НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ____519.21____

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
__________ Олег КЛЕСОВ
«____» __________ 2026 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Деякі властивості рекордів у стохастичній моделі з альфа схемою і трендом»

Виконав:
студент II курсу, групи ОМ-41мн
Логвинов Денис Олександрович _______________

Науковий керівник:
професор, доктор фіз.мат. наук
Клесов Олег Іванович _______________

Рецензент:
професор, доктор фіз.мат. наук
Розора Ірина Василівна _______________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ________________

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____________ Олег КЛЕСОВ
«____» __________ 2026 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Логвинову Денису Олександровичу

1. **Тема дисертації** «Деякі властивості рекордів у стохастичній моделі з альфа-схемою і трендом», науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фіз.-мат. наук, професор, затверджені наказом по університету від 31 березня 2026 року, №1340-с.

2. **Термін подання студентом дисертації** «15» травня 2026 року.

3. **Об'єкт дослідження** стохастичні моделі з F^α-схемою та наявністю тренду.

4. **Предмет дослідження** властивості рекордів, зокрема кількість рекордів, рекордні моменти часу та кореляції рекордних подій у стохастичних моделях з F^α-схемою та трендом.

5. **Перелік завдань, які потрібно зробити:**

   (а) Ознайомитись з науковою літературою на тему статистики рекордів, F^α-схем та випадкових блукань.

   (б) Дослідити класичні граничні теореми та підсилені закони великих чисел для кількості рекордів у F^α-схемі.

(в) Проаналізувати та верифікувати за допомогою обчислювальних експериментів (у середовищі Python) наявні статистичні тести на кореляції індикаторів рекордних подій.

(г) Вивести та обґрунтувати властивості рекордів у моделі, що комбінує F^{α}-схему з наявністю додатного тренду.

(д) Зробити висновки з отриманих результатів.

6. **Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу** 18-22 слайдів презентації.

7. **Орієнтовний перелік публікацій** 2 публікації у матеріалах XX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука та XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків.

8. **Дата видачі завдання** «03» лютого 2026 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з темою магістерської роботи	02.02 – 10.02.2026	Виконано
2.	Опрацювання літератури щодо моментів рекордів в різних стохастичних моделях	11.02 – 24.02.2026	Виконано
3.	Встановлення типу залежності індикаторів рекордів у випадку обмежених випадкових величин	25.02 – 07.03.2026	Виконано
4.	Доведення підсиленого закону великих чисел у випадку обмеженої випадкової величини	08.03 – 23.03.2026	Виконано
5.	Дослідження індикатору важки хвостів основаного на індикаторах рекордів	24.03 – 31.03.2026	Виконано
6.	Обчислення коваріацій на Python пакетами комп'ютерної алгебри	1.04 – 06.03.2026	Виконано
7.	Перехід до загального випадку для індикатору важких хвостів	07.04 – 22.04.2026	Виконано
8.	Оформлення магістерської дисертації відповідно до вимог	23.04 – 14.05.2026	Виконано

Студент Денис ЛОГВИНОВ

Науковий керівник Олег КЛЕСОВ

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 34 с., 20 слайдів презентації, 14 джерел.

Об'єктом цієї дипломної роботи є індикатори рекордів в F^{α}-схемі із лінійним трендом.

Предметом цієї дипломної роботи є властивості рекордів, зокрема кількість рекордів, рекордні моменти часу та кореляції рекордних подій у стохастичних моделях з F^{α}-схемою та трендом.

Метою даної дипломної роботи є встановлення підсиленого закону великих чисел та дослідження впливу кореляції між сусідніми рекордами на важкість хвостів початкової випадкової величини.

Актуальність дослідження магістерської дисертації зумовлена тим, що модель із трендом має широке застосування у кліматології (аналіз температурних рекордів при глобальному потеплінні), спортивній статистиці та еволюційній біології (моделювання адаптивних шляхів у фітнес-ландшафтах) з-поміж іншого. Тому вивчення поведінки індикаторів рекордів є важливим кроком для кращого використання цієї моделі на практиці.

Ключові слова: F^{α}-СХЕМА, СТАТИСТИКА РЕКОРДІВ, ЛІНІЙНИЙ ТРЕНД, ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ, ІНДИКАТОР ВАЖКИХ ХВОСТІВ, m-ЗАЛЕЖНІСТЬ, КОВАРІАЦІЯ.

ABSTRACT

This Master’s thesis contains 34 pages, 20 presentation slides, and 14 references.

The object of this Master’s thesis is record indicators in the F^{α}-scheme with a linear trend.

The subject of this Master’s thesis is the properties of records, specifically the number of records, record times, and correlations of record events in stochastic models with the F^{α}-scheme and trend.

The goal of this Master’s thesis is to establish a strong law of large numbers and to investigate the influence of correlation between adjacent records on the tail heaviness of the initial random variable.

The relevance of the research is due to the fact that the trend model has wide applications in climatology (analysis of temperature records under global warming), sports statistics, and evolutionary biology (modelling adaptive paths in fitness landscapes), among others. Therefore, studying the behaviour of record indicators is an important step for better practical application of this model.

Keywords: F^{α}-SCHEME, RECORD STATISTICS, LINEAR TREND, LAW OF LARGE NUMBERS, HEAVY TAIL INDICATOR, m-DEPENDENCE, COVARIANCE.

Зміст

Вступ **8**

Основні позначення **9**

Розділ 1. Попередні відомості та відомі результати **10**

Розділ 2. Рекорди в моделі з альфа-схемою і лінійним трендом **15**

1.1 Стохастична модель та означення 15

1.2 Обмежений випадок та закон великих чисел 15

1.3 Статистичний критерій, заснований на кореляціях рекордних подій 23

Висновки **30**

Бібліоґрафія **31**

Додаток **33**

Вступ

Традиційне вивчення рекордних значень у послідовностях випадкових величин зазвичай пов'язане з припущенням про їх незалежність та однакову розподіленість. Як відомо, у такому разі індикатори рекордів є незалежними бернуллівськими випадковими величинами, що дозволяє застосовувати класичні граничні теореми. Проте F^α-схема є єдиною відомою моделлю, де моменти рекордів залишаються статистично незалежними навіть при різних розподілах членів послідовності, більше строге математичне твердження наведено в теоремах 1.4 та 1.5.

