**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**фізико-математичний факультет**

**Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»

УДК 519.21

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

__________ Олег КЛЕСОВ

«____» __________ 2026 р.

# Магістерська дисертація
**на здобуття ступеня магістра**
**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»**
**зі спеціальності 111 «Математика»**
**на тему: «Декомпозиція ризику проспективного резерву у багатостанових моделях страхування життя»**

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-41мн
Плугатор Олеся Олегівна ____________

Керівник:
кандидат фізико-математичних наук
Тимошенко Олена Анатоліївна ____________

Рецензент:
доцент кафедри теорії ймовірностей
та математичного аналізу
ДВНЗ “Ужгородський національний університет”,
кандидат фізико-математичних наук
Синявська Ольга Олександрівна ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка ____________

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____________ Олег КЛЕСОВ
____________ 2026 р.

**ЗАВДАННЯ**
**на магістерську дисертацію студентці**
**Плугатор Олесі Олегівні**

1. **Тема дисертації** «Декомпозиція ризику проспективного резерву у багатостанових моделях страхування життя», науковий керівник дисертації Тимошенко Олена Анатоліївна, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «31» березня 2026 р. №1340-с.
2. **Термін подання** студентом дисертації «15» травня 2026 року.
3. **Об'єкт дослідження** процеси формування та зміни страхового надлишку (проспективного резерву) в багатостанових моделях страхування життя в умовах стохастичної динаміки фінансових та демографічних факторів.
4. **Предмет дослідження** методи декомпозиції ризику проспективного резерву, зокрема ISU-декомпозиція, їх математичне обґрунтування, властивості (адитивність, інваріантність, стабільність) та застосування у стохастичних багатостанових моделях страхування життя.
5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**
   (a) Ознайомлення з темою магістерської роботи та визначення основних напрямів дослідження.
   (b) Опрацювання наукової літератури, статей та інших готових робіт за темою дослідження.
   (c) Вивчення теоретичних основ страхування життя та математичних резервів.
   (d) Аналіз стохастичних моделей у страхуванні життя та підходів до стохастичного дисконтування.
   (e) Опрацювання методів декомпозиції фінансового результату та страхового надлишку.
   (f) Дослідження принципів SU- та ISU-декомпозиції.
   (g) Розробка стохастичної моделі страхового надлишку з урахуванням фінансових і біометричних факторів ризику. Виведення основних аналітичних результатів та формул для компонент декомпозиції.

(h) Узагальнення отриманих результатів і формулювання висновків.
(i) Оформлення магістерської роботи відповідно до встановлених вимог.

6. **Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу** 19 слайдів.
7. **Дата видачі завдання** «03» лютого 2026 р.

Календарний план

| № з/п | **Назва етапів виконання магістерської дисертації** | **Термін виконання етапів магістерської дисертації** | **Примітка** |
|---|---|---|---|
| 1. | Ознайомлення з темою магістерської роботи та визначення основних напрямів дослідження. | 03.02.2025 - 10.02.2025 | Виконано |
| 2. | Опрацювання наукової літератури, статей та інших готових робіт за темою дослідження. | 11.02.2025 - 24.02.2025 | Виконано |
| 3. | Вивчення теоретичних основ страхування життя та математичних резервів. | 25.02.2025 - 07.03.2025 | Виконано |
| 4. | Аналіз стохастичних моделей у страхуванні життя та підходів до стохастичного дисконтування. | 08.03.2025 - 15.03.2025 | Виконано |
| 5. | Опрацювання методів декомпозиції фінансового результату та страхового надлишку. | 16.03.2025 - 23.03.2025 | Виконано |
| 6. | Дослідження принципів SU- та ISU-декомпозиції. | 24.03.2025 - 31.03.2025 | Виконано |
| 7. | Розробка стохастичної моделі страхового надлишку з урахуванням фінансових і біометричних факторів ризику. | 01.04.2025 - 10.04.2025 | Виконано |
| 8. | Виведення основних аналітичних результатів та формул для компонент декомпозиції. | 11.04.2025 - 22.04.2025 | Виконано |
| 9. | Узагальнення отриманих результатів і формулювання висновків. | 23.04.2025 - 30.04.2025 | Виконано |
| 10. | Оформлення магістерської роботи відповідно до встановлених вимог. | 01.05.2025 - 14.05.2025 | Виконано |

Студентка Олеся ПЛУГАТОР

Науковий керівник Олена ТИМОШЕНКО

## РЕФЕРАТ

**Магістерська дисертація:** 60 сторінок, 19 слайдів для проектора, 27 першоджерел.

**Актуальність дослідження** полягає в тому, що в сучасних умовах розвитку страхового ринку та фінансової математики зростає потреба у точних та математично обґрунтованих методах аналізу ризиків і оцінки страхових зобов'язань. Зокрема, особливої уваги набуває дослідження проспективного резерву як ключового елементу забезпечення платоспроможності страхових компаній та ефективного управління ризиками.

Традиційні підходи до аналізу страхових ризиків часто не дозволяють достатньо точно враховувати складну структуру залежностей між різними джерелами ризику, такими як фінансові фактори (процентні ставки) та демографічні процеси (смертність, інвалідність тощо). У зв'язку з цим виникає необхідність розробки та застосування сучасних методів декомпозиції, які дозволяють розділити вплив окремих факторів на загальний результат.

Особливу актуальність має використання методів декомпозиції ризику, зокрема підходів послідовного оновлення (SU) та його граничного узагальнення (ISU), які забезпечують узгоджений та адитивний розклад страхового надлишку.

**Мета і завдання роботи:** дослідити декомпозицію ризику проспективного резерву у стохастичних багатостанових моделях страхування життя; застосувати методи послідовного оновлення (SU) та нескінченно малого послідовного оновлення (ISU).

**Об'єкт дослідження:** процеси формування та зміни страхового надлишку, у багатостанових моделях страхування життя в умовах стохастичної динаміки фінансових та біометричних факторів.

**Предмет дослідження:** методи декомпозиції ризику проспективного резерву, зокрема ISU-декомпозиція, їх математичне обґрунтування, властивості (адитивність, інваріантність, стабільність) та застосування у стохастичних багатостанових моделях страхування життя.

**Перелік публікацій:**

1. Стаття в науковому журналі «Науковий вісник Ужгородського університету» на тему: «Декомпозиція страхового надлишку в стохастичній моделі».
2. Тези доповіді XX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука на тему: «Декомпозиція ризику проспективного резерву у багатостанових моделях страхування життя».
3. Тези доповіді XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків на тему: «Decomposition of insurance surplus in a stochastic model».

**Ключові слова:** страхування життя, багатостанові моделі, проспективний резерв, математичний резерв, декомпозиція ризику, страховий надлишок, ISU-декомпозиція, стохастичне дисконтування, стохастичні процентні ставки.

## ABSTRACT

**Master's thesis:** 60 pages, 19 projector slides, 27 primary sources.

**Relevance of the research** lies in the fact that, in the current conditions of development of the insurance market and financial mathematics, there is a growing need for accurate and mathematically sound methods for risk analysis and assessment of insurance liabilities. In particular, special attention is paid to the study of the prospective reserve as a key element in ensuring the solvency of insurance companies and effective risk management.

Traditional approaches to the analysis of insurance risks often do not allow for sufficiently accurate consideration of the complex structure of dependencies between different sources of risk, such as financial factors, including interest rates, and demographic processes, including mortality, disability, and others. In this regard, there is a need to develop and apply modern decomposition methods that make it possible to separate the influence of individual factors on the overall result.

The use of risk decomposition methods is of particular relevance, in particular the sequential updating (SU) approach and its limiting generalization, infinitesimal sequential updating (ISU), which provide a consistent and additive decomposition of the insurance surplus.

**The aim and objectives of the work:** to study the decomposition of the risk of the prospective reserve in stochastic multi-state life insurance models; to apply the methods of sequential updating (SU) and infinitesimal sequential updating (ISU).

**Object of the research:** the processes of formation and change of the insurance surplus in multi-state life insurance models under stochastic dynamics of financial and biometric factors.

**Subject of the research:** methods for decomposing the risk of the prospective reserve, in particular ISU decomposition, their mathematical justification, properties such as additivity, invariance, and stability, and their application in stochastic multi-state life insurance models.

**List of publications:**

1. An article in the scientific journal *Scientific Bulletin of Uzhhorod University* on the topic: "Decomposition of Insurance Surplus in a Stochastic Model".

2. Conference abstract for the XX International Scientific Conference named after Academician Mykhailo Kravchuk on the topic: “Decomposition of the Risk of the Prospective Reserve in Multi-State Life Insurance Models”.
3. Conference abstract for the XIV All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians on the topic: “Decomposition of Insurance Surplus in a Stochastic Model”.

**Keywords:** life insurance, multi-state models, prospective reserve, mathematical reserve, risk decomposition, insurance surplus, ISU decomposition, stochastic discounting, stochastic interest rates.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

1. Базові математичні позначення

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множина невід'ємних дійсних чисел;

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$C^2$ — клас двічі неперервно диференційовних функцій;

$a \wedge b$ — мінімум чисел $a$ та $b$;

$\Delta X(t)$ — стрибок процесу $X$ у момент часу $t$;

$[X, Y]$ — квадратична коваріація процесів $X$ та $Y$;

$[X, Y]^c$ — неперервна частина квадратичної коваріації.

2. Імовірнісний простір та стохастичні процеси

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — імовірнісний простір;

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ — фільтрація, тобто потік інформації в часі;

$\mathbb{Q}$ — ризик-нейтральна ймовірнісна міра;

$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ — математичні сподівання відносно мір $\mathbb{P}$ та $\mathbb{Q}$;

$\mathcal{X}$ — множина семімартингалів;

$X = \{X(t)\}_{t\geq 0}$ — стохастичний процес або базис ризику;

$X_i$ — $i$-тий фактор ризику;

$W(t)$ — броунівський рух;

$W^{\mathbb{Q}}(t)$ — броунівський рух під ризик-нейтральною мірою $\mathbb{Q}$.

3. Позначення у моделі страхування життя

$T$ — момент закінчення строку дії договору;

$b_j$ — страхова виплата за $j$-м договором;

$C(t)$ — кумулятивний грошовий потік страховика;

$A(t)$ — процес активів страховика;

$L(t)$ — процес зобов'язань страховика;

$S(t)$ — процес страхового надлишку;

$\widetilde{S}(t)$ — дисконтований страховий надлишок;

$V(t)$ — процес оцінювання дисконтованого страхового надлишку;

$\kappa(t)$ — фактор нарощення;

$D(t, s)$ — стохастична функція нарощення з моменту $s$ до моменту $t$;

$Y(t)$ — умовний дисконтний фактор.

4. Біометричні фактори та смертність

$N(t)$ — процес підрахунку страхових подій;

$N_j(t)$ — процес смертності для $j$-го застрахованого;

$N_{ij}(t)$ — процес підрахунку переходів зі стану $i$ у стан $j$ до моменту часу $t$;

$\lambda(t)$ — стохастична інтенсивність смертності;

$\lambda_j(t)$ — інтенсивність смертності для $j$-го застрахованого;

$I_j(t)$ — індикатор перебування $j$-го застрахованого у стані життя;

$v_j(t)$ — умовний фактор виживання для $j$-го застрахованого;

$C_j^{\mathbb{Q}}(t)$ — компенсатор процесу $N_j$ під мірою $\mathbb{Q}$;

$\sigma_\lambda$ — волатильність інтенсивності смертності;

$a$ — швидкість повернення інтенсивності смертності до середнього рівня;

$\bar{\lambda}$ — довгострокове середнє значення інтенсивності смертності.

5. Фінансові фактори

$r$ — процентна ставка;

$\sigma$ — волатильність фінансового фактора;

$\Phi$ — фінансовий фактор;

$\mathcal{F}_t^{\Phi}$ — сигма-алгебра, породжена фінансовим фактором $\Phi$ до моменту часу $t$.

6. Позначення для SU- та ISU-декомпозиції

$D_i^{SU}(t)$ — внесок $i$-го фактора ризику в SU-декомпозиції;

$D_i^{ISU}(t)$ — внесок $i$-го фактора ризику в ISU-декомпозиції;

$D_1^{ISU}(t)$ — фінансова компонента ISU-декомпозиції;

$D_2^{ISU}(t)$ — систематична смертнісна компонента ISU-декомпозиції;

$D_3^{ISU}(t)$ — індивідуальна смертнісна компонента ISU-декомпозиції.

7. Умовні скорочення

ISU — нескінченно мале послідовне оновлення (*Infinitesimal Sequential Updating*);

SU — послідовне оновлення (*Sequential Updating*);

OAT — метод "один за раз" (*One-at-a-Time*);

P&L — прибутки та збитки (*Profit and Loss*);

IFRS 17 — Міжнародний стандарт фінансової звітності 17 (*International Financial Reporting Standard 17*);

MCEV — ринково-узгоджена внутрішня вартість (*Market Consistent Embedded Value*);

CIR — модель Кокса–Інгерсолла–Росса (*Cox–Ingersoll–Ross model*);

SDE — стохастичне диференціальне рівняння (*Stochastic Differential Equation*);

ODE — звичайне диференціальне рівняння (*Ordinary Differential Equation*);

MC — метод Монте-Карло (*Monte Carlo method*).

# ВСТУП

Прибутки та збитки, що виникають у страховому портфелі між двома звітними датами, формуються під впливом різноманітних факторів ризику. Аналіз цих змін, відомий як *profit and loss attribution* (P&L attribution), полягає у декомпозиції фінансового результату з метою кількісного визначення внеску окремих джерел ризику. Такий аналіз є важливим як для внутрішнього управління ризиками страховика, так і для забезпечення відповідності сучасним регуляторним вимогам.

Зокрема, міжнародний стандарт фінансової звітності МСФЗ 17 [15], принципи MCEV [16], а також нормативні вимоги Європейського Союзу у сфері страхування та перестрахування [17] передбачають проведення детального аналізу змін фінансового стану страховика, включаючи ідентифікацію та кількісну оцінку джерел прибутків і збитків. Реалізація таких вимог потребує застосування математично строгих, обчислювально стійких та змістовно інтерпретованих методів декомпозиції [5, 9].

У науковій літературі запропоновано низку підходів до декомпозиції фінансового результату. Серед них можна виокремити метод "один за раз" (*One-at-a-time*, OAT) [5], варіаційні методи, підходи на основі значення Шеплі [7], а також методи, що ґрунтуються на послідовному оновленні факторів ризику [2]. Важливим напрямом сучасних досліджень є декомпозиція динамічних ризиків на окремі компоненти [1]. Однак класичні підходи не завжди забезпечують одночасне виконання всіх бажаних властивостей змістовної декомпозиції, зокрема адитивності, нормалізації, інваріантності до порядку врахування факторів ризику та стабільності результатів [3].

У цьому контексті особливий інтерес становлять методи послідовного оновлення (*Sequential Updating*, SU) та нескінченно малого послідовного оновлення (*Infinitesimal Sequential Updating*, ISU). SU-декомпозиція ґрунтується на покроковому оновленні факторів ризику, коли на кожному кроці змінюється лише один фактор за фіксованих значень інших [5]. Такий підхід забезпечує адитивність, однак істотно залежить від порядку оновлення факторів.

Для подолання цієї залежності у роботі [2] запропоновано ISU-декомпозицію, яка забезпечує інваріантність до порядку та узгодженість результатів. ISU-декомпозиція виникає як граничний випадок SU-декомпозиції при подрібненні часових інтервалів до нуля [2, 9]. У цьому випадку залежність від порядку зникає, а декомпозиція набуває симетричних та стабільних властивостей. Перехід до неперервного часу дозволяє враховувати повні траєкторії ризикових факторів і отримувати декомпозицію, узгоджену незалежно від вибору часової сітки [10].

У страхуванні життя задачі декомпозиції фінансового результату природно пов'язані з аналізом математичних резервів та страхового надлишку. Математичні резерви відображають поточну вартість майбутніх зобов'язань страховика за договорами страхування життя, а їх динаміка описується, зокрема, за допомогою диференціального рівняння Тіле [27]. У класичних моделях страхування життя оцінювання майбутніх страхових виплат здійснюється на основі припущень щодо інтенсивності смертності, структури виплат, премій та дисконтування. При цьому стохастичне дисконтування дозволяє враховувати невизначеність фінансового ринку та зміну вартості майбутніх грошових потоків у часі.

Подібні задачі розглядаються також у межах аналізу страхового надлишку. У роботі [11] показано, що надлишок у страхуванні життя може розглядатися як стохастичний процес, який відображає відмінності між фактичним досвідом страховика та очікуваними або технічними припущеннями. Такий підхід створює природну основу для декомпозиції надлишку на компоненти, пов'язані з окремими джерелами ризику.

Особливе значення у моделях страхування життя має біометричний ризик, пов'язаний із випадковістю моментів смерті застрахованих осіб. Якщо інтенсивність смертності розглядається як детермінована величина, біометричний ризик переважно відображає випадкові відхилення фактичної смертності від очікуваної. Водночас у більш загальних моделях інтенсивність смертності може бути стохастичною. У такому випадку біометричний ризик має складнішу структуру, оскільки включає як ідіосинкратичну компоненту, пов'язану з реалізованими страховими подіями, так і систематичну компоненту, зумовлену випадковими змінами самої інтенсивності смертності.

