57@ukr.net

Анотація

У тезах висвітлюються історико-філософські аспекти формування аналітичної геометрії як науки. Подається характеристика різних періодів її розвитку, особливості відповідних історичних епох та їх взаємозв'язків.

Ключові слова: аналітична геометрія, історія, філософія, математика.

Незалежно від усіх поглядів на історію науки, завданням якої є вивчення історії пізнання світу, що нас оточує, і тому близько пов'язану з філософією, кожен, хто звертається до неї, прагне краще зрозуміти, усвідомити феномен власне історії науки і тієї конкретної галузі знань, яка його цікавить, їх проблеми і стан [Бесов, 2004].

Математика, як наука, ніколи не була вільною від філософії, як в процесі її історичного розвитку, так і на сучасному етапі. Філософія у сфері математики сприяє виробленню адекватного розуміння математичних знань, розв'язанню питань, що природно виникають про предмет і методи математики, специфіку її понять.

Досвід викладання математики у закладах вищої освіти свідчить, що розуміння філософських проблем сучасної математики ускладнюється для здобувача освіти перш за все недостатнім ознайомленням з історією філософії, а також з історією математики. Що свідчить про актуальність проблеми дослідження.

Розвиток геометричної теорії відбувався за тими ж законами, за якими відбувається будь-яке пізнання. Філософські проблеми математики досліджували й українські вчені, серед яких Кедровський О.І, Бобкова Н.П. та ін.

Метою нашого дослідження є історичний підхід до цієї проблеми. Для досягнення мети, ми поставили завдання: звернутись до філософських досліджень, (перш за все в історичному плані) різних аспектів математики, у тому числі її структури, функцій, відношення до інших наук, звертаючи щоразу увагу на те,

яким чином і в силу яких факторів застарілі погляди змінювались новими, що більше відповідали дійсному змісту цієї науки.

Філософське означення математики (як і будь-якої іншої науки) не треба розуміти спрощено, як деяке твердження, що розкриває суть математики у вигляді короткого афоризму. Такі означення даються, але, хоча вони і не беззмістовні, самі по собі вони не мають великого методологічного значення. Зрозуміти математику – це зрозуміти її відмінність від природничих наук, з одного боку, і від логіки – з другого, зрозуміти специфіку її методів та особливості функціонування. Дійсно, філософське розуміння математики, таким чином, може сформуватись тільки як сукупність висновків, означень, отриманих на основі її різнобічного аналізу.

Давньогрецький мислитель Платон, засновник філософської школи відомої як Академія Платона, у свій час розрізняв арифметику і геометрію відповідно до природи їх понять. Числа для Платона належать до світу ідей, в той час як геометричні об'єкти є ідеальними тільки наполовину, так як вони пов'язані з чуттєвими образами і тому займають проміжне становище між світом ідей і реальним світом.

Одним з найвидатніших науковців античності вважається давньогрецький математик, фізик, інженер, винахідник та астроном Архімед, який зробив величезний внесок у розвиток математики, геометрії у тому числі. Він використовував метод вичерпування, щоб розрахувати площу, обмежену дугою параболи, шляхом розрахунку суми нескінченного ряду. Спіраль Архімеда, яку описує точка, що рухається по колу, яке обертається, виокремлювалася серед численних кривих, відомих його сучасникам. Архімед навчився знаходити дотичну до своєї спіралі (а його попередники вміли проводити дотичні до конічних перерізів), знайшов площу її витка, а також площу еліпса, поверхні конуса і кулі, об'єми кулі і сферичного сегменту у праці *«Про коноїди і сфероїди»*. Особливо він пишався відкритим ним співвідношенням об'єму кулі і описаного навколо неї циліндра, що дорівнює 2:3 у праці *«Про кулю і циліндр»*. Архімед багато займався і проблемою квадратури круга [4].

Грецькі математики звели геометричні знання свого часу в струнку наукову систему, виклад якої містять «Начала» Евкліда. Створення науки геометрії відіграло вирішальну роль у застосуванні геометричних знань до розв'язання проблем техніки й астрономії, тому що давало можливість віднаходити необхідну інформацію з одного джерела.

Грецька епоха характеризувалася подальшим розвитком геометрії як періоду вивчення деяких більш складних ліній, ніж пряма й коло, що вимагалось потребами техніки.

Переходячи від вивчення властивостей найпростіших ліній – пряма і коло – до вивчення кривих, більш складних за своїми властивостями, грецькі математики природно стали розглядати в першу чергу криві, що отримуються у перерізі відомих їм поверхонь – циліндра, конуса й кулі – площиною.

Вивчення конічних перерізів відігравало велику роль у грецькій математиці. Особливо багато зробив для вивчення їхніх властивостей грецький вчений Апол-

лоній Пергський, який жив приблизно за 200 років до нашої ери. Результати своїх досліджень він виклав у відомій праці «Про конічні перерізи».

У XVII ст. глибоке вивчення цих більш складних ліній стало одним зі стимулів до розвитку нових галузей математичної науки. Пошуки загального методу виведення формул, які б відображали властивості фігур і застосовувались до розв'язання задач, привели до створення нової галузі – аналітичної геометрії.

Французькі математики П'єр Ферма (1601 - 1665) і Рене Декарт (1596-1650) завершили довгий і важкий шлях попередніх геометрів по створенню нових методів у геометрії, розглядаючи у своїх працях аналітичну геометрію як самостійну науку.

У 1636 р. Ферма написав статтю «Вступ до вивчення плоских і тілесних місць», що стала відразу відомою математикам. Із сучасної точки зору ця стаття є по суті коротким елементарним вступом до аналітичної геометрії, де виклад матеріалу відповідний сучасному. Тут розглядаються різні найпростіші лінії – пряма, коло і конічні перерізи, для кожної з яких виводиться її «рівняння» і розв'язуються за допомогою цих «рівнянь» різні геометричні задачі.

Рене Декарт був людиною надзвичайно широких наукових інтересів: філософ, фізик, механік й математик. Він проінявся ідеєю створення універсального методу у науці, за допомогою якого можна буде розв'язувати завдання даної науки. Декарт був переконаний, що має існувати універсальна математика, яка розв'язує одним загальним методом всі задачі і вважав, що досяг цього у геометрії, створивши аналітичну геометрію - науку, що дозволяє за допомогою алгоритму геометричні задачі розв'язувати, використовуючи теорію алгебраїчних рівнянь і, навпаки.

У його книзі «Геометрія», що вийшла у 1637 році, і була першою друкованою книгою (близько ста сторінок у сучасних виданнях), були закладені основи аналітичної геометрії.

Обидві роботи – Ферма й Декарта – були завершені майже одночасно, хоча й незалежно одна від іншої (у 1636 і 1637 роках). Що підтверджує особливо цікаве й досить розповсюджене явище у науці: різні вчені одночасно й незалежно один від одного приходять до однакового відкриття. Це є свідченням того, що науку рухають не просто «власні інтереси» окремих учених, але потужний вплив на них економічних, технічних і наукових проблем епохи.

Наприкінці другої частини «Геометрії» Декарт робить спробу застосувати свій аналітичний метод до задач стереометрії, але, очевидно, не приділивши цьому питанню достатньої уваги, відразу допускає грубу помилку.

Аналітична геометрія у просторі була розроблена пізніше у роботах французького математика і механіка А. Клеро (1713 – 1765), який переважно займався небесною механікою. Клеро підготував блискучі підручники «Начала геометрії».

Протилежний, раціоналістичний погляд на геометрію і математику в цілому, якому судилося відіграти винятково велику роль в дискусіях про природу неевклідових геометрій, було розвинуто в кінці XVIII ст. видатним німецьким філософом І. Кантом. Геометрія, за Кантом, є не що інше як виражена в поняттях чиста інтуїція простору, арифметика перебуває в такому ж відношенні до чистого вираження часу. Геометричні і арифметичні міркування не емпіричні, оскільки

вони відображають апіорне споглядання, але разом з тим вони не аналітичні міркування, не тавтології, якими є правила логіки, оскільки вони відображають зміст чуттєвості, хоч і не емпіричної.

Філософські дискусії в математиці XIX ст. пов'язані в основному з розвитком геометрії, а саме з тлумаченням неевклідових геометрій. Відкриття неевклідової геометрії Лобачевського не тільки відіграло величезну роль у розвитку нових ідей і методів у математиці, але й має філософське значення. Це відкриття дало вирішальний поштовх грандіозному розвитку науки, сприяло й понині сприяє глибшому розумінню матеріального світу.

У аналітичній геометрії вивчаються лише геометричні образи на площині та в просторі, що визначаються алгебраїчними рівняннями першого та другого порядку. Використання векторів у аналітичній геометрії значно спростило викладення і дало можливість вказати загальний підхід до багатьох геометричних понять. Основні поняття і методи векторного числення були систематизовані та розвинені тільки у 80-х роках XIX ст. відомим американським фізиком Дж. У. Гіббсом, який є одним із творців статичної механіки. З початку XX ст. у геометрії, механіці, фізиці та інших розділах науки поняття і методи векторного числення є широко застосовуваним апаратом [Бондаренко, Отрашевська, 2022].

Математики багато разів змінювали уявлення про свою науку і щоразу це робили під впливом певних фактів, які змушували їх відмовлятися від сформованих звичних переконань. Сучасне розуміння математики не може бути сформульоване як просте зібрання наявних інтуїтивних уявлень про науку. Воно потребує дослідження історії різних концепцій математики, аналізу відповідних контрприкладів, і на основі цього наблизитись до розуміння математики [3].

Філософські дискусії у математиці XIX ст. пов'язані в основному з розвитком геометрії, а саме з тлумаченням неевклідових геометрій. Сучасне розуміння математики формувалося із спроб осмислити факт неевклідових геометрій.

Перелік посилань

Бесов Л.М. (2004) Історія науки і техніки. 3-є вид., переробл. і доп. Харків: НТУ ХП. 382 с.

Бондаренко Н.В., Отрашевська В.В. (2022) Аналітична геометрія: конспект лекцій. Київ: КНУБА. 84 с.

Філософія та математика: питання про взаємозв'язок: Електронний ресурс: Режим доступу: <https://osvita.ua/vnz/reports/philosophy/12982/>

Архімед. Електронний ресурс: Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/B4>

Четверта славнозвісна задача давнини і відшукування її розв'язку

О. М. Кравчук¹, А. Л. Никитюк¹

¹*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна*

olkr57@ukr.net

Анотація

У статті подано дослідження історичного аспекту розв'язання однієї із славнозвісних задач давнини – побудови правильних багатокутників лише за допомогою циркуля та лінійки. Обґрунтовуються деякі історичні міркування відомих вчених-математиків щодо можливості побудови за допомогою циркуля та лінійки правильного семикутника.

Ключові слова: побудова; правильний n -кутник; циркуль; лінійка.

Задачі на побудову зародилися ще в античні часи, при розв'язанні яких використовували циркуль і лінійку, проте як окрема вітка абстрактної математики виокремилися значно пізніше. Теорію розв'язування задач на побудову було розроблено лише у XIX ст., коли точно було визначено клас задач, які розв'язують за допомогою цих інструментів.