У даній роботі досліджено узагальнення F^α-схеми шляхом додавання лінійного тренду. Додавання тренду може призводити до виродженого випадку, коли кожне наступне значення стає рекордом, якщо швидкість зростання тренду переважає флуктуації випадкових величин. При цьому моменти рекордів перестають бути незалежними. В роботі цей характер залежності встановлено при додатковому припущенні про обмеженість допоміжних випадкових величин.

Як виявилося, у такому разі індикатори рекордів є m-залежними випадковими величинами, де константа m визначається через верхню межу значень носія розподілу. Цей результат дозволив довести підсилений закон великих чисел для кількості рекордів у моделі з трендом. Крім того, досліджено коваріації між індикаторами рекордів і встановлено, що вони не визначаються однозначно лише поведінкою хвостів розподілів.

Окрему увагу приділено критичному аналізу результатів, опублікованих у журналі *Physical Review Letters* (2012) щодо критерію важкого хвоста розподілу в термінах рекордів [1]. Наведено низку контрприкладів, що спростовують універсальність зазначеного твердження, та вказано умови, які необхідно додати для його коректності.

Дослідження рекордів у моделях із трендом має широке застосування у кліматології (аналіз температурних рекордів при глобальному потеплінні), спортивній статистиці та еволюційній біології (моделювання адаптивних шляхів у фітнес-ландшафтах) з-поміж іншого.

Основні результати роботи були представлені у формі доповіді та публікації тез доповідей на *XX Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука* (Київ, 2025 р.) [2] та на *XIV Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків* (Київ, 2026 р.) [3].

Основні позначення

$\lceil x \rceil$ — найменше ціле число, яке не менше за x;

$1\{A\}$ — індикатор події A;

м.н. — майже напевно;

ln — натуральний логарифм;

$\mathcal{F}_1 \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_2$ — σ-алгебри $\mathcal{F}_1$ та $\mathcal{F}_2$ є незалежними;

$\sigma(X)$ — σ-алгебра індукована випадковим елементом X.

Розділ 1.
Попередні відомості та відомі результати

Розпочнемо з базових понять теорії рекордів.

Означення 1.1. Нехай маємо послідовність випадкових величин $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Послідовність *індикаторів рекордів* визначається наступним чином:

$$I(1) = 1, \quad I(n+1) = \mathbf{1}\{X_{n+1} > \max(X_1, \dots, X_n)\}.$$

Варто зауважити, що на даному етапі ми не накладаємо обмежень на залежність чи розподіл величин $\{X_i\}$. Фундаментальні результати для класичного випадку незалежних однаково розподілених величин належать А. Реньї (1962, [4]). Він встановив, що для неперервних розподілів індикатори $\{I_n\}$ є незалежними у сукупності, а ймовірність рекорду $\mathbb{P}(I_n = 1) = 1/n$.

Нагадаємо, що для незалежних величин Бернуллі $\{\eta_k\}$ з параметрами p_k підсилений закон великих чисел виконується за умови розбіжності ряду математичних сподівань $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$. При цьому додаткових обмежень на дисперсії накладати не потрібно, оскільки для індикаторів $Var(\eta_k) = p_k(1-p_k) < p_k$. Отже, умова Колмогорова $\sum \frac{Var(\eta_k)}{k^2} < \infty$ задовольняється автоматично, і ми маємо:

Теорема 1.2. *Нехай $\{\eta_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин розподілених за законом Бернулі з параметрами p_k і нехай $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$, тоді*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \eta_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} \to 1, \text{ м.н.} \quad n \to \infty.$$

Це дозволяє отримати логарифмічне зростання кількості рекордів $\mu(n) \sim \ln n$ у найпростішій схемі.

Особливу увагу ми приділяємо моделям, що відхиляються від класичної схеми. Першою є *альфа-схема* (або F^{α}-схема), запроваджена M. Yang [5] та також доволі сильно далі досліджена Невзоровим [6].

Означення 1.3. Послідовність незалежних випадкових величин $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ індукована *альфа-схемою*, якщо існують послідовність додатних чисел $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ та функція розподілу F (неперервна) такі, що $F_i(x) = F^{\alpha_i}(x)$.

Надалі ми припускаємо, що всі функції розподілу є неперервними, так що події виду $\{X_i = X_j\}$ мають ймовірність нуль при $i \neq j$. У цьому випадку індикатор рекорду в момент часу n має вигляд

$$I(n) = \mathbf{1}\{X_n > \max(X_1, \ldots, X_{n-1})\}.$$

Ключовою властивістю F^α-схеми, встановленою Невзоровим [6], є те, що індикатори рекордів $\{I(n)\}_{n\geq 1}$ утворюють незалежну послідовність, причому

$$\mathbb{P}(I(n) = 1) = \frac{\alpha_n}{A_n}, \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Ця модель є критично важливою, оскільки вона зберігає незалежність індикаторів рекордів при різних розподілах членів послідовності. Це підтверджується наступною теоремою:

Теорема 1.4 (див. зокрема в [7])**.** *Якщо для будь-якої X_{n+1} (з довільною щільністю), яка незалежна від $X_1, \ldots, X_n$, індикатор I_{n+1} не залежить від вектора $(I_1, \ldots, I_n)$, то послідовність $\{X_i\}_{1\leq i\leq n+1}$ індукована альфа-схемою.*

Також схожий результат можна знайти в [6], але в ньому ми не вимагаємо абсолютну неперервність випадкових величин.

Теорема 1.5. *Нехай функції розподілу $F_1, F_2, \ldots, F_n$ незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є неперервними і*

$$0 < F_j(a) < F_j(b) < 1, \quad 1 \leq j \leq n-1, \tag{1}$$

для деяких a та b, $-\infty < a < b < \infty$. Якщо вектор $(I(1), I(2), \ldots, I(n-1))$ та індикатор $I(n)$ є незалежними для будь-якого вибору функції розподілу F_n, тоді існують додатні константи $\alpha(2), \ldots, \alpha(n-1)$ такі, що

$$F_j = (F_1)^{\alpha(j)}, \quad 2 \leq j \leq n-1,$$

і $I(1), I(2), \ldots, I(n-1)$ є взаємно незалежними.

Також варто відмітити статтю П. Дукхана, О. І. Клесова, Е. Ґ. Пейкса та Й. Ґ. Штайнебаха [8], в якій розглядаються граничні поведінки кількості рекордів.

Зокрема, доволі детально підсилений закон великих чисел, і доводиться наступна теорема елементарними методами.