У даній роботі розглядається динамічний підхід до декомпозиції, в якому процес страхового надлишку моделюється як стохастичний процес у часі. Основна увага приділяється представленню дисконтованого страхового надлишку у вигляді суми адитивних компонент, кожна з яких відповідає окремому фактору ризику. Така декомпозиція ґрунтується на формулі Іто [13] та дозволяє виділити внески фінансових і біометричних факторів у динаміку страхового надлишку.

На відміну від моделей із детермінованою смертністю, включення стохастичної інтенсивності смертності дає можливість розділити біометричний ризик на дві складові: ідіосинкратичну, що виникає внаслідок реалізованих смертей, та систематичну, що породжується випадковими коливаннями інтенсивності смертності. Це забезпечує точнішу інтерпретацію джерел страхового надлишку та дозволяє отримати аналітичне представлення внесків окремих факторів ризику в межах ISU-декомпозиції.

Робота складається з двох розділів, висновків та списку використаної літератури. У першому розділі розглядаються теоретичні основи страхування життя, зокрема модель страхування життя, математичні резерви, диференціальне рівняння Тіле та стохастичне дисконтування. У другому розділі досліджується стохастична модель страхового надлишку, вводиться процес страхового надлишку, аналізуються принципи SU- та ISU-декомпозиції, виводиться явний вигляд внеску стохастичної інтенсивності смертності, формулюються модельні припущення та застосовується ISU-декомпозиція для ризик-нейтрального оцінювання. У висновках узагальнюються основні результати роботи.

**Публікації.** Основні результати роботи були представлені у формі доповіді та публікації тез доповідей на *XX Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука* (Київ, 2025 р.) [24] та на *XIV Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків* (Київ, 2026 р.) [25], а також опублікована у стаття в *Науковому віснику Ужгородського університету* [26].

# 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ СТРАХУВАННЯ ЖИТТЯ

Ринок страхування життя пропонує широкий спектр різноманітних полісів. Без спеціальних знань експерта майже неможливо розрізнити ці поліси між собою. Зокрема, це пов'язано з тим, що зміст договору страхування життя має нематеріальну природу.

Страхування життя завжди можна розглядати як парі: або людина отримує виплату, або сплачує премію, не отримуючи нічого натомість. З цієї точки зору математика страхування життя є частиною теорії ймовірностей.

Оскільки страхування життя передбачає грошові виплати та страхові премії, воно також є частиною фінансового ринку та економіки. У цьому контексті слід зазначити, що існують види страхування, виплати, які не пов'язані між собою, наприклад, коли виплата залежить від результатів діяльності фонду, що фактично ґрунтується на сучасній теорії фінансових ринків.

З юридичної точки зору, договір страхування життя – це контракт між власником полісу та страховиком.

Як зазначалося вище, страхування життя характеризується своєю абстрактною сутністю та різноманіттям. Через цю абстрактність його вартість не є інтуїтивно очевидною. Це зумовлено, зокрема, тим, що поліс страхування життя зазвичай купується лише один або два рази протягом життя. Для порівняння, наприклад, людина купує буханець хліба регулярно, і тому має відчуття його справедливої вартості.

## 1.1. Модель страхування життя

Коли потрібно описати реальний світ за допомогою моделі, важливо застосовувати такий клас моделей, який є достатньо гнучким, щоб охопити реальні умови. На рис. 1.1 показано загальну схему страхової моделі. Тут ми розглядаємо застраховану особу, яка в кожний момент часу $t$ перебуває у стані $1, 2, \dots, n$. Наприклад, стан 1 може позначати, що особа жива.

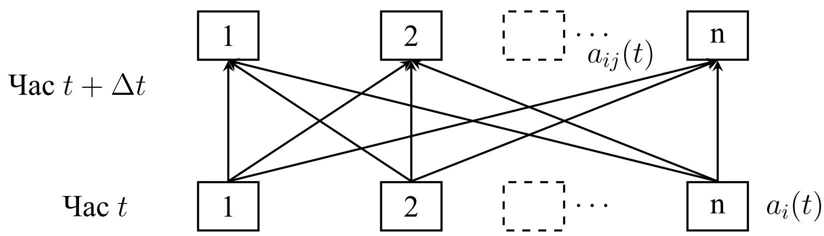


Рисунок 1.1 – Схема поліса від моменту $t$ до $t + \Delta t$

Стан особи описується стохастичним процесом $X_t(\omega) \in S = \{1, 2, \dots, n\}$. Коли застрахована особа залишається в одному стані або переходить у інший, здійснюється виплата, передбачена страховим полісом. Для цього існують функції $a_i(t)$ та $a_{ij}(t)$, які відповідають лініям на рисунку. Вони визначають суму, яку отримує застрахований, якщо він залишається у стані $i$ у момент часу $t$ (виплата $a_i(t)$), або якщо він переходить із стану $i$ у стан $j$ у момент часу $t$ (виплата $a_{ij}(t)$).

Далі ми введемо необхідні поняття для побудови цієї моделі. Розрізняють неперервну модель за часом, коли $(X_t)_{t\in T}$ визначено на підмножині $\mathbb{R}$, та дискретну модель за часом, коли $(X_t)_{t\in T}$ визначено на підмножині $\mathbb{N}$. Неперервна модель часу дає більш цікаві теоретичні результати, тоді як дискретна модель є зручнішою для практичних застосувань, тому ми розглянемо обидва варіанти.

**Означення 1.** *Позначимо через $S$ простір станів, який використовується для страхового полісу. Множина $S$ є скінченною.*

**Приклад 1.** *Для страхування життя або страхування капіталу часто використовується простір станів*

$$S = \{*, \dagger\}.$$

**Приклад 2.** *Для страхування від непрацездатності необхідно розглядати принаймні такі стани: живий (активний), мертвий і непрацездатний. Часто використовують більше станів, щоб отримати точнішу модель. Наприклад, у Швейцарії застосовується модель із станами $\{*, \dagger\}$ та множиною станів «особа стала непрацездатною у віці $x : x \in \mathbb{N}$».*

Маючи визначені стани, можна побудувати математичну модель для виплат (пільг). Для визначення моделі виплат, так званих *policy functions*, потрібно точніше задати шкалу часу. Ми визначимо дві різні шкали часу: дискретну, що часто використовується у практичних застосуваннях, та неперервну, яка дає аналітично точніші результати.

**Означення 2.**
- *$a_i(t)$ позначає кумулятивну суму виплат застрахованій особі до моменту часу $t$, за умови, що вона весь час перебувала у стані $i$. Функції $a_i(t)$ називаються узагальненими пенсійними виплатами. Ця функція має обмежену варіацію, то її можна записати у вигляді:*

$$a_i(t) = \int_0^t da_i(s).$$

- *$a_i(t)$ позначає виплати, які здійснюються у момент переходу із стану $i$ у стан $j$ у момент часу $t$. Такі виплати називаються узагальненими капітальними виплатами.*

У випадку дискретної шкали часу:
- $a_i^{\text{Pre}}(t)$ позначає пенсійну виплату, яка належить до моменту часу $t$, якщо застрахований перебуває у стані $i$ у момент $t$;
- $a_{ij}^{\text{Post}}(t)$ позначає капітальні виплати, що належать до переходу із стану $i$ у момент часу $t$ у стан $j$ у момент часу $t+1$. Припускається, що виплата здійснюється в кінці часового інтервалу.

Функції $a_i(t)$ відрізняються у неперервній та дискретній моделях часу. У першій (неперервній) моделі $a_i(t)$ позначає суму пенсійних виплат, здійснених до моменту часу $t$, подібно до показника кілометражу автомобіля. У другій (дискретній) моделі $a_i^{\text{Pre}}(t)$ позначає окрему пенсійну виплату у момент часу $t$.

## 1.2. Математичні резерви

Поточна вартість страхового полісу, так званий *математичний резерв*, повинна щорічно визначатися страховою компанією для складання річної звітності. Це необхідно, оскільки компанія має зарезервувати цю суму. Математичний резерв також є важливим для застрахованої особи, якщо вона вирішить розірвати свій поліс до моменту його закінчення.

**Означення 3.** *Детермінована функція виплат $A$ — це функція*

$$A : T \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto A(t),$$

*визначена на $T \subset \mathbb{R}$, що має такі властивості:*

1. *A є неперервною справа функцією (right continuous);*
2. *A має обмежену варіацію.*

*Значення $A(t)$ представляє загальну суму виплат від страховика застрахованому до моменту часу $t$. Функції виплат – це ті функції у структурі полісу, які відображають виплати для застрахованої особи.*

**Зауваження 1.** *Функції з обмеженою варіацією мають такі властивості:*

1. *Функція $A$ з обмеженою варіацією відповідає мірі на борелівській $\sigma-$алгебрі $\beta(\mathbb{R})$. Цю міру також позначають через $A$. Така міра називається мірою Стілтьєса. У нашому контексті вона також називається мірою виплат.*
2. *Якщо $A$ є функцією з обмеженою варіацією на $\mathbb{R}$, тоді існують дві додатні, зростаючі та обмежені функції $B$ і $C$, такі що $A = B - C$. У страховій моделі $B$ можна інтерпретувати як приплив (inflow), а $C$ — як відплив (outflow) грошових коштів. Це подання є єдиним, якщо міри, що відповідають $B$ і $C$, мають неперетинну підтримку.*
3. *Нехай $A$ є мірою, що відповідає функції з обмеженою варіацією на $\mathbb{R}$. Тоді $A$ можна єдиним чином розкласти на дискретну міру $\mu$ та неперервну міру $\psi$. Крім того, $\psi$ можна розкласти на частину, абсолютно неперервну щодо міри Лебега, та залишкову частину. Підтримка $\mu$ є зліченною множиною, оскільки $A$ є скінченною на обмежених множинах.*
4. *Якщо $A$ — функція з обмеженою варіацією і $T \in \sigma(\mathbb{R})$, тоді $A \times \chi_T$ також є функцією з обмеженою варіацією (де $\chi_T$ — індикатор множини $T$).*

Всі наведені властивості також справедливі для функцій виплат, оскільки вони є частковим випадком функцій з обмеженою варіацією. Розклад мір Стілтьєса буде корисним надалі, тому введемо наступне означення.

**Означення 4.** *[27] Нехай $f$ — функція з обмеженою варіацією, а $A$ — відповідна міра Стілтьєса. Тоді визначаємо:*

$$\mu_f := A.$$

*Ми знаємо, що цю міру можна єдиним чином розкласти у вигляді $A = B - C$, де $B$ і $C$ — позитивні міри з неперетинною підтримкою. Визначимо:*

$$A^+ := B, \qquad A^- := C.$$

*Крім того, міру Стілтьєса $A$ можна розкласти єдиним чином на $A = D + E$, де $D$ — дискретна, а $E$ — безперервна частина. Отже:*

$$A^{atom} := D, \qquad A^{cont} := E.$$

*Нехай $\mu$ — міра, абсолютно неперервна відносно міри Лебега $\lambda$. Тоді позначимо*

$$\frac{d\mu}{d\lambda}$$

*як густину Радона–Нікодима міри $\mu$ відносно $\lambda$.*

*Вищенаведені властивості дозволяють визначати значення детермінованих грошових потоків за допомогою ставки дисконтування. Нехай $\delta(\tau)$ — миттєва сила відсотка (миттєва ставка дисконту). Тоді дисконт-фактор:*

$$v(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(\tau)\, d\tau\right),\ v(s,t) = \frac{v(t)}{v(s)}.$$

**Означення 5 (Детермінований грошовий потік та його ціна** [27]**).** *Нехай $A$ — детермінований грошовий потік, а $t \in \mathbb{R}$. Тоді визначаємо:*

1. *Вартість грошового потоку $A$ у момент часу $t$ задається як*

$$V(t, A) := \frac{1}{v(t)} \int_0^\infty v(\tau)\, dA(\tau).$$

2. *Вартість майбутнього грошового потоку визначається як*

$$V^+(t, A) := V(t, A \times \mathbb{1}_{[t,\infty)}),$$

*де $\mathbb{1}_{[t,\infty)}$ — індикаторна функція для інтервалу $[t, \infty)$. $V^+(t, A)$ також називається проспективною вартістю грошового потоку або проспективним резервом.*

**Зауваження 2.**

1. *Ідея проспективного резерву полягає у визначенні поточної вартості майбутніх грошових потоків. Наприклад, виплата $\zeta$, що має бути здійснена через два роки, вносить у поточну вартість величину $v(2) \times \zeta$. Спочатку резерви визначаються для детермінованих грошових потоків. Для випадкових грошових потоків аналогічні величини визначають через умовні математичні сподівання.*
2. *У означенні неявно передбачається, що $v(t)$ є інтегровною відносно міри $A$, тобто $v \in L^1(A)$.*
3. *Рівність $A = A^{atom} + A^{cont}$ означає, що*

$$V(t, A) = V(t, A^{atom}) + V(t, A^{cont}).$$

*Таке представлення дозволяє використовувати різні методи доведення для дискретної та неперервної частин міри.*

**Означення 6.** ***(Стохастичний грошовий потік [27])*** *Стохастичний грошовий потік – це стохастичний процес $(X_t)_{t\in T}$, для якого майже всі траєкторії є функціями з обмеженою варіацією.*

Нехай $A$ — стохастичний процес з обмеженою варіацією, такий що відображення $t \mapsto A_t(\omega)$ є неперервно сталою функцією і зростаюче для кожного $\omega \in \Omega$. Тоді можна обчислити інтеграл

$$\int f(\tau)\, d\mu_{A(\omega)}(\tau)$$

для обмеженої борелівської функції $f$. Аналогічно, можна визначити інтеграл

$$\int f(\tau, \omega)\, d\mu_{A(\omega)}(\tau)$$

для $P$-майже всіх $\omega$, якщо $F_t = f(t, \omega)$ є обмеженою функцією, вимірною відносно добуткової $\sigma$-алгебри, яка визначається за наступним означенням:

**Означення 7.** *Нехай $(T, \mathcal{B}(T))$ та $(\Omega, \mathcal{F})$ — вимірні простори. Добуткова $\sigma$-алгебра на просторі $T \times \Omega$ визначається як*

$$\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F} = \sigma\big(\{A \times B : A \in \mathcal{B}(T),\ B \in \mathcal{F}\}\big),$$

*тобто як найменша $\sigma$-алгебра, що містить усі прямокутники вигляду $A \times B$.*

*Це означає, що функція залежить вимірно як від часу, так і від випадкового результату.*

**Означення 8.** *Нехай $(A_t)_{t\in T}$ — процес з обмеженою варіацією на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, а $F : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ — обмежена та вимірна відносно $\sigma$-алгебри функція. Тоді визначаємо*

$$(F \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t F(\tau, \omega)\, dA_\tau(\omega).$$

*Це співвідношення можна записати у символічній формі стохастичних диференціальних рівнянь:*

$$d(F \cdot A) = F\, dA.$$

Це означення дає змогу точно визначити стохастичні грошові потоки в страховій моделі.

