

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

До захисту допущено:

«На правах рукопису»

Завідувач кафедри

УДК 517.521.7+517.521.8

_____ Олег КЛЕСОВ

«_____» травень 2026 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Побудова та аналіз методу підсумовування
рядів, розбіжних в класичному сенсі»

Виконав:

студент II курсу, групи ОМ–41мн

Чаус Денис Анатолійович _____

Науковий керівник:

Кандидат фізико-математичних наук

Сиротенко Антон Володимирович _____

Рецензент:

Кандидат фізико-математичних наук

Гал'як Ігор Васильович _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.

Студент _____

Київ 2026

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«_____» травень 2026 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Чаусу Денису Анатолійовичу

1. Тема дисертації «Побудова та аналіз методу підсумовування рядів, розбіжних в класичному сенсі», науковий керівник дисертації Сиротенко Антон Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «31» березня 2026 р. №1340-с
2. Терміни подання студентом дисертації 15 травня 2026 року
3. Об'єктом дослідження є спосіб підсумовування рядів.
4. Предметом дослідження є метод підсумовування рядів, який може підсумувати ряди, розбіжні в класичному сенсі.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 - (а) Вивести формулу для підсумовування розбіжних в класичному сенсі рядів.

- (б) Знайти еквівалентні вигляди запису виведеної формули.
 - (в) Проаналізувати виконання властивостей лінійності, стабільності і регулярності виведеної формули.
 - (г) Знайти зв'язок виведеної формули з іншими існуючими методами підсумовування рядів.
 - (д) Узагальнити виведений метод підсумовування на добутки і інтеграли.
 - (е) Навести приклади, де доцільно використовувати виведену формулу.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 20 слайдів.
7. Орієнтовний перелік публікацій:
- (а) Тези доповіді XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків, Київ, 7 травня 2025 р.
 - (б) Тези доповіді XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків, Київ, 7 травня 2026 р.
8. Дата видачі завдання 3 лютого 2026 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Терміни виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з темою дослідження, консультації з науковим керівником	03.02.2026– 08.02.2026	Виконано
2	Виведення формули та її еквівалентних форм	09.02.2026– 22.03.2026	Виконано
3	Доведення властивостей лінійності, стабільності, регулярності і пошук Тауберової теореми	23.02.2026– 08.03.2026	Виконано
4	Пошук зв'язків з іншими методами підсумовування	09.03.2026– 22.03.2026	Виконано
5	Узагальнення формули на добутки та інтеграли	23.03.2026– 29.03.2026	Виконано
6	Дослідження впливу формули на феномен Гіббса	30.03.2026– 05.04.2026	Виконано
7	Дослідження можливостей використання для пошуку хороших ядер	06.04.2026– 26.04.2026	Виконано
8	Оформлення і внесення правок	27.04.2026– 03.05.2026	Виконано
9	Підготовка презентації та доповіді	04.05.2026– 15.05.2026	Виконано

Студент

Денис ЧАУС

Науковий керівник

АНТОН СИРОТЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація: 53 сторінки, 9 першоджерел, 22 слайди презентації. Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновку та списку використаних джерел.

У дисертаційній роботі показано виведення формули, здатної підсумувати ряди, які розбіжні в класичному сенсі. Особлива увага приділена узагальненням методу і наочним прикладам їх використання.

У першому розділі продемонстровано спосіб отримання методу і його еквівалентних форм. Також доводяться важливі властивості підсумовуючих функцій: лінійність, стабільність і регулярність. А також знайдені Тауберові теореми.

У другому розділі показаний зв'язок з підсумовуваннями за Чезаро, логарифмічним та зваженим середнім підсумовуваннями.

У третьому розділі наведено різні узагальнення методу: ітеративне, з використанням різних спадних допоміжних послідовностей, узагальнення на добутки, узагальнення на інтеграли.

У четвертому розділі наведено приклади використання методу: його вплив на феномен Гіббса і його використання при пошуку хороших ядер.

Ключові слова: підсумовуюча функція, регуляризація, числовий ряд, перетворення Фур'є.

Abstract

Master's Thesis: 53 pages, 9 primary sources, 22 presentation slides. The thesis consists of an introduction, four chapters, a conclusion, and a list of references.

The dissertation presents the derivation of a formula capable of summing series that are divergent in the classical sense. Particular attention is given to generalizations of the method and to illustrative examples of their application.

Chapter One demonstrates a way of obtaining the method and its equivalent forms. Important properties of summation functions are also proved: linearity, stability, and regularity. In addition, a Tauberian theorem is established.

Chapter Two demonstrates the connection with Cesàro summation, logarithmic summation, and weighted mean summation methods.

Chapter Three presents various generalizations of the method: iterative generalization, generalization using different decreasing auxiliary sequences, generalization to products, and generalization to integrals.

Chapter Four provides examples of applications of the method, including its influence on the Gibbs phenomenon and its use in finding good kernels.

Keywords: summation function, regularization, series, Fourier transform.

Зміст

1	Формулювання методу	11
1.1	Передісторія	11
1.2	Задання методу і еквівалентних форм	16
1.3	Доведення важливих властивостей	20
1.4	Тауберові теореми	26
2	Порівняння з іншими методами	28
2.1	Зв'язок з підсумовуванням Чезаро	28
2.2	Зв'язок з логарифмічним підсумовуванням	30
2.3	Зв'язок зі зваженим середнім підсумовуванням	30
3	Узагальнення ідеї	33
3.1	Узагальнення через ітерації	33
3.2	Узагальнення на нескінченні добутки	39
3.3	Узагальнення на інтеграли	41
4	Використання	44
4.1	Феномен Гіббса	44
4.2	Узагальнення ядра Феєра	47

Вступ

Проблема підсумовування рядів посідає важливе місце у математичному аналізі та його численних застосуваннях. У класичному підході, що бере свій початок від робіт Ньютона, Коші та інших видатних математиків XVII-XIX століть, сума ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

визначається як границя послідовності часткових сум:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N, \quad \text{де} \quad S_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Якщо така границя існує і скінченна, ряд називають збіжним в класичному сенсі, і його сума вважається рівною цьому значенню. Однак на практиці часто трапляються ряди, для яких границя часткових сум або не існує, або нескінченна, попри те, що вони виникають у цілком природних математичних чи фізичних задачах.

Типовими прикладами є:

- ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, відомий як ряд Гранді,
- сума натуральних чисел $\sum_{n=1}^{\infty} n$,
- ряди, що з'являються у розкладі функцій у ряди Фур'є, особливо в точках розриву,
- ряди в квантовій теорії поля, де часто зустрічаються розбіжні степеневі ряди.

Незадовільність класичного підходу у таких випадках спонукала математиків до пошуків нових методів, здатних узагальнити поняття суми ряду. Так з'явилась ціла низка методів регуляризації та узагальненого підсумовування. Одні з найвідоміших:

- Підсумовування за Чезаро, запропоноване Ернесто Чезаро наприкінці XIX століття, яке полягає у розгляді середніх значень часткових сум. Наприклад, для ряду Гранді цей метод дає результат $\frac{1}{2}$. Формула методу наступна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{N},$$

- Підсумовування за Абелем, яке полягає у розгляді степеновго ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ і переході до границі $z \rightarrow 1-$. Цей метод часто використовується в теорії аналітичних функцій. Формула методу наступна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{z \rightarrow 1-} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n z^n,$$

- інші методи такі як методи Бореля, Ейлера, Ньорлунда, Діріхле і багато інших.

Поява різних методів підсумовування рядів відображає глибинну ідею про те, що класична границя часткових сум — це лише один з можливих способів “інтерпретації” нескінченного процесу.

Доречно провести аналогію з інтегральним численням. Класичний інтеграл Рімана дозволяє інтегрувати широке коло функцій, але не всі з них, наприклад:

$$\int_{[1;2]/\mathbb{Q}} x^2 dx.$$

Однак з таким інтегралом вже справляється інтеграл Лебега.

Подібно до того, як інтеграл Лебега справляється з ширшим класом функцій ніж інтеграл Рімана, так і підсумовування за Чезаро справляється з ширшим класом рядів ніж класичний метод.

У випадку класичного підсумовування можуть виникнути дві принци-

пово різні проблеми:

- ряд може розбігатись до нескінченності, коли часткові суми необмежено зростають чи спадають, наприклад, як у гармонічному ряді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,
- ряд може мати осцилюючий характер, коли часткові суми залишаються обмеженими, але не мають границі, наприклад, як у ряді $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$.

Метою цієї роботи є продемонструвати і дослідити знайдений авторами метод, який може впоратися з описаною вище другою проблемою у підсумовуванні ряду. Підхід, що буде описаний в наступних розділах, дозволяє “виловити” усереднене або “узгоджене” значення, яке відображає головну тенденцію часткових сум, навіть якщо точна границя відсутня. Завдяки цьому метод відкриває нові можливості для аналізу осцилюючих рядів, що мають важливе застосування у теорії Фур’є, спектральному аналізі та інших розділах математики.

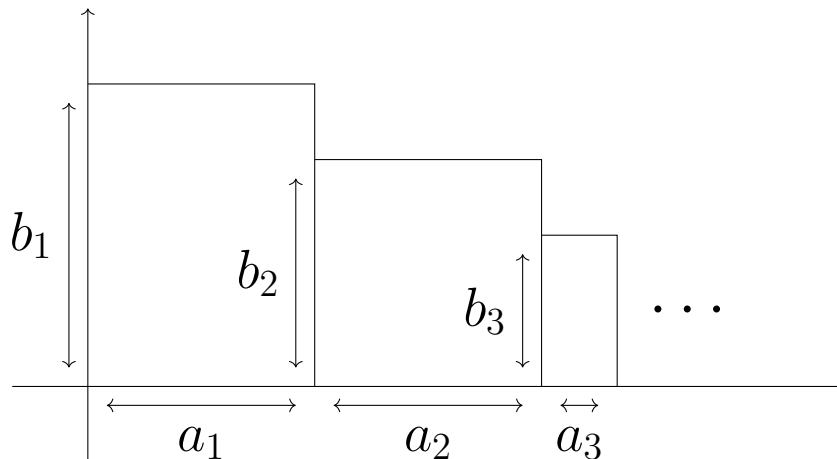
1 Формулювання методу

1.1 Передісторія

Насправді першочерговою ідеєю не було створення нового методу підсумовування. Ідея виникла з намагання дослідити ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Метою було представити цей ряд у вигляді стрибкової функції, де кожен доданок представляється як площа прямокутника з ширинами a_n вздовж Ox та висотами b_n вздовж Oy :



Якимось методом (на момент виникнення ідеї про такі деталі ніхто не задумувався) планувалось отримати функцію, яка б описувала цей графік. А потім, отримавши функцію, планувалось далі знаходити площі обертання, об'єми і так далі.

Тобто першочерговою ідеєю було отримати якийсь зв'язок між рядами вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k b_n^m,$$

різні вигляди яких і виникають при пошуку площі чи об'єму обертання навколо осей.