Теорема 1.6. *Якщо* $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i < +\infty$*, тоді*

$$\sum_{i=1}^{\infty} I(i) < \infty \text{ м.н.}$$

Якщо $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i = +\infty$*, тоді*

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} I(i)}{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(I(i))} \to 1 \text{ м.н.}$$

Питання граничної поведінки кількості рекордів $\mu(n)$ в альфа-схемі не обмежується законами великих чисел. Асимптотична нормальність цієї величини розглядалася в низці робіт, зокрема, Невзоровим [9], Баллеріні та Резніком [10], а також Вайсманом [11]. У цих роботах встановлюються різні достатні умови для центральної граничної теореми, залежно від поведінки послідовностей ймовірностей рекордів.

Особливо важливим є наступний результат, який описує дихотомію між асимптотично нормальною та стабільною поведінкою кількості рекордів.

Теорема 1.7 ([8])**.** *Нехай* $A_\infty = \infty$*. Тоді має місце одна з двох альтернатив (тут* $\mu(n) = I(1) + \cdots + I(n)$*):*

- *якщо*

$$\mathrm{Var}(\mu(n)) \to \infty,$$

  то

$$\frac{\mu(n) - \mathbb{E}\mu(n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mu(n))}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1);$$

- *якщо ж наведена сума є обмеженою, то*

$$\mu(n) - \mathbb{E}\mu(n) \to \sum_{j=1}^{\infty} (I(j) - \mathbb{E}(I(j))) \text{ м.н.},$$

  причому відповідний випадковий ряд збігається майже напевно.

При умові виконання *умови рівномірної малості*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{A_n} = 0$$

асимптотика кількості рекордів у послідовності $\{X_n\}$ описується співвідношенням

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln(A_n)} = 1 \qquad \text{м.н.}$$

Цей результат у випадку $\alpha_n = 1$, $n \geq 1$, співпадає з теоремою Реньї. У низці наслідків основних результатів у роботі [8] показано, що в залежності від поведінки A_n кількість рекордів може мати яку завгодно асимптотику. Зокрема, у найпростішому узагальненні моделі Реньї, тобто при

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = p \in (0, 1),$$

значення границі у теоремі Реньї змінюється, а саме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln(n)} = p \qquad \text{м.н.}$$

Швидкість збіжності у законі великих чисел для кількості рекордів досліджувалась у роботі [12], де було встановлено варіант теореми Марцинкевича–Зігмунда для кількості рекордів при тих же припущеннях, при яких справджується теорема Реньї.

Теорема 1.8. *Розглянемо F^α-схему з $\alpha_k = k^s$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді для довільного дійсного $r > \frac{1}{2}$*

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^{1-r} \left(\frac{\mu(n)}{\ln(n)} - s - 1 \right) = 0, \quad \textit{м.н.} \tag{2}$$

Наступним кроком є врахування часової динаміки через *тренд*.

Означення 1.9. Послідовність $\{X_i\}$ має *тренд* $\{c_i\}$, якщо $F_i(x) = F(x - c_i)$. Зокрема, при $c_i = c \cdot i$ ми кажемо про *лінійний тренд*.

Поєднання цих підходів дає об'єкт цього дослідження:

Означення 1.10. Послідовність $\{X_i\}$ є моделлю *з альфа-схемою та лінійним трендом*, якщо існують $\{\alpha_i\}$, $c \in \mathbb{R}$ та F такі, що $F_i(x) = F^{\alpha_i}(x - c \cdot i)$.

Актуальність такої комбінованої моделі (особливо при $\alpha_i \equiv 1$) була підкреслена у роботах Г. Вергена (Wergen, 2013, [13]). У своїй дисертації він запропонував ідею, що наявність тренду радикально змінює статистику: ймовірність рекорду перестає прямувати до нуля, а кількість рекордів починає зростати лінійно. Це знайшло застосування в аналізі глобального потепління, де лінійний тренд накладається на випадкові температурні коливання.

Крім того, важливо розрізняти природу залежності в нашій моделі та в моделях з ”нескінченною пам’яттю таких як випадкові блукання (Random Walks). Згідно з дослідженнями С. Маджумдара (Majumdar, 2008, [14]), для випадкових блукань статистика рекордів є універсальною, а кількість рекордів зростає як $\sqrt{n}$. У нашій же моделі з трендом, як буде показано далі, виникає специфічна m-залежність індикаторів, що займає проміжне місце між повною незалежністю та сильною кореляцією.

Розділ 2.
Рекорди в моделі з альфа-схемою і лінійним трендом

1.1 Стохастична модель та означення

Як вже було надано у означенні 1.10 в нас мають існувати послідовність додатних чисел $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, функція розподілу F та константа $c \in \mathbb{R}$ такі, що $F_i(x) = F^{\alpha_i}(x - c \cdot i)$. Це можна уявляти собі ще іншим способом, нехай послідовність випадкових незалежних величин $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ індукована альфа-схемою з тією самою послідовністю α, тоді

$$Y_i = X_i + ci.$$

І тепер якщо ми розглянемо спільний розподіл (Y_i), то він співпадатиме з описаним вище.

Означення 1.11. Нехай $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$. Покладемо

$$N_0^f := \min\Big\{K \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\ \max(Y_1, \dots, Y_n) \leq Y_{n+K+f(n)}\Big\}.$$

Величина N_0^f інтерпретується як довжина "пам'яті" процесу з індикаторів рекордів.

1.2 Обмежений випадок та закон великих чисел

У цьому підрозділі розглянемо ситуацію, коли базова випадкова величина X є обмеженою.