**Означення 9.** ***(Грошові потоки полісу)*** *Розглянемо страховий поліс із простором станів $S$ та функціями виплат $a_{ij}(t)$ і $a_i(t)$. Стохастичні грошові потоки, що відповідають цьому полісу, визначаються так:*

$$dA_{ij}(t, \omega) = a_{ij}(t)\, dN_{ij}(t, \omega),$$
$$dA_i(t, \omega) = I_i(t, \omega)\, da_i(t),$$
$$dA = \sum_{i\in S} dA_i + \sum_{(i,j)\in S\times S,\, i\neq j} dA_{ij}.$$

*Величина $A_{ij}(t, \omega)$ є сумою випадкових грошових потоків, спричинених переходами із стану $i$ у стан $j$ до моменту часу $t$. Аналогічно, $A_i(t, \omega)$ є сумою випадкових грошових потоків, які є пенсійними виплатами за перебування у стані $i$. Та $I_i(t, \omega) = \mathbb{1}_{\{X_t(\omega)=i\}}$ є індикатором перебування* *процесу станів у стані $i$ в момент часу $t$. $N_{ij}(t,\omega)$ – процес підрахунку переходів зі стану $i$ у стан $j$ до моменту часу $t$.*

**Зауваження 3.** 1. *Величина $dA_{ij}(t,\omega)$ відповідає збільшенню зобов'язань через перехід зі стану $i$ у стан $j$. Таким чином, $A_{ij}(t,\omega)$ збільшується у момент $t$ на капітальну виплату $a_{ij}(t)$, якщо відбувається перехід $i \to j$ (тобто, якщо $N_{ij}(t)$ зростає на одиницю). Аналогічно, $dA_i(t)$ відповідає збільшенню зобов'язань, пов'язаних із перебуванням у стані $i$.*

2. *Інтеграли, описані в означеннях 6 та 8, є коректно визначеними, оскільки відповідні процеси за означенням мають обмежену варіацію. Крім того, функції виплат мають необхідну регулярність.*
3. *Величини $(F \cdot A)_t$ є вимірними для кожного $t$, тому математичне сподівання $E[(F \cdot A)_t]$ визначене. Так само визначені умовні математичні сподівання $E[(F \cdot A)_t \mid \mathcal{F}_s]$.*
4. *Таким чином, можна застосувати означення вартості грошового потоку до стохастичного випадку, отримуючи рівняння*

$$dV(t,A) = v(t)\,dA(t) = v(t)\left[\sum_{i\in S} I_i(t)\,da_i(t) + \sum_{(i,j)\in S,\, i\neq j} a_{ij}(t)\,dN_{ij}(t)\right].$$

5. *У дискретній марковській моделі протягом інтервалу $[t, t+1)$ можуть відбуватися не більше двох грошових потоків. По-перше, якщо поліс перебуває у стані $i$, то пенсійна виплата $a_i^{Pre}(t)$ здійснюється на початку інтервалу. По-друге, якщо відбувається перехід $i \to j$, то капітальна виплата $a_{ij}^{Post}(t)$ здійснюється наприкінці інтервалу. Таким чином*

$$\begin{aligned}
\Delta A_{ij}(t,\omega) &= \Delta N_{ij}(t,\omega)\, a_{ij}^{Post}(t),\\
\Delta A_i(t,\omega) &= I_i(t,\omega)\, a_i^{Pre}(t),\\
\Delta A(t,\omega) &= \sum_{i\in S} \Delta A_i(t,\omega) + \sum_{i,j\in S} \Delta A_{ij}(t,\omega),
\end{aligned}$$

*де $\Delta A(t)$ (так само як і $\Delta A_i, \Delta A_{ij}$) означає зміну величини $A(t)$ між моментами $t$ та $t+1$, тобто $\Delta A(t) := A(t+1) - A(t)$.*

**Означення 10.** ***(Проспективний резерв)*** *Нехай $A$ (і, за потреби, $v$) — стохастичні процеси на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, адаптовані до потоку $\sigma$-алгебр $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. У цьому випадку проспективний резерв визначається як*

$$V_{\mathbb{F}}^{+}(t,A) = \mathbb{E}\left[\, V^{+}(t,A) \mid \mathcal{F}_t \,\right].$$

*Слід зазначити, що ці резерви, як і звичайні математичні сподівання, можуть не існувати, тобто можуть бути нескінченними. Надалі ми завжди припускаємо, що $V_{\mathbb{F}}^{+}(t,A)$ та інші відповідні величини існують. Це припущення завжди виконується у практичних застосуваннях.*

*Для марковського ланцюга умовне математичне сподівання відносно $\mathcal{F}_t$ залежить лише від стану у момент часу $t$. Таким чином, додатково визначимо*

$$V_j^+(t, A) = \mathbb{E}\left[\, V^+(t, A) \mid X_t = j \,\right].$$

**Означення 11.** ***(Регулярна страхова модель)*** *Регулярна страхова модель складається з:*

1. *регулярного марковського ланцюга $(X_t)_{t\in T}$ з простором станів $S$;*
2. *функцій виплат $a_{ij}(t)$ та $a_i(t)$;*
3. *правосталих інтенсивностей відсоткової ставки $\delta_t(t)$, що мають обмежену варіацію.*

**Означення 12.** ***(Математичний резерв)*** *Математичний резерв — це сума коштів, яку страхова компанія повинна зарезервувати для покриття очікуваних зобов'язань з метою збереження платоспроможності. Припустимо, що інтенсивність відсоткової ставки має вигляд*

$$\delta_t = \sum_{j\in S} I_j(t)\,\delta_j(t).$$

*Тут $I_j(t) = \mathbb{1}_{\{X_t=j\}}$ є індикатором перебування процесу у стані $j$, а $\delta_j(t)$ – детермінована функція, що задає силу відсотка у цьому стані. Таким чином, $\delta_t$ є стохастичним процесом, який у кожний момент часу набуває значення, відповідного поточному стану системи. Тоді резерви, необхідні для грошових потоків, визначаються наступним чином.*

*Для перебування у стані $g \in S$ протягом інтервалу $T \in \sigma(\mathbb{R})$ за умови, що $X_t = j$,*

$$V_j(t, A_{gT}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{v(t)} \times \int_T v(\tau)\,dA_g(\tau)\,\middle|\, X_t = j\right].$$

*Аналогічно, для переходів зі стану $g$ у стан $h \in S$,*

$$V_j(t, A_{ghT}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{v(t)} \times \int_T v(\tau)\,dA_{gh}(\tau)\,\middle|\, X_t = j\right].$$

*Ми використовуємо позначення $V_j(t, A_g)$ та $V_j(t, A_{gh})$ для неперервних і перехідних частин відповідно.*

**Зауваження 4.** *Означення математичного резерву можна легко перенести на дискретну модель, замінивши інтеграли відповідними сумами:*

$$V_j(t, A_{gT}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{v(t)} \times \sum_{\tau\in T} v(\tau)\,\Delta A_g(\tau)\,\middle|\, X_t = j\right],$$

*а для переходів $g \to h \in S$:*

$$V_j(t, A_{ghT}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{v(t)} \times \sum_{\tau\in T} v(\tau+1)\,\Delta A_{gh}(\tau)\,\middle|\, X_t = j\right],$$

*де передбачається, що виплати завжди здійснюються у момент $\tau + 1$.*

*Отже, загальний резерв (або математичний резерв) для заданого стану $j$ визначається як:*

$$V_j(t, A) = \sum_{g \in S} V_j(t, A_g) + \sum_{g,h \in S,\, g \neq h} V_j(t, A_{gh})$$

*для неперервної моделі часу, та*

$$V_j(t, A) = \sum_{g \in S} V_j(t, A_g^{Pre}) + \sum_{g,h \in S} V_j(t, A_{gh}^{Post})$$

*для дискретної моделі.*

**Теорема 1** (Класична формула умовного сподівання для марковського ланцюга). *Нехай $(X_t)_{t \in T}$ — регулярний марковський ланцюг на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Нехай $i, j, k, l \in S$ та $s < t$, $T \in \sigma(\mathbb{R})$, де $T \subset [s, \infty)$. Тоді мають місце такі твердження:*

1. *Для будь-якої $a \in L^1(\mathbb{R})$:*

$$\mathbb{E}\left[\int_T a(\tau)\, dN_{jk}(\tau) \,\middle|\, X_s = i\right] = \int_T a(\tau)\, p_{ij}(s, \tau)\, \mu_{jk}(\tau)\, d\tau.$$

2. *Якщо $A$ — функція з обмеженою варіацією, то*

$$\mathbb{E}\left[\int_T I_j(\tau)\, dA(\tau) \,\middle|\, X_s = i\right] = \int_T p_{ij}(s, \tau)\, dA(\tau).$$

*Доведення.*

1. Сходинкові функції густо заповнюють $L^1(\mathbb{R})$, тому достатньо показати рівність для функцій виду $\mathbb{1}_{[a,b]}$. Нехай

$$h(t) = \mathbb{E}[N_{jk}(t) \mid X_s = i].$$

Тоді

$$h(t + \Delta t) - h(t) = \mathbb{E}[N_{jk}(t + \Delta t) - N_{jk}(t) \mid X_s = i] = \sum_{\ell \in S} p_{i\ell}(s, t)\, \mu_{\ell k}(t)\, \Delta t + o(\Delta t),$$

і тому

$$h'(t) = \sum_{\ell \in S} p_{i\ell}(s, t)\, \mu_{\ell k}(t).$$

Інтегрування цього рівняння з початковою умовою $h(0) = 0$ дає перше твердження.

2. Друге твердження випливає з перестановки порядку інтегрування за теоремою Фубіні.

**Зауваження 5.** *Ці результати також можна легко перевести у дискретну модель. Маємо рівності:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in T} a(\tau)\, \Delta N_{jk}(\tau) \,\middle|\, X_s = i\right] = \sum_{\tau \in T} a(\tau)\, p_{ij}(s, \tau)\, p_{jk}(\tau, \tau + 1),$$

*та*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in T} I_j(\tau)\, \Delta A(\tau) \,\middle|\, X_s = i\right] = \sum_{\tau \in T} p_{ij}(s, \tau)\, \Delta A(\tau).$$

**Теорема 2.** *Нехай виконуються припущення теореми 1. Тоді*

$$dM_{ij}(t) := dN_{ij}(t) - I_i(t)\,\mu_{ij}(t)\,dt$$

*є мартингалом.*

*Доведення. Маємо*

$$N_{ij}(t) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P), \qquad \int_0^t I_j(\tau)\,\mu_{ij}(\tau)\,d\tau \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

*що означає, що*

$$M_{ij}(t) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P).$$

*Далі потрібно показати, що*

$$\mathbb{E}[M_{ij}(t) \mid \mathcal{F}_s] = M_{ij}(s) \quad \text{для } s < t.$$

*Оскільки процеси $M$, $N$ та $I$ виводяться з $(X_t)_{t\in T}$, достатньо довести*

$$\mathbb{E}[M_{ij}(t) \mid X_s = k] = M_{ij}(s).$$

*Це справджується, бо*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{ij}(t) \mid X_s = k] - M_{ij}(s) &= \mathbb{E}\left[\int_s^t dM_{ij}(\tau)\,\middle|\, X_s = k\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t (dN_{ij}(\tau) - I_i(\tau)\,\mu_{ij}(\tau)\,d\tau)\,\middle|\, X_s = k\right] = 0,\end{aligned}$$

*де в останньому кроці використано теорему 1.*

**Теорема 3** (Умовні сподівання грошових потоків у багатостановій моделі)**.** *Нехай $a_{ij}$ та $a_i$ — функції виплат, а $(X_t)_{t\in T}$ — регулярний марковський ланцюг на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Тоді для фіксованих інтенсивностей відсоткової ставки ($\delta_i = \delta$) виконуються рівності:*

$$\mathbb{E}[V(t, A_jT) \mid X_s = i] = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau)\,p_{ij}(s,\tau)\,da_j(\tau),$$

$$\mathbb{E}[V(t, A_{jk}T) \mid X_s = i] = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau)\,a_{jk}(\tau)\,p_{ij}(s,\tau)\,\mu_{jk}(\tau)\,d\tau,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V(t, A_jS)\,V(t, A_lT) \mid X_s = i] = \frac{1}{v(t)^2}\Bigg[\int_{T\times S} v(\theta)\,v(\tau)\Big(&\chi_{\{\theta\le\tau\}}p_{ij}(s,\tau)\,p_{jl}(\theta,\tau)\\ &+ \chi_{\{\theta>\tau\}}p_{il}(s,\theta)\,p_{lj}(\tau,\theta)\Big)da_j(\theta)\,da_l(\tau)\Bigg],\end{aligned}$$

*і аналогічні рівності для $V(t, A_{jk}S)$ та $V(t, A_{lm}T)$.*

**Зауваження 6.** *Цю теорему також можна легко записати для дискретної моделі. Маємо:*

$$\mathbb{E}[V(t, A_{jT}) \mid X_s = i] = \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \in T} v(\tau)\, p_{ij}(s, \tau)\, a_j^{Pre}(\tau),$$

$$\mathbb{E}[V(t, A_{jkT}) \mid X_s = i] = \frac{1}{v(t)} \sum_{\tau \in T} v(\tau + 1)\, p_{ij}(s, \tau)\, p_{jk}(\tau, \tau + 1)\, a_{jk}^{Post}(\tau),$$

*де враховано, що для переходу $j \to k$ виплата $a_{jk}^{Post}(\tau)$ здійснюється наприкінці періоду.*

*Тут $t$ – момент оцінки резерву, $\tau \in T$ – майбутні моменти часу, за якими здійснюються виплати, а $p_{ij}(s, \tau)$ – ймовірності переходу між станами. Функції $a_j^{Pre}(\tau)$ та $a_{jk}^{Post}(\tau)$ описують відповідно виплати у стані та виплати при переходах.*

## 1.3. Диференціальне рівняння Тіле

Після введення математичного резерву природно перейти до питання про його динаміку в часі. З практичної точки зору важливо не лише знати значення резерву в окремий момент часу, але й розуміти, як він змінюється під впливом нарахування відсотків, поточних виплат та можливих переходів між станами.

Для цього у класичній актуарній математиці використовується диференціальне рівняння Тіле. Воно описує локальну зміну проспективного резерву в багатостановій моделі та дозволяє пов’язати резерв із функціями виплат, інтенсивностями переходів і силою відсотка.

Надалі для спрощення викладу розглядатимемо випадок резервів без стрибків. Це означає, що потоки виплат у станах є достатньо регулярними, а відповідні функції виплат можна описувати через густини відносно міри Лебега.

**Теорема 4.** ***(Рівняння Тіле)*** *Нехай $(X_t)_{t \in T}$, $a_{ij}$, $a_i$ та $\delta_t$ утворюють регулярну страхову модель. Крім того, нехай $da_g(t)$ є абсолютно неперервною відносно міри Лебега $\lambda$, тобто $da_g(t) = a_g(t)\, d\lambda$ (відтак функція виплат $A_g(t)$ є неперервною). За детермінованої сили відсотка $\nu(t)$ справджується:*

1. *$W_g^+(t)$ є неперервною для всіх $g \in S$, де $W_j^+(t)$ позначає проспективний математичний резерв у момент часу $t$ за умови, що процес перебуває у стані $j$, тобто очікувану дисконтовану вартість майбутніх виплат після моменту $t$.*
2. ***Рівняння Тіле.***

$$\frac{\partial}{\partial t} W_j^+(t) = -\,\nu(t) \left\{ a_j(t) + \sum_{g \neq j} \mu_{jg}(t)\, a_{jg}(t) \right\} \;+\; \mu_j(t)\, W_j^+(t) \;-\; \sum_{g \neq j} \mu_{jg}(t)\, W_g^+(t),$$

   *де $\mu_{jg}(t)$ — інтенсивність переходу $j \to g$, а $\mu_j(t) := \sum_{g \neq j} \mu_{jg}(t)$.*

3. ***Інтегральне подання (для $u > t$).***

$$W_j^+(t) = \frac{1}{v(t)} \left[ \int_t^u v(\tau)\, \overline{p}_{jj}(t, \tau) \left\{ a_j(\tau) + \sum_{g \neq j} \mu_{jg}(\tau)\, a_{jg}(\tau) \right\} d\tau \;+\; v(u)\, \overline{p}_{jj}(t, u)\, W_j^+(u) \right], \tag{1.1}$$

*де* $v(t) = \exp\Big(-\int_0^t \nu(\theta)\,d\theta\Big)$ *– дисконт-фактор, а* $\overline{p}_{jj}(t,\tau)$ *– ймовірність "залишитися у* $j$ *без переходу" на* $[t,\tau]$.

**Зауваження 7.** *Отримане рівняння 1.1 показує структуру резерву. Компоненти резерву мають такий економічний зміст:*

I) *Резерв для виплат у стані* $j$ *– пенсійні виплати, страхові премії тощо;*

II) *Резерви для переходів між станами:*

   a) *витрати на перехід (наприклад, страхова виплата при смерті);*

   b) *необхідний резерв у новому стані;*

III) *Резерв для випадку, коли застрахований залишається у стані* $j$ *після інтервалу* $[t,u]$.

## 1.4. Стохастичне дисконтування

**Теорема 5.** *Нехай* $(X_t)_{t\in T}$ *— регулярна страхова модель, а стохастичний процес процентної ставки* $r_t$. *Тоді для математичного резерву* $V_j^g(t)$ *виконується наступне рівняння в частинних похідних:*

$$\frac{\partial V_j^g}{\partial t} = r_t V_j^g - a_g(t) - \sum_{k\neq g}\mu_{gk}(t)\left\{a_{gk}(t) + V_k^g - V_j^g\right\} - \left[\frac{\partial V_j^g}{\partial Z}(\eta_Z - \sigma_Z\lambda) + \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\left(\sigma_Z\sigma_Z^\top\frac{\partial^2 V_j^g}{\partial Z^2}\right)\right].$$

**Зауваження 8.** *Отримане рівняння складається з трьох частин:*

1. ***Класична частина:***

$$r_t V_j^g - a_g(t) - \sum_{k\neq g}\mu_{gk}(t)\big\{a_{gk}(t) + V_k^g - V_j^g\big\},$$

*яка відповідає детермінованому випадку без стохастичних коливань ставки.*

2. ***Стохастична компонента процентної ставки:***

$$-\frac{\partial V_j^g}{\partial Z}(\eta_Z - \sigma_Z\lambda) + \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}\left(\sigma_Z\sigma_Z^\top\frac{\partial^2 V_j^g}{\partial Z^2}\right),$$

*яка враховує випадковість динаміки ставки дисконту, де* $\mathrm{trace}(\cdot)$ *позначає слід матриці, тобто суму її діагональних елементів. Відповідний доданок є узагальненням другого похідного члена з формули Іто для багатовимірного дифузійного процесу.*

3. *Додатковий член* $-\sigma_Z\lambda$, *з'являється внаслідок переходу до еквівалентної мартингальної міри, що використовується у фінансовій математиці для уникнення арбітражу. Якщо розрахунки проводяться у вихідній мірі, цей член зникає.*

**Приклад 3.** ***(Стохастичне дисконтування у моделі Васічека)***

*Розглянемо модель процентної ставки Васічека:*

$$dr_t = \alpha(\rho - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t,$$

*де параметри* $\alpha, \rho, \sigma > 0$, *а* $W_t$ *— вінерівський процес.*

*Функції дрифту та волатильності мають вигляд:*

$$\eta(r_t, t) = \alpha(\rho - r_t), \quad \sigma(r_t, t) = \sigma.$$

*Припустимо, що* $\lambda = \lambda(r_t, t)$. *Тоді фактор дисконту* $B_0(t)$ *дорівнює:*

$$B_0(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\, ds\right)\right] = G_t\, \exp(-H_t\, r_t),$$

*де* $\mathbb{Q}$ *позначає ризик-нейтральну міру, відносно якої дисконтовані ціни активів є мартингалами, що дозволяє визначати справедливу вартість майбутніх виплат як математичне сподівання дисконтованих грошових потоків,*

$$H_t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}, \qquad G_t = \exp\!\big((\rho - \tfrac{\lambda\sigma}{\alpha})H_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2 H_t^2\big)\,.$$

*Використовуючи цей результат у рівнянні Тіле, для поліса з виплатою в кінці строку отримаємо рівняння:*

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = (\mu_{x+t} + r_t)\Pi + \dot{p}_t - c_t\mu_{x+t} - \left[\frac{\partial \Pi}{\partial r}(\alpha(\rho - r_t) - \sigma\lambda) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}\right],$$

*де* $\mu_{x+t}$ *– інтенсивність смертності, а* $\dot{p}_t$ *і* $c_t$ *– відповідно потік премій та виплат. Останній доданок у правій частині є генератором дифузійного процесу процентної ставки у ризик-нейтральній мірі.*

## Висновки до розділу 1

У 1 розділі було розглянуто теоретичні основи страхування життя, які є необхідними для подальшої побудови стохастичної моделі страхового надлишку та його декомпозиції.