Власне, функцію вирішено було знайти за допомогою перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned}
 A(w) &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{a_1} b_1 \cos(wt) dt + \int_{a_1}^{a_1+a_2} b_2 \cos(wt) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{a_1+a_2}^{a_1+a_2+a_3} b_3 \cos(wt) dt + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{w\pi} \left(b_1 (\sin(a_1 w) - \sin(0)) + b_2 (\sin((a_1 + a_2)w) - \sin(a_1 w)) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{w\pi} \left((b_1 - b_2) \sin(wa_1) + (b_2 - b_3) \sin(w(a_1 + a_2)) + \right. \\
 &\quad \left. + (b_3 - b_4) \sin(w(a_1 + a_2 + a_3)) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 B(w) &= \frac{1}{w\pi} \left(b_1 - (b_1 - b_2) \sin(wa_1) - (b_2 - b_3) \sin(w(a_1 + a_2)) - \right. \\
 &\quad \left. - (b_3 - b_4) \sin(w(a_1 + a_2 + a_3)) - \dots \right).
 \end{aligned}$$

Разом маємо:

$$\begin{aligned}
 A(w) \cos(wx) + B(w) \sin(wx) &= \\
 &= \frac{1}{w\pi} \left(b_1 \sin(wx) + (b_1 - b_2) \sin(w(a_1 - x)) + \right. \\
 &\quad \left. + (b_2 - b_3) \sin(w(a_1 + a_2 - x)) + \dots \right).
 \end{aligned}$$

І, нарешті, отримуємо представлення нашої стрибкової функції $f(x)$ через наступний інтеграл:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{w\pi} \left(b_1 \sin(wx) - \sum_{n=1}^\infty (b_n - b_{n+1}) \sin\left(w\left(x - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right) \right) dw \\
 &= \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(b_1 \text{Si}(wx) - \sum_{n=1}^\infty (b_n - b_{n+1}) \text{Si}\left(w\left(x - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right) \right)
 \end{aligned}$$

Далі за планом треба було знайти площу обертання чи щось на кшталт того, щоб порівняти з результатом просто площу під кривою, яка, очевидно, дорівнює $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ і отримати з того якісь нові рівності, як було сказано раніше. Але пошук цієї ж площі через інтеграл (тобто просто площі під функцією, без ніяких поворотів чи подібного) дав неочікуваний результат:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \\
&= \int_0^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(b_1 \text{Si}(wx) - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \text{Si}\left(w\left(x - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right) \right) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{w \rightarrow \infty} \left(b_1 x \text{Si}(wx) + \frac{\cos(wx)}{w} - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \left(x - \sum_{k=1}^n a_k \right) \times \right. \\
&\quad \times \text{Si}\left(w\left(x - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \times \\
&\quad \times \left. \frac{\cos\left(w\left(x - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right)}{w} \right) \Big|_0^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{w \rightarrow \infty} \left(b_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Si}\left(w \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{k=1}^n a_k \right) \times \right. \\
&\quad \times \text{Si}\left(w\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right) - \frac{1}{\pi} \lim_{w \rightarrow \infty} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \times \right. \\
&\quad \times \left. \left(0 - \sum_{k=1}^n a_k \right) \text{Si}\left(w\left(0 - \sum_{k=1}^n a_k\right)\right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(b_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{k=1}^n a_k \right) \frac{\pi}{2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \left(0 + \sum_{k=1}^n a_k \right) \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k
\end{aligned}$$

Отже, маємо наступну рівність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \sum_{k=1}^n b_k$$

Рівність вийшла не тотожною, але, як виявилось, не беззмістовною, і саме ця рівність і її можливості в результаті спровокували написання цієї магістерської дисертації.

Нижче наведено деякі приклади використання отриманої вище рівності:

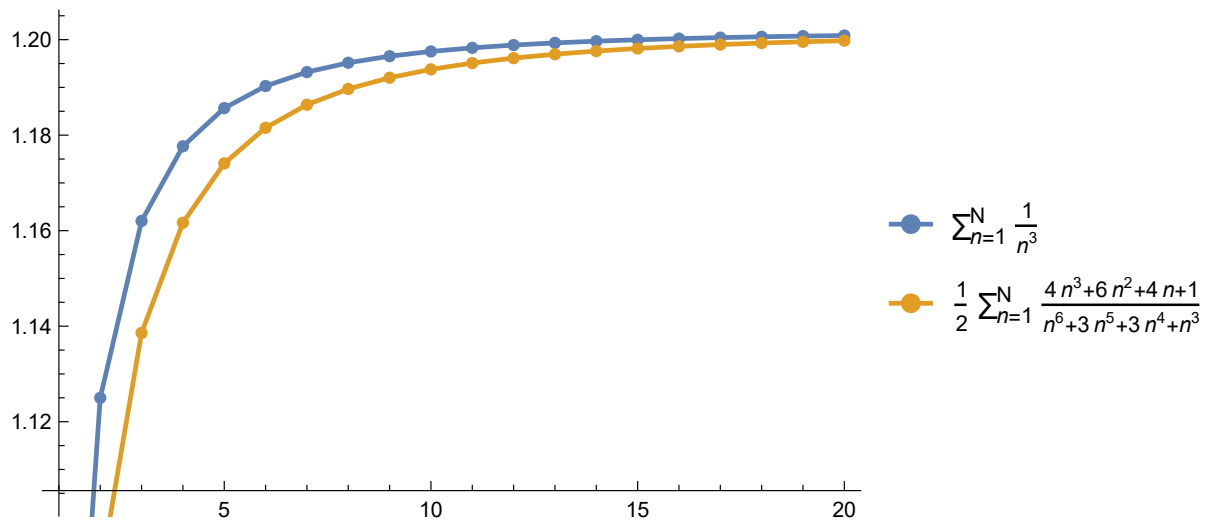
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4} \right) \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{n^6 + 3n^5 + 3n^4 + n^3} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cos^2(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos^2(k)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

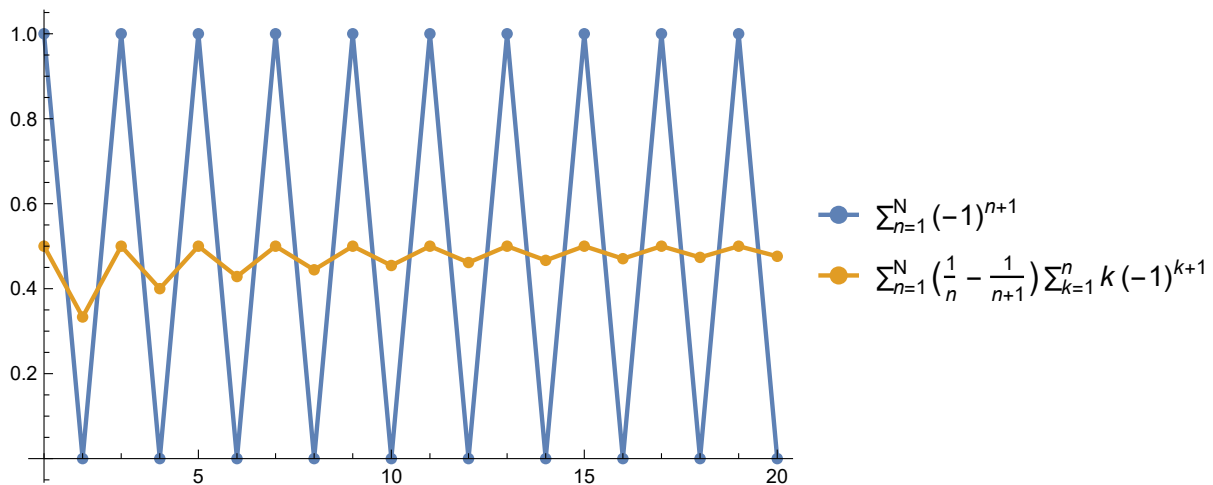
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n)}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n k \cos(k) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Перші 2 приклади демонструють, що формула може бути корисною як інструмент перетворення рядів в деякому сенсі — для вхідного ряду можна знайти інший ряд такий, що його сума буде дорівнювати сумі першого. Тут важливо зазначити, що це не просто переписаний ряд у іншому вигляді (як, наприклад, перетворення Абеля, на яке отримана формула дуже схожа візуально), це саме інший ряд, сума якого при спрямуванні до нескінченності буде дорівнювати сумі оригінального ряду.



Графік 1: демонстрація використання формули в якості перетворення рядів на прикладі рівності (1)

Однак більший інтерес викликають наступні 2 приклади, бо вони демонструють, що формула може підсумувати ті ряди, для яких класичне означення не дає результат.



Графік 2: демонстрація використання формули в якості методу підсумовування розбіжних в класичному сенсі рядів на прикладі рівності (2)

1.2 Задання методу і еквівалентних форм

Час переходити до формулювання самого методу.

Твердження 1. *Формула*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) A_n, \quad (3)$$

де $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ і b_n монотонно спадає до нуля, може поставити число у відповідність ширшому класу рядів, ніж класичний метод [8].

З міркувань, описаних в попередньому розділі, не впливало, що b_n має обов'язково спадати до нуля, однак без цієї умови формула веде себе непередбачувано (інколи працює, а інколи — ні). Тож для строгості у всіх подальших дослідженнях потрібно залишити таку умову. А те, що такої умови достатньо, буде продемонстровано трохи пізніше.

Формулу (3) можна переписати у іншому, більш зручному для подаль-

шого використання вигляді:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) A_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) A_n + b_{N+1} A_{N+1} - \right. \\ &\quad \left. - b_{N+1} A_{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{N+1} a_n b_n - b_{N+1} \sum_{n=1}^{N+1} a_n \right) \end{aligned} \quad (4)$$

або, якщо провести заміну $a_n = \frac{a_n}{b_n}$ (тобто вважати, що у нас ряд з самого початку був просто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а b_n обирається пізніше), то можна отримати парадоксальний на перший погляд результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} \right) \quad (5)$$

На моменті (4) використано перетворення Абеля. Для отриманої формули (5), звісно, b_n теж має спадати до нуля, в цьому плані нічого не змінилось.

Інтуїтивно, по вигляду формули (5) вже можна здогадатись як має працювати в теорії це підсумовування:

- якщо ряд і так збіжний в класичному сенсі, то другий доданок має прямувати до нуля,
- якщо ж ряд розбіжний в класичному сенсі, то ми хочемо, щоб він якось “погасив” розбіг, і в результаті отримати просто число.

Багато методів підсумовування названі матричними і подаються у, відповідно, матричній формі [1] [3] [4].

Ідея в тому, що вектор-стовпець часткових сум A_n ряду $\sum_{n=1}^N a_n$ множитья справа до деякої матриці, і в результаті очікується, що отриманий новий стовпець значень буде збіжним.