Лема 1.12. *Нехай існує $M > 0$ таке, що $|X| < M$ майже напевно. Тоді існує константа функція f ($\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall n \in \mathbb{N} : f(n) = k$), для якої*

$$N_0^f = 1 \quad \textit{м.н.}$$

Якщо ж X є необмеженою та $\alpha_n \in [c_1, c_2]$ для деяких $0 < c_1 < c_2$, то

$$N_0^f = \infty \quad \textit{м.н.}$$

для будь-якої константної функції f.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли X обмежена; це еквівалентно тому, що

$$\mathbb{P}(|X| > M) = 0.$$

Доведемо, що тоді й X_i також обмежені числом M. Дійсно,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_i| > M) &= F_{X_i}(-M) + \big(1 - F_{X_i}(M)\big) \\ &= \underbrace{F_X^{\alpha_i}(-M)}_{0^{\alpha_i}} + \big(1 - \underbrace{F_X^{\alpha_i}(M)}_{1^{\alpha_i}}\big) \\ &= 0 + (1-1) = 0.\end{aligned}$$

Отже, бачимо, що

$$|Y_i - ci| = |X_i| \le M \quad \text{м.н.}$$

Тоді для $k > \lceil 2M/c \rceil$ маємо

$$\forall 1 \le l \le n : Y_{n+k} \ge -M + c(n+k) > M + cn \ge Y_l \quad \text{м.н.}$$

Звідси

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+k} \ge \max(Y_1, \ldots, Y_n) \quad \text{м.н.}$$

Отже, якщо взяти $f(n) \ge \lceil 2M/c \rceil$, то

$$N_0^f = 1 \quad \text{м.н.}$$

Тепер розглянемо випадок, коли X необмежена. Без обмеження загальності покладемо $f_0(n) = 0$; тоді аналогічно бачимо, що й X_i необмежені. Припустімо, що

$$\mathbb{P}(N_0^{f_0} = \infty) < 1.$$

Тоді існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\mathbb{P}(N_0^{f_0} = k) > 0.$$

Тоді оцінюємо ймовірність цієї події:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_0^{f_0} = k) &\le \mathbb{P}\big(\forall n \in \mathbb{N} : \max(Y_1, \ldots, Y_n) \le Y_{n+k}\big) \\
&\le \mathbb{P}\big(\forall n \ge C : Y_{(n-1)k+n} \le Y_{n(k+1)}\big) \\
&= \prod_{n=C}^{\infty} \mathbb{P}\big(X_{(n-1)k+n} - X_{n(k+1)} \le ck\big).
\end{aligned}$$

Цей добуток дорівнює нулю, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \mathbb{P}\big(X_{(n-1)k+n} - X_{n(k+1)} \le ck\big)\Big) = \infty.$$

Розглянемо детальніше цю суму. Зафіксуємо $M \in \mathbb{R}$ таке, що

$$1 > F(M) \ge F(M - ck) > 0,$$

що завжди можливо, оскільки не існує K такого, що $|X| < K$ м.н.

Тоді

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(X_{(n-1)k+n} - X_{n(k+1)} > ck\big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[F^{\alpha_{n(k+1)}}(X_{(n-1)k+n} - ck)\big] \\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[F^{\alpha_{n(k+1)}}(X_{(n-1)k+n} - ck)\mathbf{1}_{(M,+\infty)}(X_{(n-1)k+n})\Big] \\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty} F^{\alpha_{n(k+1)}}(M - ck)\big(1 - F^{\alpha_{(n-1)k+n}}(M)\big) \\
&\ge \sum_{n=1}^{\infty} F^{c_2}(M - ck)\big(1 - F^{c_1}(M)\big) = +\infty.
\end{aligned}$$

Отже, у цьому випадку

$$N_0^{f_0} = \infty \quad \text{м.н.}$$

$\square$

Лема 1.13. *Нехай* $(N_0^f = c)$ *м.н. Тоді для кожного* $n \in \mathbb{N}$ σ*–алгебри*

$$\sigma(I(1), \ldots, I(n)) \quad \textit{та} \quad \sigma(I(k) : k > n + N_0^f + f(n))$$

є незалежними.

Доведення. Бачимо, що

$$\sigma\big(\{I(k)\}_{k\le n}\big) \subset \sigma\big(\{Y_k\}_{k\le n}\big).$$

Тепер перевіримо, що

$$\sigma(I(k)) \subset \sigma\big(\{Y_i\}_{n<i}\big), \qquad k > n + N_0^f + f(n).$$

Для цього використаємо, що

$$\begin{aligned}\max\big(Y_{k-1}, \dots, Y_{n+f(n)+N_0^f}, \dots, Y_n, \dots, Y_1\big) \\ = \max\big(Y_{k-1}, \dots, Y_{n+f(n)+N_0^f}, \dots, Y_{n+1}\big) \quad \text{м.н.}\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}I(k) &= \mathbf{1}\Big\{Y_k > \max\big(Y_{k-1}, \dots, Y_{n+f(n)+N_0^f}, \dots, Y_n, \dots, Y_1\big)\Big\} \\ &= \mathbf{1}\Big\{Y_k > \max\big(Y_{k-1}, \dots, Y_{n+f(n)+N_0^f}, \dots, Y_{n+1}\big)\Big\} \quad \text{м.н.}\end{aligned}$$

Тому дійсно

$$\sigma(I(k)) \subset \sigma\big(\{Y_i\}_{n<i\le k}\big) \subset \sigma\big(\{Y_i\}_{n<i}\big).$$

Отже, робимо висновок, що

$$\sigma\big(\{I(k)\}_{k>n+N_0^f+f(n)}\big) \subset \sigma\big(\{Y_i\}_{n<i}\big).$$

Тепер помітимо, що

$$\sigma\big(\{Y_i\}_{i>n}\big) \perp\!\!\!\perp \sigma\big(\{Y_i\}_{i\le n}\big),$$

що завершує доведення. □

Далі розглянемо детальніше випадок, коли $\alpha_n \equiv c$.

Лема 1.14. *Нехай*

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \alpha_n = c.$$

Тоді існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}I(n) =: I^*,$$

і, зокрема,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}I(n) \longrightarrow I^*.$$

Доведення. Спочатку розглянемо елементи послідовності:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}I(n+1) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_{n+1} > Y_k\}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_{n+1} > X_k - c(n+1-k)\}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_{n+1} > X_{n+1-k} - ck\}\Big).\end{aligned}$$

Тепер бачимо, що

$$(X_1, \ldots, X_{n+1}) \stackrel{d}{=} (X_{n+1}, \ldots, X_1),$$

оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$ маємо $\alpha_n = c$. Отже,

$$\mathbb{E}I(n+1) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}\{X_1 > X_k - c(k-1)\}\Big).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}I(n) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}\{X_1 > X_k - c(k-1)\}\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=2}^{\infty}\{X_1 > X_k - c(k-1)\}\Big) \in [0,1].\end{aligned}$$

□

Бачимо, що попередні теореми підводять нас до підсиленого закону великих чисел, причому одне формулювання з довільною послідовністю α_n, а інше з константною.