Окрему увагу приділено математичним резервам як одному з ключових інструментів оцінювання майбутніх зобов'язань страховика. Показано, що математичний резерв відображає поточну вартість майбутніх страхових виплат і премій, а його динаміка може описуватися за допомогою диференціального рівняння Тіле.

Також у розділі розглянуто стохастичне дисконтування, яке дозволяє враховувати випадкову зміну фінансових факторів у часі. Це є важливим для побудови більш реалістичної моделі оцінювання страхових зобов'язань, оскільки у практичних задачах страхування життя фінансові та біометричні ризики діють одночасно.

Таким чином, результати першого розділу формують теоретичну базу для подальшого дослідження стохастичного процесу страхового надлишку та застосування SU- й ISU-декомпозиції для виділення внесків окремих факторів ризику. Основні положення, пов'язані з декомпозицією ризику проспективного резерву у багатостанових моделях страхування життя, були представлені на XX Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука [24].

# 2. ПРИНЦИП ДЕКОМПОЗИЦІЇ РИЗИКУ

Перед тим як перейти до формального означення SU- та ISU-декомпозиції, введемо основні позначення. Вони потрібні для того, щоб описати, як окремі фактори ризику оновлюються в часі та як на основі цього будується розклад фінансового результату.

Використаємо постановку, подібну до тієї, що розглядалася у роботах [1, 2].

Нехай $X$ є $d$-вимірним семімартингалом, а $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ є природною фільтрацією процесу $X$. Нехай також $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ є фільтрованим імовірнісним простором, що задовольняє стандартні умови. Припускаємо, що $\mathcal{F}_0$ є тривіальною.

Позначимо через $\mathcal{X}$ множину всіх $\mathbb{F}$-семімартингалів. Елемент $X \in \mathcal{X}^d$ називається *базисом ризику*. Його компоненти називаються *факторами ризику*, *джерелами ризику* або *інформаційним базисом*.

Нехай $C_2$ позначає множину двічі диференційовних функцій з $\mathbb{R}^d$ у $\mathbb{R}$. Для $f \in C_2$ через $f_i$ та $f_{ij}$, де $i, j = 1, \dots, d$, позначаємо частинні похідні $\partial_i f$ та $\partial_i \partial_j f$.

Нехай $F : \mathcal{X}^d \to \mathcal{X}$ є відображенням. Наприклад, $F$ може бути задане у вигляді

$$F(Y) = \big(f(Y(t))\big)_{t\geq 0}, \qquad Y \in \mathcal{X}^d,$$

для деякої функції $f \in C_2$. У подальшому метою буде розкласти процес $F(X)$ на внески окремих компонент процесу $X$.

Нехай $a \wedge b$ позначає мінімум двох дійсних чисел $a$ і $b$. Для скаляра $s \geq 0$ та вектора $\tau \in \mathbb{R}^d_+$ визначимо зупинені семімартингали

$$X^s = (X_1^s, \dots, X_d^s) \qquad \text{та} \qquad X^\tau = (X_1^{\tau_1}, \dots, X_d^{\tau_d}).$$

Позначимо $i$-тий рядок дійсної матриці $M$ розміру $d \times d$ так:

$$M(i, :) = (M_{i,1}, \dots, M_{i,d}).$$

Для послідовності $(s_l)_{l\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ та $\beta \in \{0,1\}^d$ позначимо через $s_{l+\beta}$ вектор

$$s_{l+\beta} = (s_{l+\beta_1}, \dots, s_{l+\beta_d}) \in \mathbb{R}^d.$$

Для $\beta \in \{0,1\}^d$ та $s \in (0, t]$ визначимо

$$X(s * \beta) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \big(X_1(s - \varepsilon(1-\beta_1)), \dots, X_d(s - \varepsilon(1-\beta_d))\big).$$

Іншими словами, $X(s * \beta)$ є лівою границею процесу $X$ у момент часу $s$ для тих координат, для яких відповідна компонента $\beta$ дорівнює нулю. Для координат, де $\beta_i = 1$, береться значення процесу у момент часу $s$. Саме такі позначення дозволяють коректно описати послідовне оновлення факторів ризику.

## 2.1. SU-декомпозиція

Після введення основних позначень перейдемо до ідеї декомпозиції. Нехай потрібно розкласти процес $F(X)$ на внески окремих факторів ризику. Такий розклад дозволяє зрозуміти, яка частина зміни фінансового результату пов'язана з кожним фактором.

Декомпозицією процесу $F(X)$ називається $d$-вимірний процес

$$D = (D_1, \dots, D_d).$$

Декомпозиція називається *адитивною* або *точною*, якщо

$$F(X) = D_1 + \dots + D_d.$$

Компоненту $D_i$ інтерпретуємо як внесок фактора $X_i$ у процес $F(X)$, де $i = 1, \dots, d$. Загалом принцип декомпозиції не обов'язково має бути адитивним. Наприклад, метод "один за раз" (*one-at-a-time decomposition*) не враховує залишкові ефекти взаємодії між факторами [2, 5]. Водночас адитивність є бажаною властивістю в багатьох застосуваннях, оскільки вона дозволяє повністю пояснити зміну досліджуваного процесу через суму окремих внесків [2, 7].

Перед формальним означенням SU-декомпозиції розглянемо простий випадок $d = 2$. Нехай потрібно декомпонувати процес

$$\big(f(X_1(t), X_2(t))\big)_{t\geq 0}$$

відносно факторів $X_1$ та $X_2$, де $f \in C_2$.

Нехай

$$\gamma = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < t = s_n < s_{n+1} < \cdots\}$$

є необмеженим розбиттям проміжку $[0, \infty)$. Тоді різницю $f(X(t)) - f(X(0))$ можна подати як суму послідовних приростів:

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) = {} & f(X_1(s_1), X_2(s_0)) - f(X_1(s_0), X_2(s_0)) \\ & + f(X_1(s_1), X_2(s_1)) - f(X_1(s_1), X_2(s_0)) \\ & + \cdots \\ & + f(X_1(s_n), X_2(s_{n-1})) - f(X_1(s_{n-1}), X_2(s_{n-1})) \\ & + f(X_1(s_n), X_2(s_n)) - f(X_1(s_n), X_2(s_{n-1})). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тобто період $[0, t]$ поділяється на менші проміжки $(s_j, s_{j+1}]$. На кожному такому проміжку спочатку оновлюється фактор ризику $X_1$, тоді як фактор $X_2$ залишається фіксованим. Після цього оновлюється $X_2$, а $X_1$ уже вважається фіксованим.

Запишемо (2.1) у коротшій формі. Нехай

$$F(X)(t) := f(X(t)), \qquad t \geq 0.$$

Тоді

$$F(X)(t) - F(X)(0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_l}\right)(t) - F\left(X_1^{s_l}, X_2^{s_l}\right)(t) \right]$$
$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_{l+1}}\right)(t) - F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_l}\right)(t) \right]. \tag{2.2}$$

Першу суму в правій частині (2.2) інтерпретуємо як внесок фактора $X_1$ у зміну

$$f(X(t)) - f(X(0)).$$

Другу суму інтерпретуємо як внесок фактора $X_2$.

Можна також змінити порядок оновлення факторів. Тобто на кожному проміжку спочатку оновлювати $X_2$, а потім $X_1$. У випадку $d = 2$ існують дві можливі SU-декомпозиції.

**Означення 13** (SU-декомпозиція, випадок $d = 2$)**.** *Нехай*

$$\gamma = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots\}$$

*є необмеженим розбиттям проміжку* $[0, \infty)$. *SU-підхід відносно розбиття* $\gamma$ *визначає дві декомпозиції*

$$D^{SU} = (D_1^{SU}, D_2^{SU}) \qquad \textit{та} \qquad D^{SU'} = (D_1^{SU'}, D_2^{SU'})$$

*процесу* $F(X)$ *для* $t \geq 0$ *такими формулами:*

$$D_1^{SU}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_l}\right)(t) - F\left(X_1^{s_l}, X_2^{s_l}\right)(t) \right],$$

$$D_2^{SU}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_{l+1}}\right)(t) - F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_l}\right)(t) \right],$$

*а також*

$$D_1^{SU'}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(X_1^{s_{l+1}}, X_2^{s_{l+1}}\right)(t) - F\left(X_1^{s_l}, X_2^{s_{l+1}}\right)(t) \right],$$

$$D_2^{SU'}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ F\left(X_1^{s_l}, X_2^{s_{l+1}}\right)(t) - F\left(X_1^{s_l}, X_2^{s_l}\right)(t) \right].$$

Процеси $D_i^{SU}$ та $D_i^{SU'}$ описують внесок фактора $X_i$, де $i = 1, 2$. Отже, у SU-декомпозиції внесок фактора залежить від того, в якому порядку оновлюються фактори ризику.

Далі введемо SU-декомпозицію для довільної кількості факторів. Нехай $d \in \mathbb{N}$. Визначимо матрицю $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Це позначення узгоджується з підходом, наведеним у [5]. Нехай $\pi \in \sigma_d$, де $\sigma_d$ є множиною всіх $d!$ перестановок множини $\{1, \dots, d\}$. Визначимо матрицю $B^\pi$ за формулою

$$B^\pi_{i,j} = A_{\pi(i),\pi(j)}, \qquad i, j = 1, \dots, d.$$

Матриця $B^\pi$ переставляє рядки та стовпці матриці $A$ відповідно до перестановки $\pi$. Нехай

$$C^\pi = B^\pi - I,$$

де $I$ є одиничною матрицею. Тоді матриці $C^\pi$ та $B^\pi$ збігаються всюди, крім головної діагоналі. На головній діагоналі матриця $B^\pi$ має одиниці, а матриця $C^\pi$ має нулі.

**Приклад 4.** *Нехай $d = 3$, а перестановка $\pi \in \sigma_d$ задана так:*

$$\pi(1) = 1, \qquad \pi(2) = 3, \qquad \pi(3) = 2.$$

*Тоді*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Означення 14** (SU-декомпозиція, $d \in \mathbb{N}$)**.** *Нехай*

$$\gamma = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots\}$$

*є необмеженим розбиттям проміжку $[0, \infty)$. SU-підхід відносно розбиття $\gamma$ визначає множину з $d!$ декомпозицій процесу $F(X)$ за формулою*

$$D_i^{SU,\pi}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ F\left(X^{s_l + B^\pi(i,:)}\right)(t) - F\left(X^{s_l + C^\pi(i,:)}\right)(t) \right\}, \qquad t \geq 0,$$

*де $i = 1, \dots, d$, а $\pi \in \sigma_d$.*

**Зауваження 9.** *Якщо $\pi = id$, то $B^\pi = A$, і SU-декомпозиція зводиться до підходу, наведеного у [2, 3]. Неважко побачити, що наведене означення узагальнює випадок $d = 2$.*

*За допомогою сум послідовних приростів можна показати, що SU-декомпозиція є адитивною, якщо*

$$F(X^s)(t) = F(X)(t \wedge s), \qquad s, t \geq 0.$$

*Ця умова, зокрема, виконується у випадку*

$$F(X)(t) = f(X(t)), \qquad t \geq 0.$$

## 2.2. ISU-декомпозиція

Після означення SU-декомпозиції перейдемо до її граничної версії. Саме ця гранична версія називається ISU-декомпозицією. Її ідея полягає в тому, що фактори ризику оновлюються не на фіксованих великих проміжках часу, а на все дрібніших розбиттях. У границі це дозволяє отримати декомпозицію, яка вже не залежить від конкретного розбиття часу.

У роботі [2] ISU-декомпозиція визначається за допомогою скінченних розбиттів, які можуть бути різними для кожного проміжку $[0, t]$, $t \geq 0$. У цій роботі зручніше використовувати підхід з нескінченними розбиттями, як у [3], що працює на всій часовій прямій.

Нехай

$$\gamma^n = \{0 = s_0^n < s_1^n < \cdots\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

є зростаючою послідовністю необмежених розбиттів проміжку $[0, \infty)$. Це означає, що

$$\gamma^n \subset \gamma^{n+1}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Крім того, припускаємо, що довжини кроків цих розбиттів прямують до нуля, тобто

$$\lim_{n \to \infty} \sup_k |s_{k+1}^n - s_k^n| = 0.$$

**Означення 15** (ISU-декомпозиція)**.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, а $D^{SU,\pi,n}$ є SU-декомпозицією процесу $F(X)$ відносно перестановки $\pi \in \sigma_d$ та розбиття $\gamma^n$.*

*Якщо для всіх $i \in \{1, \ldots, d\}$ та $t \geq 0$ існують границі*

$$D_i^{ISU,\pi}(t) = \lim_{n \to \infty} D_i^{SU,\pi,n}(t)$$

*за ймовірністю, то процес*

$$D^{ISU,\pi} = (D_1^{ISU,\pi}, \ldots, D_d^{ISU,\pi})$$

*називається ISU-декомпозицією процесу $F(X)$ відносно порядку $\pi$ та послідовності розбиттів $(\gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Якщо ISU-декомпозиція існує, то вона є єдиною з точністю до модифікацій. Далі наведемо достатні умови, які гарантують існування такої декомпозиції.

Для одновимірного семімартингалу $Z$ позначимо його стрибок у момент часу $t$ через

$$\Delta Z(t) = Z(t) - Z(t-), \qquad t \geq 0.$$

Для процесів $X_i$ та $Y_j$ визначимо неперервну частину їх квадратичної коваріації:

$$[X_i, Y_j]^c = [X_i, Y_j] - \sum_{0 \leq s \leq \cdot} \Delta X_i(s) \Delta Y_j(s), \qquad i, j = 1, \ldots, d, \quad X, Y \in \mathcal{X}.$$

**Теорема 6** (Існування ISU-декомпозиції)**.** *Нехай $f \in C_2$. Тоді ISU-декомпозиція процесу*

$$\big(f(X_t)\big)_{t \geq 0}$$

*існує для кожної перестановки $\pi \in \sigma_d$ та кожної зростаючої послідовності необмежених розбиттів $[0, \infty)$, довжини кроків яких прямують до нуля.*

*Для $i = 1, \dots, d$ та $t \geq 0$ вона майже напевно задається формулою*

$$
\begin{aligned}
D_i^{ISU,\pi}(t) = &\int_0^t f_i(X(s-))\, dX_i(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f_{ii}(X(s-))\, d[X_i, X_i]^c(s) \\
&+ \sum_{\substack{j=1 \\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} \int_0^t f_{ij}(X(s-))\, d[X_i, X_j]^c(s) \\
&+ \sum_{0<s\leq t} \left\{ f\big(X(s * B^\pi(i,:))\big) - f\big(X(s * C^\pi(i,:))\big) - f_i(X(s-))\Delta X_i(s) \right\}. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Формула (2.3) має зрозумілу інтерпретацію. Перший доданок описує прямий вплив фактора $X_i$. Другий доданок враховує неперервну квадратичну варіацію цього фактора. Третій доданок відповідає взаємодії фактора $X_i$ з іншими факторами, які оновлюються раніше відповідно до порядку $\pi$. Остання сума враховує стрибки процесу $X$.

Таким чином, ISU-декомпозиція є граничною формою SU-декомпозиції. Вона дає змогу розкласти зміну процесу $F(X)$ на внески окремих факторів ризику в неперервному часі. На відміну від звичайної SU-декомпозиції, вона є більш стабільною щодо вибору часової сітки, оскільки отримується як границя при подрібненні розбиття.