Над теорією задач на побудову лише циркулем працював датський математик Георг Мор (1640 – 1697), пізніше – італійський математик Лоренцо Маскероні (1750 – 1800). У 1890 році австрійський математик А. Адлер довів, що будь-яка задача на побудову, яка розв'язується циркулем і лінійкою, може бути розв'язана лише циркулем. Над розв'язанням задач на побудову лише лінійкою працювали Ламберт, Бріаншон і Понsole. Найповніше розробив геометрію лінійки Штаудт (Нюрберг, 1847 р.).

Протягом багатьох століть математики, а ще більше нематематики, шанувальники цієї науки, цікавилися «трьома славнозвісними задачами давнини»: подвоєнням куба, трисекцією кута, квадратурою круга, які не розв'язані ще донині. Задачі ці внаслідок спокусливої простоти їх формулювання і безрезультатності спроб розв'язати їх циркулем і лінійкою набули широкої популярності. Про спроби розв'язати їх розповідалось сотні разів багатьма мовами світу. Першим серйозним

науковим напрацюванням у цьому аспекті є цінна книжка великого французького історика математики Жана Етьєна Монтьюкла (1725–1799) «Історія досліджень про квадратуру круга з доповненням огляду про задачі подвоєння куба і трисекцію кута».

Надзвичайна популярність згаданих трьох задач затьмарила існування двох аналогічних задач давнини. Одна з них є не менш, якщо не більш, важливою в історії математики. Це задача про правильний семикутник, що є окремим випадком загальної проблеми про побудову правильних многокутників. Дослідженням цих питань займалися Гаусс, Шуберт, Гермес і Ейлер. Ще з стародавніх часів відомо, що давньогрецький Архімед написав працю «Про семикутник», яка залишилась невідомою. Вона дуже інтригувала істориків математики. Адже з часів Гаусса (з початку XIX ст.) відомо, що правильний семикутник не можна побудувати, користуючись тільки циркулем і лінійкою, як цього вимагала грецька математика.

Можна було б зробити припущення, що Архімед помилявся і вважав задачу побудови семикутника можливою. У цьому випадку ми мали б приклад того, як помилявся Архімед. Лейбніц зауважував, що помилки великих умів можуть бути повчальнішими, ніж їх правильні твердження, повчальнішими з точки зору методології і методики науки.

Можна було б відносно змісту невідомої праці Архімеда зробити друге припущення, а саме, що Архімед доводив неможливість розв'язання задачі на побудову правильного семикутника циркулем і лінійкою. При такому припущенні виходило б, що Архімед випередив досягнення Гаусса, а про Архімеда, якого всі і завжди вважали найвидатнішим математиком усіх часів і всіх народів, ми були б ще вищої думки, ніж тепер. Виявляється, що обидва ці припущення неправильні.

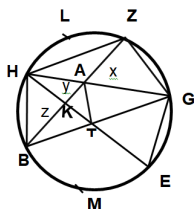
Приступаючи до розв'язання цієї задачі, можна було б міркувати звичайним способом: припускаючи, що задачу розв'язано, почати шукати співвідношення, які існують між шуканими, даними і допоміжними величинами та як, на основі цих співвідношень, виконати побудову. Могли б міркували так.

Припустимо, що коло (рис. 1) поділено на сім рівних частин точками В, Н, L, Z, G, E, М, які будуть вершинами семикутника (для спрощення рисунка сторони семикутника не проведені).

Дуга ВН буде сьомою частиною кола, хорда ВН – стороною правильного вписаного семикутника. відрізки, що сполучають деякі вершини: НZ, НG, НE, ВZ, ВG, – це діагоналі семикутника.

Сполучимо ще відрізок АТ точки перетину діагоналей ВZ та НG і діагоналей ВG і НE.

Задача на побудову правильного семикутника буде розв'язана, якщо визначимо розташування точок К і А на діагоналі ВZ. Маємо:



1. $\angle BZH = \angle ZHG = \angle ANK = \angle ZBG$, як вписані кути, що спираються на $\frac{1}{7}$ частину кола; позначимо цей кут α ; $\alpha = \frac{360^\circ}{2 \cdot 7} = \frac{180^\circ}{7}$; $7\alpha = 180$.

2. $\angle BHK = \angle HBZ = 2\alpha$, як вписані кути, що спираються на дуги, які дорівнюють $\frac{2}{7}$ кола;
3. $\angle KAH = 2\alpha$, як зовнішній кут трикутника HAZ ;
4. $\angle HKA = \angle BKT = 4\alpha$, як зовнішній кут трикутника BKH ;
5. $\angle BKH = \angle AKT = 3\alpha$, як кути, суміжні кутам HKA і BKT (п.4);
6. $\triangle BHA = \triangle BHT$ (у них спільна сторона BH і відповідно рівні прилеглі до цієї сторони кути): у трикутнику BHA $\angle HBA = 2\alpha$, $\angle BHA = 3\alpha$; у трикутнику BHT $\angle BHT = 2\alpha$, $\angle HBT = 3\alpha$; отже, $HA = BT$; $BA = HT$;
7. $\triangle BTA = \triangle HTA$ за трьома відповідно рівними сторонами; звідси $\angle HTA = \angle BAT = 2\alpha$, бо $\triangle KTA$ рівнобедрений і $\angle AKT = 3\alpha$; отже, $KA = KT$;
8. $\triangle HKA$ подібний $\triangle HKZ$ (у цих трикутників відповідні кути рівні: $\angle HKA$ – спільний, $\angle KHA = \angle HKZ = \alpha$), звідси $HK:KZ = KA:HK$, або $BK:KZ = KA:BK$, або $KZ \cdot KA = BK^2$. Введемо позначення: $AZ = AH = x$, $BK = KH = z$, $KA = y$; тоді маємо: $z:(x+y) = y:z$, або

$$(x + y)y = z^2 \quad (1)$$

9. $\triangle ANK$ подібний $\triangle ANK$ ($\angle KHA$ – спільний за п.3 і 7). З подібності трикутників випливає, що $HT:HA = HA:HK$, або $BA:HA = HA:BK$, або $BA \cdot BK = HA^2$, або $(z+y):x = x:z$, або

$$(x + y)y = z^2 \quad (2)$$

Рівності (1) і (2) виражають умови, які повинні задовольняти відрізки діагоналі BZ , якщо коло поділено точками B, H, L, Z, G, E, M на 7 рівних частин і BH є стороною правильного вписаного семикутника. Якщо ці умови можна здійснити циркулем і лінійкою, то задачу на побудову семикутника можна розв'язати.

Свою працю про семикутник Архімед починає відразу з побудов відрізків, що задовольняють виведені вище співвідношення (1), (2), ні слова не пояснюючи те, для чого це робиться і до чого приведе або мусить привести. Результат проведених нами міркувань з подивом переконує у тому, що нічим не умотивована побудова несподівано приводить до розв'язання певної задачі.

Але поділ відрізка BZ на подібні для побудови правильного семикутника частин x, y і z приводить до системи рівнянь $\begin{cases} (x + y)y = z^2, \\ (y + z)z = x^2. \end{cases}$ яку не можна розв'язати циркулем і лінійкою, тому побудова правильного семикутника циркулем і лінійкою неможлива.

У 1796 р. Гаусс зробив своє перше математичне відкриття: довів, що правильний сімнадцятикутник можна побудувати з допомогою циркуля та лінійки. У 19-річному віці студент зробив вагомий внесок у розв'язання проблеми побудови правильних многокутників, що мала більш як двадцятистолітню історію. Так, ще у VI ст. до н.е. грецький математик Піфагор та його учні розв'язали перші задачі на побудову правильних многокутників. Пізніше, у III ст. до н. е. грецький математик Евклід у своїх «Началах» детальн розглянув способи виконання таких побудов для правильних многокутників, кількість сторін яких дорівнює 3,4,5,6,15. Крім того, античні математики вміли будувати всі ті правильні многокутники, які можна отримати з вже побудованих шляхом подвоєння кількості їх сторін, тобто при $n = 2^k$, $n = 3 \times 2^k$, $n = 1 \times 2^k$ ($k=1,2,3,\dots$). Виникало питання: чи можна за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний n -кутник для інших значень n ? Якщо так, то з будь-якими чи ні? Проте, ні античні математики, ні математики наступних століть не змогли відповісти на це запитання.

Циркулем та лінійкою можна побудувати лише ті залежності між величинами, які мовою алгебри записуються за допомогою квадратних рівнянь або зводяться до них. Гаусс показав, що циркулем та лінійкою можна побудувати правильний n -кутник, якщо n є просте число виду $2^{2^k} + 1$, де $k=1,2,3,\dots$. Ця умова, як можна довести, є необхідною і достатньою. Варто зауважити, що задача про побудову правильного n -кутника рівносильна задачі про поділ кола на n рівних частин. Саме в такій постановці розв'язав задачу Гаусс, звівши її до простішого випадку, коли число n – просте.

Архімед не помилявся у своїх міркуваннях і не намагався будувати правильний семикутник циркулем та лінійкою. Він не випередив ідей Гаусса, що, звичайно, мало імовірно. Він додав у своїй відомій праці про семикутник четверту стародавню задачу до трьох давно відомих (про подвоєння куба, трисекцію кута і квадратуру круга), як неможливо розв'язати циркулем та лінійкою. Історія розв'язання задачі про семикутник є однією із найвагоміших і найцікавіших серед стародавніх задач.

Теорія задач на побудову відображає особливості і властивості графічної практики і показує шляхи її удосконалення та розвитку.

Перелік посилань

Костарчук В.М., Хацет Б.І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки. К.,1971.204с.

Голованов Я. Світочі науки. Етюди про вчених.К., “Веселка”,1970,215с.

Карл Фрідріх Гаусс – Видатні особистості: Електронний ресурс: Режим доступу: http://novopetrivske-osoba.edukit.mk.ua/vidatni_matematiki/karlfridrihgaus/

Історичний розвиток встановлення класичних методів інтерполяції

С. О. Кухарук¹

¹*ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна*

kukharuksofiia@gmail.com

Анотація

Робота висвітлює історичний розвиток інтерполяції від давніх астрономічних таблиць до аналітичних методів XVII–XVIII століть. Особливу увагу приділено внеску Ньютона та Лагранжа, їхнім математичним підходам і застосуванням.

Ключові слова: інтерполяція; історія.

Інтерполяція – це ключовий метод чисельного аналізу, що дозволяє визначати значення функції між заданими дискретними точками. Вона широко застосовується у фізиці, астрономії, обчислювальній математиці, машинному навчанні та цифровій обробці сигналів. З розвитком науки інтерполяція еволюціонувала від простих емпіричних підходів до сучасних алгоритмічних рішень.

Найдавніші згадки про інтерполяцію відносяться до вавилонської цивілізації (близько 2000–300 рр. до н.е.), де астрономи складали таблиці для передбачення руху небесних тіл. Оскільки реальні спостереження були обмежені, вчені використовували лінійну інтерполяцію для заповнення проміжних значень у своїх розрахунках. У Стародавній Греції, приблизно в II столітті до н.е., Гішпарх застосовував аналогічні методи для створення тригонометричних таблиць, що допомагали визначати координати зірок. Пізніше Птолемей розвинув ці методи, додаючи складніші підходи до обчислення положень планет у своїй праці «Альмагест».[Meijering, 2002]

У середньовіччі розвиток інтерполяції продовжився в працях арабських, китайських та індійських математиків. Індійський математик Брахмагупта у VII столітті використовував методи квадратичної інтерполяції для визначення значень тригонометричних функцій. У XI–XV століттях арабські математики Аль-Біруні та Аль-Каші розробили методи багаточленної апроксимації для астрономічних і географічних розрахунків. Дослідники зазначають, що ці методи могли зазнати

впливу індійських математичних традицій, оскільки Брахмагупта та інші індійські вчені активно розвивали теорію інтерполяції, а їхні праці перекладалися арабською мовою вже в VIII столітті.[Meijering, 2002] Китайські вчені створили техніки другого і третього порядку, що дозволяли підвищити точність передбачень у календарних розрахунках.