Теорема 1.15 (ПЗВЧ для індикаторів рекордів)**.** *Нехай X є обмеженою випадко-*

вою величиною та

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \alpha_n = c.$$

Тоді

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} I(n) \longrightarrow I^* \quad \textit{м.н.}$$

Доведення. Оскільки випадкова величина X є обмеженою, то за лемою 1.12 існує константна функція f та константа N_0^f такі, що

$$N_0^f = 1 \quad \text{м.н.}$$

Тому за лемою 1.13 послідовність $\{I(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ є m–залежною для деякого $m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо m підпослідовностей

$$\{I(km+s)\}_{k\in\mathbb{N}}, \qquad s = 1,\dots,m.$$

За лемою 1.13 кожна з цих підпослідовностей складається з незалежних та однаково розподілених випадкових величин.

Отже, застосовуючи закон великих чисел Етемаді до кожної фіксованої підпослідовності, отримуємо, що для кожного $s = 1,\dots,m$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(km+s) \longrightarrow \mathbb{E}\big(I(N^*)\big) \quad \text{м.н.}$$

Тепер, підсумовуючи по $s = 1,\dots,m$ та ділячи на m, дістаємо

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} I(n) \longrightarrow \mathbb{E}\big(I(N^*)\big) = I^* \quad \text{м.н.}$$

що й завершує доведення. □

Теорема 1.16. *Нехай існує $M > 0$ таке, що*

$$|X| < M \quad \textit{м.н.},$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(I(n)) = +\infty.$$

Тоді

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} I(n)}{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(I(n))} \longrightarrow 1 \quad \textit{м.н.}$$

Доведення. З обмеженості $|X| < M$ майже напевно випливає, що існує скінченне $m \in \mathbb{N}$ таке, що послідовність індикаторів $\{I(n)\}_{n\geq 1}$ є m-залежною.

Розіб'ємо множину індексів $\{1, \ldots, N\}$ на $m+1$ підпослідовностей:

$$A_r := \{n \leq N : n \equiv r \pmod{m+1}\}, \qquad r = 0, 1, \ldots, m.$$

За означенням m-залежності, для кожного фіксованого r випадкові величини

$$\{I(n) : n \in A_r\}$$

є незалежними.

Позначимо

$$S_N^{(r)} := \sum_{n \in A_r} I(n), \qquad E_N^{(r)} := \sum_{n \in A_r} \mathbb{E}(I(n)).$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{N} I(n) = \sum_{r=0}^{m} S_N^{(r)}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(I(n)) = \sum_{r=0}^{m} E_N^{(r)}.$$

Оскільки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(I(n)) = +\infty,$$

то існує принаймні один r такий, що

$$E_N^{(r)} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty.$$

Для кожного такого r, за сильним законом великих чисел для незалежних, обмежених випадкових величин, маємо

$$\frac{S_N^{(r)}}{E_N^{(r)}} \longrightarrow 1 \quad \text{м.н.}$$

Для тих r, для яких $E_N^{(r)}$ обмежена, очевидно

$$\frac{S_N^{(r)}}{E_N^{(0)} + \cdots + E_N^{(m)}} \longrightarrow 0 \quad \text{м.н.}$$

Тепер запишемо

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} I(n)}{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(I(n))} = \frac{\sum_{r=0}^{m} \frac{S_N^{(r)}}{E_N^{(r)}} E_N^{(r)}}{\sum_{r=0}^{m} E_N^{(r)}}.$$

Застосовуючи лему про границю зважених сум, з урахуванням того, що для всіх r

$$\frac{S_N^{(r)}}{E_N^{(r)}} \to 1 \text{ або } 0 \quad \text{м.н.},$$

та що $\sum_{r=0}^{m} E_N^{(r)} \to +\infty$, дістаємо

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} I(n)}{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}(I(n))} \longrightarrow 1 \quad \text{м.н.}$$

□

Також додамо одну технічну лему про розподіли, що нам знадобиться в подальшому.

Лема 1.17. *Нехай* $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = c$ *та* $\exists K \in \mathbb{N} : (N_0^{f_0} = K \quad$ *м.н.*$)$ *(де* f_0 *— константа функція), тоді маємо, що*

$$(I(n), \ldots, I(n+k)) \stackrel{d}{=} (I(m), \ldots, I(m+k)), \quad k \in \mathbb{N},\ n, m > N_0^{f_0}.$$

Доведення. Без обмежень загальності, вважатимемо, що $f_0(n) = 0$. Використаємо, що

$$(Y_{n-N_0^{f_0}}, \ldots, Y_{n+k}) \stackrel{d}{=} (Y_1, \ldots, Y_{k+N_0^{f_0}+1}) + c(n-1-N_0^{f_0})\vec{1} \stackrel{d}{=} (Y_{m-N_0^{f_0}}, \ldots, Y_{m+k}).$$

в тому, Основна ідея полягає, в тому щоб виразити $(I(n), \ldots, I(n+k))$ через

$(Y_1, \ldots, Y_{k+N_0^{f_0}})$. Ми знаємо, що

$$\max(Y_1, \ldots, Y_{n-1+i}) = \max(Y_{n-N_0^{f_0}}, \ldots, Y_{n-1+i}) \quad \text{м.н.}, \quad i \geq 0.$$

Тому $I(n+i) = 1_{\{Y_{n+i} > \max(Y_{n-N_0^{f_0}}, \ldots, Y_{n-1+i})\}}$ м.н.

Тому

$$(I(n), \ldots, I(n+k)) = \left(1_{\{Y_{n+i} > \max(Y_{n-N_0^{f_0}}, \ldots, Y_{n-1+i})\}}\right)_{0 \leq i \leq k} \quad \text{м.н.}$$

Також, легко бачити, що

$$\begin{gathered} Y_{n+i} > \max(Y_{n-N_0^{f_0}}, \ldots, Y_{n-1+i}) \iff \\ Y_{n+i} - c(n - N_0^{f_0}) > \max(Y_{n-N_0^{f_0}} - c(n-1-N_0^{f_0}), \ldots, Y_{n-1+i} - c(n-1-N_0^{f_0})) \end{gathered}$$

Отже, існує вимірна функція $f : \mathbb{R}^{k+N_0^{f_0}} \to \mathbb{R}^k$ така, що

$$(I(n), \ldots, I(n+k)) = f(Y_{n-N_0^{f_0}} - c(n-1-N_0^{f_0}), \ldots, Y_{n+k} - c(n-1-N_0^{f_0})) \quad \text{м.н.}$$

І нарешті використовуємо найпершу рівність в цьому доведенні, щоб зробити висновок, що

$$f(Y_{n-N_0^{f_0}} - c(n-1-N_0^{f_0}), \ldots, Y_{n+k} - c(n-1-N_0^{f_0})) \stackrel{d}{=} f(Y_1, \ldots, Y_{k+1+N_0^{f_0}}).$$

$\square$

Отже, можна бачити, що у цьому підрозділі було доволі детально розглянуто випадок, коли випадкова величина X обмежена, і доведено декілька результатів, включаючи теореми типу підсиленого закону великих чисел.