Так, наприклад, для класичного підсумовування матриця буде одиничною:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

при множенні до якої вектора-стовпця A_n нічого не зміниться:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Інший приклад: матриця для підсумовування по Чезаро виглядає наступним чином:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & \dots \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

і вона вже змінить вектор-стовпець A_n на новий. І очікується, що новий, змінений вектор-стовпець буде збіжним на відміну від оригінального.

Приклад множення матриці підсумовування Чезаро на вектор-стовпець

часткових сум ряду $\sum_{n=1}^N (-1)^{(n-1)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & \dots \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 2/3 \\ 1/2 \\ 3/5 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Власне, тепер, коли описано, що таке матричний вигляд, можна перейти до його пошуку для формули (5) (для цієї простіше).

Треба привести формулу (5), до вигляду

$$\sum_{n=1}^N s_n A_n,$$

де отримані s_n як раз і будуть коефіцієнтами матриці. Власне:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} &= A_N - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} \\ &= A_N - b_N \left(\frac{A_N}{b_N} - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) A_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{b_N}{b_{n+1}} - \frac{b_N}{b_n} \right) A_n \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, формула (5) в матричному вигляді подається наступним чином:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_2/b_2 - b_2/b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_3/b_2 - b_3/b_1 & b_3/b_3 - b_3/b_2 & 0 & 0 & \dots \\ b_4/b_2 - b_4/b_1 & b_4/b_3 - b_4/b_2 & b_4/b_4 - b_4/b_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

До речі, формулу (6) теж можна привести до гарного вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) A_n \quad (7)$$

і розцінювати як третій еквівалентний варіант до формул (3) і (5), який теж нам знадобиться трохи пізніше (b_n , звісно, все ще монотонно спадає до нуля).

1.3 Доведення важливих властивостей

Просто показати, що метод дав скінченний результат на якомусь прикладі, звісно, не достатньо. На практиці вимагається, щоб запропонований метод задовільняв три наступні властивості [1] [3]:

Властивість 1. Лінійність:

якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha A + \beta B$ при використанні методу.

Властивість 2. Стабільність:

якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, то і $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n = A$ при використанні методу.

Властивість 3. Регулярність:

якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ в класичному сенсі, то і новий метод має дати цей же результат.

Теорема 1.1. Для формули (5) виконуються властивості лінійності, стабільності і регулярності [8].

Доведення. Лінійність:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \alpha a_n - c_N \sum_{n=1}^N \frac{\alpha a_n}{c_n} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \beta b_n - c_N \sum_{n=1}^N \frac{\beta b_n}{c_n} = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\alpha a_n + \beta b_n) - c_N \sum_{n=1}^N \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{c_n}. \end{aligned}$$

□

Доведення. Стабільність:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N a_n - b_N \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{b_n} &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N a_n - b_N \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{b_n} + a_1 - b_N \frac{a_1}{b_1} - a_1 + b_N \frac{a_1}{b_1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} - a_1 + b_N \frac{a_1}{b_1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} - a_1. \end{aligned}$$

□

Властивості лінійності і стабільності довелись доволі просто і самі по собі є інтуїтивними і зрозумілими, до яких всі звикли. Справді, якби якась з цих властивостей не виконалась би, то вся теорія використання інших підсумовуючих функцій могла б виглядати сумнівною.

А от регулярність вже більш екзотична і цікава. Фактично, виконання цієї властивості для підсумовуючої функції каже нам “використовуй цю формулу і не бійся, що результат вийде парадоксальним”. Таке застосування формули буде продемонстровано в пізніших розділах, а поки що повертаємось до доведення.

Доведення. Регулярність:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} = A - \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n}.$$

А отже треба довести, що

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \cdot \frac{A_N}{b_N} + b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) A_n \quad (8)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(A + b_N \sum_{n=1}^X \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) A_n + b_N \sum_{n=X+1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) A_n \right) \quad (9)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(A + b_N \sum_{n=1}^X \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) C + b_N \sum_{n=X+1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) A \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} A + \frac{b_N}{b_1} C - \frac{b_N}{b_{X+1}} C + \frac{b_N}{b_{X+1}} A - \frac{b_N}{b_N} A$$

$$= \frac{b_N}{b_{X+1}} (A - C)$$

$$= 0.$$

На моменті (8) було використано перетворення Абеля.

На моменті (9) ряд розбивається на дві частини: від 1 до X і від $X+1$ до N . Тут X прямує до нескінченності, але не швидше ніж N (тобто так, щоб $\frac{b_N}{b_X}$ прямувало до нуля). Тоді перший ряд в (9) можна оцінити зверху і знизу, взявши найбільше і найменше A_n серед $n \in [1, \dots, X]$ (далі в нерівності показано лише оцінку зверху через C), а в другому ряді A_n приймає значення часткової суми не раніше за A_{X+1} , а значить, дорівнює A .

І далі все скорочується до нуля.

Обмеження знизу не продемонстровано, але міркування для нього аналогічні.

□

На тлі очевидних лінійності і стабільності доведення регулярності могло здатися вже трохи важкуватим, для повного розуміння не зайвим буде продемонструвати конкретний приклад:

Приклад 1. За приклад візьмемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ і $b_n = \frac{1}{n}$. Маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Тут треба довести, що другий доданок прямує до нуля. Звісно, це можна сказати одразу, бо гармонічні числа ведуть себе як логарифм, але ми на це поки що заплющимо очі, бо зараз на меті продемонструвати весь алгоритм, який був проведений в доведенні регулярності вище.

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (n - (n+1)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} (n - (n+1)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N (n - (n+1)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Знову ж таки, на моменті (10) можна скоротити $n - (n+1)$, але цього ми робити зараз не будемо, щоб проробити всі дії алгоритму вище.

Цікаво, що якби все ж таки спростили зараз, то другий доданок був би майже ідентичним підсумовуванню за Чезаро. Це насправді не випадковість і про це спостереження буде детальніше розказано в іншому розділі.

А поки знову повертаємось до доведення регулярності. Тепер нам залишилось оцінити зверху і знизу результат вище. У наступних нерівностях зверніть увагу на верхні індекси часткових сум, саме завдяки

ним і відбувається оцінка зверху і знизу. Власне, маємо:

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \left((n - (n+1)) \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^{N-1} \left((n - (n+1)) \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1} \frac{1}{k^2} \right) \right) \geq \\
& \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \left((n - (n+1)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^{N-1} \left((n - (n+1)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \right) \geq \\
& \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \left((n - (n+1)) \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{k^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^{N-1} \left((n - (n+1)) \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Спростуємо і отримуюємо, що

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} (1 - (\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1)) + \frac{1}{N} (\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1 - N) \frac{\pi^2}{6} \geq \\
& \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} (n - (n+1)) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{N} \sum_{n=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \geq \\
& \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} (1 - (\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1)) \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{N} (\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1 - N) \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Як бачимо, вираз обмежений і зверху, і знизу нулем, а значить регулярність виконалась.

Як вже було сказано, таке доведення вийшло дещо заплутаним.

Таке доведення було сформоване ще до того, як було знайдено фор-

мулу (7), а її перевага в тому, що вона представлена в матричній формі. Для матричних підсумовувань існує теорема Сільвермана-Тепліца [2] [3], яка стверджує, що матричний метод регулярний тоді і тільки тоді, коли:

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} s_{Nn} = 0$,
2. $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{Nn} = 1$,
3. $\sup_N \sum_{n=1}^{\infty} |s_{Nn}| < \infty$.

Теорема 1.2. *Формула (7) задовольняє умови теореми Сільвермана-Тепліца.*

Доведення. Перша умова:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_{Nn} = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) = 0$$

□

Доведення. Друга умова:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} s_{Nn} &= \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \left(\frac{1}{b_N} - \frac{1}{b_1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Доведення. Третя умова:

$$\begin{aligned} \sup_N \sum_{n=1}^{\infty} |s_{Nn}| &= \sup_N b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) \\ &= \sup_N b_N \left(\frac{1}{b_N} - \frac{1}{b_1} \right) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

□

1.4 Тауберові теореми

Трохи раніше була продемонстрована і описана властивість регулярності. В цій секції буде дещо схоже, але в зворотному напрямку.

Тауберові теореми — додаткова умова, при виконанні якої можна стверджувати, що якщо ряд збіжний за певним методом підсумовування, то він буде також збіжним і в класичному сенсі [1] [3].

Наприклад, Тауберова теорема для підсумовування за Чезаро — це умова, щоб член ряду a_n був о-маленьким від $\frac{1}{n}$. В такому випадку зі збіжності ряду за Чезаро також слідуватиме збіжність ряду в класичному сенсі.

Для формули (5) Тауберову теорему отримати дуже просто: достатньо покласти умову, що

$$b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n}$$

прямуватиме до нуля. В такому випадку від формули (5) залишиться лише границя часткових сум, що і є класичним методом.

Але це, по-перше, тривіально, а по-друге, малокорисно в реальному використанні, бо формула (5) вже передбачає підсумовування границі часткових сум, а значить збіжність/розбіжність ряду в класичному сенсі і так впливає при підрахунках.

Більш доречно буде знайти Тауберову теорему для оригінальної формули (3):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) A_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (b_n - b_{n+1}) A_n + b_N A_N - b_N A_N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n b_n - b_N A_N. \end{aligned}$$

Отже можемо сформулювати відповідну теорему.

Теорема 1.3. *Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний по формулі (3) і якщо виконується умова $b_N A_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збіжний і в класичному сенсі.*

Важливо наголосити що a_n в формулах (3) і (5) не однакоє і тому Тауберіві теореми вийшли різними. При виводі формули (5) з формули (3) була зроблена заміна $\frac{a_n}{b_n}$ на a_n . Якби такої заміни не було, то і отримані Тауберіві теореми для формул (3) і (5) співпали б.

2 Порівняння з іншими методами

2.1 Зв'язок з підсумовуванням Чезаро

В минулому розділі на моменті (10) було сказано, що могло з'явитись підсумовування за Чезаро. Насправді це не випадковість і цей розділ почнемо з того, що покажемо, що при деяких маніпуляціях з формулою (3) можна отримати точне підсумовування за Чезаро.