Далі використаємо таке спостереження. Має місце рівність

$$
\begin{aligned}
f\big(X(s * B(i,:))\big) = f(X(s-)) + &\sum_{\substack{h=1 \\ \pi(h)\leq\pi(i)}}^{d} f_h(X(s-))\Delta X_h(s) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{h,j=1 \\ \pi(h),\pi(j)\leq\pi(i)}}^{d} f_{hj}(X(s-))\Delta X_h(s)\Delta X_j(s) + R^B(s), \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

де $R^B(s)$ є залишковим членом розкладу Тейлора.

Аналогічно можна записати розклад для $f\big(X(s * C(i,:))\big)$, замінюючи $B$ на $C$. Оскільки $C$ та $B$ відрізняються тільки тим, що в $C$ відсутня компонента, яка відповідає $X_i$, то після віднімання отримаємо

$$
f\big(X(s * B(i,:))\big) - f\big(X(s * C(i,:))\big) = f_i(X(s-))\Delta X_i(s) + \Psi(s), \qquad (2.5)
$$

де $\Psi(s)$ містить лише квадратичні члени вигляду $\Delta X_h(s)\Delta X_j(s)$.

Тепер розглянемо другу суму у правій частині відповідної суми послідовних приростів. Для цього розкладемо функцію $f$ в околі точки $X^{0,l}$ за формулою Тейлора. Маємо

$$\begin{aligned} f(X^{B,l}) - f(X^{C,l}) = \sum_{h=1}^{d} f_h(X^{0,l})\delta X_h^{B,l} + \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{d} f_{hj}(X^{0,l})\delta X_h^{B,l}\delta X_j^{B,l} + R^{B,l} \\ - \sum_{h=1}^{d} f_h(X^{0,l})\delta X_h^{C,l} - \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{d} f_{hj}(X^{0,l})\delta X_h^{C,l}\delta X_j^{C,l} - R^{C,l}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Враховуючи структуру матриць $B$ та $C$, це можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} f(X^{B,l}) - f(X^{C,l}) = f_i(X^{0,l})\delta X_i^{1,l} + \frac{1}{2} f_{ii}(X^{0,l})(\delta X_i^{1,l})^2 \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} f_{ij}(X^{0,l})\delta X_i^{1,l}\delta X_j^{1,l} + R^{B,l} - R^{C,l}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Тут залишковий член має вигляд

$$R^{B,l} = \frac{1}{2}\sum_{h,j=1}^{d}\big(f_{hj}(\xi^{B,l}) - f_{hj}(X^{0,l})\big)\delta X_h^{B,l}\delta X_j^{B,l},$$

де для деякого $\theta \in [0,1]$

$$\xi^{B,l} = \theta X^{B,l} + (1-\theta)X^{0,l}.$$

Залишковий член $R^{C,l}$ визначається аналогічно.

Після підсумовування за відповідними індексами отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{l\in A_\alpha^c}\{f(X^{B,l}) - f(X^{C,l})\} = \sum_{l\in\mathbb{N}_0} f_i(X^{0,l})\delta X_i^{1,l} + \frac{1}{2}\sum_{l\in\mathbb{N}_0} f_{ii}(X^{0,l})(\delta X_i^{1,l})^2 \\ + \sum_{l\in\mathbb{N}_0}\sum_{\substack{j=1 \\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} f_{ij}(X^{0,l})\delta X_i^{1,l}\delta X_j^{1,l} \\ - \sum_{l\in A_\alpha}\Bigg\{ f_i(X^{0,l})\delta X_i^{1,l} + \frac{1}{2} f_{ii}(X^{0,l})(\delta X_i^{1,l})^2 \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} f_{ij}(X^{0,l})\delta X_i^{1,l}\delta X_j^{1,l}\Bigg\} + \sum_{l\in A_\alpha^c} R^{B,l} - \sum_{l\in A_\alpha^c} R^{C,l}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Перші три суми у правій частині збігаються при подрібненні розбиття до відповідних стохастичних інтегралів та квадратичних коваріацій. Четверта сума збігається до

$$-\sum_{s\in A_\alpha}\left\{f_i(X(s-))\Delta X_i(s)+\frac{1}{2}f_{ii}(X(s-))(\Delta X_i(s))^2+\sum_{\substack{j=1\\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} f_{ij}(X(s-))\Delta X_i(s)\Delta X_j(s)\right\}. \tag{2.9}$$

Додаючи цей вираз до суми, яка відповідає стрибкам, отримуємо

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in A_\alpha}\{f(X(s*B(i,:)))-f(X(s*C(i,:)))-f_i(X(s-))\Delta X_i(s)\}\\ &\quad-\sum_{s\in A_\alpha}\frac{1}{2}f_{ii}(X(s-))(\Delta X_i(s))^2-\sum_{s\in A_\alpha}\sum_{\substack{j=1\\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} f_{ij}(X(s-))\Delta X_i(s)\Delta X_j(s).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Оскільки функція $f$ та всі її похідні досягають максимуму на компактній множині, наведені суми є абсолютно збіжними. При переході $\alpha\to 0$ маємо

$$\begin{aligned}&\sum_{0<s\le t}\{f(X(s*B(i,:)))-f(X(s*C(i,:)))-f_i(X(s-))\Delta X_i(s)\}\\ &\quad-\sum_{0<s\le t}\frac{1}{2}f_{ii}(X(s-))(\Delta X_i(s))^2-\sum_{0<s\le t}\sum_{\substack{j=1\\ \pi(j)<\pi(i)}}^{d} f_{ij}(X(s-))\Delta X_i(s)\Delta X_j(s).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Останнім кроком потрібно розглянути залишкові члени. Застосовуючи ті самі аргументи, що і в доведенні класичної формули Іто [13], можна показати, що залишок прямує до нуля. Це випливає з рівномірної неперервності других похідних $f_{hj}$ на компактній множині. Тому для кожного $\varepsilon>0$ існує $\eta>0$ таке, що для всіх $h,j$

$$|f_{hj}(x)-f_{hj}(y)|<\varepsilon,\qquad x,y\in \mathrm{conv}(M_\omega),\qquad |x-y|<\eta.$$

Звідси випливає, що суми залишкових членів можна зробити як завгодно малими. Отже, вони не впливають на граничний результат, і формула ISU-декомпозиції доведена.

Наведений нижче приклад показує, що умова $f\in C_2$ у теоремі 6 є важливою для існування ISU-декомпозиції.

**Приклад 5.** *Нехай $Z$ є стохастичним процесом з незалежними приростами і $Z_0=0$. Нехай стрибки процесу $Z$ можуть відбуватися лише у фіксовані моменти часу*

$$J=\{2-l^{-1},\ l\in\mathbb{N}\}.$$

*Для кожного $l\in\mathbb{N}$ процес має стрибок розміру $l^{-1}$ з однаковою ймовірністю вгору або вниз. Між стрибками процес $Z$ залишається сталим. Тоді $Z$ є семімартингалом.*

*Нехай*

$$f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

*Тоді* $f \notin C_2$.

*Нехай* $(s_l^n)_{l\in\mathbb{N}}$ *є послідовністю необмежених розбиттів проміжку* $[0,\infty)$ *з довжинами кроків, що прямують до нуля, такою, що множина* $\{s_l^n,\ l \in \mathbb{N}\}$ *містить* $n$ *найменших елементів множини* $J$*, але перетин з проміжком*

$$(2 - n^{-1}, 2]$$

*є порожнім. Нехай* $X = (Z, Z)$*. Тоді для* $t \geq 2$ *виконується*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left\{ f\left(X_1^{s_{l+1}^n}(t), X_2^{s_l^n}(t)\right) - f\left(X_1^{s_l^n}(t), X_2^{s_l^n}(t)\right) \right\} = \sum_{l=1}^{n} l^{-1}.$$

*Остання сума розбігається при* $n \to \infty$*. Отже, у цьому прикладі ISU-декомпозиція не існує.*

## Висновки до розділу 2

У другому розділі було розглянуто основні принципи декомпозиції ризику, які використовуються для розкладу фінансового результату на внески окремих факторів. Зокрема, проаналізовано SU-декомпозицію, що ґрунтується на послідовному оновленні факторів ризику.

Показано, що SU-декомпозиція дозволяє подати зміну досліджуваного процесу як суму окремих приростів, кожен з яких відповідає певному фактору ризику. Водночас такий підхід залежить від порядку оновлення факторів, що може впливати на отримані результати.

Для подолання цієї залежності було розглянуто ISU-декомпозицію, яка виникає як граничний випадок SU-декомпозиції при подрібненні часової сітки. Такий підхід дозволяє отримати більш стійкий та інтерпретований розклад, який краще підходить для моделей у неперервному часі.

Отже, результати другого розділу формують математичну основу для подальшого застосування SU- та ISU-декомпозиції до стохастичної моделі страхового надлишку.

# 3. СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ СТРАХОВОГО НАДЛИШКУ

Побудовані у попередньому розділі моделі дозволяють описати математичний резерв як очікувану приведену вартість майбутніх страхових виплат. Однак такі підходи не дають змоги детально проаналізувати вплив окремих джерел ризику на динаміку фінансового результату страховика.

Зокрема, у реальних умовах як фінансові фактори (процентні ставки), так і демографічні процеси (смертність, переходи між станами) мають стохастичний характер, що потребує більш загального підходу до моделювання.

У зв'язку з цим доцільно перейти до стохастичної моделі страхового надлишку, яка дозволяє врахувати випадковість грошових потоків та побудувати узгоджений підхід до декомпозиції ризику. Саме в рамках такої моделі вводиться процес переоцінки та формулюється задача розкладу фінансового результату на внески окремих факторів ризику.

## 3.1. Процес страхового надлишку

У цьому підрозділі вводиться стохастична модель, яка описує динаміку грошових потоків страховика та дозволяє перейти до аналізу структури ризику. На відміну від класичних детермінованих підходів, розглянута модель враховує випадковість як фінансових, так і демографічних факторів.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ – повний фільтрований імовірнісний простір, де $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ задовольняє звичайні умови. Якщо не зазначено інше, усі процеси далі вважаються $\mathbb{F}$-адаптованими та cadlag.

Розглянемо скінченний часовий проміжок $[0, T]$, де $T < \infty$. Нехай $C = \{C(t)\}_{t\in[0,T]}$— процес кумулятивного грошового потоку страховика, який майже напевно має скінченну варіацію, тобто

$$\mathcal{V}_0^T\big(C(\cdot, \omega)\big) < \infty \quad \text{для майже всіх } \omega \in \Omega,$$

де $\mathcal{V}_0^T$ позначає повну варіацію на інтервалі $[0, T]$. Інтеграли відносно процесу $C$ розуміються у сенсі Лебега–Стілтьєса.

Нехай $\kappa = \{\kappa(t)\}_{t\in[0,T]}$– строго додатний $\mathbb{F}$-семімартингал такий, що $\kappa(0) = 1$, а процес $\kappa^{-1}$ також є семімартингалом. Процес $\kappa$ інтерпретується як фактор накопичення. Для

$$0 \leq s \leq t \leq T$$

визначимо стохастичну функцію накопичення

$$D(t, s) := \frac{\kappa(t)}{\kappa(s)},$$

яка переводить вартість грошового потоку з моменту часу $s$ у момент часу $t$.

*Активи.* Процес активів визначається як

$$A(t) := -\int_0^t D(t,s)\,dC(s), \qquad t \in [0,T].$$

Цей інтеграл є коректно визначеним як стохастичний інтеграл Лебега–Стілтьєса, оскільки процес $C$ має скінченну варіацію, а процес $D(t,\cdot)$ є адаптованим та локально обмеженим.

*Зобов'язання.* Припустимо, що грошові потоки є інтегровними, тобто

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \kappa(s)^{-1}|dC(s)|\right] < \infty.$$

Тоді ризик-нейтральна вартість зобов'язань визначається як

$$L(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T D(t,s)\,dC(s)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right], \tag{3.1}$$

де $\mathbb{Q}$ — еквівалентна мартингальна міра, відносно якої процес $\kappa^{-1}A$ є мартингалом.

*Надлишок.* Процес страхового надлишку визначається стандартним чином:

$$S(t) := A(t) - L(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

*Дисконтований надлишок.* Визначимо дисконтований процес

$$\widetilde{S}(t) := \frac{S(t)}{\kappa(t)}, \qquad t \in [0,T].$$

Тоді, за стандартними аргументами ризик-нейтрального оцінювання, для

$$0 \le t \le u \le T$$

процес $\widetilde{S}$ є $\mathbb{Q}$-мартингалом. Отже, існує $\mathcal{F}_t$-вимірний процес

$$V = \{V(t)\}_{t\in[0,T]}$$

такий, що

$$S(t) = \kappa(t)V(t), \qquad t \in [0,T],$$

де

$$V(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{S}(T)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right].$$

Оскільки процес $V$ є мартингалом, подальша декомпозиція буде виконуватись саме для цього процесу.

*Стохастична інтенсивність смертності.* Припускаємо, що біометричний ризик моделюється процесом підрахунку

$$N = \{N(t)\}_{t\in[0,T]}$$

зі стохастичною інтенсивністю

$$\lambda = \{\lambda_t\}_{t\in[0,T]},$$

тобто процесом Кокса (див., наприклад, [19, 20]).

Під ризик-нейтральною мірою $\mathbb{Q}$ інтенсивність смертності $\lambda$ моделюється дифузійним процесом Кокса–Інгерсолла–Росса (CIR) (див. [23])

$$d\lambda_t = a(\bar{\lambda} - \lambda_t)\,dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}\,dW_t^{\mathbb{Q}},$$

де $a > 0$ – швидкість повернення до середнього рівня, $\bar{\lambda} > 0$ — довгострокове середнє значення інтенсивності, а $\sigma > 0$ — параметр волатильності.

CIR-модель забезпечує невід'ємність процесу інтенсивності, що є необхідним для її інтерпретації як інтенсивності смертності. Зокрема, якщо виконується умова Феллера $2a\bar{\lambda} \geq \sigma^2$, то процес залишається строго додатним. В іншому випадку нульова межа може бути досяжною, однак процес все одно залишається невід'ємним. Параметри процесу під мірою $\mathbb{Q}$ можуть відрізнятися від відповідних параметрів під фізичною мірою $\mathbb{P}$ через зміну міри за теоремою Гірсанова [14].

Додатково припускаємо, що вся випадковість у моделі породжується скінченним набором базових стохастичних факторів $Z = (N, \lambda, r, Y)$, які породжують фільтрацію $\mathbb{F}$, тобто

$$\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, \lambda_s, r_s, Y_s : s \leq t) \vee \mathcal{N}.$$

Тут $\mathcal{N}$ — $\sigma$-алгебра всіх $\mathbb{P}$-нульових множин, $r$ описує ризик процентної ставки, а $Y$ позначає додаткові фінансові фактори ризику.

Припускаючи, що процес $V(t)$ залежить лише від траєкторій процесу $Z$ на проміжку $[0, t]$, шукатимемо процеси

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_m,$$

такі, що

$$V(t) = V(0) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(t), \qquad t \in [0, T], \tag{3.3}$$

де $\Delta_i(t)$ інтерпретується як внесок відповідного фактора ризику.

Зокрема, біометричний ризик розкладається на:

– компоненту, пов'язану з процесом підрахунку $N$;
– компоненту, породжену стохастичною динамікою інтенсивності смертності $\lambda$.

Відповідно,

$$S(t) = \kappa(t)V(0) + \kappa(t)\sum_{i=1}^{m} \Delta_i(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Представлення (3.4) є основою для подальшої побудови SU- та ISU-декомпозицій.

## 3.2. Принцип SU- та ISU-декомпозиції для стохастичної моделі

Побудована у попередньому підрозділі модель дозволяє описати динаміку страхового надлишку в умовах наявності фінансового та біометричного ризиків. Однак для подальшого аналізу важливо не лише дослідити поведінку процесу надлишку загалом, а й виділити внесок окремих джерел ризику у його динаміку.

З цією метою далі розглядається принцип SU- та ISU-декомпозиції, який дозволяє подати процес переоцінки у вигляді суми компонент, кожна з яких відповідає певному фактору ризику. Такий підхід забезпечує більш детальну інтерпретацію структури страхового надлишку та дозволяє окремо аналізувати вплив фінансових і біометричних факторів.

Нехай $Z = (N, \lambda, r, Y)$ — вектор стохастичних факторів ризику, що породжує фільтрацію $\mathbb{F}$, де $N$ — процес підрахунку смертей, $\lambda$ — стохастична інтенсивність смертності, $r$ описує фактор процентної ставки, а $Y$ позначає додаткові фінансові фактори.

Позначимо через $Z^{\langle t\rangle} := (Z^1_{\cdot\wedge t}, \ldots, Z^m_{\cdot\wedge t})$ вектор факторних процесів, зупинених у момент часу $t$. Процес переоцінки визначається як

$$V(t) = \Psi\big(Z^{\langle t\rangle}\big), \quad t \geq 0,$$

де $\Psi : \mathcal{D}([0,T]; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ — вимірний функціонал на просторі траєкторій.