1.3 Статистичний критерій, заснований на кореляціях рекордних подій

У роботі Franke, Wergen та Krug [1] запропоновано непараметричний статистичний критерій для виявлення розподілів з важкими хвостами, що ґрунтується на аналізі кореляцій між послідовними рекордними подіями у часових рядах із лінійним дрейфом. У цьому розділі подано формальний опис даного критерію та наведено умови, за яких він коректно працює для випадкових величин з обмеженою підтримкою.

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу F. Для фіксованого параметра $c > 0$ розглянемо модифікований часовий ряд

$$Y_n = X_n + cn, \qquad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Кажуть, що момент часу n є *рекордним*, якщо

$$Y_n > \max\{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}.$$

Позначимо через $p_n(c)$ ймовірність того, що n-й елемент є рекордом, а через $p_{n,n-1}(c)$ — ймовірність того, що рекордними є одночасно моменти $n-1$ та n.

Для кількісного опису залежності між послідовними рекордними подіями вводиться відношення

$$l_{n,n-1}(c) = \frac{p_{n,n-1}(c)}{p_n(c)\, p_{n-1}(c)}.$$

Очевидно, що $l_{n,n-1}(c) = 1$ тоді й лише тоді, коли рекордні події у моментах $n-1$ та n є незалежними.

У прикладних задачах імовірності $p_n(c)$ та $p_{n,n-1}(c)$ замінюються емпіричними оцінками, отриманими шляхом багаторазового випадкового вибору підвибірок фіксованого розміру n з наявних даних. Відповідне емпіричне відношення

$$\hat{l}_{n,n-1}(c) = \frac{\hat{p}_{n,n-1}(c)}{\hat{p}_n(c)\, \hat{p}_{n-1}(c)}$$

називається *індикатором важкого хвоста* (heavy tail indicator, HTI).

Запропонована в [1] інтерпретація полягає в тому, що значення $\hat{l}_{n,n-1}(c) > 1$ розглядаються як ознака розподілу з важким хвостом, тоді як $\hat{l}_{n,n-1}(c) < 1$ — як ознака легкого або обмеженого хвоста.

У цій роботі вдалося встановити строге математичне обґрунтування цього статистичного критерію у конкретному випадку, що наведено в наступній теоремі.

Теорема 1.18. *Нехай X_1 та X_2 — незалежні копії випадкової величини X, для якої виконується умова*

$$|X_1 - X_2| \le 2c \quad \text{м.н.}.$$

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ має місце нерівність

$$l_{n,n-1}(c) \leq 1.$$

Доведення. Метою є довести нерівність $l_{n,n-1}(c) \leq 1$. Згідно з означенням величини $l_{n,n-1}(c)$, це еквівалентно доведенню нерівності:

$$\frac{p_{n,n-1}(c)}{p_n(c)p_{n-1}(c)} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p_{n,n-1}(c) \leq p_n(c)p_{n-1}(c).$$

Розглянемо спільну ймовірність $p_{n,n-1}(c)$. Нехай $F(x)$ — функція розподілу незалежних копій випадкової величини X. Запишемо цю ймовірність через математичне сподівання, з подальшим переходом до умовного сподівання відносно випадкової величини X_{n-1}:

$$p_{n,n-1}(c) = \mathbb{P}(X_n + c > X_{n-1},\ X_{n-1} + c > X_{n-2}).$$

Враховуючи незалежність X_n та X_{n-2} при фіксованому значенні X_{n-1}, отримуємо:

$$\begin{aligned} p_{n,n-1}(c) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(X_n > X_{n-1} - c \mid X_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(X_{n-2} < X_{n-1} + c \mid X_{n-1})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(1 - F(X_{n-1} - c)) \cdot F(X_{n-1} + c)\right]. \end{aligned}$$

Введемо дві допоміжні функції:

$$g(y) = 1 - F(y - c) \quad \text{та} \quad h(y) = F(y + c).$$

Оскільки $F(y)$ — функція розподілу (вона є неспадною), то:

- $h(y)$ є неспадною (зростаючою) функцією аргументу y;
- $g(y)$ є незростаючою (спадною) функцією аргументу y.

Для двох функцій $g(X)$ та $h(X)$ з протилежною монотонністю виконується нерівність (відома як нерівність Чебишова для сум або властивість коваріації монотонних функцій):

$$\text{cov}(g(X), h(X)) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[g(X)h(X)] \leq \mathbb{E}[g(X)] \cdot \mathbb{E}[h(X)].$$

Застосуємо цю властивість до нашого виразу:

$$\mathbb{E}\left[(1 - F(X_{n-1} - c)) \cdot F(X_{n-1} + c)\right] \leq \mathbb{E}[1 - F(X_{n-1} - c)] \cdot \mathbb{E}[F(X_{n-1} + c)].$$

Зауважимо, що множники праворуч відповідають ймовірностям $p_n(c)$ та $p_{n-1}(c)$:

$$\mathbb{E}[1 - F(X - c)] = p_n(c), \quad \mathbb{E}[F(X + c)] = p_{n-1}(c).$$

Таким чином, маємо:

$$p_{n,n-1}(c) \leq p_n(c) \cdot p_{n-1}(c).$$

Поділивши обидві частини на $p_n(c)p_{n-1}(c)$, отримуємо шукану нерівність:

$$l_{n,n-1}(c) \leq 1.$$

$\square$

Теорема 1.18 показує, що якщо розкид значень випадкової величини є достатньо малим порівняно з величиною лінійного дрейфу, то послідовні рекордні події не можуть проявляти позитивної кореляції. У цьому випадку індикатор HTI коректно відображає той факт, що розподіл має обмежений, а отже, легший за експоненційний хвіст.

Отриманий результат свідчить про те, що обмеження застосовності індикатора HTI пов'язані не з самою ідеєю використання рекордних подій, а з відсутністю контролю за співвідношенням між параметром дрейфу c та масштабом флуктуацій випадкової величини. Це відкриває можливість подальшої модифікації критерію, зокрема шляхом адаптивного вибору параметра c або попередньої нормалізації даних.