XVII століття стало періодом Наукової революції, яка радикально змінила підходи до вивчення природи. Величезний внесок у розвиток математики зробили такі вчені, як Ісаак Ньютон, Готфрід Вільгельм Лейбніц, Джеймс Грегорі, Едмунд Галлей та інші. Саме в цей період закладено основи сучасного чисельного аналізу, що включає теорію інтерполяції.

Одним із ключових проривів стала робота Ісаака Ньютона. Він розробив загальний метод кінцевих різниць та запровадив формулу інтерполяції, яка дозволяла працювати з нерівномірно розташованими вузлами. У своєму листі до Генрі Олденбурга в 1676 році Ньютон писав, що проблема інтерполяції є «...одна з найкрасивіших задач, які я тільки міг би побажати вирішити», що підкреслювала її значущість для тогочасних науковців.[Goldstine, 1977] Загальна формула Ньютона для інтерполяції для довільних (відмінних один від одного) точок $x_0, x_1, \dots$, у сучасному вигляді записується так:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}) + R_n(f; x), \quad (1)$$

де a_k — це поділені різниці k -го порядку функції f щодо точок інтерполяції $x_0, x_1, \dots, x_k$, де $k = 0, 1, 2, \dots, n$, а $R_n(f; x)$ — залишковий член, який дозволяє оцінити похибку апроксимації. Хоча сам Ньютон і Лагранж не згадували його у своїх роботах. Формула (1) Ньютона без залишкового члена була опублікована в його праці «Principia» (1687) і займала не більше половини сторінки.

Цікавою була спроба використання формули Ньютона Леонардом Ейлером у листі 1734 року до Даніеля Бернуллі.[Gautschi, 2008] Він намагався обчислити натуральний логарифм $\log(x)$ для деякого x між 1 і 10, використовуючи (1) при $x_k = 10^k$, $\log(x_k) = k$, де $k = 0, 1, 2, \dots$. Він обчислив поділені різниці за формулою:

$$a_k = [x_0, x_1, \dots, x_k] \log = \frac{(-1)^{k-1}}{10^{\frac{k(k-1)}{2}}(10^k - 1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

і, підставивши їх у формулу Ньютона, отримав:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-1)(x-10) \dots (x-10^{k-1}). \quad (2)$$

Ряд швидко збігається, але, на жаль, не до $\log x$. Наприклад, для $x = 9$ він дає значення $S(9) \approx -0.89777885688\dots$ замість правильного $\log 9 = 0.954242509439\dots$. Ейлер сподівався знайти пояснення цього явища, але на той час аналіз, особливо

комплексний, ще не був достатньо розвинений, щоб дати відповідь. Проблема полягала в тому, що швидкість збіжності ряду (2) робить $S(x)$ цілою функцією, яка не може точно представити логарифм. Ейлер не полишав цю тему і через майже двадцять років, у 1754 році, повернувся до дослідження $S(x)$, тепер використовуючи логарифми з довільною основою. Він відкрив кілька цікавих тотожностей, серед яких спеціальні випадки q -біноміальної теореми. Згодом ця функція була запропонована як основа для визначення q -аналогового логарифма. [Koelink, Van Assche, 2009]

Розвиток інтерполяційних методів продовжився у XVIII столітті, коли Жозеф-Луї Лагранж запропонував альтернативний підхід до побудови інтерполяційного полінома. Незважаючи на те, що загальна формула, яка сьогодні носить його ім'я, не з'явилася безпосередньо в його ранніх працях, вона була представлена у п'ятій лекції курсу *Éléments de mathématiques*, прочитаній у 1795 році в *École Normale*. Пізніше ця лекція була опублікована у *Séances des Écoles Normales* (1794–1795) та перевидана в *Journal de l'École Polytechnique* у 1812 році на прохання самого Лагранжа. [Gautschi, 2012]

Лагранж високо оцінював інтерполяційні методи, особливо їх значення для астрономії. Він писав: «Метод інтерполяції є одним із найвитонченіших і найкорисніших, які має астрономія». Його роботи суттєво розширили можливості чисельного аналізу, і запропонована ним формула дозволяла отримувати інтерполяційний поліном у явному вигляді, уникаючи необхідності обчислення поділених різниць, як у методі Ньютона.

Лагранж розглядав проблему побудови кривої через кілька заданих точок і зазначав: «Зрештою, все зводиться до написання або побудови кривої через кілька точок, незалежно від того, чи ці точки визначені розрахунками, чи побудовані геометрично, чи навіть отримані шляхом спостережень або незалежних експериментів». [Gautschi, 2012] Він розумів, що через будь-який набір точок можна провести безліч різних кривих, і тому запропонував вибирати найпростіші та найбільш зручні для використання серед них. У своїх розрахунках Лагранж використовував таблицю поділених різниць, подібну до тієї, що застосовував Ньютон, але прийшов до іншого підходу для представлення інтерполяційного полінома. Його формула записується у вигляді:

$$y = AP + BQ + CR + DS + \dots$$

де коефіцієнти $A, B, C, D, \dots$ визначаються за формулами:

$$A = \frac{(x - q)(x - r)(x - s) \dots}{(p - q)(p - r)(p - s) \dots}$$

$$B = \frac{(x - p)(x - r)(x - s) \dots}{(q - p)(q - r)(q - s) \dots}$$

$$C = \frac{(x-p)(x-q)(x-s)\dots}{(r-p)(r-q)(r-s)\dots},$$

Головною перевагою цього підходу була його простота: кожен коефіцієнт мав властивість, що дорівнював 1 у своїй точці та 0 в інших, що спрощувало обчислення. Лагранж також запропонував метод зворотної інтерполяції, тобто знаходження значення x для заданого y , що мало важливе значення для розв'язання рівнянь.

Формула Лагранжа знайшла широке застосування у чисельному аналізі та практичних розрахунках. Вона використовується в астрономії для обчислення траєкторій небесних тіл, у фізиці для апроксимації експериментальних даних, у цифровій обробці сигналів для побудови фільтрів та в чисельних методах для розв'язання рівнянь. Попри те, що метод Лагранжа поступається у стабільності інтерполяції Ньютона при великій кількості вузлів (через ефект Рунге), його простота і зручність роблять його одним із найважливіших інструментів чисельного аналізу. Лагранж підкреслював переваги своєї формули: «Вона є кращою завдяки простоті аналізу, на якому вона заснована, і її власній формі, яка набагато зручніша для обчислень».

Таким чином, інтерполяція, що розвивалася протягом тисячоліть, пройшла шлях від найпростіших методів у вавилонській астрономії до складних математичних підходів XVII-XVIII століть. Роботи Ньютона і Лагранжа стали основою сучасних чисельних алгоритмів, які й досі використовуються у прикладних розрахунках та моделюванні складних процесів.

Перелік посилань

- Gautschi W. (2012). Interpolation before and after Langrange. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, vol. 70, no. 4, pp. 347–368.
- Gautschi W. (2008). On Euler's attempt to compute logarithms by interpolation: A commentary to his letter of February 16, 1734 to Daniel Bernoulli. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 219, no. 2, pp. 408–415.
- Koelink E., Van Assche W. (2009). Leonhard Euler and a q -analogue of the logarithm. *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 137, no. 5, pp. 1663–1676.
- Meijering E. (2002). A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing. *Proceedings of the IEEE*, vol. 90, no. 3, pp. 319–342.
- Goldstine H.H. (1977). *A History of Numerical Analysis From the 16th Through the 19th Century*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Ювілеї науки: до 90-річчя Інституту математики НАН України

А. С. Литвинко¹

¹*Інститут досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки ім. Г. М. Доброва НАН України, Київ, Україна*

litvinko@ukr.net

Анотація

Статтю присвячено висвітленню 90-річної історії провідного математичного центру України – Інституту математики НАН України. Розглядаються етапи становлення інституції, наукові школи й розвинуті наукові напрями, одержані результати та їх суспільне значення.

Ключові слова: Інститут математики НАН України; історія науки і техніки; наукові школи.



У зв'язку з переходом ВУАН на нову організаційну структуру, 13 лютого 1934 р. на базі трьох кафедр природничо-технічного відділу (прикладної математики, чистої математики та математичної статистики) було організовано Інститут математики АН УРСР (директор – Д.О. Ґраве) [1]. При заснуванні було затверджено напрями досліджень: теорія диференціальних рівнянь, теорія нелінійних коливань, прикладна математика і механіка, математична статистика.

Журнал «Вісті Всеукраїнської академії наук» повідомляв, що «Інститут математики розгортає широко свою роботу з проблем теорії диференціальних й інтегральних рівнянь, інтегральних інваріантів, арифметичної теорії алгебраїчних величин, питань математичної статистики, застосовної математики тощо. Інститут має пов'язати роботу окремих секторів між собою на основі комплексних проблем математики» [2].

1939 р. у Львові організовано філію Інституту, перетворену 1978 р. на Інститут прикладних проблем механіки і математики АН УРСР. В евакуації 1941–1943 у м. Уфа функціонував Інститут математики та фізики АН УРСР.



Академік АН УРСР
М.М. Боголюбов

До функцій Інституту математики належала підготовка висококваліфікованих наукових кадрів для високотехнологічної промисловості, ракетно-космічної та обчислювальної техніки. Сформувалися наукові школи в галузі диференціальних рівнянь, нелінійних коливань і динамічних систем, математичної фізики, алгебри, геометрії й топології, функціонального аналізу, математичних проблем механіки, обчислювальної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії функцій. Відомі у світі їх засновники та представники – Д.О. Граве, М.М. Крилов, М.П. Кравчук, М.М. Боголюбов, Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, О.М. Шарковський, О.С. Парасюк, Д.Я. Петрина, Ю.М. Березанський, І.В. Скрипник, Б.В. Гнеденко, А.В. Скороход,

В.С. Королюк, В.І. Фушич, М.Г. Крейн, М.Л. Горбачук, Є.Я. Ремез, В.К. Дзядик, В.М. Глушков, О.В. Погорелов, Й.З. Штокало, О.Ю. Ішлінський, Г.М. Савін.

Наприклад, М.М. Криловим і М.М. Боголюбовим у 1932–1937 рр. було побудовано новий математичний апарат для дослідження коливних систем із малим параметром – асимптотичну теорію нелінійних коливань («нелінійна механіка»). Ю.О. Митропольським розвинуто якісну теорію диференціальних рівнянь (1960–1980), А.М. Самойленко дослідив поведінку інтегральних кривих на інваріантних тороїдальних і компактних багатовидах та у їх околах, започаткував теорію диференціальних систем з імпульсною дією (1965–1990).