Підсумовування за Чезаро для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ визначається як границя середнього арифметичного часткових сум:

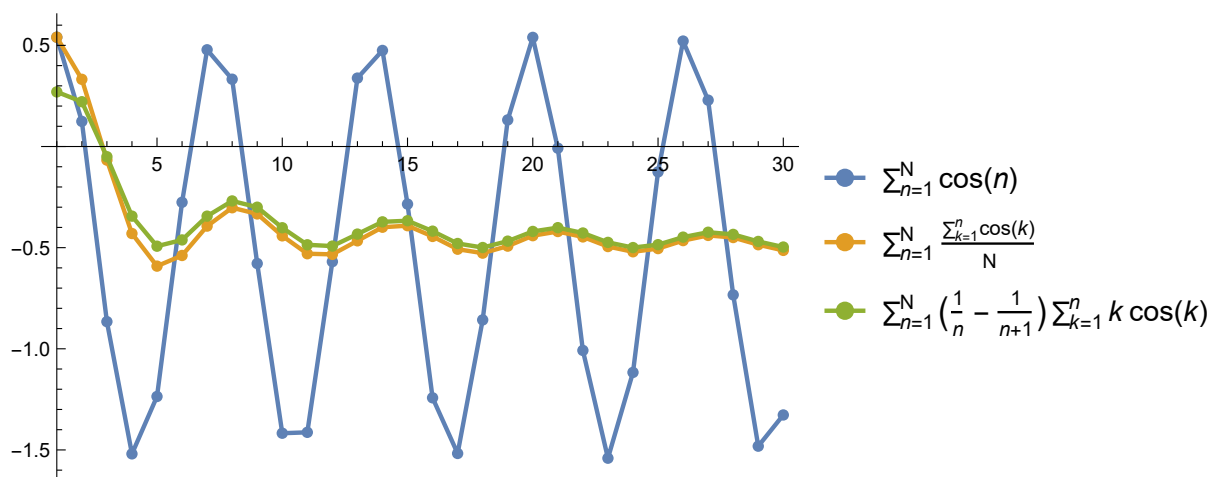
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n a_k.$$

Давайте для цього ж ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ застосуємо формулу (3), де візьмемо $\frac{1}{n}$ як спадний множник. Отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\sum_{k=1}^n k a_k}{n(n+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^1 k a_k}{1} - \frac{\sum_{k=1}^1 k a_k}{2} + \frac{\sum_{k=1}^2 k a_k}{2} - \frac{\sum_{k=1}^2 k a_k}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{\sum_{k=1}^N k a_k}{N} - \frac{\sum_{k=1}^N k a_k}{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^1 k a_k}{1} - \left(\frac{\sum_{k=1}^1 k a_k}{2} - \frac{\sum_{k=1}^2 k a_k}{2} \right) - \left(\frac{\sum_{k=1}^2 k a_k}{3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \dots - \frac{\sum_{k=1}^N k a_k}{N} \right) - \frac{\sum_{k=1}^N k a_k}{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} a_1 + a_2 + \dots + a_N - \frac{\sum_{k=1}^N k a_k}{N+1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(N+1)(a_1 + a_2 + \dots + a_N) - \sum_{k=1}^N k a_k}{N+1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

Звісно, хотілося б сказати, що підсумовування за Чезаро — частковий випадок формули (3), однак це буде трошки грубо через те, що формула (3) скоротилась не рівно до границі середнього арифметичного часткових сум, а ще з множником $\frac{N}{N+1}$. Тим не менш, це все одно демонструє, що формула (3) більш варіативна ніж підсумовування за Чезаро.

Додатково ще продемонструємо приклад для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$:



Графік 3: демонстрація подібності підсумовування за Чезаро і формули (3) з $b_n = \frac{1}{n}$ на прикладі ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$

Хронологічно, наведене вище доведення було знайдене до того, як було сформульовано формулу (7). Але саме з використанням формули (7) довести зв'язок простіше:

Нехай $b_n = \frac{1}{n}$. Тоді в формулі (7) маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}\right) A_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} A_n. \end{aligned}$$

Так, індекси, звісно, залишились зсунутими.

2.2 Зв'язок з логарифмічним підсумовуванням

Взагалі, формула (7) виявилась зручною для доведення зв'язку не тільки з підсумовуванням по Чезаро.

Відтак, якщо взяти заміну

$$b_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}},$$

то формула (7) вийде наступною:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) A_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) A_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k}} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n}{k+1} \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \approx \ln N$, $N-1$ в верхній межі підсумовування через спрямування до нескінченності можна замінити на N і по тій же причині можна замінити $\frac{1}{k+1}$ на $\frac{1}{k}$, то отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N} \sum_{k=1}^N \frac{A_n}{n},$$

що є логарифмічним підсумовуванням.

2.3 Зв'язок зі зваженим середнім підсумовуванням

Метод зваженого середнього підсумовування ґрунтується на використанні ваг утворених за допомогою допоміжної послідовності p_n .

Власне, матриця виглядає наступним чином:

$$\begin{pmatrix} p_1/P_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_1/P_2 & p_2/P_2 & 0 & 0 & \cdots \\ p_1/P_3 & p_2/P_3 & p_3/P_3 & 0 & \cdots \\ p_1/P_4 & p_2/P_4 & p_3/P_4 & p_4/P_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

або, у записі через ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{P_N} \sum_{n=1}^N p_n A_n$$

Формулу (7) можна легко звести до цього методу заміною $b_N = \frac{1}{P_N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} b_N \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} \right) A_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{P_N} \sum_{n=1}^{N-1} (P_{n+1} - P_n) A_n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{P_N} \sum_{n=1}^{N-1} p_{n+1} A_n \end{aligned}$$

Збіг не ідеальний (це було завчасно очевидно, якщо подивитись на головну діагональ матриць обох методів), однак структурно це те саме і отримана похибка нівелюється при спрямуванні N до нескінченності.

Тут варто зауважити, що метод в тому формулюванні, в якому дана формула (7) (з умовою на монотонно спадне b_n), буде частковим випадком методу зважених середніх (знову ж таки якщо не звертати увагу на зсунутість деяких індексів), бо монотонно спадними b_n не можна представити не додатне p_n , яке насправді допустиме для методу зважених середніх.

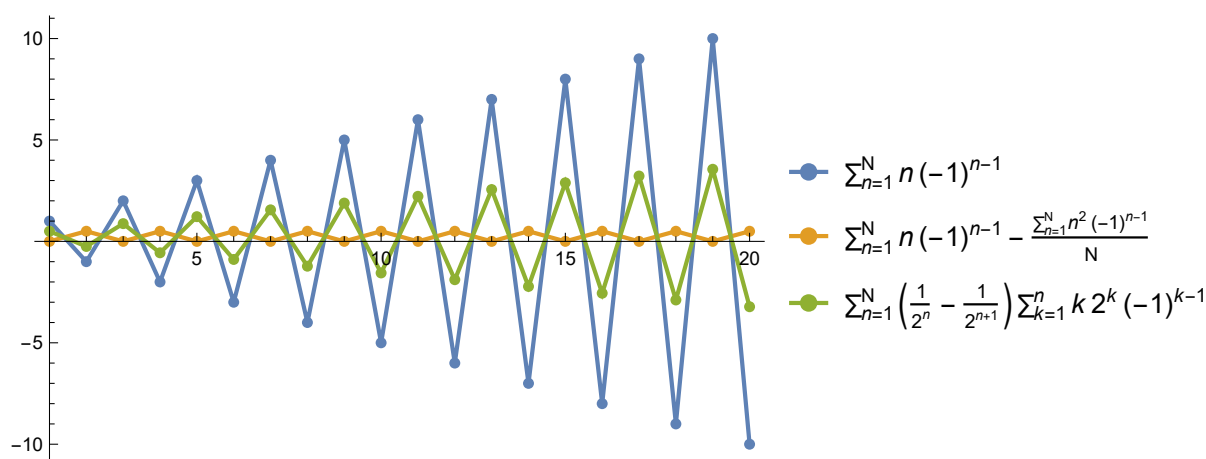
Це насправді натякає на те, що умову b_n можна покращити, але в даній роботі і надалі будуть розглядатись лише монотонно спадні до нуля b_n .

Взагалі, метод зважених середніх сформульований дуже універсально і від нього вже можна відштовхуватись при доведенні інших зв'язків. Тобто взяти вже відомий зв'язок підсумовування зваженими середніми з потрібним методом і адаптувати його так, щоб формулювання було не через p_n методу зважених середніх, а через b_n методу (7).

3 Узагальнення ідеї

3.1 Узагальнення через ітерації

Методи (3), (5) і (7) доволі варіативні через можливість вибору b_n , але не дуже ефективні в тому плані, що якщо ряд осцилює занадто сильно, то метод може не дати бажаний результат.



Графік 4: демонстрація занадто сильно осцилюючого ряду з різними формами і різними b_n

Але можна побачити, що темп розбігу після використання формул зменшився, а значить можна спробувати ітеративно продовжити використовувати формулу доки не отримати бажаний результат, очікуючи, що розбіг після деякої ітерації пропаде і ми отримаємо усереднене значення.

Ось як ідея ітеративного використання однієї і тієї ж формули виглядає на прикладі підсумовування за Чезаро:

Приклад 2. Подивимось на часткові суми для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$:

N	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	1	-2	3	-4	5	-6	7	...
A_n	1	-1	2	-2	3	-3	4	...
$\sum_{n=1}^N A_n$	1	0	2	0	3	0	4	...
$\sum_{n=1}^N A_n/N$	1	0	2/3	0	3/5	0	4/7	...

Як ми бачимо, на границі буде осциляція між значеннями 0 і 1/2, тобто підсумовування по Чезаро тут не справилось.

Однак можна задуматись от над чим: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ дає в результаті 1 чи 0, нас це не влаштовує і ми використовуємо метод Чезаро на послідовності результатів. Так от, чому б не використати цей же метод повторно на послідовності результатів $1/2$ і 0, яка виникла в останньому рядку (на границі) таблиці наведеної вище? Якщо це зробити, то вийде, що $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{4}$.