Але важливо пам'ятати, про наступні контрприклади до критерію, перед розгляданням яких ми наведемо лему, що допоможе їх сформулювати, що є простим наслідком леми 1.17

Лема 1.19. *Нехай X має скінченний носій (тобто $\exists a, b \in \mathbb{R} : F(a) = 0, F(b) = 1$), тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall n > N : l_{n,n-1} = l_{N,N-1}$, причому $N \leq \frac{b-a}{c} + 4$.*

Очевидно, що будь-яка обмежена випадкова величина має легші хвости, ніж експоненційний розподіл.

Приклад 1.20. Розглянемо випадкову величину X_1 з таким розподілом: $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 0.5$. Очевидно, що X_1 має скінченний носій, тому Лема 1.19 є застосовною. Отже, шляхом простих обчислень отримуємо:

$$l_{2,1}(1.9) = 1, \quad l_{n+1,n}(1.9) = 8/9 < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Приклад 1.21. Розглянемо випадкову величину X_2 з таким розподілом: $\mathbb{P}(X_2 = 1.3) = 0.1, \mathbb{P}(X_2 = -1.3) = 0.9$. Очевидно, що X_2 має скінченний носій, тому Лема 1.19 є застосовною. Безпосередні обчислення дають:

$$l_{2,1}(1) = 1, \quad l_{3,2}(1) = \frac{82000}{75439} > 1, \quad l_{n+3,n+2}(1) = \frac{739000}{687241} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Помітка 1.22. Зазначимо, що вручну це рахувати важко, тому було написано програму, що це рахує точно, код якої надано в додатку.

Ці два приклади чітко демонструють, що індикатор важких хвостів не класифікує ці два розподіли однаково, хоча обидва вони мають хвости легші за експоненційний.

Наведені приклади мають дискретну природу, однак це не є обов'язковим. Опишемо метод згладжування цих прикладів так, щоб ми могли створити приклади не лише для розподілів з легкими хвостами, а й для розподілів із важкими хвостами.

Лема 1.23. *Припустимо, що* $\mathbb{P}(X_n + cn = \max(X_1 + c, \dots, X_{n-1} + c(n-1))) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді розглянемо нову модель, породжену* $X + \epsilon X'$ *для всіх* $\epsilon > 0$, *де* X' *та* X *— незалежні випадкові величини. Визначимо* $l^{\epsilon}_{n,n-1}(c)$ *як індикатор важких хвостів для цієї нової моделі. Тоді маємо:*

$$l^{\epsilon}_{n,n-1}(c) \to l_{n,n-1}(c), \quad \epsilon \to 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Зауважимо, що величина $l_{n,n-1}(c)$ визначається через моменти індикаторних функцій подій вигляду $A_n = \{X_n + cn > \max(X_1 + c, \dots, X_{n-1} + c(n-1))\}$.

Розглянемо збурену подію A^{ϵ}_n, де замість X_i стоїть $X_i + \epsilon X'_i$. Оскільки функція індикатора $1\{(\cdot)\}$ є неперервною скрізь, окрім межі, де нерівність перетворюється на рівність, то збіжність $1\{A^{\epsilon}_n\} \to 1\{A_n\}$ при $\epsilon \to 0$ виконується в усіх точках, окрім тих, де

$$X_n + cn = \max(X_1 + c, \ldots, X_{n-1} + c(n-1)).$$

За умовою леми, ймовірність цієї події дорівнює нулю. Отже, маємо збіжність індикаторів майже напевно:

$$1\{A_n^\epsilon\} \to 1\{A_n\}, \quad \text{при } \epsilon \to 0.$$

Оскільки індикаторні функції обмежені одиницею (яка є інтегровною на ймовірнісному просторі), за теоремою Лебега про мажоровану збіжність отримуємо збіжність математичних сподівань (а отже і їх моментів та кореляцій):

$$\mathbb{E}[1\{A_n^\epsilon\}] \to \mathbb{E}[1\{A_n\}].$$

З цього випливає збіжність $l_{n,n-1}^\epsilon(c) \to l_{n,n-1}(c)$. □

Ми можемо явно перевірити виконання властивості, що для всіх натуральних чисел n: $\mathbb{P}(X_n + cn = \max(X_1 + c, \ldots, X_{n-1} + c(n-1))) = 0$ для наших перших двох прикладів.

Ця лема 1.23 дозволяє нам зробити висновок, що ми можемо поширити наші приклади на:

- обмежені неперервні розподіли;
- розподіли з довільними хвостами, але зі збереженням знаку коваріації лише скінченну кількість разів;

шляхом вибору достатньо малого значення $\epsilon > 0$.

Приклад 1.24. Розглянемо $X_1 + \epsilon U(-1, 1)$. Тоді ми можемо знайти $\epsilon > 0$ таке, що $l_{n,n-1}^\epsilon(1.9) > l_{n,n-1}(1.9) - 10^{-100} > 1$ для $1 < n < 1000$, але оскільки ми знаємо носій $X_1 + \epsilon U(-1, 1)$, ми знаємо, що нерівність повинна виконуватися для всіх натуральних чисел.

Аналогічно, ми можемо розглянути $X_2 + \epsilon U(-1, 1)$. Тоді ми можемо знайти $\epsilon > 0$ таке, що $l_{n,n-1}^\epsilon(1) < l_{n,n-1}(1) + 10^{-100} < 1$ для $1 < n < 1000$, але оскільки ми знаємо носій $X_2 + \epsilon U(-1, 1)$, ми знаємо, що нерівність повинна виконуватися для всіх натуральних чисел.

Приклад 1.25. У тому ж ключі ми можемо розглянути $X_1 + \epsilon X'$, де X' має важкі хвости, наприклад, розподіл Леві. Тоді, ретельно обираючи $\epsilon > 0$ в силу Леми 1.23, ми можемо гарантувати, що

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 : l^{\epsilon}_{n,n-1}(1.9) > l_{n,n-1}(1.9) - 10^{-100} > 1, \quad 1 < n < N.$$

Аналогічно, ми можемо розглянути $X_2 + \epsilon X'$, де X' має важкі хвости, наприклад, розподіл Леві. Тоді, ретельно обираючи $\epsilon > 0$ в силу Леми 1.23, ми можемо гарантувати, що

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists \epsilon > 0 : l^{\epsilon}_{n,n-1}(1) < l_{n,n-1}(1) + 10^{-100} < 1, \quad 1 < n < N.$$

Підсумовуючи, можна сказати, що цю ідею зі статті можна розвинути у більш конкретний результат, але маючи на увазі обмеження, продемонстровані прикладами.