З 1939 р. у Львівському відділенні Інституту математики в галузі функціонального аналізу працював С. Банах – фундатор відомої наукової школи. У 1934 р. Є.Я. Ремез розробив ітеративний числовий алгоритм (алгоритм Ремеза), важливий для теорії апроксимації, обчислювальної математики та електроніки при проектуванні цифрових фільтрів зі скінченною імпульсною характеристикою (FIR-фільтрів).

З 1939 р. Інститут математики очолив академік М.О. Лаврентьєв, автор математичної моделі кумулятивного снаряду, суть якої полягає в тому, що при певних тиску й швидкості руху заряду броня поводить себе як ідеальна рідина, яку можна описати крайовою задачею для рівняння Лапласа. Вчений здійснив внесок у теорію хвиль, 1946 р. довів існування відокремленої хвилі (солітону). Разом із С.Г. Крейном дослідив стійкість твердих тіл з рідинним наповненням (артилерія), з С.В. Малашенком – обертання тіл на струнному підвісі. У 1947 з О.Ю. Ішлінським було створено теорію інерційної навігації і розв'язано задачі керування балістичними ракетами. В.М. Кошляков розробив методи компенсації похибок гіроскопічних приладів в умовах маневрування суден.

У вересні 1949 р. відділ асимптотичних методів та статистичної механіки, керівником якого був М.М. Боголюбов, було розширено завдяки організації обчислювальної групи. 1954 р. у Інститут математики з Інституту електротехніки

АН УРСР було переведено Лабораторію обчислювальної математики і техніки, яку очолювали Б.В. Гнеденко, пізніше В.М. Глушков. 1956 р. тут започатковано створення обчислювальної машини «Київ», у грудні 1957 р. на базі лабораторії організовано Обчислювальний центр АН УРСР, 23 грудня 1961 р. – Інститут кібернетики АН УРСР [3].

Крім того, під керівництвом Б.В. Гнеденка та М.М. Амосова в лабораторії моделювання вищої нервової діяльності ІМ АН УРСР створено одну з перших в СРСР діагностичних машин з визначення вад серця за певним числом ознак. В Інституті 16 грудня 1958 р. створено й Лабораторію № 1 для розробки математичного забезпечення для проектування ракетно-космічної техніки під керівництвом С.Ф. Феценка (згодом – відділ сучасних проблем динаміки).

Інститут математики сприяв становленню Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (1978), Донецького обчислювального центру АН УРСР (1965), згодом – Інституту прикладної математики і механіки НАН України (1970) [4].

Нині в інституті працюють 12 наукових відділів та 3 лабораторії: відділи алгебри і топології; диференціальних рівнянь та теорії коливань; комплексного аналізу і теорії потенціалу; математичних проблем механіки та теорії керування; математичної фізики; нелінійного аналізу; обчислювальної математики; теорії випадкових процесів; теорії динамічних систем; теорії функцій; фрактального аналізу; функціонального аналізу; лабораторії крайових задач теорії диференціальних рівнянь; оптимальних методів для обернених задач; топології.

Не оминули Інститут математики й трагічні події періоду політичних репресій. 22 серпня 1936 р. зі складу Академії було виключено члена-кореспондента ВУАН, вченого секретаря Інституту М.Х. Орлова як «контрреволюціонера, ворога партії, уряду і радянського народу». 21 жовтня 1936 р. вчений був розстріляний.

4 жовтня 1937 р., у зв'язку зі статтею у газеті «Комуніст» від 14 вересня 1937 р. академік, завідувач відділу математичної статистики М.П. Кравчук був знятий з посади, а відділ ліквідовано. Вченого заарештовано 21 лютого 1938 р., 23 лютого 1938 р. його виключено зі складу дійсних членів АН УРСР. 23 вересня 1938 р. вченому було винесено вирок – ув'язнення строком на 20 років із ураженням у політичних правах на 5 років та конфіскацією майна.

У червні-липні 1940 р. листи до НКВС УРСР на захист заарештованого вченого надіслали член-кореспондент АН УРСР Ю.Д. Соколов та член-кореспондент АН СРСР М.Г. Чеботарьов, професор О.С. Смогоржевський, доцент Й.Б. Погребиський, доцент Я.С. Гольдбаум [5]. 9 березня 1942 р. академік М.П. Кравчук помер у концентраційному таборі у Магадані. Науковий співробітник відділу



Академік НАН
України
А.М. Самойленко

М.П. Кравчука, кандидат фізико-математичних наук В.І. Можар у жовтні 1937 р. був засуджений до вищої міри покарання та розстріляний.

Науковці Інституту виявляли свою громадянську позицію й з інших приводів. У березні–липні 1988 р. проти зневажливого ставлення вищих органів влади до рекомендацій науки щодо перегляду програми розвитку атомної енергетики в Україні виступили інженери та науковці науково-дослідних установ Києва, з Інституту математики – академіки Ю.М. Березанський і А.В. Скороход, член-кореспондент АН УРСР О.М. Боголюбов, доктор фіз.-мат. наук В.Д. Кошманенко [6].

Ознакою того, що Україна, незважаючи на широкомасштабну військову агресію РФ, продовжує посідати гідні позиції у міжнародному науковому просторі, стало оприлюднення у травні 2023 р. Центром світових рейтингів університетів рейтингу Global 2000, до якого увійшли шість українських інститутів, зокрема Інститут математики НАН України [7].



Академік АН УРСР
Й.З. Штокало

Слід зазначити, що у другій половині 50-х рр. в Україні формувались дослідження з історії математичного природознавства. В Інституті математики діяв науковий семінар з історії математики, з 1956 р. його науковим керівником став академік АН УРСР Й.З. Штокало. Праці вченого стосувалися теорії диференціальних рівнянь, операційного числення та історії математики. Він досліджував питання стійкості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі змінними та квазіперіодичними коефіцієнтами, узагальнивши на їх випадок символічний метод; 13 липня 1956 р. очолив новостворений відділ історії математики Інституту [8]. У 1959–2001 рр. Інститут видавав збірники з історії математики. 26 червня 1965 р. Й.З. Штокало було обрано членом-кореспондентом Міжнародної академії історії науки. 1971 р. за чотири томні праці в 5 книгах «Історія вітчизняної математики» Й.З. Штокало з колегами були відзначені медаллю Койре.

4 січня 1963 р. на базі відділу історії математики та відділу історії техніки Інституту теплоенергетики у складі Інституту історії АН УРСР створено Сектор історії природознавства і техніки (завідувач – Й.З. Штокало), на базі якого та інших підрозділів 22 липня 1986 р. організовано Центр (нині Інститут) досліджень науково-технічного потенціалу та історії науки АН УРСР [9].

Перелік посилань

- [1] *Історія Національної академії наук України. 1934–1937 : Документи і матеріали.* (2003). К.: НБУВ. 832 с. <http://irbis-nbuv.gov.ua/everlib/item/er-0001906>

- [2] Всеукраїнська академія наук (1934). Вісті ВУАН, № 1.
- [3] *Історія Національної академії наук України. 1961–1965: документи і матеріали.* (2020). Київ: НБУВ. Ч. 1. 944 с. <http://irbis-nbuv.gov.ua/everlib/item/er-0004028>
- [4] Самойленко А.М., Строк В.В., Сукретний В.І. (2005). *Хроніка-2005: Сторінки з історії Інституту математики.* Київ: Ін-т математики НАН України. 236 с.
- [5] До 30-ліття листа протесту проти політичних переслідувань в Україні. (1999). *Сучасність.* № 1, січень. С. 88–109.
- [6] Щербак Ю. (1988). Чернобыль. *Юность.* № 10. С. 11–26.
- [7] Національна академія наук України. (2024). Київ: Академперіодика. 49 с.
- [8] Литвинко А.С., Виврот Т.М. (2022). Академік АН УРСР Йосип Захарович Штокало - математик та фундатор історії науки й техніки в Україні. До 125-річчя від дня народження вченого. *Наука та наукознавство.* № 4. С.136–142. <https://sofs.org.ua/sample-page/arhiv/2022-2/4-118/>
- [9] Литвинко А.С., Луговський О.Г. (2018). Інституалізація історії науки і техніки в Національній академії наук України. *Наука та наукознавство.* № 4. С.125–147. <https://sofs.org.ua/wp-content/uploads/2019/08/8-5.pdf>

Дослідження математиків АН УРСР з балістики в 20–30-х роках ХХ ст.

О. Г. Луговський¹

¹*Інститут досліджень науково-технічного потенціалу та історії
науки ім. Г. М. Доброва НАН України, Київ, Україна*

aglug1951@ukr.net

Анотація

Статтю присвячено висвітленню розвитку балістики як наукового напрямку, а також досліджень математиків АН УРСР з балістики в 20-30-х роках ХХ ст., зокрема М.Х. Орлова та М.К. Куренського.

Ключові слова: балістика; історія науки й техніки; Орлов М.Х.; Куренський М.К.

У часи повномасштабної російської війни проти України словом «балістика» українці називають російські балістичні та аеробалістичні ракети, політ яких відбувається за балістичною траєкторією і які вважають складною ціллю для систем ППО («Іскандер-М», «Точка-У», «Сармат», Х-47М2 «Кинджал», РС-26 «Рубіж» та ін.).

У сучасній українській науковій і науково-популярній літературі немає фундаментальних праць з історії балістики. Дослідники лише торкаються проблем, які треба описати.

Термін «балістика» походить від слова “ballo” – кидаю. Історично балістика виникла як військова наука, яка визначає теоретичні основи та практичне застосування закономірностей польоту снаряда.

Балістика – наука про рух кинутих тіл, яка використовує методи математики і фізики. Вона займається, головним чином, дослідженням руху снарядів, випущених із вогнепальної зброї, ракетних снарядів і балістичних ракет.

Історія балістики глибоко переплетена з розвитком пороху та вогнепальної зброї. Балістика, наука про рух, політ і удар снарядів, поділяється на внутрішню, зовнішню, проміжну та кінцеву балістику, а також балістику ран, яка вивчає вплив снарядів на живі цілі. За тривалий шлях свого розвитку балістика перетворилася з відділу теоретичної механіки на самостійну дисципліну.

Загалом, історія балістики свідчить про взаємодію між науковими відкриттями та технологічними інноваціями, що суттєво впливало на військовий потенціал і стратегії протягом століть.

Виникнення балістики пов'язують із великим ученим давнини — Архімедом, який сконструював металеві машини (балісти) і розрахував траєкторію польоту металевих снарядів.

Винахід пороху визначив поворот у військовій техніці. Винайдений у Китаї в IX ст., порох спочатку використовувався в ракетах і гарматах. Це була суміш нітрату калію, деревного вугілля та сірки. Розробка порохової зброї в Європі привела до значного прогресу у військовій тактиці та технології.

Балістика як наука виникла у XVI ст. Однією з перших праць з цієї галузі знань була книга відомого італійського математика Н. Тарталі «Nova Scientia» («Нова наука», 1537). Він довів, що траєкторія польоту снаряда є кривою лінією і максимальна дальність польоту відповідає куту 45° .

Наукове вивчення зародилося в епоху середньовіччя з появою вогнепальної зброї. З розвитком технологій створення зброї, балістична наука еволюціонувала, стаючи все більш складною та багатогранною.