Цю ідею (ітеративно повторювати формулу скільки завгодно разів) можна використати на формулах (3), (5) і (7). Насправді, можна багато чого тут придумати беручи кожен раз різні спадні до нуля послідовності, але поки що обмежимося тим, що весь час буде одне і те саме b_n . Маємо таке узагальнення (3):

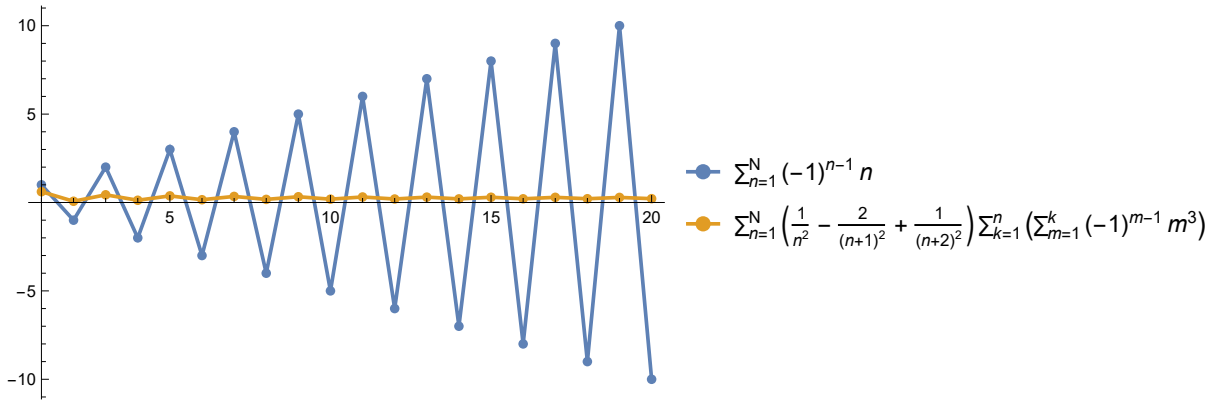
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})^{(k)} A_n^{(k)}, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} (b_n - b_{n+1})^{(1)} &= b_n - b_{n+1} \\ (b_n - b_{n+1})^{(2)} &= b_n - 2b_{n+1} + b_{n+2} \\ (b_n - b_{n+1})^{(3)} &= b_n - 3b_{n+1} + 3b_{n+2} - b_{n+3} \\ &\dots, \end{aligned}$$

яке дуже схоже на біном Ньютона і

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} &= \sum_{k=1}^n a_k \\ A_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m \\ A_n^{(3)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^m a_p \\ &\dots \end{aligned}$$



Графік 5: демонстрація двох ітерацій формули (3) на ряді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \text{ з } b_n = \frac{1}{n^2}$$

Це, мабуть, очевидно, але пару слів про лінійність, стабільність і регулярність все ж напишемо. Ось коротке доведення, що при ітерації вони нікуди не ділись:

Доведення. Візьмемо формулу (3) і розділимо її на дві суми:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) A_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n A_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} A_n.$$

На цей момент ми ніяк формулу (3) не міняли, а значить лінійність, стабільність і регулярність зберігаються. І нам нічого не забороняє розглядати два нові ряди як просто звичайні ряди і застосувати на них кожен окремо формулу (3), яка лінійна, стабільна і регулярна. Маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n A_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} A_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) A_n^{(2)} - \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_{n+2}) A_n^{(2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 2b_{n+1} + b_{n+2}) A_n^{(2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})^{(2)} A_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Для інших (k) міркування аналогічні. □

Формулу (5) теж можна ітеративно використати.

Доведення. Тут почнемо одразу з тих же дій, що були використані в доведенні вище:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n - b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} \right) - \left(b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} - b_N^2 \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n^2} \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n - 2b_N \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n} + b_N^2 \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{b_n^2}, \tag{12}
 \end{aligned}$$

що доводить лінійність, стабільність і регулярність. \square

Приємно, що загальний вигляд для (12) буде записаний красиво, а не як для (11), де довелося вводити нотації з (k) . Власне, ітеративно узагальнена формула (5) виглядає наступним чином:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{b_N}{b_n}\right)^k a_n, \tag{13}$$

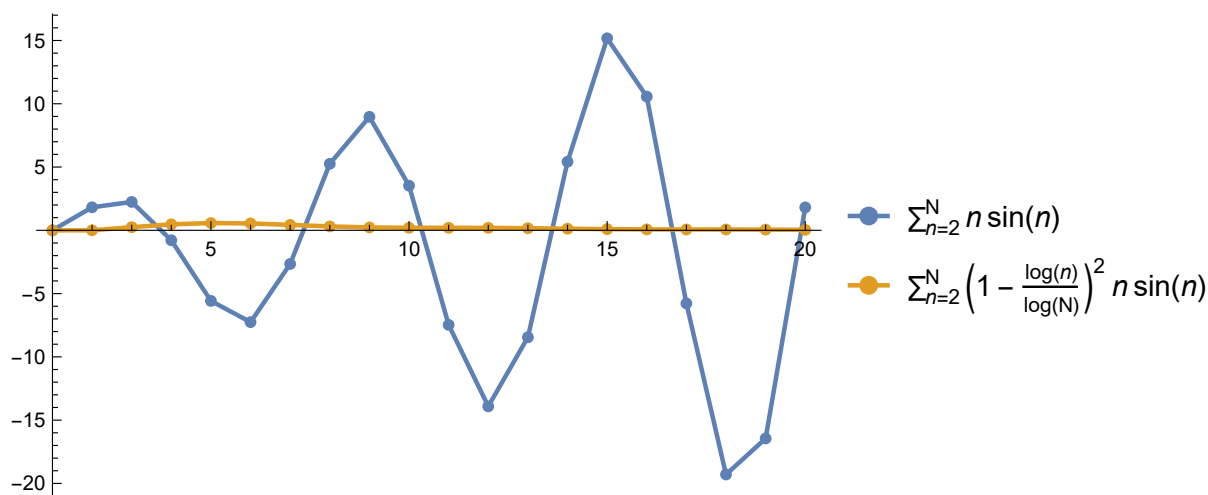
де при $k = 0$ вийде звичайна границя часткових сум, при $k = 1$ вийде формула (5), при $k = 2$ — подвійна формула (5) і так далі.

Взагалі, от в такому вигляді, де все об'єднано під один знак суми, можна легко пояснити як працює ця формула на словах.

Виходить, ми взяли наш вхідний ряд $\sum_{n=1}^N a_n$, і кожен його член помножили на деякий множник, який при малих n близький до одиниці, а при n біля N близький до нуля. При цьому що відбувається:

- якщо ряд і так збіжний (наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), то найбільший вклад в його суму дають саме перші доданки, а доданки ближче до кінця зобов'язані прямувати до нуля. В такому випадку множник $(1 - \frac{b_N}{b_n})$ не повпливає на суму, бо перші доданки він не псує, а на останні вже байдуже;

- якщо наша сума осцилює (наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$), то наш множник змусить цю осциляцію стухати ближче до кінця, бо ті доданки, які при класичному підсумовуванні і викликали осциляції, тепер будуть потихеньку зменшуватись ближче до кінця. Тобто стрибки часткової суми вверх/вниз будуть весь час зменшуватись, а значить сума ряду усередниться;
- якщо ряд розбігається до нескінченності (наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty} n$), то тут вже все складніше. Практика показує, що не виходить знайти такий множник, який би одночасно і не занадто сильно зменшував початкові доданки (щоб не втратити регулярність), і при цьому достатньо сильно “занулював” кінцеві, щоб “подавити” розбіжність ряду.



Графік 6: демонстрація двох ітерацій формули (5) на ряді $\sum_{n=2}^{\infty} n \sin n$ з $b_n = \frac{1}{\ln n}$

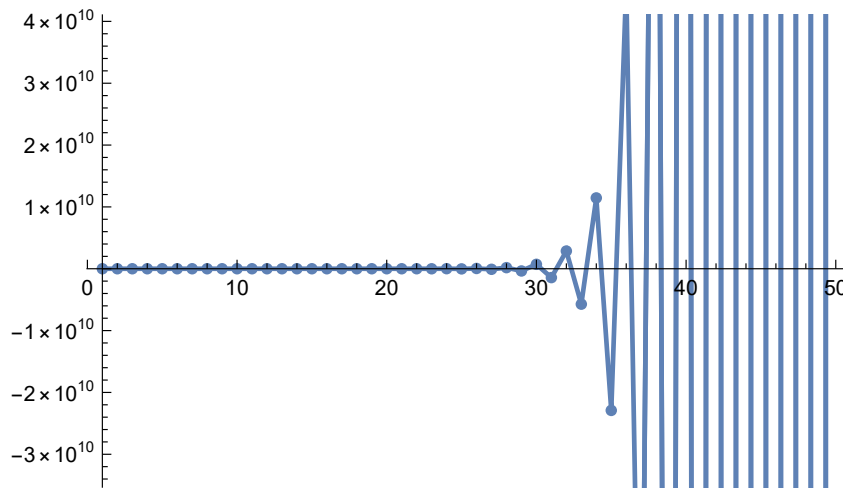
Спочатку планувалось, що будуть розглядатись ітеративні узагальнення з одним і тим же b_n , однак формула (13) занадто зручна для маніпуляцій з різними b_n щоб проігнорувти це.

Якщо бути точнішим, то легко в тому випадку, якщо розглядати метод не як усунення осциляцій через допоміжний ряд з b_n в формулі (5), а саме як використання повільно спадного множника, на чому було акцентовано увагу в поясненні формули (13). Тобто хочеться розглянути різні комбінації таких спадних множників.

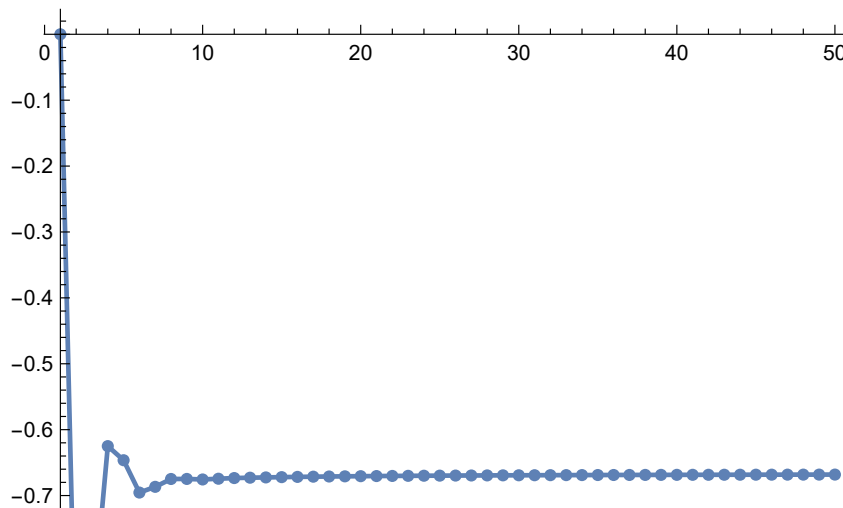
Так, дуже гарний результат показує формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right)^n a_n \quad (14)$$

Приклад 3. Приклад для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$. Цей ряд осцилює дуже швидко і з ним вже не справиться узагальнене підсумовування по Чезаро (C, k) , але формула (14) може.