Для виділення внесків окремих факторів введемо функцію

$$H(t_1, \ldots, t_m) := \Psi\big(Z^1_{\cdot\wedge t_1}, \ldots, Z^m_{\cdot\wedge t_m}\big), \quad t_1, \ldots, t_m \geq 0,$$

яку будемо називати поверхнею переоцінки. Зокрема,

$$V(t) = H(t, \ldots, t), \quad t \geq 0.$$

З інтерпретаційної точки зору значення $H(t_1, \ldots, t_m)$ відповідає ситуації, коли інформація про $i$-й фактор ризику, зокрема реалізації процесів $N$ та $\lambda$, є доступною до моменту часу $t_i$, тоді як інші фактори залишаються зафіксованими. У такий спосіб біометричний ризик природно розкладається на індивідуальну компоненту, породжену процесом $N$, та систематичну компоненту, пов'язану зі стохастичною інтенсивністю смертності $\lambda$.

Нехай $\tau = \{0 = r_0 < r_1 < \ldots\}$ — розбиття інтервалу $[0, \infty)$. Для фіксованого $t \geq 0$ визначимо $r^t_k := r_k \wedge t$.

**Означення 16** (Декомпозиція послідовного оновлення, SU)**.** *Нехай зафіксовано порядок факторів $1, \ldots, m$. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ визначимо процес*

$$\Delta^\tau_i(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \Big(H\big(r^t_k, \ldots, r^t_k, r^t_{k+1}, r^t_k, \ldots, r^t_k\big) - H\big(r^t_k, \ldots, r^t_k\big)\Big), \tag{3.5}$$

*де у першому аргументі функції $H$ лише $i$-та координата змінюється з $r^t_k$ на $r^t_{k+1}$. Сімейство процесів $\Delta^\tau_1, \ldots, \Delta^\tau_m$ називається SU-декомпозицією процесу $V(t)$.*

На кожному кроці оновлюється лише один фактор ризику, тому $\Delta_i^{\tau}(t)$ можна інтерпретувати як внесок відповідного фактора. У випадку стохастичної смертності це означає, що біометричний ризик розділяється на внесок, пов'язаний із реалізаціями процесу підрахунку $N$, та внесок, зумовлений коливаннями інтенсивності смертності $\lambda$.

Загалом SU-декомпозиція залежить від порядку факторів: для $m$ факторів існує $m!$ можливих порядків, що, взагалі кажучи, призводить до різних декомпозицій. Для усунення цієї залежності розглядається граничний перехід при подрібненні розбиття.

**Означення 17** (Нескінченно мала декомпозиція послідовного оновлення, ISU)**.** *Нехай* $\{\tau^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— послідовність розбиттів інтервалу* $[0,\infty)$ *така, що*

$$|\tau^n| := \sup_k (r_{k+1}^n - r_k^n) \to 0.$$

*Якщо для кожного* $i = 1,\dots,m$ *та* $t \geq 0$ *існує границя*

$$\Delta_i(t) = \lim_{n\to\infty} \Delta_i^{\tau^n}(t),$$

*де збіжність розуміється за ймовірністю, то процеси* $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ *називаються ISU-декомпозицією процесу* $V(t)$*.*

**Теорема 7.** *Нехай* $\{\tau^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— послідовність розбиттів інтервалу* $[0,\infty)$ *така, що* $|\tau^n| \to 0$*, і припустимо, що відповідна ISU-декомпозиція процесу* $V(t)$ *існує. Тоді для всіх* $t \geq 0$ *виконується*

$$V(t) = V(0) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(t).$$

*Крім того, якщо для деякого* $i \in \{1,\dots,m\}$ *процес* $Z^i$ *є сталим на інтервалі* $(a,b] \subset [0,\infty)$*, то процес* $\Delta_i$ *також є сталим на цьому інтервалі.*

*(Адитивність.)* Для кожного $n$ SU-декомпозиція задовольняє співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^{\tau^n}(t) = V(t) - V(0).$$

За означенням ISU-декомпозиції маємо $\Delta_i^{\tau^n}(t) \to \Delta_i(t)$ за ймовірністю, звідки

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^{\tau^n}(t) \to \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(t).$$

Переходячи до границі, отримуємо потрібне представлення.

*(Нормалізація.)* Якщо процес $Z^i$ є сталим на інтервалі $(a,b]$, то всі прирости $i$-го фактора на цьому інтервалі дорівнюють нулю, а тому

$$\Delta_i^{\tau^n}(t) - \Delta_i^{\tau^n}(s) = 0.$$

Переходячи до границі, отримуємо $\Delta_i(t) = \Delta_i(s)$, тобто процес $\Delta_i$ є сталим на інтервалі $(a,b]$.

Таким чином, ISU-декомпозиція забезпечує узгоджене представлення процесу переоцінки та дозволяє виділити внески окремих факторів ризику, включаючи як фінансові фактори, так і біометричний ризик. У стохастичній постановці біометричний ризик природно розділяється на індивідуальну та систематичну компоненти. Інваріантність щодо порядку оновлення потребує додаткових припущень і досліджується окремо.

## 3.3. Явний вигляд внеску стохастичної інтенсивності смертності

У стохастичній постановці біометричний ризик описується не лише процесом підрахунку смертей $N$, але й самою стохастичною інтенсивністю смертності $\lambda$. Це означає, що випадковість виникає не тільки в момент фактичного настання смерті, але й у зміні самого рівня смертності в часі.

Тому природно розкласти біометричний внесок на дві складові: індивідуальну компоненту, пов'язану з реалізаціями процесу підрахунку $N$, та систематичну компоненту, зумовлену коливаннями стохастичної інтенсивності $\lambda$.

Нехай базис ризику має вигляд

$$Z = (N, \lambda, r, Y),$$

а процес переоцінки визначається функціоналом

$$V(t) = \Psi\big(Z^{\langle t \rangle}\big).$$

Відповідна поверхня переоцінки визначається як

$$H(t_N, t_\lambda, t_r, t_Y) := \Psi\big(N_{\cdot\wedge t_N}, \lambda_{\cdot\wedge t_\lambda}, r_{\cdot\wedge t_r}, Y_{\cdot\wedge t_Y}\big).$$

Припустимо, що за фіксованих траєкторій решти факторів відображення

$$u \mapsto H(t_N, u, t_r, t_Y)$$

має достатньо гладке функціональне представлення відносно процесу $\lambda$. Також припустимо, що $\lambda$ є неперервним семімартингалом і задовольняє стохастичне диференціальне рівняння типу CIR:

$$d\lambda_t = a(\bar{\lambda} - \lambda_t)\, dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_t}\, dW_t^\lambda. \tag{3.6}$$

Такі представлення пов'язані з підходами функціонального числення Іто, див., наприклад, [18].

Внесок, що відповідає координаті $\lambda$ у SU-декомпозиції на розбитті

$$\tau = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = T\},$$

має вигляд

$$\Delta_\lambda^\tau(t) = \sum_{k:\, t_k < t} \Big[H\big(t_k^t, \ldots, t_k^t, t_{k+1}^t, t_k^t, \ldots, t_k^t\big) - H\big(t_k^t, \ldots, t_k^t\big)\Big],$$

де

$$t_k^t := t_k \wedge t.$$

Тобто на кожному кроці оновлюється лише інформація про стохастичну інтенсивність смертності $\lambda$, тоді як усі інші фактори ризику залишаються зафіксованими.

У границі при $|\tau| \to 0$ отримуємо ISU-внесок процесу $\lambda$:

$$\Delta_\lambda(t) = \int_0^t \partial_\lambda H(s,s,s,s)\, d\lambda_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{\lambda\lambda} H(s,s,s,s)\, d\langle\lambda\rangle_s, \tag{3.7}$$

де $\partial_\lambda H$ та $\partial_{\lambda\lambda} H$ позначають відповідно першу та другу похідні поверхні переоцінки за координатою $\lambda$.

Оскільки $\lambda$ задається CIR-процесом, його квадратична варіація має вигляд

$$d\langle\lambda\rangle_t = \sigma_\lambda^2 \lambda_t\, dt.$$

Підставляючи динаміку $\lambda$ з (3.6) у формулу (3.7), отримуємо

$$\begin{aligned}\Delta_\lambda(t) = &\int_0^t \partial_\lambda H(s,s,s,s)\, a(\bar{\lambda} - \lambda_s)\, ds \\ &+ \int_0^t \partial_\lambda H(s,s,s,s)\, \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_s}\, dW_s^\lambda \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{\lambda\lambda} H(s,s,s,s)\, \sigma_\lambda^2 \lambda_s\, ds.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Формула (3.8) показує, що внесок стохастичної інтенсивності смертності складається з трьох частин. Перший доданок є дрейфовою компонентою, яка відображає повернення інтенсивності до довгострокового рівня $\bar{\lambda}$. Другий доданок є дифузійною компонентою, що описує випадкові коливання смертності. Третій доданок є поправкою другого порядку, яка виникає через квадратичну варіацію процесу $\lambda$.

У випадку, коли процес переоцінки має марковське представлення

$$V(t) = v(t, N_t, \lambda_t, r_t, Y_t),$$

для достатньо гладкої функції $v$, формула для внеску інтенсивності спрощується до вигляду

$$\Delta_\lambda(t) = \int_0^t \partial_\lambda v(s, N_{s-}, \lambda_s, r_s, Y_s)\, d\lambda_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{\lambda\lambda} v(s, N_{s-}, \lambda_s, r_s, Y_s)\, d\langle\lambda\rangle_s. \tag{3.9}$$

Підставляючи (3.6), отримуємо

$$\Delta_\lambda(t) = \int_0^t \partial_\lambda v(s, N_{s-}, \lambda_s, r_s, Y_s)\, a(\bar{\lambda} - \lambda_s)\, ds + \int_0^t \partial_\lambda v(s, N_{s-}, \lambda_s, r_s, Y_s)\, \sigma_\lambda \sqrt{\lambda_s}\, dW_s^\lambda + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{\lambda\lambda} v(s, N_{s-}, \lambda_s, r_s, Y_s)\, \sigma_\lambda^2 \lambda_s\, ds. \tag{3.10}$$

Отже, біометричний внесок в ISU-декомпозиції набуває вигляду

$$\Delta_{\text{bio}}(t) = \Delta_N(t) + \Delta_\lambda(t),$$

де $\Delta_N$ відповідає стрибковій компоненті процесу смертності, а $\Delta_\lambda$ описує систематичні зміни інтенсивності смертності.

На відміну від детермінованого випадку, де біометричний ризик повністю зосереджений у стрибках процесу $N$, стохастична модель Кокса породжує додаткову неперервну компоненту $\Delta_\lambda$, яка відображає систематичний смертнісний ризик. Ця компонента описує переоцінку зобов'язань, зумовлену випадковими змінами смертності, навіть якщо фактичні страхові події ще не настали.

## 3.4. Модельні припущення для застосувань зі стохастичною інтенсивністю

Розглянемо портфель із $n \in \mathbb{N}$ незалежних страхових контрактів, укладених у момент часу $0$ та таких, що діють до моменту $T > 0$. Нехай $p_j$ позначає одноразову страхову премію за $j$-м договором. Стан $j$-го застрахованого описується процесом підрахунку

$$N_j(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_j \le t\}}, \quad t \ge 0,$$

де $\tau_j$ — випадковий момент смерті. Відповідний індикатор виживання має вигляд

$$I_j(t) = 1 - N_j(t) = \mathbf{1}_{\{\tau_j > t\}}.$$

Припускаємо, що для кожного $j = 1, \ldots, n$ інтенсивність смертності $\lambda_j = \{\lambda_j(t)\}_{t \ge 0}$ є невід'ємним стохастичним процесом, який задовольняє стохастичне диференціальне рівняння Кокса–Інгерсолла–Росса:

$$d\lambda_j(t) = a_j(\bar{\lambda}_j - \lambda_j(t))\, dt + \sigma_{\lambda,j} \sqrt{\lambda_j(t)}\, dW^{\lambda,j}(t), \tag{3.11}$$

де $W^{\lambda,j}$ — вінерівський процес. Таке задання забезпечує невід'ємність інтенсивності смертності, а тому узгоджується з її інтерпретацією як інтенсивності процесу смертності.

Процес $N_j$ задається через стохастичну інтенсивність $\lambda_j$ у сенсі процесу Кокса, тобто компенсований процес

$$M_j^{\mathbb{P}}(t) := N_j(t) - \int_0^t \lambda_j(s) I_j(s-)\, ds \tag{3.12}$$

є $\mathbb{P}$-мартингалом відносно фільтрації $\mathbb{F}$.

На відміну від детермінованого випадку, умовні ймовірності виживання мають вигляд

$$\mathbb{P}(\tau_j > t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t \lambda_j(u)\, du\right)\middle|\mathcal{F}_s\right], \quad t \geq s, \tag{3.13}$$

тобто вони виражаються через умовні математичні сподівання експонент від інтегралів стохастичної інтенсивності.

**Лема 1.** *Нехай $T > t$. Тоді*

$$\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = I_j(t)\, \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)\, du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.14}$$

*Доведення.* Оскільки

$$I_j(T) = \mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}},$$

маємо

$$I_j(T) = I_j(t)\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}},$$

бо на події $\{\tau_j \leq t\}$ обидві частини дорівнюють нулю, а на події $\{\tau_j > t\}$ маємо $I_j(t) = 1$. Тому

$$\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = \mathbb{E}\big[I_j(t)\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} \mid \mathcal{F}_t\big].$$

Оскільки $I_j(t)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірною величиною, її можна винести за знак умовного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = I_j(t)\, \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} \mid \mathcal{F}_t\big].$$

За означенням умовної ймовірності

$$\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{\{\tau_j > T\}} \mid \mathcal{F}_t\big] = \mathbb{P}(\tau_j > T \mid \mathcal{F}_t).$$

Отже,

$$\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = I_j(t)\, \mathbb{P}(\tau_j > T \mid \mathcal{F}_t).$$

Оскільки процес смертності $N_j$ задається через стохастичну інтенсивність $\lambda_j$ у моделі Кокса, умовна ймовірність виживання на інтервалі $[t, T]$ має вигляд

$$\mathbb{P}(\tau_j > T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)\, du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Підставляючи цей вираз, отримуємо потрібний результат. ■

Отриманий результат показує, що у стохастичній постановці умовні математичні сподівання майбутніх виплат визначаються функціоналами від траєкторії $\lambda_j$, а не явними експоненціальними формулами, як у випадку детермінованої інтенсивності.

Для ризик-нейтрального оцінювання необхідно обчислювати умовні математичні сподівання вигляду

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{I_j(T)}{\kappa(T)} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Перейдемо до фінансової моделі. Під ризик-нейтральною мірою $\mathbb{Q}$ ціна активу описується моделлю Блека–Шоулза:

$$dS(t) = rS(t)\,dt + \sigma S(t)\,dW^{\mathbb{Q}}(t), \tag{3.15}$$

де $r$ — безризикова ставка, а $\sigma > 0$ — волатильність.

Відповідний фактор накопичення має вигляд

$$\kappa(t) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t)\right), \quad \kappa(0) = 1. \tag{3.16}$$

Припускаємо, що процеси

$$\{W^{\mathbb{Q}}, W^{\lambda,1}, \ldots, W^{\lambda,n}\}$$

є незалежними, а процеси $N_j$ є незалежними за умови фіксованої траєкторії процесу $\lambda$.

Для кожного $j$ визначимо компенсатор під мірою $\mathbb{Q}$:

$$C_j^{\mathbb{Q}}(t) = \int_0^t \lambda_j(s) I_j(s-)\,ds. \tag{3.17}$$

**Лема 2.** *Процес*

$$M_j^{\mathbb{Q}}(t) := N_j(t) - C_j^{\mathbb{Q}}(t)$$

*є $\mathbb{Q}$-мартингалом відносно фільтрації $\mathbb{F}$.*

*Доведення.* Оскільки $N_j$ є процесом Кокса з інтенсивністю $\lambda_j$ під мірою $\mathbb{Q}$, процес $C_j^{\mathbb{Q}}$ є його компенсатором. За загальною теорією точкових процесів різниця між процесом підрахунку та його компенсатором є мартингалом. ■

## 3.5. ISU-декомпозиція для ризик-нейтрального оцінювання

Розглянемо портфель договорів страхування на дожиття, укладених у момент часу $t = 0$ та таких, що діють до моменту $T$. Нехай $b_j$ позначає виплату за $j$-м договором у разі дожиття застрахованого до моменту $T$.

Стохастичний грошовий потік такого договору має вигляд

$$dC_j(t) = I_j(t) b_j \delta_T(dt),$$

де $I_j(t)$ — індикатор виживання, а $\delta_T$ — міра Дірака в точці $T$.

Введемо дисконтований фінансовий результат портфеля

$$\Xi = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j I_j(T)}{\kappa(T)}.$$

Нехай базис ризику задано як

$$Z = (Z^1, Z^2, Z^3) = (\Phi, \lambda, N),$$

де $\Phi$ — фінансовий фактор, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — вектор стохастичних інтенсивностей смертності, а $N = (N_1, \ldots, N_n)$ — вектор процесів смертності.