Термін «Балістика» запропонував у 1694 р. відомий французький учений М. Мерсенн. У XVII ст. фундаментальні принципи зовнішньої балістики встановили Е. Торрічеллі, М. Мерсенн і Г. Галілей, який розробив параболичну теорію руху снаряда. У XVII ст. Галілео Галілей та Ісаак Ньютон заклали основи балістики у її сучасному вигляді, запровадивши концепції інерції та гравітації, які відіграли ключову роль у розумінні руху снарядів.

Перші дослідження впливу сили опору на траєкторію снаряда належать І. Ньютону («Mathematical Principles of Natural Philosophy» «Математичні принципи натуральної філософії», 1686). У XVII–XVIII ст. рух снарядів досліджували Х. Гюйгенс, П. Варіньон, Л. Ейлер та ін. Експериментальні й теоретичні основи внутрішньої балістики були закладені у XVIII ст. у працях Б. Робінса, Ч. Хеттона, Д. Бернуллі.

До кінця XVIII ст. наукові досягнення почали впливати на балістику. Балістичний маятник, винайдений Бенджаміном Робінсом, дозволив виміряти початкову швидкість, поглибивши розуміння ефективної потужності снаряда. У цей період також відбулися вдосконалення у виробництві пороху, наприклад, використання деревного вугілля, що спалювалося в циліндрах, підвищило однорідність і потужність пороху.

У XIX ст. розробка великих морських гармат і берегових оборонних споруд розширила межі існуючих матеріалів і методів, що привело до інновацій у вимірюванні внутрішнього тиску всередині гармат, розробки гармат із товстими галіфе, відомих як гармати «пляшка газованої води», які були оптимізовані для тиску під час стрільби.

Значний внесок у розвиток балістики як науки зробили Леонард Ейлер, Ломбард Гуттон. З 1820 року вчені почали досліджувати вплив тертя на рух снаряда чи кулі.

Знаковою подією в розвитку балістики стало повсюдне використання вогне-

пальної зброї нарізного типу зі снарядами довгастої форми. Вивченням питань балістики зайнялися не лише фізики, а й артилеристи. Проводилися досліді, зокрема на заводах, де виготовляли зброю.

У період з 1881 по 1890 роки на заводі Крупна були отримані важливі результати, що стосувалися швидкості руху снарядів, випущених із гармат різного калібру. Були винайдені балістичні прилади, а завдяки зусиллям різних учених започатковано внутрішню балістику як напрям дослідження.

На початку XX ст. відбулися радикальні зміни в галузі балістики. У 1900 р. М. Кутт і К. Рунге створили числовий метод інтегрування диференціальних рівнянь. Він дозволив розв'язувати рівняння з використанням значень вихідних даних.

У XX ст., з розвитком ракетної техніки та космічних досліджень, відбувся новий виток розвитку науки. Дослідження, які проводились у рамках космічних програм, не тільки просунули науку про рух об'єктів у космосі, а й значно поліпшили розуміння зовнішніх балістичних чинників. Сьогодні це високотехнологічна наука, яка має величезну кількість застосувань – від військових операцій до космічних запусків.

До кінця XVIII ст. наукові досягнення почали впливати на балістику. Балістичний маятник, винайдений Бенджаміном Робінсом, дозволив виміряти початкову швидкість, покращуючи розуміння ефективної потужності снаряда. У цей період вдосконалювалося виробництво пороху, наприклад, використання деревного вугілля, що спалювалося в циліндрах, підвищило однорідність і потужність пороху.

Значний внесок у розвиток балістики як науки зробили Леонард Ейлер, Ломбард Гуттон. З 1820 р. вчені почали досліджувати вплив тертя на рух снаряда чи кулі.

Знаковою подією в розвитку балістики стало повсюдне використання вогнепальної зброї нарізного типу зі снарядами довгастої форми. Вивченням питань балістики зайнялися не лише фізики, а й артилеристи. Проводилися досліді, зокрема на заводах, де виготовляли зброю. У 1881–1890 рр. на заводі Крупна були отримані важливі результати, що стосувалися швидкості руху снарядів, випущених із гармат різного калібру. Були винайдені балістичні прилади, а завдяки зусиллям учених започатковано внутрішню балістику як напрям дослідження.

В Україні у 20–30-х рр. XX ст. наукова робота в Академії виконувалась в комісіях, які очолювали академіки. Питання зовнішньої балістики розробляли учні видатного науковця акад. Д. Граве, серед яких, насамперед, проф. Київського університету, член-кореспондент АН УРСР М. Орлов та учень акад. Г.В. Пфейффера, проф. М.К. Куренський.

ОРЛОВ Михайло Хрисанфович (1900–1936) – математик, механік, доктор математичних наук (1931), проф. (1934), член-кореспондент ВУАН (1934). Народився 07.01.1900 у Києві. В 1924 р. закінчив Київський інститут народної освіти (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка), де в 1924–1930 викладав, одночасно в 1925–1930 – в Київському політехнічному інституті. Учень Д.О. Граве. В 1931–1934 – директор Українського науково-дослідного інституту

математики і механіки при Харківському університеті, 1934–1936 – старший науковий співробітник, зав. відділу, учений секретар (1935), заступник директора (1935) Інституту математики ВУАН. Репресований (1936) [1].

Його основні праці присвячено розрахунку фігур рівноваги рідкої маси, що обертається, наближеним методам розв’язування інтегральних рівнянь та зовнішній балістиці. Знайшов простий спосіб розрахунку траєкторії далекобійного снаряду і в листі до ЦК КП(б)У просив допомогти у його впровадженні [2].

КУРЕНСЬКИЙ Максим Каленикович (27.03(08.04).1895, с. Атюша, нині Короп. р-ну Черніг. обл. – 04.09.1940, Ленінград, нині С.-Петербург) – математик. Доктор фізико-математичних наук (1930), професор (1926). Закін. Університет св. Володимира в Києві (1918). Учень Г. Пфейффера. Працював у Комісії чистої математики ВУАН (1920–32); проф. н.-д. каф. чистої математики Інституту математики ВУАН (Київ, 1933); професор кафедри диференціал. рівнянь Ленінгр. університету (1933–37); від 1938 – завідувач кафедри матем. аналізу Карело-Фін. університету (м. Петрозаводськ, нині Респ. Карелія). Наукові дослідження присвячені питанням теорії диференціал. рівнянь, прикладній математиці [3].

Вивчав інтегровність рівнянь з частинними похідними 1-го та 2-го порядків з декількома невідомими функціями; застосував одержані результати до задач Беклунда про відповідність двох багатовидів дотичних елементів та Вейнгартена про зображення елемента, задачі про ортогональні траєкторії.

Як послідовник академіка Г.В. Пфейффера, доктор фіз.-мат. наук М.К. Куренський зосередив свою увагу на проблематиці інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними з кількома невідомими функціями.

Результати досліджень він згодом використав при розгляді складних питань диференціальної геометрії та теорії пружності, математичних проблем механіки, зокрема задач зовнішньої балістики в декількох публікаціях [4].

Перелік посилань

- [1] Боголюбов О.М. (2022). Орлов Михайло Хрисанфович. *Енциклопедія Сучасної України*. Київ: Інститут енциклопедичних досліджень НАН України. <https://esu.com.ua/article-75826>
- [2] *Історія Національної академії наук України (1934–1937): Документи і матеріали* (2003). Київ: НБУВ. С. 185–186. <https://irbis-nbuv.gov.ua/everlib/item/er-0001906>
- [3] Горбачук В.І. (2016). Куренський Максим Каленикович. *Енциклопедія Сучасної України*. Київ: Інститут енциклопедичних досліджень НАН України. <https://esu.com.ua/article-51848>
- [4] Куренський М.К. (1934). *Літ снаряда: Основна задача зовнішньої балістики про літ снаряда*. Київ: Вид-во ВУАН. 139 с.

Моральне сподівання

Т. В. Маловічко¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

tatianamtv@protonmail.com

Анотація

Поняття морального сподівання було запропоновано Даніелем Бернуллі для справедливої оцінки прибутків та збитків внаслідок азартної гри або інших подій, пов'язаних із ризиком. Це поняття протягом століть привертало до себе увагу математиків, потім зникло з робіт, присвячених теорії ймовірностей, але дало початок теорії очікуваної корисності в економіці.

Ключові слова: моральне сподівання; Санкт-петербурзький парадокс; теорія очікуваної корисності.

Поняття морального сподівання походить від роботи Даніеля Бернуллі «Specimen theoriae novae de mensura sortis» 1738 року [Bernoulli, 1738]. У ній Бернуллі досліджує правила «за допомогою яких кожен міг би самостійно оцінити свій жереб у залежності від стану своїх справ». Виходячи з того, що однаковий виграш у більшості випадків дає бідному більше користі, ніж багатому, Бернуллі висловив гіпотезу, що «довільний малий виграш дає вигоду, обернено пропорційну вже наявному статку». При цьому під статком він розуміє не тільки наявні гроші, рухоме та нерухоме майно, але й працездатність із можливістю просити милостиню включно.

Якщо позначити наявний статок як x , нескінченно малий виграш як dx , наявну вигоду як y , а нескінченно малу вигоду, яку дехто, що володіє статком x , отримує завдяки нескінченно малому виграшу dx , як dy , то Бернуллі стверджує, що

$$dy = \frac{b \cdot dx}{x},$$

де b – деяка константа, тобто

$$y = b \log \frac{x}{a},$$

де a – статок у початковий момент часу.

З увігнутості графіка логарифмічної функції Бернуллі робить висновок, що «за будь-якої гри, якими б справедливими не були поставлені умови, кожен з двох

партнерів з самого початку зазнає деяких збитків, – звичайно, це явна вказівка з боку природи на необхідність уникати азартної гри».

Той самий підхід Даніель Бернуллі використовує для розв'язування задач, пов'язаних із страхуванням. Він аналізує, яким має бути розумний розмір страхового внеску, та приходять до висновку, що «ті товари, зазнають небезпеки, доцільніше поділяти на кілька частин, ніж ризикувати всіма ними одразу».

Також Бернуллі розглядає задачу, яку його двоюрідний брат Микола Бернуллі запропонував Монмору: «Петро підкидає вгору монету, доки вона не впаде гербом вгору; якщо це відбувається після першого кидка, він повинен дати Павлу 1 дукат, але якщо тільки після другого – 2 дукати, після третього – 4, після четвертого – 8 тощо, таким чином, після кожного кидка число дукатів подвоюється. Питання: яка оцінка жереба для Павла?» Ця задача одержала назву Санкт-Петербурзький парадокс, оскільки «хоча обчислення вказують, що сподівання Павла нескінченно великі, ... не знайдеться жодної скільки-небудь розсудливої людини, що охоче не продавала б це сподівання за 20 дукатів».

Тим самим методом Даніель Бернуллі оцінює сподівання виграшу Павла як

$$\sqrt{\alpha + 1} \cdot \sqrt[4]{\alpha + 2} \cdot \sqrt[8]{\alpha + 4} \cdot \sqrt[16]{\alpha + 8} \cdot \dots - \alpha,$$

де α – весь статок Павла. Зокрема, якщо статок Павла дорівнює 1000 дукатів, то оцінка його жереба складає приблизно 6 дукатів [Bernoulli, 1738].