Графік 7: дуже сильно осцилюючий графік ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$



Графік 8: той же ряд, але з використаною формулою (14)

3.2 Узагальнення на нескінченні добутки

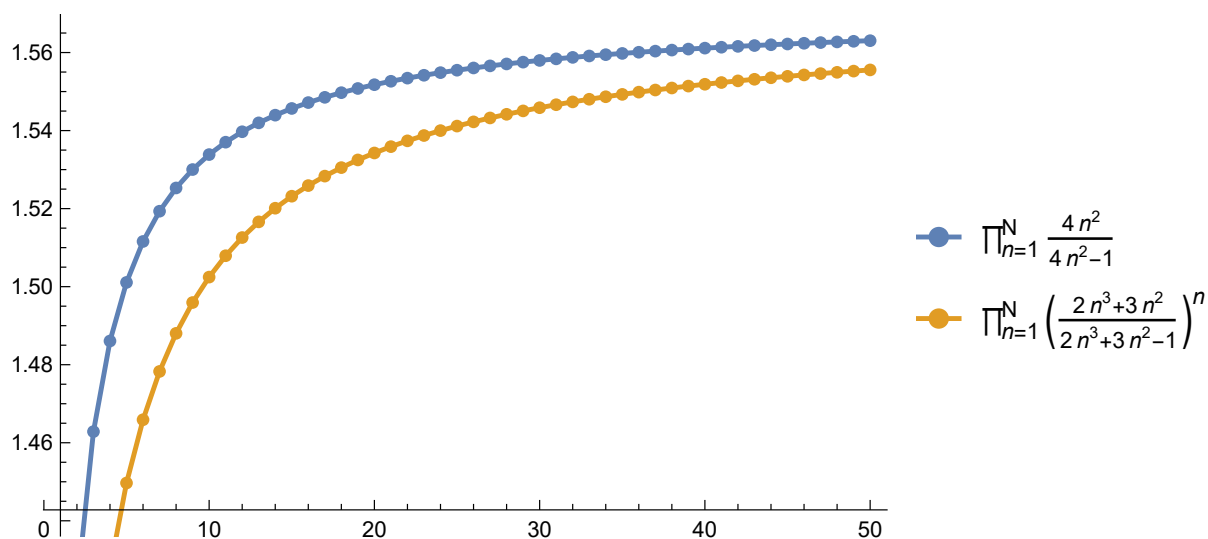
Не довго перебираючи варіанти можна також знайти аналог формули (3) для нескінченних добутків:

Твердження 2. Формула

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n^{a_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} \right)^{A_n}, \quad (15)$$

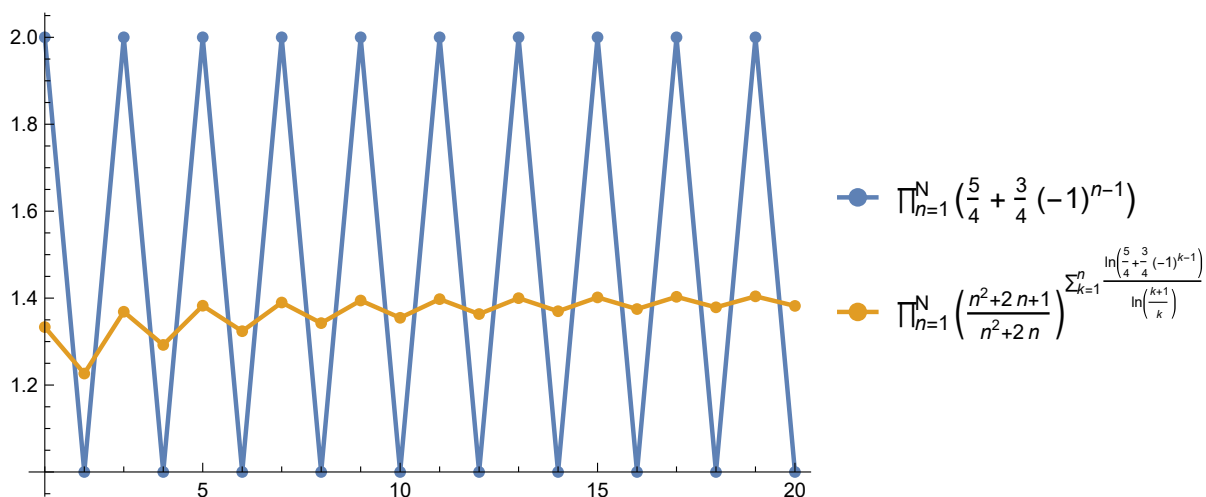
де $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ і b_n монотонно зростає до одиниці, може поставити число у відповідність ширшому класу добутків, ніж класичний метод.

Приклад 4. Перший приклад покаже, що можна використовувати формулу (15) для добутків, які сходяться і в класичному сенсі, але потенційно може бути ситуація, коли ряд легше буде знаходити в іншому вигляді. Власне, нижче приклад для $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$



Графік 9: демонстрація формули (15), де взято $a_n=1$

Приклад 5. Другий приклад покаже, що формула здатна присвоїти значення і такому добутку, для якого класичне визначення не дає результату. Приклад буде для $\prod_{n=1}^{\infty} (1.25 + 0.75(-1)^{n-1})$



Графік 10: демонстрація формули (15) на добутку, який розбіжний в класичному сенсі (взято $b_n = \frac{n+1}{n}$ і $a_n = \frac{\ln(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}(-1)^{n-1})}{\ln \frac{n+1}{n}}$).

Якщо проводити аналогію з сумами, то можна було б подумати, що в другому прикладі мало б вийти регуляризоване значення 1.5 (як середне результатів), однак по графіку бачимо, що воно прямує десь до 1.4 (якщо бути точним, то до $\sqrt{2}$). Насправді тут все узгоджено, якщо згадати як пов'язані добутки і суми:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1.25 + 0.75(-1)^{n-1}) &= S \\ \ln \prod_{n=1}^{\infty} (1.25 + 0.75(-1)^{n-1}) &= \ln S \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln (1.25 + 0.75(-1)^{n-1}) &= \ln S \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln 2 &= \ln S \\ \frac{\ln 2}{2} &= \ln S \\ \sqrt{2} &= S \end{aligned}$$

Крім того $\sqrt{2}$ — границя середнього геометричного часткових добутків.

3.3 Узагальнення на інтеграли

Для інтегралів буде показано 2 узагальнення — одне на основі формули (5) і одне на основі формули (3).

Почнемо з формули (5), тут буде все на поверхні, просто поміняти знак суми на знак інтеграла і все готово (воно і не дивно, інтеграл — це ж та сама сума).

Твердження 3. Формула

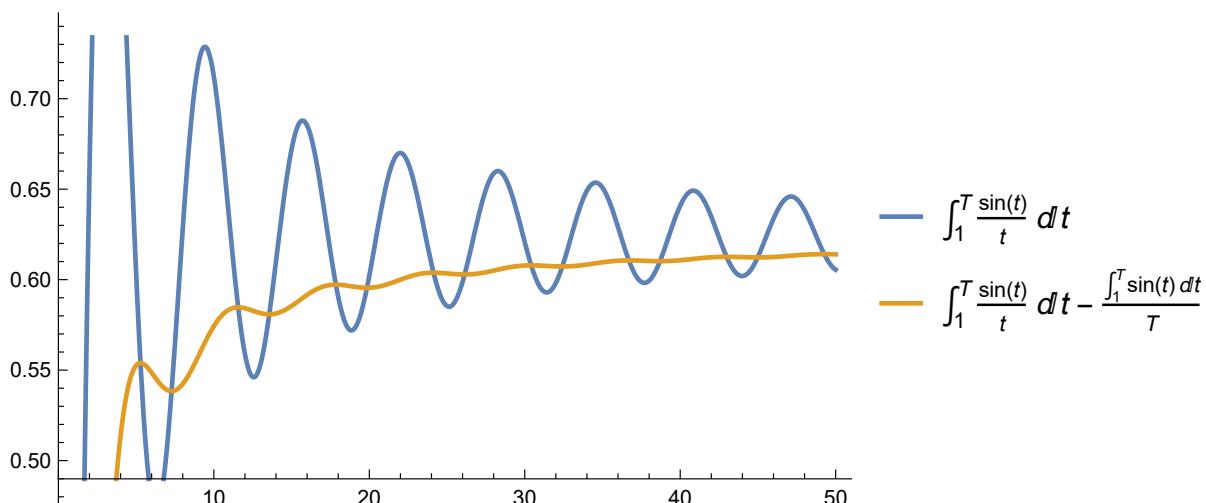
$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt - g(T) \int_0^T \frac{f(t)}{g(t)} dt, \quad (16)$$

де $g(t)$ монотонно спадає до нуля, може поставити число u відповідність ширшому класу функцій, ніж класичний метод.

Тут варто уточнити, що за базу тут взято інтеграл Рімана. Тобто запропонована вище формула допомагає шукати осцилюючі невласні інтеграли першого роду.

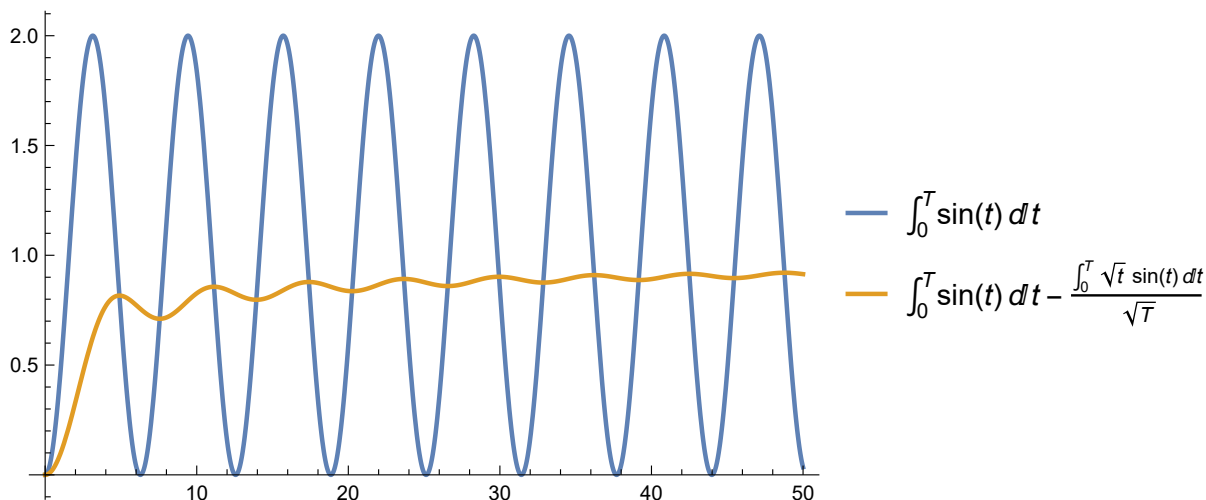
Як і для добутків, тут буде показано 2 приклади використання: коли формула застосовується і так до не проблемного інтегралу і коли до розбіжного інтегралу.

Приклад 6. Приклад для $\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ і $g(t) = \frac{1}{t}$



Графік 11: демонстрація дії формули (16) на збіжному невласному інтегралі першого роду

Приклад 7. Приклад для $\int_0^\infty \sin(t) dt$ і $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$



Графік 12: демонстрація дії формули (16) на розбіжному невластному інтегралі першого роду

Тепер стосовно формули на основі (3). Розглядаючи формулу (3) можна задуматись, що частина $b_n - b_{n+1}$ дуже схожа на приріст (ну, точніше спад) і якщо у нас на меті адаптувати формулу під інтеграли, які неперервні, то і цей приріст варто спробувати адаптувати у вигляді похідної. І насправді це працює.