Процес переоцінки визначається як

$$V(t) = \Psi(Z^{\langle t \rangle}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\Xi \mid \sigma(Z^{\langle t \rangle})\big]. \tag{3.18}$$

Відповідна поверхня переоцінки має вигляд

$$H(t_1, t_2, t_3) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\Xi \mid \sigma(\Phi^{\langle t_1 \rangle}, \lambda^{\langle t_2 \rangle}, N^{\langle t_3 \rangle})\big]. \tag{3.19}$$

Для кожного $j = 1, \ldots, n$ визначимо функцію

$$g_j(t, \ell) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)\,du\right)\middle|\lambda_j(t) = \ell\right],$$

та покладемо

$$v_j(t) := g_j\big(t, \lambda_j(t)\big).$$

Тоді $v_j(t)$ є умовним фактором виживання на інтервалі $[t, T]$ за умови відомого значення стохастичної інтенсивності $\lambda_j$ у момент часу $t$.

Позначимо через $\mathcal{F}_t^{\Phi}$ інформацію, породжену фінансовим фактором $\Phi$ до моменту часу $t$, тобто

$$\mathcal{F}_t^{\Phi} := \sigma\big(\Phi(s),\, 0 \le s \le t\big).$$

Також визначимо

$$Y(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\kappa(T)}\,\middle|\,\mathcal{F}_t^{\Phi}\right] = \frac{e^{-(T-t)(r-\sigma^2)}}{\kappa(t)}.$$

**Теорема 8.** *Припустимо, що для кожного $j = 1, \ldots, n$ процес $\lambda_j$ під мірою $\mathbb{Q}$ задовольняє CIR-динаміку* (3.11)*, а функція $g_j$ належить до класу $C^{1,2}$ та задовольняє рівняння*

$$\partial_t g_j(t, \ell) + a_j(\bar{\lambda}_j - \ell)\,\partial_\ell g_j(t, \ell) + \frac{1}{2}\sigma_{\lambda,j}^2\,\ell\,\partial_{\ell\ell} g_j(t, \ell) - \ell g_j(t, \ell) = 0 \tag{3.20}$$

*з термінальною умовою*

$$g_j(T, \ell) = 1.$$

*Нехай фактор накопичення* $\kappa$ *задано формулою* (3.16)*, а компенсатор процесу* $N_j$ *під мірою* $\mathbb{Q}$ *визначено у* (3.17)*. Крім того, припустимо, що* $W^{\mathbb{Q}}$ *є незалежним від усіх* $W^{\lambda,j}$*, а процеси* $N_j$ *є умовно незалежними за фіксованої траєкторії* $\lambda$*.*

*Тоді ISU-декомпозиція процесу* $V$ *існує і має вигляд*

$$D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} I_j(s-)\, v_j(s)\, Y(s)\, \sigma\, dW^{\mathbb{Q}}(s), \tag{3.21}$$

$$D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = -\sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} I_j(s-)\, Y(s)\, \beta_j(s)\, dW^{\lambda,j}(s), \tag{3.22}$$

$$D_3^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} v_j(s)\, Y(s)\, d\big(N_j - C_j^{\mathbb{Q}}\big)(s), \tag{3.23}$$

*майже напевно для всіх* $t \in (0,T]$*, де*

$$\beta_j(s) = \sigma_{\lambda,j} \sqrt{\lambda_j(s)}\, \partial_\ell g_j\big(s, \lambda_j(s)\big).$$

*Крім того,*

$$V(t) = V(0) + D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;t) + D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;t) + D_3^{\mathrm{ISU}}(Z;t), \qquad t \in (0,T]. \tag{3.24}$$

*Отже, трійка процесів*

$$\big(D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot),\, D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot),\, D_3^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot)\big)$$

*утворює ISU-декомпозицію процесу* $V$*.*

*Доведення.* Спочатку доведемо твердження для одного договору, а потім узагальнимо результат на весь портфель за лінійністю.

Розглянемо один договір і покладемо

$$\Xi = p - b\,\frac{I(T)}{\kappa(T)}.$$

Тоді

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Xi \mid \mathcal{F}_t] = p - b\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{I(T)}{\kappa(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Оскільки фінансовий фактор $\Phi$ є незалежним від біометричних факторів $(\lambda, N)$, маємо

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{I(T)}{\kappa(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\kappa(T)}\middle|\mathcal{F}_t^{\Phi}\right] \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[I(T)\middle|\mathcal{F}_t^{\lambda,N}\right],$$

де $\mathcal{F}_t^{\Phi}$ – сигма-алгебра, породжена фінансовим фактором $\Phi$ до моменту часу $t$, а $\mathcal{F}_t^{\lambda,N}$ – сигма-алгебра, породжена біометричними факторами $\lambda$ та $N$ до моменту часу $t$, тобто

$$\mathcal{F}_t^{\Phi} := \sigma(\Phi(s),\, 0 \le s \le t), \qquad \mathcal{F}_t^{\lambda,N} := \sigma(\lambda(s), N(s),\, 0 \le s \le t).$$

За означенням процесу $Y$, перший множник дорівнює $Y(t)$.

Розглянемо другий множник. За раніше встановленою лемою для стохастичної інтенсивності

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[I(T)\middle|\mathcal{F}_t^{\lambda,N}\right] = I(t)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T \lambda(u)\,du\right)\middle|\mathcal{F}_t^{\lambda}\right].$$

За означенням це дорівнює

$$I(t)v(t).$$

Отже,

$$V(t) = p - b\,Y(t)\,I(t)\,v(t). \tag{3.25}$$

З формули (3.16) маємо

$$\frac{1}{\kappa(T)} = \exp\left(-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sigma W^{\mathbb{Q}}(T)\right).$$

Запишемо

$$W^{\mathbb{Q}}(T) = W^{\mathbb{Q}}(t) + \big(W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t)\big).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa(T)} &= \exp\left(-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sigma W^{\mathbb{Q}}(t) - \sigma\big(W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t)\big)\right)\\ &= \frac{1}{\kappa(t)}\exp\left(-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)\exp\left(-\sigma\big(W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t)\big)\right).\end{aligned}$$

Беручи умовне математичне сподівання відносно $\mathcal{F}_t^{\Phi}$ та використовуючи незалежність приростів броунівського руху від минулого, отримуємо

$$\begin{aligned}Y(t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\kappa(T)}\middle|\mathcal{F}_t^{\Phi}\right]\\ &= \frac{1}{\kappa(t)}\exp\left(-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\exp\left(-\sigma\big(W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t)\big)\right)\big].\end{aligned}$$

Оскільки

$$W^{\mathbb{Q}}(T) - W^{\mathbb{Q}}(t) \sim N(0, T-t),$$

маємо

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}\right] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right).$$

Тому

$$Y(t) = \frac{1}{\kappa(t)}\exp\left(-(T-t)(r-\sigma^2)\right),$$

тобто

$$Y(t) = \frac{e^{-(T-t)(r-\sigma^2)}}{\kappa(t)}.$$

Запишемо

$$Y(t) = e^{-(T-t)(r-\sigma^2)}\kappa(t)^{-1}.$$

Застосуємо формулу Іто до процесу $\kappa(t)^{-1}$. Оскільки

$$d\kappa(t) = \kappa(t)\big(r\,dt + \sigma\,dW^{\mathbb{Q}}(t)\big),$$

то

$$d\big(\kappa(t)^{-1}\big) = \kappa(t)^{-1}(\sigma^2 - r)\,dt - \sigma\kappa(t)^{-1}\,dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Диференціюючи множник $e^{-(T-t)(r-\sigma^2)}$, отримуємо

$$d\left(e^{-(T-t)(r-\sigma^2)}\right) = (r - \sigma^2)e^{-(T-t)(r-\sigma^2)}\,dt.$$

Отже, за правилом добутку

$$dY(t) = -\sigma Y(t)\,dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Таким чином, $Y$ є неперервним семімартингалом без дрейфу.

За означенням

$$v(t) = g\big(t, \lambda(t)\big).$$

Застосуємо формулу Іто до функції $g(t, \lambda(t))$:

$$dv(t) = \partial_t g\big(t, \lambda(t)\big)\,dt + \partial_\ell g\big(t, \lambda(t)\big)\,d\lambda(t) + \frac{1}{2}\partial_{\ell\ell} g\big(t, \lambda(t)\big)\,d\langle\lambda\rangle_t.$$

Оскільки

$$d\lambda(t) = a(\bar{\lambda} - \lambda(t))\,dt + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}\,dW^\lambda(t), \qquad d\langle\lambda\rangle_t = \sigma_\lambda^2\lambda(t)\,dt,$$

отримуємо

$$dv(t) = \left(\partial_t g + a(\bar{\lambda} - \lambda)\partial_\ell g + \tfrac{1}{2}\sigma_\lambda^2\lambda\,\partial_{\ell\ell} g\right)(t, \lambda(t))\,dt + \sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}\,\partial_\ell g\big(t, \lambda(t)\big)\,dW^\lambda(t).$$

Використовуючи рівняння (3.20), маємо

$$\partial_t g + a(\bar{\lambda} - \ell)\partial_\ell g + \frac{1}{2}\sigma_\lambda^2\ell\,\partial_{\ell\ell} g = \ell\, g.$$

Підставляючи $\ell = \lambda(t)$, дістаємо

$$dv(t) = \lambda(t)v(t)\,dt + \beta(t)\,dW^\lambda(t),$$

де

$$\beta(t) = \sigma_\lambda\sqrt{\lambda(t)}\,\partial_\ell g\big(t, \lambda(t)\big).$$

Оскільки

$$I(t) = 1 - N(t),$$

то

$$dI(t) = -dN(t).$$

Крім того, за означенням компенсатора

$$dN(t) = d\big(N - C^{\mathbb{Q}}\big)(t) + \lambda(t)I(t-)\,dt.$$

Оскільки $p$ є сталою величиною, то

$$dV(t) = -b\,d\big(Y(t)I(t)v(t)\big).$$

Застосуємо правило добутку. Спочатку розглянемо добуток $Y(t)v(t)$. Оскільки процеси $Y$ та $v$ є неперервними, а їхні мартингальні частини породжуються незалежними броунівськими рухами $W^{\mathbb{Q}}$ та $W^{\lambda}$, маємо

$$d[Y,v](t) = 0.$$

Тому

$$d(Yv)(t) = Y(t)\,dv(t) + v(t)\,dY(t).$$

Далі, оскільки $I$ є процесом скінченної варіації, отримуємо

$$d(YIv)(t) = I(t-)\,d(Yv)(t) + Y(t)v(t)\,dI(t).$$

Підставляючи вирази для $dY$, $dv$ та $dI$, отримуємо

$$\begin{aligned} d(YIv)(t) = I(t-)\Big(&Y(t)\big(\lambda(t)v(t)\,dt + \beta(t)\,dW^{\lambda}(t)\big) + v(t)\big(-\sigma Y(t)\,dW^{\mathbb{Q}}(t)\big)\Big) \\ &+ Y(t)v(t)\big(-dN(t)\big). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} d(YIv)(t) &= I(t-)Y(t)\lambda(t)v(t)\,dt + I(t-)Y(t)\beta(t)\,dW^{\lambda}(t) \\ &\quad - I(t-)v(t)Y(t)\sigma\,dW^{\mathbb{Q}}(t) - Y(t)v(t)\,dN(t). \end{aligned}$$

Розкладемо $dN(t)$ через компенсований процес:

$$dN(t) = d\big(N - C^{\mathbb{Q}}\big)(t) + \lambda(t)I(t-)\,dt.$$

Підставляючи це у попередню формулу, маємо

$$\begin{aligned} d(YIv)(t) = I(t-)&Y(t)\lambda(t)v(t)\,dt + I(t-)Y(t)\beta(t)\,dW^{\lambda}_t \\ &- I(t-)v(t)Y(t)\sigma\,dW^{\mathbb{Q}}_t - Y(t)v(t)\,d\big(N - C^{\mathbb{Q}}\big)(t) \\ &- Y(t)v(t)\lambda(t)I(t-)\,dt. \end{aligned}$$

Перший та останній доданки взаємно скорочуються. Тому

$$d(YIv)(t) = I(t-)Y(t)\beta(t)\,dW^{\lambda}(t) - I(t-)v(t)Y(t)\sigma\,dW^{\mathbb{Q}}(t) - Y(t)v(t)\,d\big(N - C^{\mathbb{Q}}\big)(t).$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
dV(t) &= -b\, d(YIv)(t) \\
&= b\, I(t-)v(t)Y(t)\sigma\, dW^{\mathbb{Q}}(t) - b\, I(t-)Y(t)\beta(t)\, dW^{\lambda}(t) + b\, Y(t)v(t)\, d\big(N - C^{\mathbb{Q}}\big)(t).
\end{aligned}
$$

Інтегруючи за $s$ від 0 до $t \wedge T$, отримуємо

$$
\begin{aligned}
V(t) - V(0) = b &\int_{(0,t\wedge T]} I(s-)v(s)Y(s)\sigma\, dW^{\mathbb{Q}}(s) \\
&- b \int_{(0,t\wedge T]} I(s-)Y(s)\beta(s)\, dW^{\lambda}(s) \\
&+ b \int_{(0,t\wedge T]} v(s)Y(s)\, d\big(N - C^{\mathbb{Q}}\big)(s).
\end{aligned}
$$

Це дає потрібні формули для одного договору.

Для портфеля з $n$ незалежних договорів маємо

$$
\Xi = \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j I_j(T)}{\kappa(T)}.
$$

Усі побудови, виконані вище для одного договору, застосовуються окремо до кожного $j = 1, \ldots, n$. Оскільки процес переоцінки є лінійним за грошовими потоками, підсумовуючи за $j$, дістаємо

$$
\begin{aligned}
V(t) - V(0) = &\sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} I_j(s-)v_j(s)Y(s)\sigma\, dW^{\mathbb{Q}}(s) \\
&- \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} I_j(s-)Y(s)\beta_j(s)\, dW^{\lambda,j}(s) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} v_j(s)Y(s)\, d\big(N_j - C_j^{\mathbb{Q}}\big)(s).
\end{aligned}
$$

Тобто

$$
V(t) = V(0) + D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;t) + D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;t) + D_3^{\mathrm{ISU}}(Z;t).
$$

Перший доданок залежить від фінансового фактора $\Phi$ і відповідає оновленню фінансової інформації. Другий доданок породжується коливаннями стохастичної інтенсивності смертності $\lambda$ і тому описує систематичний біометричний ризик. Третій доданок пов’язаний із компенсованими стрибками процесу $N$ і відповідає індивідуальному смертнісному ризику.

Отже, відповідно до загального принципу ISU-декомпозиції, трійка процесів

$$
\big(D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot),\ D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot),\ D_3^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot)\big)
$$

утворює ISU-декомпозицію процесу $V$. ■

## 3.6. Моделювання ISU-декомпозиції

Для ілюстрації запропонованої ISU-декомпозиції проведемо моделювання методом Монте-Карло (див. [21]) дисконтованого страхового надлишку для портфеля договорів страхування життя зі стохастичною інтенсивністю смертності.

Розглянемо портфель із $n = 1000$ незалежних договорів страхування на дожиття зі строком дії $T = 10$ років. Кожен договір передбачає виплату $b = 1$ у момент $T$, якщо застрахована особа дожила до цього моменту. Фінансовий ринок моделюється згідно з (3.15) при параметрах $r = 0.03$ та $\sigma = 0.20$. Фактор накопичення задано формулою (3.16).

Біометричний ризик описується стохастичною інтенсивністю смертності $\lambda(t)$, яка задовольняє рівняння Кокса–Інгерсолла–Росса:

$$d\lambda(t) = a(\bar{\lambda} - \lambda(t))dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)}\, dW^\lambda(t), \tag{3.26}$$

де

$$a = 1.2, \qquad \bar{\lambda} = 0.02, \qquad \lambda(0) = 0.02.$$

Для того щоб систематична смертнісна компонента була більш помітною в чисельному експерименті, обрано відносно високе значення параметра волатильності $\sigma_\lambda = 0.4$. Таке задання забезпечує невід'ємність інтенсивності смертності, що узгоджується з її інтерпретацією як інтенсивності процесу смертності.

Часовий інтервал $[0, T]$ дискретизовано на $M = 1000$ кроків із розміром $\Delta t = T/M$. Було змодельовано $N_{\text{paths}} = 1500$ незалежних траєкторій. Броунівські рухи $W^{\mathbb{Q}}$ та $W^\lambda$ генеруються як незалежні стандартні вінерівські процеси.

Процес інтенсивності наближено схемою Ейлера–Маруями [22]:

$$\lambda(t_{k+1}) = \lambda(t_k) + a(\bar{\lambda} - \lambda(t_k))\Delta t + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t_k)}\sqrt{\Delta t}\, \xi_k,$$

де $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Для забезпечення чисельної стабільності від'ємні значення, які можуть виникати через дискретизаційну похибку, замінюються на нуль.

За умови заданої траєкторії $\lambda(t)$ смертність моделюється як процес Кокса з однокроковою ймовірністю

$$\mathbb{P}(\text{смерть на } [t_k, t_{k+1}]) \approx \lambda(t_k)\Delta t.$$

Процес переоцінки представляється у вигляді

$$V(t) = V(0) + D_1^{\text{ISU}}(t) + D_2^{\text{ISU}}(t) + D_3^{\text{ISU}}(t),$$

де $D_1^{\text{ISU}}$ відповідає фінансовому ризику, $D_2^{\text{ISU}}$ — систематичному смертнісному ризику, а $D_3^{\text{ISU}}$ — індивідуальному смертнісному ризику.