Термін «моральне сподівання» Даніель Бернуллі не використовував. Першим це словосполучення вжив Габріель Крамер у листі, написаному Миколі Бернуллі в 1728 році, який Даніель Бернуллі навів у кінці тої самої своєї роботи. У цьому листі Крамер пропонує своє розв'язання Санкт-Петербурзького парадокса, виходячи з того, що всі суми понад 10 мільйонів або, для більшої зручності, 2^{24} слід визнати рівноцінними між собою, оскільки вони не приносять більшого задоволення, ніж 10 мільйонів екю. Тоді моральну оцінку свого сподівання він оцінює у 13 екю. При цьому він не вважав свою гіпотезу єдиною можливою та безумовно правильною. У цьому листі Крамер використовує слова «моральне сподівання» («l'esperance morale») у такій фразі: «Mais cette quantité n'est pas l'equivalent, car l'equivalent doit etre non pas egal a mon esperance, mais tel que le chagrin de sa perte soit egal á l'esperance morale du plaisir que j'espere de recevoir en gagnant» [Bernoulli, 1738].

Словосполучення «моральне сподівання» в якості математичного терміну першим використав П'єр-Симон Лаплас у своїй роботі «Théorie analytique des probabilités» 1812 року. Моральне сподівання, що відповідає фізичному статку x , Лаплас вважає рівним

$$y = k \cdot \log x + \log h.$$

При цьому x та y завжди додатні, оскільки людина, що нічим не володіє, розглядає своє існування як моральне благо, яке можна порівняти з фізичним статком, цінність якого дуже важно визначити, але яке не може бути менше тієї грошової суми, що необхідна для існування.

У своїй книзі Лаплас розглядає ті самі задачі, що й Данієль Бернуллі (про не вигідність азартних ігор, про користь страхування, про розмір страхового внеску, санкт-петербурзький парадокс) та доповнює їх задачею про довічну ренту, в якій приходить до висновку щодо переваги сумісної довічної ренти перед роздільною [Laplace, 1812].

Використання поняття морального сподівання неодноразово піддавалося критиці.

Зокрема, д'Аламбер при аналізі підходу Данієля Бернуллі до розв'язання санкт-петербурзького парадоксу, стверджував, що використання морального сподівання, по-перше, не усуває проблему, яка полягає в тому, що розсудливі люди не захочуть грати у цю гру практично за будь-яких обставин, не кажучи вже про те, щоб поставити все своє майно на її результат. По-друге, поняття морального сподівання, яке зважає очікувані прибутки та збитки у порівнянні з наявним капіталом гравця, було довільним чином спрощене та довільним чином застосоване. Можна легко уявити собі інші фактори, окрім майна, що стосуються особистих обставин гравців, які також могли б бути правдоподібно залучені до цієї задачі, але які надзвичайно важко оцінити кількісно [Daston, 1979].

Василь Петрович Єрмаков (видатний математик, автор близько 150 робіт, член-кореспондент Петербурзької Академії наук, професор Київського університету, перший завідувач кафедри Вищої математики Київського політехнічного інституту) критикував теорію морального сподівання («нравственного ожидания»). У підручнику «Теорія ймовірностей» 1879 року він писав: «Але теорія морального сподівання не витримує строгої критики: по-перше, тому, що важко дати точну міру для визначення морального задоволення; по-другу, якщо гра за теорією морального сподівання нешкідлива для одного гравця, то вона завжди не вигідна для його супротивника. Тому я вважаю, що моральне сподівання має бути виключено з теорії ймовірностей» [Єрмаков, 1879].

Жозеф Луї Франсуа Бертран у «Calcul des probabilités» писав: «Теорія морального сподівання стала класичною, і ніколи слово не було використане так точно: її вивчають, її викладають, її розвивають у в книгах, які заслужено відомі. Але на цьому успіх завершується; вона ніколи не мала й не буде мати ніякого практичного застосування» [Bertrand, 1907].

Австрійський математик Карл Менгер (молодший) у своїй статті, написаній до 1923 р., яка була представлена в 1927 р. та опублікована в 1934 р., вказав, що використана Данієлем Бернуллі логарифмічна функція не розв'язує санкт-петербурзький парадокс, якщо виграші замість 2^n покласти рівними e^{2^n} . Подібним чином можна побудувати контрприкладі й при використанні замість логарифмічної функції будь-якої іншої зростаючої необмеженої функції. Щоб пояснити поведінку, що спостерігається, необхідно використати обмежену функцію корисності [Golik, 2016].

Робота Менгера мала великий вплив на створення теорії очікуваної корисності Джоном фон Нейманом та Оскаром Моргенштерном [Golik, 2016].

Цю теорію розвивали у подальшому Мілтон Фрідман та Леонард Дж. Севідж. Вони представили гіпотезу, що споживча одиниця поводить ся так, немов у неї є послідовний набір уподобань і ці уподобання можна було б повністю описати, приписуючи числове значення, яке називається «корисністю», кожній альтернативі. Нехай I являє собою дохід споживчої одиниці за одиницю часу, а $U(I)$ – корисність, що відповідає цьому доходу. Відповідна функція корисності $U(I)$ може мати як опуклі, так й увігнуті ділянки. Якщо на певній ділянці функція корисності опукла вгору, то споживча одиниця вважає за краще за наявного доходу уникати ризику, наприклад, купуючи страховку. Якщо ж функція корисності опукла вниз, то споживча одиниця віддає перевагу ризикованій поведінці, наприклад, приймаючи участь у лотереї. Таким чином, це пояснює, чому одні й ті самі люди можуть, як купувати страховку, так і приймати участь в азартних іграх [Friedman, Savage, 1948].

Таким чином, поняття морального сподівання дало початок теорії очікуваної корисності.

Перелік посилань

Bernoulli D. (1738). *Specimen theoriae novae de mensura sortis*. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Tomus V, (In Classe Mathematica), 1738, pp. 175-192.

Laplace, Pierre-Simon de. (1812) *Théorie analytique des probabilités*. Paris, Mme Ve Courcier.

Daston L.J. (1979). D'Alembert's critique of probability theory. *Historia Mathematica*, no. 6, pp. 259–279.

Ермаков В.П. (1879). *Теорія вероятностей*. Київ: Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владимира. (І.І. Завадзкаго).

Bertrand J. (1907). *Calcul des probabilités*. Publisher Gauthier Villars Imprimeur Libraire.

Golik J. (2016). *Expected Utility Hypothesis – its origin and development* Gdansk university of technology.

Friedman M., Savage, L.J. (1948). The Utility Analysis of Choices Involving Risk *The Journal of Political Economy*, vol. 56, no. 4, pp. 279–304.

Сторінки пам'яті професора Володимира Горбайчука (до 90-річчя від дня народження)

Н. Й. Падалко¹

¹*ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна*

padalkoanatol@gmail.com

Анотація

Робота присвячена вшануванню пам'яті професора Володимира Горбайчука. Автор розкриває основні віхи становлення, здобутки та наукову і педагогічну спадщину цього визначного вченого.

Ключові слова: математика; Володимир Горбайчук; 90-річчя від дня народження.

«Частинку серця людям залишаю, собі ж сльозу на спалених вустах», – напис на пам'ятнику Володимиру Йосиповичу проникає глибоко в душу.

Повноцінним членом суспільства можна вважати людину лише в тому випадку, коли вона сама є творцем власної біографії, готова до будь-яких викликів сучасності та випробувань, постійно прагне до перемог у своєму власному житті, здатна відповідати за свої вчинки, тобто, є господарем власної долі. Для того, щоб відчувати себе Людиною з великої літери, треба приносити якомога більше користі, радості і щастя у життя інших людей, трудитись не лише на особисте благо, а й на благо свого рідного народу, неньки України, хоча за цим, зазвичай, прихована титанічна, натхненна праця. Людиною з великої літери був наш наставник Володимир Йосипович Горбайчук.

Народився майбутній професор 25 січня 1935 року в селі Радостів на Холмщині. До школи пішов у шестирічному віці і закінчив три класи.

В серпні 1944 року батька забрали до армії, а невдовзі у березні 1945 року прийшла трагічна звістка про загибель батька на території Німеччини. Володимир з матір'ю в числі тисяч інших українців були депортовані в Україну. І солдатська вдова разом з десятилітнім сином мусила починати життя на Волині в чужій хаті на хуторі за Копачівкою Рожищенського району Волинської області. Всім було

важко у повоєнні роки, тому рано довелося дорослішати Володимиру, оскільки по господарству він був єдиним маминим помічником. «Я не був першим учнем у класі, бо навіть не завжди міг прийти до школи. То завіє хуртовина, то весна залле хутірські дороги, а в мене часто-густо ні взутися, ні одягтися», – згадував у задушевних розмовах Володимир Йосипович. Але пам'ятав і повторював матусині слова: «Хочу, сину, щоб ти вчився, хоч при нашій бідності не вивчишся на професора, не було їх у нашій родині, та певно, й не буде. Але науку за плечима не носити, вона й тобі не завадить. Ти вже не гнівайся, сину, що відриваю тебе від уроків, хто ж мені допоможе як не ти».

Саме тут пішов до початкової школи, а Рожищенську середню школу закінчив у 1953 році, проживаючи у шкільному інтернаті. Мати щиро раділа, коли син приносив добрі оцінки. Раділа і згодом, коли закінчив інститут, аспірантуру, став кандидатом наук. «Тримаючи в руках атестат професора, найбільше хотілося показати мого матері, але на жаль, її вже не було», – з тугою розповідав Володимир Йосипович.

Шкільні роки Володимира Йосиповича характеризувалися надзвичайно широким колом інтересів, він цікавився історією, літературою, життям і творчістю письменників. Часом на уроках літератури своїми знаннями про творчість того чи іншого письменника він дивував навіть учителів. В цей час майбутній професор потоварищував з майбутніми відомими письменниками – Йосипом Струцюком, Володимиром Лучуком.

На визначення життєвого шляху учня значний вплив зробив учитель математики предметів холмщак Кицай Михайло Омелянович, пізніше доцент Львівського державного університету ім. Івана Франка. В середній школі математику викладав Борис Костянтинович Тоцький, який здобув освіту у Віденському і Варшавському університетах.

У 1953 році Володимир Йосипович став студентом не філологічного, а саме математичного відділення фізико-математичного факультету Луцького інституту імені Лесі Українки. Крім навчальних занять Володимир Горбайчук відвідував наукові гуртки і семінари, якими керували професор Симон Зуховицький та доцент Владислав Дзядик (пізніше член-кореспондент НАН України), вивчав додаткову літературу, спеціалізуючись в окремих розділах теорії функцій дійсної і комплексної змінних.

Після успішного завершення навчання в інституті його направили в аспірантуру. Але, для того, щоб продовжити навчання необхідно було переїздити у столицю, а на той час він вже мав сім'ю та маму в селі, тому поїхав працювати в школу міста Камінь-Каширський, в якій трудився чотири роки разом з дружиною Ольгою Петрівною – теж педагогом.

Талановитого математика неодноразово запрошували на роботу до вузу, тому з 1961 по 1968 рік він працював асистентом і старшим викладачем кафедри математики Луцького педагогічного інституту імені Лесі Українки.

З 1968 по 1971 рік навчався в аспірантурі Інституту математики Академії наук України. Під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора Промарза Тамразова підготував і захистив дисертацію на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук.

З 1976 по 1982 рік працював доцентом кафедри математичного аналізу Тернопільського педагогічного інституту. Вчене звання доцента йому присвоєно у 1976 році.