Твердження 4. Формула

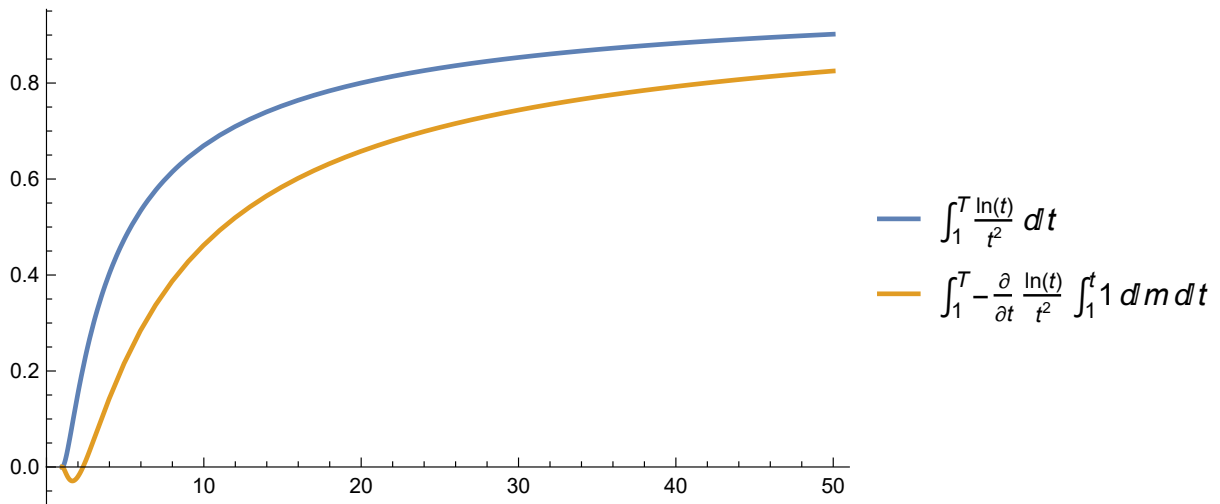
$$\int_0^\infty g(t) f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T -g'(t) \int_0^t f(m) dm dt, \quad (17)$$

де $g(t)$ монотонно спадає до нуля, може поставити число у відповідність ширшому класу функцій, ніж класичний метод.

Також можна звернути увагу, що так само, як формула (3) була схожа на дискретне перетворення Абеля, так і її інтегральний аналог схожий на інтегрування частинами.

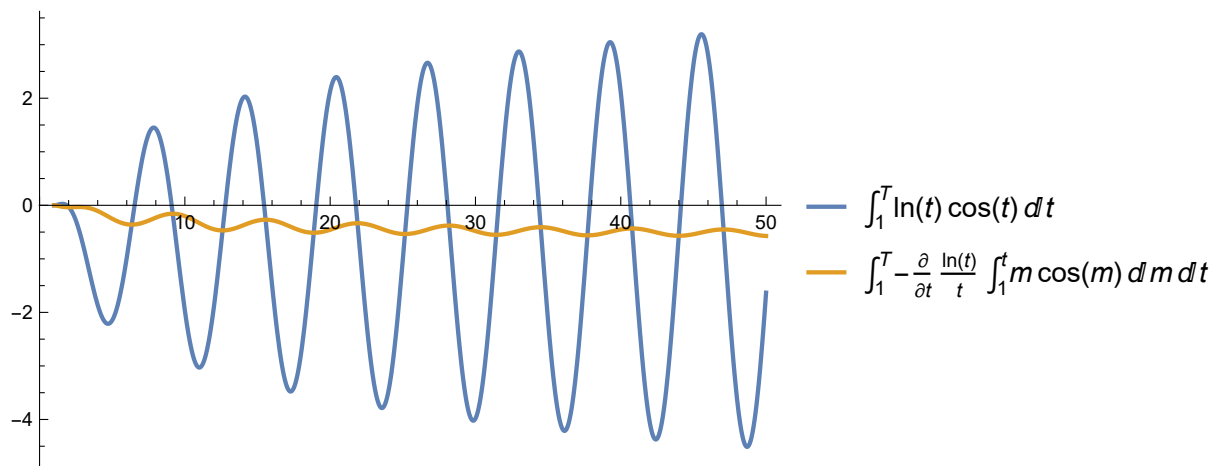
Далі вже традиційна пара прикладів для збіжного і розбіжного інтегралів першого роду.

Приклад 8. Приклад для $\int_1^\infty \frac{\ln(t)}{t^2} dt$, де $g(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ і $f(t) = 1$



Графік 13: демонстрація дії формули (17) на збіжному невластному інтегралі першого роду

Приклад 9. Приклад для $\int_1^\infty \ln t \cos t dt$, де $g(t) = \frac{\ln t}{t}$ і $f(t) = t \cos t$



Графік 14: демонстрація дії формули (17) на розбіжному невластному інтегралі першого роду

4 Використання

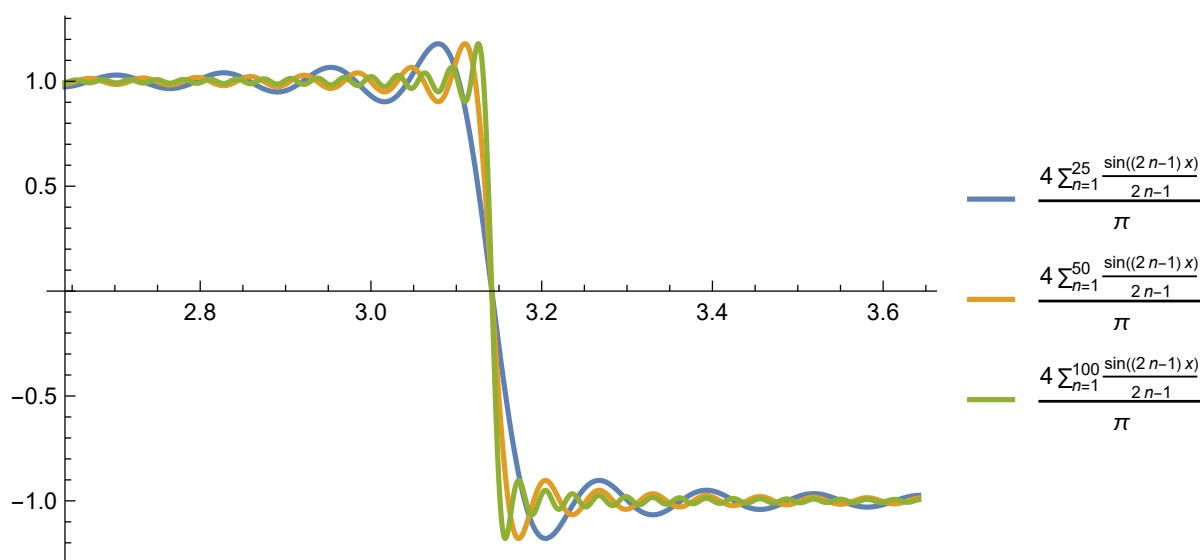
4.1 Феномен Гіббса

Феномен Гіббса — надмірна осциляція рядів Фур'є в області точок розриву [5] [6] [7].

Наприклад, для функції $f(x) = \text{sign}(x)$ з періодом 2π ряд Фур'є буде наступним:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}.$$

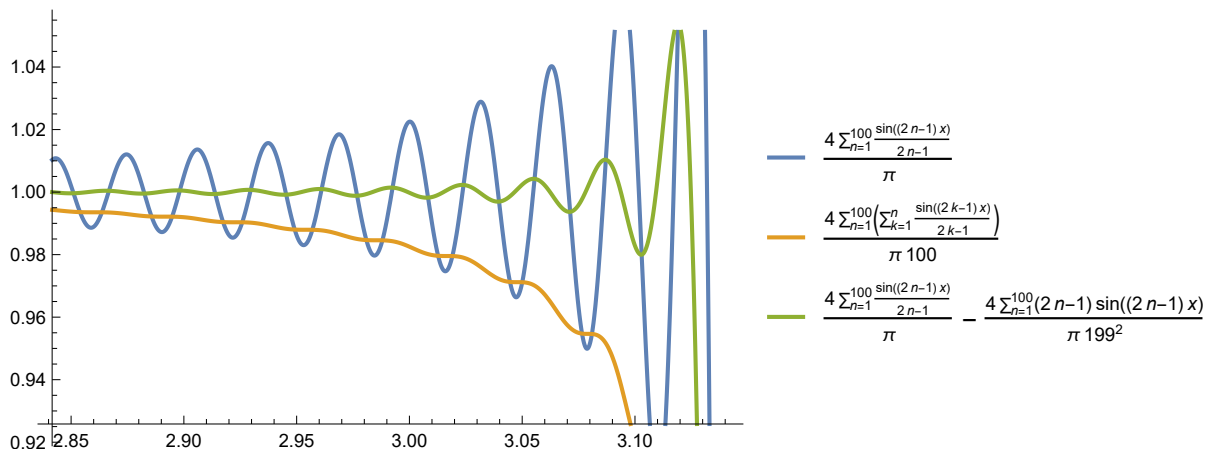
Деякі його графіки (для 25, 50, 100 доданків) зображені на малюнку нижче.



Графік 15: демонстрація феномену Гіббса

Щоб обійти таку проблему використовують інші методи підсумовування [7], в цьому розділі буде продемонстровано ефективність формули (5) в порівнянні з підсумовуванням по Чезаро [9].

Нижче наведено ряд Фур'є підсумований класичним методом, методом Чезаро і підсумований за допомогою формули (5) з $b_n = \frac{1}{(2n-1)^2}$:



Графік 16: демонстрація ряду Фур'є підсумованого класично, по Чезаро і формулою (5)

Судячи з графіку, саме використання формули (5) дає найбільш точний результат до оригінальної функції (класичне підсумовування занадто сильно осцилює, а по Чезаро занадто рано починає спадати до точки розриву).

Нижче наведено оцінки середньої похибки, тобто площа різниці оригінальної функції і трьох графіків вище (взято проміжок $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, через симетрію):

$$\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right| dx \approx 0.009464,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{100} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} \right| dx \approx 0.011807,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \left(1 - \frac{(2n-1)^2}{199^2} \right) \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right| dx \approx 0.005044.$$

Тобто використання формули (5) дало в середньому найменшу похибку від оригінальної функції.