Висновки

У науковій роботі проведено комплексне теоретичне та практичне дослідження властивостей рекордних значень у стохастичній моделі, що поєднує F^{α}-схему з лінійним трендом. Основні результати роботи полягають у наступному:

- *Теоретичне обґрунтування залежності*: Встановлено, що додавання лінійного тренду призводить до втрати статистичної незалежності індикаторів рекордів. Доведено, що у випадку обмежених випадкових величин індикатори рекордів утворюють m-залежну послідовність, де константа m визначається через верхню межу значень носія розподілу.

- *Граничні теореми*: Сформульовано та доведено підсилений закон великих чисел (SLLN) для кількості рекордів у моделі з трендом. Зокрема, для випадку з постійними параметрами $\alpha_n = c$ встановлено збіжність середньої кількості рекордів до певної границі I^*.

- *Критичний аналіз статистичного критерію*: Проведено дослідження непараметричного критерію ідентифікації розподілів із важкими хвостами (HTI). Математично обґрунтовано умови (Теорема 1.18), за яких критерій коректно працює для випадкових величин із малим розкидом значень порівняно з дрейфом.

- *Спростування універсальності HTI*: За допомогою програмного моделювання та побудови аналітичних контрприкладів доведено, що індикатор важких хвостів не є універсальним. Показано, що певні обмежені розподіли можуть помилково класифікуватися як важкохвості, а розподіли з важкими хвостами — як легкі, залежно від параметрів моделі.

- *Методологія згладжування*: Запропоновано метод наближення дискретних прикладів неперервними розподілами зі збереженням знака коваріації рекордних подій. Це дозволяє стверджувати, що виявлені недоліки критерію HTI мають загальний характер для широкого класу розподілів.

Результати роботи мають як теоретичне значення для розвитку теорії рекордів, так і практичну цінність, зокрема, для аналізу часових рядів у кліматології, спорті та еволюційній біології, де наявність тренду є визначальним фактором.

Бібліографія

[1] Franke J., Wergen G., Krug J. Correlations of Record Events as a Test for Heavy-Tailed Distributions // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Feb. — Vol. 108. — P. 064101. — Access mode: `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.064101`.

[2] Логвинов Д. О. Підсилений закон великих чисел для кількості рекордів у стохастичній моделі з трендом та альфа-схемою // Матеріали XX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука. — Київ. — 2025.

[3] Логвинов Д. О. XIV Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків // Матеріали XVI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. — Київ. — 2026.

[4] Rényi A. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations // Annals Fac. Sci. Univ. Clermont-Ferrand. — 1962. — Vol. 8. — P. 7–12. — (French).

[5] Yang M. On the distribution of the inter-record times in an increasing population // J. Appl. Prob. — 1975. — Vol. 12. — P. 148–154.

[6] Nevzorov V. B. Records: Mathematical Theory. — Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.

[7] Borovkov K., Pfeifer D. On record indices and record times // J. Statist. Plann. Infer. — 1995. — Vol. 45, no. 1-2. — P. 65–79.

[8] Limit theorems for record counts and times in the F_α-scheme / Doukhan Paul, Klesov Oleg I., Pakes Anthony G., and Steinebach Josef G. // Extremes. — 2013. — Vol. 16, no. 2. — P. 147–171.

[9] Nevzorov, V.B. The number of records in a sequence of non-identically distributed random variables // Probability Distributions and Mathematical Statistics, Part 2. — Fan, Tashkent, 1986. — P. 373–388. — Engl. transl.: J. Soviet Math., **38**:2375–2382, 1987.

[10] Ballerini, R., Resnick, S.I. Embedding sequences of successive maxima in extremal processes with applications // J. Appl. Prob. — 1987. — Vol. **24**. — P. 827–837.

[11] Weissman, I. Records from a power model of independent observations // J. Appl. Prob. — 1995. — Vol. **32**. — P. 982–990.

[12] Клесов О. І., Колесник О. В. Швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел для рекордів у F^α схемі // Науковий вісник Ужгородського університету. — 2023. — Vol. 41, no. 2. — P. 29–33.

[13] Wergen Gregor. Records in thermal climate data, in populations with linear fitness trends and in random walks : Ph. D. thesis ; University of Cologne. — 2013.

[14] Majumdar Satya N., Ziff Robert M. Universal record statistics of Random Walks and Lévy Flights // Physical Review Letters. — 2008. — Vol. 101, no. 5. — P. 050601.

Додаток

Код на python для знаходження НТІ

```python
import lea
from sympy import Rational

def LDM_Y(n, c, X):
    return c*n + X.new()

def I(n, Y_n):
    if len(Y_n) <= n:
        raise ValueError
    if n == 1:
        return lea.pmf({1: 1,})
    return lea.if_(
        (Y_n[n-1] >= lea.max_of(*Y_n[:n-1])),
        1, 0)

def cov_1(n, m, Y_n):
    I_n = I(n, Y_n)
    I_m = I(m, Y_n)
    p12 = (I_n * I_m).mean()
    p1 = I_n.mean()
    p2 = I_m.mean()
    return p12-p1*p2, p12/(p1*p2)



X1 = lea.pmf(
    {
        -Rational(1, 1): Rational(1, 2),
        Rational(1, 1): Rational(1, 2)
    }
)
print(X1)
```

```
c=1.9
print(f"c␣=␣{c}")
Y_n = [LDM_Y(n, c, X1) for n in range(1, 30)]
for i in range(1, 10):
    c, l = cov_l(i,i+1, Y_n)
    print(f"cov(I({i}),␣I({i+1}))␣=", c, "l␣=", l)


p = 0.9
X2 = lea.pmf(
    {
        -Rational(13,10): Rational(9, 10),
        Rational(13,10): Rational(1, 10)
    }
)

print(X2)

for c in [1]:
    print(f"c␣=␣{c}")
    Y_n = [LDM_Y(n, c, X2) for n in range(1, 30)]
    for i in range(1, 28):
        c, l = cov_l(i,i+1, Y_n)
        print(f"cov(I({i}),␣I({i+1}))", c, "l␣=", l)
```