Основна частина трудової діяльності Володимира Горбайчука пройшла в Луцькому педінституті і Волинському державному університеті імені Лесі Українки. Тут він став професором у 1992 році. З його ініціативи у Волинському університеті була створена кафедра диференціальних рівнянь і математичної фізики (1994р.), професор очолив її і працював на ній до останніх своїх днів.

Лекції професора характеризувались багатством і глибиною змісту, чіткістю та ясністю, оригінальністю, високим науковим рівнем, у поєднанні з методичною досконалістю. Він керував науковим семінаром з теорії функцій та функціонального аналізу, на якому викладачі, аспіранти та студенти вивчали проблематику сучасної математики. [Ворошик, Горбайчук, 1994, Ворошик, Горбайчук, 1995]. Володимир Йосипович був натхненним популяризатором математики, проводив заняття з учнями, писав роботи для науково-популярних журналів, організовував математичні олімпіади серед учнів та студентів. Він зібрав унікальну власну математичну бібліотеку, яка була підґрунтям його різносторонньої математичної ерудиції. Зараз його бібліотека є власністю ВНУ імені Лесі Українки, і кожен член нашого колективу може черпати з неї знання.

Трудився Володимир Йосипович натхненно і плідно, віддаючи всі свої сили, талант вченого та педагога справі виховання молодих математиків, керував науковою роботою студентів та аспірантів. Багато його учнів, студентів, аспірантів стали знайомими фахівцями-математиками, викладачами вузів та вчителями середніх шкіл.

Викладання математики Володимир Горбайчук поєднував із інтенсивною та плідною науковою роботою. Професор виступав з повідомленнями на багатьох міжнародних наукових конференціях. Всього ж вченим підготовлено і опубліковано більше 100 наукових праць [Горбайчук, 1986, Горбайчук, Задерей, 1976, Горбайчук, Лукиянчук, 1983].

Про широкий математичний кругозір професора свідчать дослідження, присвячені застосуванню методів теорії апроксимації до вивчення аналітичного продовження гармонійних функцій, а також результати наукових розвідок про граничні властивості розв'язків диференціальних рівнянь в плоских областях, про обернені задачі математичної фізики, про властивості розв'язків рівнянь еліптичного типу. Є роботи, де досліджено питання про асимптотику точної верхньої межі відхилення квазігладкої функції від її бігармонійного інтеграла Пуассона в крузі.

Таким чином, методи наближення функцій, вивчення їх граничних властивостей, вивчення властивостей розв'язків рівнянь математичної фізики, властивостей

гармонійних та бігармонійних функцій, обернені теореми наближення функцій – це лише неповний перелік питань, які розглядав вчений в своїх дослідженнях. В його науковій спадщині є також роботи, присвячені питанням історії математики, методику викладання математики та педагогіки.

Володимиром Горбайчуком була підготовлена докторська дисертація, яку йому не довелося захистити. На жаль життя талановитого вченого обірвалося. Від нас пішов відомий і перспективний науковець, який міг би ще багато зробити для розвитку математичної науки та виховання нових поколінь своїх послідовників.

Володимир Йосипович був щирою, доброзичливою і водночас принциповою людиною, натхненним трудівником і ентузіастом на ниві освіти та математичної науки, чим заслужив повагу і любов своїх колег та студентів. Професор Горбайчук Володимир Йосипович палко любив свій рідний Волинський край, його людей, Україну і щиро вболівав за них. Таким і запам'ятовувався він усім, хто його знав. Хоча Володимир Йосипович уже не серед нас, проте Він завжди з нами: у наших серцях і душах, нашій пам'яті, нашій щоденній праці з навчання та виховання молодого покоління волинян! Адже саме цьому Він присвятив усе своє життя!

Працюємо ми так, як нас Професор навчили.

Приходимо з тугою до могили...

Та все ж щасливі тим, що є рівнятися на кого

Завжди любитимемо Вчителя ми свого.

Ніна Падалко (Ворошик).

Перелік посилань

Ворошик Н.Й., Горбайчук В.Й. (1994). Про граничні властивості розв'язків задачі Діріхле в еліптичній області. *Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь*: Тези доповідей Всеукр. наук. конф. (м. Дрогобич, 25–27 січня 1994 р.). Київ, р. 34.

Ворошик Н.Й., Горбайчук В.Й. (1995). Граничні властивості розв'язків задачі Діріхле в еліптичній області. *Укр. мат. журн.*, vol. 47, no. 10, pp. 1318–1327.

Горбайчук В.И. (1986). Об обратных теоремах приближения гармоническими функциями. *Укр. мат. журн.*, vol. 38, no. 3, pp. 309–314.

Горбайчук В.И., Задерей П.В. (1976). Свойства решений задачи Дирихле для круга и полосы. *Математический сборник*. Киев: Наук. думка, pp. 64–68.

Горбайчук В.И., Лукиянчук М.В. (1983). Изучение некоторых граничных свойств решений уравнений $\Delta U - C^2 U = 0$ в полуплоскости. *Укр. мат. журн.*, vol. 35, no. 6, pp. 681–688.

Жінки в історії точних наук: внесок та досягнення

В. О. Стельмахчук¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

vikastelmashchuk@gmail.com

Анотація

У даній доповіді розглядається внесок жінок у розвиток точних наук, зокрема математики, фізики, хімії та інформатики. Автор підкреслює історичні труднощі, з якими стикалися жінки в науковій сфері через дискримінацію та упередження, а також звертає увагу на значні досягнення видатних жінок-науковиць від Гіпатії Александрійської до Розалінд Франклін. Окрім цього, обговорюються сучасні проблеми і перспективи для жінок у STEM-дисциплінах, необхідність впровадження ініціатив для їх підтримки і заохочення.

Ключові слова: Жінки в науці; Точні науки; STEM-дисципліни.

Жінки в історії точних наук: внесок та досягнення Наука є рушійною силою людського прогресу, і жінки відіграли важливу роль у її розвитку, хоча протягом століть вони стикалися з дискримінацією, упередженнями та правовими обмеженнями. Точні науки, такі як математика, фізика, хімія, біологія та інформатика, тривалий час вважалися «чоловічими» сферами діяльності, а жінкам часто не дозволяли отримувати освіту чи працювати в наукових установах. Багато видатних жінок-науковиць змушені були працювати анонімно або під чоловічими псевдонімами. Лише в останні десятиліття їхній внесок почав отримувати належне визнання.

Сьогодні науковий світ визнає, що без жіночого внеску не було б багатьох ключових відкриттів, які змінили історію науки. Жінки зробили значний внесок у розвиток математичних теорій, відкриття нових хімічних елементів, розробку комп'ютерних алгоритмів та дослідження ДНК. Попри труднощі, вони зуміли довести, що їхній інтелектуальний потенціал нічим не поступається чоловічому. У цій доповіді розглядаються досягнення видатних жінок-науковиць, їхній вплив на сучасні точні науки, а також проблеми та перспективи для жінок у STEM-дисциплінах.

Видатні жінки-науковиці та їхній внесок у точні науки Гіпатія Александрійська (бл. 370–415 рр. н. е.) Гіпатія Александрійська була першою відомою жінкою-математиком, яка займалася науковими дослідженнями та викладала в Александрійській школі. Вона вивчала алгебру, геометрію та астрономію, а також вдосконалила астролябію – пристрій, який використовувався для астрономічних вимірювань. Гіпатія також написала коментарі до творів Птолемея і Діофанта, які суттєво вплинули на подальший розвиток математики. Її наукова діяльність і популярність викликали заздрість та ненависть релігійних фанатиків, і вона була жорстоко вбита, а її праці – знищені.

Софі Жермен (1776–1831) Софі Жермен захопилася математикою у дитинстві, але оскільки жінкам у той час було заборонено навчатися в університетах, вона самостійно вивчала наукові праці та листувалася з видатними математиками свого часу. Вона зробила значний внесок у теорію чисел і механіку, зокрема у вивчення поведінки еластичних матеріалів. Її роботи стали основою для сучасних досліджень у сфері будівництва та інженерії.

Ада Лавлейс (1815–1852) Ада Лавлейс була першою людиною, яка розробила алгоритм для обчислювальної машини. Вона працювала з Чарльзом Беббіджем над його аналітичною машиною та передбачила, що в майбутньому комп'ютери можуть використовуватися не лише для обчислень, а й для роботи з текстами, музикою та графікою. Її роботи заклали основи сучасного програмування, а її алгоритми стали прототипами сучасних комп'ютерних програм.

Марія Склодовська-Кюри (1867–1934) Марія Кюри була першою жінкою, яка отримала Нобелівську премію, і єдиною людиною, яка отримала цю нагороду у двох різних дисциплінах – фізиці та хімії. Вона відкрила радіоактивні елементи полоній і радій, що стало основою для розвитку ядерної фізики. Її відкриття сприяли створенню рентгенівських апаратів, а також радіотерапії для лікування онкологічних захворювань.

Емі Нетер (1882–1935) Емі Нетер була німецькою математичкою, яка зробила прорив у теорії алгебри та математичної фізики. Її теорема, що встановлює зв'язок між симетріями фізичних законів і законами збереження, є одним із ключових принципів сучасної теоретичної фізики.

Грейс Гоппер (1906–1992) Грейс Гоппер була піонеркою у сфері програмування. Вона розробила перший компілятор для комп'ютерних мов та брала участь у створенні мови програмування COBOL. Її робота стала основою для розвитку сучасного програмування та автоматизації коду.

Розалінд Франклін (1920–1958) Розалінд Франклін зробила ключове відкриття у вивченні структури ДНК, використовуючи метод рентгенівської кристалографії. Її фотографії молекул ДНК стали основою для моделі подвійної спіралі, яку пізніше представили Уотсон і Крик.

Виклики та перспективи для жінок у точних науках Попри значний прогрес у сфері гендерної рівності, жінки у науці досі стикаються з багатьма перешкодами.

Гендерні стереотипи та соціальні упередження досі впливають на вибір професії молодих дівчат. Крім того, жінки-науковиці меншою мірою представлені на керівних посадах, а їхні дослідження отримують менше фінансування. Ще однією проблемою є необхідність поєднувати наукову діяльність із сімейними обов'язками.

Проте існують позитивні тенденції. Сучасні ініціативи з популяризації науки серед дівчат, стипендії та гранти для жінок у STEM допомагають подолати бар'єри. Все більше наукових установ запроваджують політику гендерної рівності, що сприяє розширенню можливостей для жінок.

Висновки Роль жінок у розвитку точних наук є неоціненною, хоча історично вони стикалися з численними бар'єрами на шляху до визнання. Від античної Гіпатії Александрійської до сучасних лауреаток Нобелівської премії – жінки зробили фундаментальні відкриття, що суттєво вплинули на математику, фізику, хімію, біологію, інформатику та інші дисципліни. Завдяки їхнім науковим досягненням були відкриті нові хімічні елементи, розроблені алгоритми для обчислювальних машин, створені нові математичні теорії та здійснені прориви в медицині. Однак історично жінки часто не отримували належного визнання, а їхні імена залишалися у тіні чоловічих колег.