Також варто оцінити максимальну похибку (оцінка буде на такому ж інтервалі, але з правого краю треба вимушено зробити відступ, бо інакше у всіх функцій буде одинична похибка, бо це точка розриву і

такий результат нам не інформативний):

$$\begin{aligned} \max_{x \in [\frac{\pi}{2}; \pi - \frac{1}{100}]} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right| &\approx 0.097193, \\ \max_{x \in [\frac{\pi}{2}; \pi - \frac{1}{100}]} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{100} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} \right| &\approx 0.423629, \\ \max_{x \in [\frac{\pi}{2}; \pi - \frac{1}{100}]} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \left(1 - \frac{(2n-1)^2}{199^2} \right) \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right| &\approx 0.257933. \end{aligned}$$

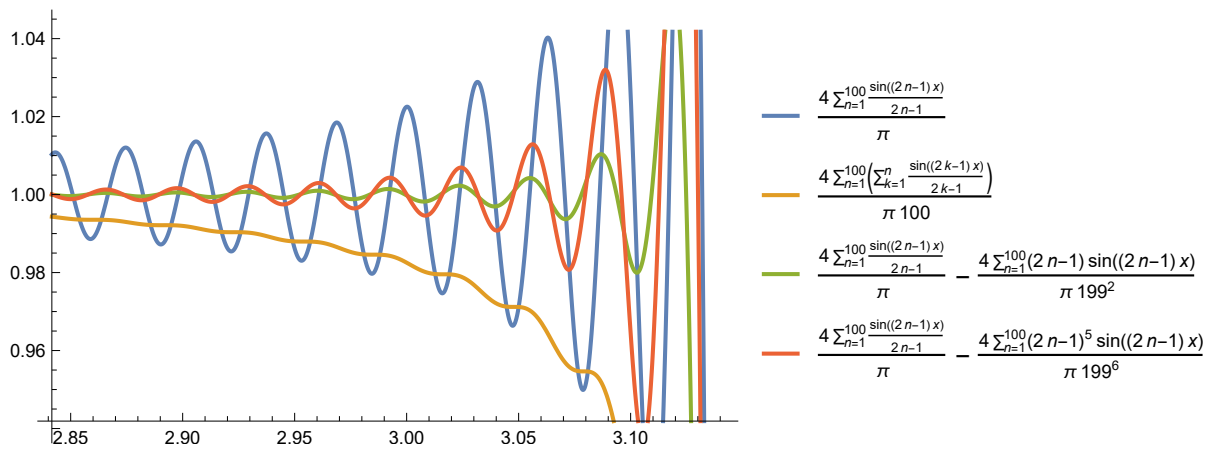
Як бачимо з результатів і повертаючись до графіків, неklasичні підсумовуючі функції занадто рано ідуть на спад якщо порівнювати з класичним варіантом, через що мають більше максимальне відхилення (однак все ще звертаємо увагу, що формула (5) все ж краща за підсумовування за Чезро).

Однак варто згадати головну перевагу формули (5) — можливість варіювати b_n . І насправді ситуація стане ще кращою, якщо обрати b_n ще більш швидко спадною. Відтак, результати з $b_n = \frac{1}{(2n-1)^6}$ будуть наступними:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \left(1 - \frac{(2n-1)^6}{199^6} \right) \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right| dx &\approx 0.005568, \\ \max_{x \in [\frac{\pi}{2}; \pi - \frac{1}{100}]} \left| 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \left(1 - \frac{(2n-1)^6}{199^6} \right) \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right| &\approx 0.082881. \end{aligned}$$

Як бачимо, похибка в середньому стала зовсім трохи більшою, однак максимальна похибка разом з тим стала значно меншою. І в результаті формула (5) з $b_n = \frac{1}{(2n-1)^6}$ дала кращий результат в обох тестах і за класичне підсумовування, і за підсумовування по Чезаро.

Нижче додано новий графік до попередніх.



Графік 17: демонстрація ряду Фур'є підсумованого класично, по Чезаро і формулою (5) з різними b_n

4.2 Узагальнення ядра Феєра

Ядро Феєра знаходиться шляхом середнього арифметичного ядер Діріхле. Тобто, іншими словами, ядро Феєра дорівнює Чезарівським середнім ряду $1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx)$ [6] [7], а оскільки формули (3), (5) і (7) є в певному сенсі узагальненням суми по Чезаро, то варто подивитись що буде, якщо спробувати використати формулу тут і тим самим в деякому сенсі узагальнити ядро Феєра.

Також виділяється клас “хороших” ядер, для яких мають виконуватись наступні властивості [6]:

- Для всіх $n \geq 1$ виконується $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$.
- Існує таке M , що для всіх $n \geq 1$ виконується $\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx < M$.
- Для всіх $\delta > 0$ виконується $\int_{\delta}^{\pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

До цього класу належить ядро Феєра. На пошук саме таких ядер і буде акцентовано увагу.

Легше буде скористатись формулою (5). Власне, давайте доведемо, що формула

$$K_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) - 2b_n \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{b_k}$$

створює “хороші” ядра.

Доведення. Перша властивість:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) - 2b_n \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{b_k} dx \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{b_n}{b_k}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Доведення. Друга властивість:

Забігаючи наперед зазначимо, що довести виконання другої властивості для всіх монотонно спадних до нуля b_n в цій роботі не вийшло, але вийшло довести це для певного класу таких b_n . Ідея доведення буде полягати в тому, щоб отримати такі $K_n(x)$, які були б невід’ємними, а значить друга властивість впливала б з першої, бо модуль би просто пропав. Насправді буде отримано не повністю невід’ємні $K_n(x)$, а такі, де за певних параметрів функція все ж може трохи опускатись нижче нуля, але це не впливає на обмеженість інтегралу модуля.

Для цього одразу зазначимо, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) + \frac{b_n}{b_2} dx = 2\pi \left(1 + \frac{b_n}{b_2}\right)$$

дорівнює просто числу.

Власне, от якраз невід’ємність функції $K_n(x) + \frac{b_n}{b_2}$ можна довести.

Ідея доведення буде полягати в тому, що через використання перетворення Абеля можна перетворити $\cos(kx)$ спочатку в ядро Діріхле, а потім і в ядро Феєра, яке якраз і є невід’ємним.

Власне, переходимо до перетворення нашого $K_n(x) + \frac{b_n}{b_2}$:

$$\begin{aligned}
K_n(x) + \frac{b_n}{b_2} &= \frac{b_n}{b_2} + 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) - 2b_n \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{b_k} \\
&= \frac{b_n}{b_2} + 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) - 2b_n \left(\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n \cos(kx) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) \sum_{m=1}^k \cos(mx) \right) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + 1 + 2b_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) \sum_{m=1}^k \cos(mx) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + 1 + b_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) (D_k - 1) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + 1 + b_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) D_k - b_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + 1 + b_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) D_k - b_n \left(-\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_n} \right) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + \frac{b_n}{b_1} + b_n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) D_k \\
&= \frac{b_n}{b_2} + \frac{b_n}{b_1} + b_n \left(\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}} \right) \sum_{k=1}^{n-1} D_k - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-2} \left(\left(\frac{1}{b_{k+2}} - \frac{1}{b_{k+1}} \right) - \left(\frac{1}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} \right) \right) \sum_{m=1}^k D_m \right) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + \frac{b_n}{b_1} + \left(1 - \frac{b_n}{b_{n-1}} \right) (nF_{n-1} - 1) + \\
&\quad + b_n \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}} \right) ((k+1)F_k - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n(x) + \frac{b_n}{b_2} &= \frac{b_n}{b_2} + \frac{b_n}{b_1} - \left(1 - \frac{b_n}{b_{n-1}}\right) + \left(1 - \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)nF_{n-1} + \\
&\quad + b_n \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}}\right)(k+1)F_k + \\
&\quad - b_n \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}}\right) \\
&= \frac{b_n}{b_2} + \frac{b_n}{b_1} - 1 + \frac{b_n}{b_{n-1}} + \left(1 - \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)nF_{n-1} + \\
&\quad + b_n \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}}\right)(k+1)F_k + \\
&\quad - b_n \left(\frac{1}{b_{n-1}} - \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_n}\right) \\
&= \frac{2b_n}{b_1} + \left(1 - \frac{b_n}{b_{n-1}}\right)nF_{n-1} + \\
&\quad + b_n \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}}\right)(k+1)F_k
\end{aligned}$$

Якщо накласти додаткову умову

$$\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}} \geq 0,$$

то всі доданки будуть додатними, а значить і весь вираз теж. В такому випадку інтеграл від модуля функції спроститься до просто інтеграла від функції і буде дорівнювати $2\pi\left(1 + \frac{b_n}{b_2}\right)$, як було зазначено на початку доведення.

Власне, з отриманою додатковою умовою на b_k і можна гарантувати виконання другої властивості, однак варто зазначити, що потенційно результат можна і покращити. Можливо приведення функції до “майже невід’ємної” було занадто строгим і так відсіяло інші потенційно можливі b_n .

□

Доведення. Третя властивість:

Оскільки формула (5) регулярна, то при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) - 2b_n \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{b_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)\end{aligned}$$

що є ядром Діріхле, для якого властивість виконується. \square

Оскільки доведено всі 3 умови, то можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 4.1. *Ядра утворені по формулі*

$$K_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) - 2b_n \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{b_k},$$

де b_n — монотонно спадна до нуля послідовність така, для якої виконується умова

$$\frac{2}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k+2}} \geq 0,$$

є хорошими.

Висновок

У магістерській дисертації проведено комплексне дослідження знайденого методу підсумовування числових рядів, що є розбіжними в класичному сенсі. На основі проведеного аналізу та отриманих результатів можна сформулювати наступні висновки:

- Розроблено новий метод регуляризації, що ґрунтується на використанні допоміжних монотонно спадних до нуля послідовностей та асимптотичному аналізі часткових сум.
- Доведено фундаментальні властивості методу, а саме його лінійність, стабільність та регулярність. Також знайдено Тауберові теореми для запропонованого методу.
- Проведено порівняльний аналіз із відомими методами підсумовування (Чезаро, логарифмічним та зваженим середнім підсумовуваннями). Показано, що розроблений метод дозволяє ефективно знаходити узагальнені суми для широкого класу осцилюючих рядів.
- Виконано теоретичне узагальнення методу на випадок нескінченних добутоків та невластивих інтегралів.
- Досліджено прикладні аспекти, зокрема застосування методу до теорії рядів Фур'є. Побудовано нові типи хороших ядер та продемонстровано вплив на феномен Гіббса.

Список використаної літератури

- [1] Aasma, A., Dutta, H., Natarajan, P. N. *An Introductory Course in Summability Theory*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2017.
- [2] Ruder, B. *Silverman–Toeplitz Theorem*. Kansas State University, 1966.
- [3] Hardy, G. H. *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press, 1949.
- [4] Başar, F., Çolak, R. *Summability Theory and Its Applications*. Bussum: Bentham Science Publishers, 2011.
- [5] Hewitt, E., Hewitt, R. E. *The Gibbs–Wilbraham Phenomenon: An Episode in Fourier Analysis*. *Archive for History of Exact Sciences*, 21(2), 1979
- [6] Stein, E. M., Shakarchi, R. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton: Princeton University Press, 2003.
- [7] Jerri, A.J. *The Gibbs Phenomenon in Fourier Analysis, Splines and Wavelet Approximations*, Springer, 1998.
- [8] Сиротенко, А.В., Чаус, Д.А. *Метод підсумовування розбіжних в класичному сенсі рядів*. Тези доповіді XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. Київ, 2025 р.
- [9] Чаус, Д.А. *Зменшення впливу феномену Гіббса за допомогою монотонно спадних до нуля послідовностей*. Тези доповіді XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. Київ, 2026 р.