Попри значний прогрес у сфері гендерної рівності, жінки-науковиці продовжують стикатися з певними викликами. Гендерні стереотипи та дискримінація досі можуть стримувати дівчат від вибору кар'єри у STEM. Наприклад, існує поширене уявлення, що точні науки є «чоловічою» сферою, що впливає на вибір професійної траєкторії молодих дівчат. Крім того, у багатьох країнах жінки все ще недостатньо представлені на керівних наукових посадах. Вони складають лише невеликий відсоток професорів, керівників наукових інститутів та лабораторій, що обмежує їхній вплив на розвиток науки та освіти. Ще однією важливою проблемою є менший рівень фінансування досліджень, адже жінки-науковиці отримують менше грантів, що обмежує їхні можливості для проведення масштабних досліджень. Додатково, багато жінок стикаються з труднощами поєднання кар'єри та сім'ї, оскільки наукова діяльність вимагає значного часу і ресурсів, а підтримка жінок у цій сфері досі недостатня.

Разом із тим, сучасний світ відкриває нові можливості для жінок у науці. Освітні програми та міжнародні ініціативи активно заохочують дівчат до вивчення точних наук, а створення спеціальних грантів і стипендій сприяє збільшенню кількості жінок у науковій сфері. Зокрема, в останні десятиліття все більше університетів та наукових центрів впроваджують гендерно-інклюзивні політики, спрямовані на підтримку жінок у науці. Крім того, важливим фактором є популяризація жіночих досягнень у науці через книги, фільми, виставки та конференції, що сприяє зміні суспільних уявлень та руйнуванню стереотипів.

Жінки завжди були і залишаються рушійною силою наукового прогресу. Їхні досягнення та внесок у розвиток точних наук не лише змінили світ, а й формують майбутнє людства. Тому одним із ключових завдань для сучасного суспільства

є створення рівних можливостей для всіх, незалежно від статі. Забезпечення гендерної рівності у сфері науки не лише справедливо, а й сприятиме подальшому науково-технічному прогресу.

Важливо заохочувати дівчат до вивчення точних наук через освітні програми та наукові конкурси, забезпечувати рівний доступ до наукових ресурсів, фінансування та можливостей для жінок-науковиць, популяризувати досягнення жінок у науці через мас-медіа, книги, конференції та виставки, а також сприяти рівному розподілу можливостей у наукових установах, університетах та лабораторіях. Лише спільними зусиллями можна досягти справжньої рівності у науці та дати можливість кожному талановитому науковцю реалізувати свій потенціал, незалежно від статі.

Перелік посилань

Ігнатофські, Р. (2021). *Жінки в науці. 50 безстрашних першопрохідниць, що змінили світ*. Вівсянка, рр. 128.

Визначник Вронського (вронськiан)

А. Ю. Шумлянський¹, Л. Б. Федорова¹

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

fedova.lb@gmail.com

Анотація

Ця доповідь присвячена визначнику Вронського (вронськiану), вона включає в себе такі аспекти: швидке знайомство з ученим, пояснення явища «вронськiан», доведення його недосконалості.

Ключові слова: Юзеф Вронський; Вронськiан; Контрприклад; Висновок.

Юзеф Вронський



Юзеф Гоене-Вронський (*Józef Maria Hoene-Wroński*, 1776–1853) — польський учений першої половини **XIX століття**, сферами інтересів якого були **вища математика** та **історія філософії**. Ці науки він поїхав вивчати до Німеччини після участі в бойових діях під час захисту Варшави в 1794 році в якості офіцера артилерії. Його ідеї в галузі математики були досить проривними для того часу, і навіть такий відомий учений як **Жозеф Лагранж** був тієї думки, що **теорії Вронського** можуть зробити **переворот у науці**, але через його складний характер, схильність до містицизму та складні формулювання в його роботах

наукові досягнення Юзефа були непомічені його сучасниками. Але після смерті Вронського в другій половині XIX століття було виявлено, що йому належить авторство значної кількості методів і деяких тверджень, які на той час були заново відкриті іншими математиками. Одним з **найважливіших** його **досягнень**, яке викарбувало його прізвище в сучасній теорії математичного аналізу, є **визначник Вронського** (*вронськiан*).

Визначник Вронського (вронськіан)

Так як авторство більшості досягнень Вронського було розкрито після смерті ученого, то, як наслідок, одне з найважливіших його математичних відкриттів отримало свою назву не від самого автора, а **назву було запропоновано шотландським ученим Томасом Муїром** (*Thomas Patterson Brown Muir, 1844-1934*) у 1882 році в його монографії про визначники.

Означення. Визначник Вронського (*вронськіан*) (*класичний*) — це визначник квадратної матриці (зазвичай позначається **W**), яка складається з двох або більше функцій (перший рядок матриці) та їх похідних (інші рядки матриці) та має такий вигляд:

$$\mathbf{W}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \text{ де } \mathbf{n} - \text{це}$$

кількість функцій.

Узагальнений вронськіан[Gatto, Scherbak] — це адаптована версія класичного визначення для роботи з функціями декількох змінних, диференціальних рівнянь з частинними похідними або багатовимірними поліномами. Головною відмінністю узагальненого поняття від класичного є заміна в матриці послідовних похідних за x на диференціальні оператори (частинних похідних чи інші). Зазвичай таку матрицю позначають як **M**(x), та вона має наступний вигляд:

$$\mathbf{M}(x) = \begin{pmatrix} D_0(f_1) & D_0(f_2) & \dots & D_0(f_n) \\ D_1(f_1) & D_1(f_2) & \dots & D_1(f_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n-1}(f_1) & D_{n-1}(f_2) & \dots & D_{n-1}(f_n) \end{pmatrix}, \text{ де } \mathbf{n} - \text{це кількість функцій, а } \mathbf{D}_{n-1}(\mathbf{f}_n) - \text{диференціальний оператор.}$$

Наприклад, для диференційного оператора частинних похідних **D** _{$\mathbf{n}-1$} (**f** _{$\mathbf{n}$}) прийме наступний вигляд:

$$\mathbf{D}_i(\mathbf{f}_j) = \sum_{|\alpha| \leq i} a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} f_j}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \text{ де } \alpha - \text{це індекс, а } \mathbf{a}_\alpha - \text{сталі.}$$

А сам узагальнений вронськіан — це визначник матриці **M**(x):

$$\mathbf{W}(f_1, \dots, f_n)(x) = \det(\mathbf{M}(x)).$$

Також **вронськіан** можна загалом використовувати для **лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР) $\mathbf{n}$ -го порядку**. Якщо відомі $\mathbf{n} - 1$ його розв'язків, то останній можна знайти за допомогою цього визначника.

Приклад 1. Для двох рівнянь другого порядку у формі:

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$$

Є дійсними наступні вирази:

$$W' + g(x)W = 0 \text{ або } W = C e^{-\int g(x) dx}, \text{ де } \mathbf{W}(y_1, y_2)(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1', \\ \text{а } \mathbf{W}'(y_1, y_2)(x) = g(x)W(x).$$

Контрприклад

Вронськіан використовується для аналізу функцій на лінійну залежність між собою, а саме якщо $\mathbf{W} \neq 0$, то **функції є лінійно незалежними**. Також він має ключове значення для **дослідження** лінійних зв'язків у розв'язках одного й того самого **ЛОДР** з неперервними коефіцієнтами. У такому випадку виконуються **базові твердження**:

- Якщо $\mathbf{W} \neq 0$ у деякій точці, то набір розв'язків на відповідному інтервалі лінійно незалежний;

- Якщо $\mathbf{W} = 0$, то розв'язки лінійно залежні.

Проте для довільних функцій (які необов'язково є розв'язками ЛОДР) існують контрприклад, коли тотожний нуль Вронськіана не означає їх лінійної залежності.

Приклад 2. Функції з модулем. [Wirkus, Swift]

Нехай задано дві функції, які потрібно дослідити на лінійну залежність:

$$\mathbf{f}_1(x) = x^3, \quad \mathbf{f}_2(x) = |x|^3$$

Застосуємо вронськіан:

$$\mathbf{W}(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = x^3 \frac{d}{dx}(|x|^3) - 3x^2 |x|^3.$$

Через $|x|^3$ маємо два випадки:

1. Для $x > 0$: $|x|^3 = x^3$, $\frac{d}{dx}(|x|^3) = 3x^2$, тоді вронськіан дорівнює:

$$\mathbf{W}_1(f_1, f_2)(x) = x^3 \cdot 3x^2 - 3x^2 \cdot x^3 = 0.$$

2. Для $x < 0$: $|x|^3 = -x^3$, $\frac{d}{dx}(|x|^3) = -3x^2$, тоді вронськіан дорівнює:

$$\mathbf{W}_2(f_1, f_2)(x) = x^3 \cdot (-3x^2) - 3x^2 (-x^3) = 0.$$

Отже, вронськіан тотожно дорівнює нулю на обох інтервалах, що повинно було б свідчити, що функції є лінійно залежними.

Перевірка:

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 |x|^3 = 0$$

Знову маємо розгалуження розв'язків:

1. Для $x > 0$: $|x|^3 = x^3$:

$$\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^3 = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) x^3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

2. Для $x < 0$: $|x|^3 = -x^3$:

$$\alpha_1 x^3 - \alpha_2 x^3 = 0$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) x^3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Отже, значення коефіцієнтів відрізняються на множник -1 , з чого випливає, що єдиним випадком, коли виконується умова $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = 0$, є $a_1 = a_2 = 0$, що свідчить про лінійну незалежність функцій.

Приклад 3. Кусково-задані функції. [Wirkus, Swift]

$$f_1(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Як підсумок, Вронськіан не є універсальним індикатором лінійної залежності для будь-яких функцій. Його визначна властивість залишається справедливою у чітко визначених умовах, зокрема коли йдеться про сімейство розв'язків ЛОДР (з неперервними коефіцієнтами). Якщо ж умови виходять за ці рамки, слід бути обережним: нульове значення Вронськіана не гарантує, що функції лінійно залежні.

Висновок

Отже, визначник Вронського (Вронськіан) є серйозним інструментом у теорії лінійних диференціальних рівнянь, дозволяючи просто й ефективно перевіряти лінійну незалежність (або залежність) розв'язків. Завдяки властивостям Вронськіана можна:

- Оцінювати повноту системи розв'язків для ЛОДР n -го порядку з неперервними коефіцієнтами;
- Знаходити невідомі розв'язки, якщо вже відомо $n - 1$ незалежних розв'язків;
- Застосовувати у фізичних задачах: при моделюванні коливальних, хвильових, електричних процесів часто достатньо одного-двох обчислень Вронськіана, щоб переконатися в правильності побудованих фундаментальних систем розв'язків.

Також узагальнене поняття Вронськіана використовується й в алгебраїчній геометрії та теорії чисел. Зокрема, Теорема Рота (одна з фундаментальних у діофантовій апроксимації) спирається на результат про «узагальнені Вронськіани»: якщо всі вони тотожно дорівнюють нулю для певного набору поліномів, то ці поліноми є лінійно залежними.

Отож, Визначник Вронського (вронськіан) є важливим інструментом не лише в теорії звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), а й у багатьох сучасних розділах математичного аналізу та суміжних сферах.

Перелік посилань

Gatto, L., Scherbak, I. (2009). On Generalized Wronskians. *PDF*: <https://www.impan.pl/~pragacz/GattoScherbak.pdf>

Wirkus, S., Swift, R. (2006). *A course in ordinary differential equations*.