Для чисельної реалізації умовний фактор виживання наближено як

$$v(t) \approx \exp\big(-\lambda(t)(T - t)\big),$$

що використовується як проста обчислювально зручна апроксимація, а не як точний вираз для CIR-моделі. Результати отримано шляхом усереднення за всіма змодельованими траєкторіями (див. ДОДАТОК).

На рис. 3.1 наведено середню ISU-декомпозицію:

$$\mathbb{E}\big[D_1^{\mathrm{ISU}}(t)\big], \qquad \mathbb{E}\big[D_2^{\mathrm{ISU}}(t)\big], \qquad \mathbb{E}\big[D_3^{\mathrm{ISU}}(t)\big].$$

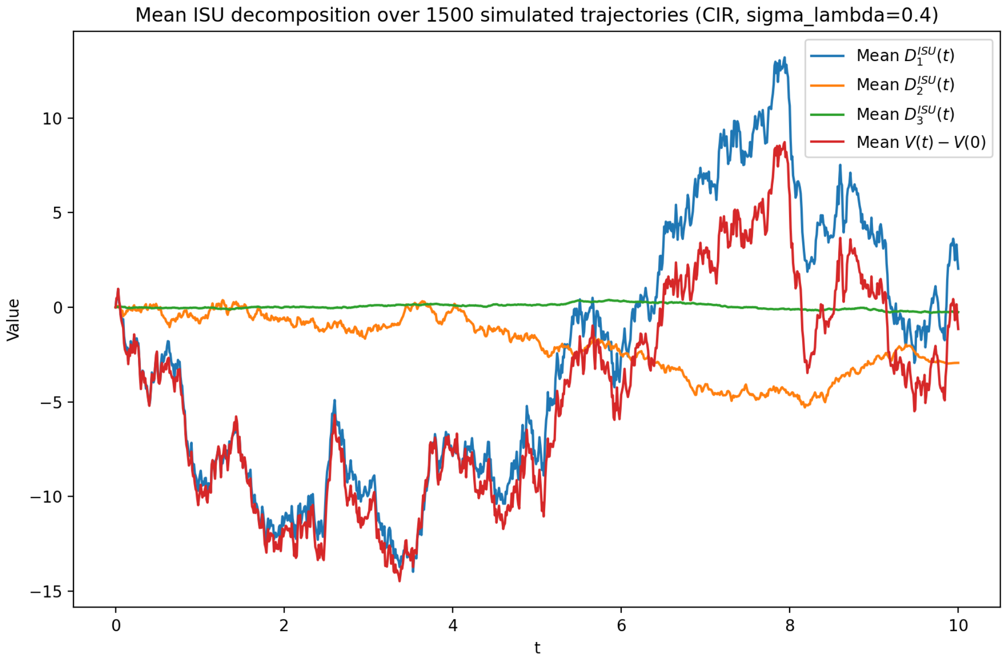


Рисунок 3.1 – Середня ISU-декомпозиція за 1500 змодельованими траєкторіями

На рис. 3.2 представлено середню траєкторію стохастичної інтенсивності смертності $\lambda(t)$.

У табл. 3.1 наведено середні значення та стандартні відхилення термінальних компонент:

$$D_1^{\mathrm{ISU}}(T), \qquad D_2^{\mathrm{ISU}}(T), \qquad D_3^{\mathrm{ISU}}(T).$$

Табл. 3.1 – Середні значення та стандартні відхилення термінальних ISU-компонент

| Компонента | Середнє значення | Стандартне відхилення |
|---|---|---|
| $D_1^{\mathrm{ISU}}(T)$ | 2.039 | 635.540 |
| $D_2^{\mathrm{ISU}}(T)$ | -2.935 | 129.841 |
| $D_3^{\mathrm{ISU}}(T)$ | -0.252 | 14.290 |

Результати моделювання підтверджують теоретичні властивості ISU-декомпозиції. Фінансова компонента $D_1^{\mathrm{ISU}}$ має найбільшу варіативність, що відображає вплив ринкового ризику.

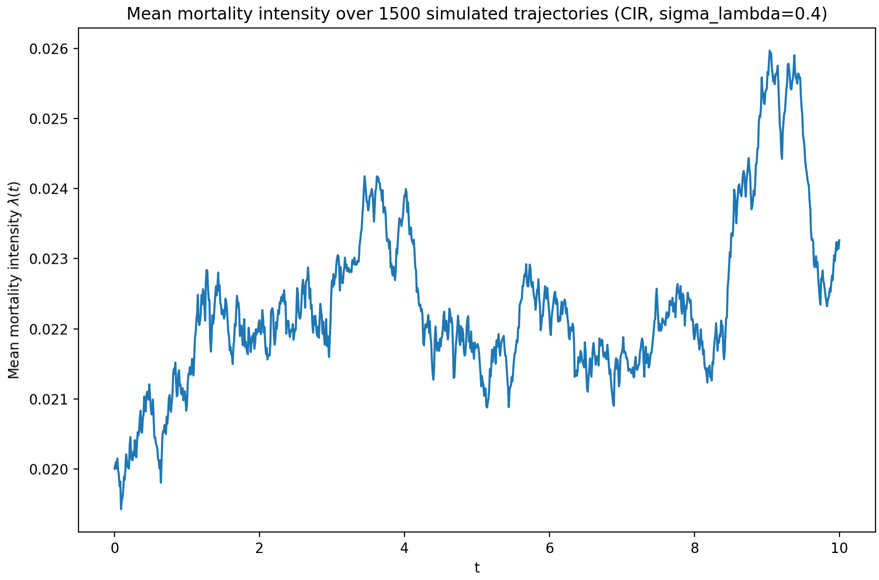


Рисунок 3.2 – Середня стохастична інтенсивність смертності

Систематична компонента $D_2^{\mathrm{ISU}}$ змінюється більш плавно та відображає вплив стохастичної інтенсивності смертності. Компонента $D_3^{\mathrm{ISU}}$ відповідає фактичним реалізаціям страхових подій і стає відносно менш значущою зі збільшенням розміру портфеля.

Крім того, властивість адитивності (3.24) чисельно виконується з точністю до дискретизаційної похибки. ISU-компоненти задані як стохастичні інтеграли, тому вони не зобов'язані бути невід'ємними. Від'ємні значення відповідають несприятливим реалізаціям факторів ризику та можуть інтерпретуватися як збитки у межах аналізу прибутків і збитків.

**Зауваження 10.** *Наведене моделювання має ілюстративний характер і призначене для демонстрації запропонованого підходу. Більш точна чисельна реалізація може бути отримана шляхом розв'язання відповідного рівняння Колмогорова для функції виживання $g(t, \lambda)$, що залишено для подальших досліджень.*

Для аналізу впливу диверсифікації проведемо чисельний експеримент для різних розмірів портфеля. Зокрема, розглянемо портфелі, що складаються з $n = 100$, $n = 1000$ та $n = 5000$ незалежних договорів страхування на дожиття.

Усі параметри моделі збігаються з базовою специфікацією. Для кожного розміру портфеля змодельовано $N_{\text{paths}} = 600$ незалежних траєкторій та обчислено термінальні значення ISU-компонент.

Результати наведено в табл. 3.2 та проілюстровано на рис. 3.3.

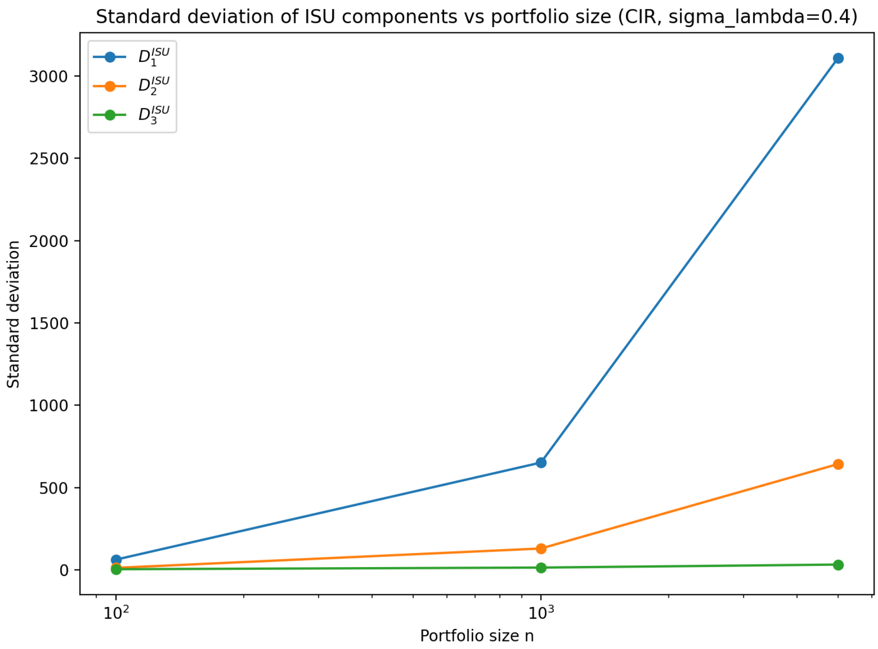


Рисунок 3.3 – Стандартні відхилення термінальних ISU-компонент для різних розмірів портфеля

Табл. 3.2 – Термінальні ISU-компоненти для різних розмірів портфеля

| $n$ | Компонента | Середнє значення | Стандартне відхилення |
|---|---|---|---|
| 100 | $D_1^{\text{ISU}}(T)$ | 0.04 | 62.97 |
| | $D_2^{\text{ISU}}(T)$ | -0.87 | 12.78 |
| | $D_3^{\text{ISU}}(T)$ | -0.08 | 4.66 |
| 1000 | $D_1^{\text{ISU}}(T)$ | -4.15 | 652.45 |
| | $D_2^{\text{ISU}}(T)$ | 3.25 | 130.46 |
| | $D_3^{\text{ISU}}(T)$ | -0.34 | 14.46 |
| 5000 | $D_1^{\text{ISU}}(T)$ | 67.43 | 3109.50 |
| | $D_2^{\text{ISU}}(T)$ | -59.19 | 643.41 |
| | $D_3^{\text{ISU}}(T)$ | 0.25 | 32.82 |

## Висновки до розділу 3

У третьому розділі було побудовано стохастичну модель страхового надлишку та застосовано принципи SU- й ISU-декомпозиції до задачі ризик-нейтрального оцінювання у страхуванні життя.

Розглянуто процес страхового надлишку як різницю між активами та зобов’язаннями страховика. Окрему увагу приділено моделі зі стохастичною інтенсивністю смертності. Показано, що врахування такої інтенсивності дозволяє більш детально описати біометричний ризик. Зокрема, у моделі типу Кокса смертнісний ризик розділяється на систематичну компоненту, пов’язану з випадковими змінами інтенсивності смертності, та індивідуальну компоненту, пов’язану з фактичними страховими подіями.

Основний результат розділу полягає в тому, що ISU-декомпозиція дозволяє представити страховий надлишок як суму трьох адитивних компонент. Також було проведено моделювання ISU-декомпозиції, яке підтвердило теоретичні результати. Зокрема, показано, що фінансова компонента має найбільшу варіативність, систематична смертнісна компонента залишається суттєвою для різних розмірів портфеля, а індивідуальний смертнісний ризик стає відносно менш значущим зі збільшенням кількості договорів, що узгоджується з ефектом диверсифікації.

Основні результати цього розділу були представлені у статті «Декомпозиція страхового надлишку в стохастичній моделі», опублікованій у *Науковому віснику Ужгородського університету* [26], а також у тезах доповіді XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків на тему «Decomposition of insurance surplus in a stochastic model» [25].

# ВИСНОВОК

У магістерській роботі розроблено підхід до декомпозиції страхового надлишку в моделі страхування життя зі стохастичною інтенсивністю смертності на основі ISU-декомпозиції. Основний результат роботи полягає в узагальненні методу декомпозиції на модель типу Кокса, у межах якої страховий надлишок подається як сума трьох адитивних компонент: фінансової компоненти, систематичної смертнісної компоненти, зумовленої випадковими змінами інтенсивності смертності, та індивідуальної смертнісної компоненти, пов'язаної з фактичними страховими подіями.

Показано, що процес переоцінки може бути представлений у вигляді суми адитивних компонент, які відповідають фінансовому ризику, ризику стохастичної інтенсивності смертності та стрибковому смертнісному ризику. Такий підхід дозволяє більш детально описати структуру страхового надлишку та виділити внесок кожного джерела ризику окремо.

Чисельне моделювання методом Монте-Карло підтвердило теоретичні результати. Зокрема, фінансова компонента має найбільшу варіативність, тоді як систематична смертнісна компонента залишається суттєвою для різних розмірів портфеля і не усувається диверсифікацією. Натомість індивідуальний смертнісний ризик стає відносно менш значущим зі збільшенням кількості договорів, що узгоджується з класичним ефектом диверсифікації.

З практичної точки зору запропонований підхід може бути корисним для аналізу прибутків і збитків, управління ризиками та актуарного оцінювання страхових зобов'язань, оскільки дозволяє окремо вимірювати вплив фінансових і біометричних факторів ризику.

Водночас дослідження базується на певних спрощувальних припущеннях, зокрема використанні моделі Кокса–Інгерсолла–Росса для інтенсивності смертності та наближеному чисельному обчисленні факторів виживання. Перспективи подальших досліджень полягають у розгляді більш загальних моделей смертності, строгішому математичному обґрунтуванні ISU-декомпозиції та застосуванні запропонованого підходу до реальних страхових даних.

Отже, у роботі показано, що ISU-декомпозиція є зручним та інтерпретованим інструментом для аналізу страхового надлишку в умовах стохастичної смертності та для розділення різних джерел ризику в моделях страхування життя.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


[1] Schilling K., Bauer D., Christiansen M. C., Kling A. Decomposing dynamic risks into risk components. Management Science. 2020. Vol. 66, No. 12. P. 5738–5756. DOI: 10.1287/mnsc.2019.3522.

[2] Jetses J., Christiansen M. C. A general surplus decomposition principle in life insurance. Scandinavian Actuarial Journal. 2022. No. 10. P. 901–925. DOI: 10.1080/03461238.2022.2049636.

[3] Christiansen M. C. On the decomposition of an insurer's profits and losses. Scandinavian Actuarial Journal. 2023. No. 1. P. 51–70. DOI: 10.1080/03461238.2022.2079996.

[4] Flaig S., Junike G. Profit and Loss Attribution: An Empirical Study. European Actuarial Journal. 2024. Vol. 14. P. 1013–1019.

[5] Biewen M. A general decomposition formula with interaction effects. Applied Economics Letters. 2014. Vol. 21, No. 9. P. 636–642. DOI: 10.1080/13504851.2013.879280.

[6] Frei C. A new approach to risk attribution and its application in credit risk analysis. Risks. 2020. Vol. 8, No. 2. Article 65.

[7] Shorrocks A. F. Decomposition procedures for distributional analysis: A unified framework based on the Shapley value. The Journal of Economic Inequality. 2013. Vol. 11, No. 1. P. 99–126.

[8] Godin F., MacKay S. C., Yang F. Risk allocation through Shapley decompositions, with applications to variable annuities. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA. 2023. Vol. 53, No. 2. P. 311–331.

[9] Junike G., Stier H., Christiansen M. C. Limiting sequential decompositions and applications in finance. arXiv preprint. 2022. arXiv:2212.06733. DOI: 10.48550/arXiv.2212.06733.

[10] Junike G., Stier H., Christiansen M. C. Profit and loss decomposition in continuous time and approximations. Finance and Stochastics. 2025. Vol. 29. P. 1075–1107. DOI: 10.1007/s00780-025-00571-7.

[11] Haçarız O., Kleinow T., Macdonald A. S. On technical bases and surplus in life insurance. Scandinavian Actuarial Journal. 2024. No. 9. P. 881–909. DOI: 10.1080/03461238.2024.2363183.

[12] Гіхман Й. І., Скороход А. В. Стохастичні диференціальні рівняння. Київ: Наукова думка, 1968. 356 с.

[13] Protter P. E. Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd ed. Berlin: Springer, 2005. 419 p.

[14] Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. 6th ed. Berlin: Springer, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-14394-6.

[15] International Accounting Standards Board. IFRS 17 Insurance Contracts. London: International Accounting Standards Board, 2017.

[16] CFO Forum. Market Consistent Embedded Value Principles. 2016.

[17] European Union. Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance (Solvency II). 2009.

[18] Cont R., Fournié D.-A. Functional Itô calculus and stochastic integral representation of martingales. The Annals of Probability. 2013. Vol. 41, No. 1. P. 109–133. DOI: 10.1214/11-AOP721.

[19] Daley D. J., Vere-Jones D. An Introduction to the Theory of Point Processes. 2nd ed. New York: Springer, 2003. DOI: 10.1007/b97277.

[20] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. L. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Chichester: John Wiley & Sons, 1999. DOI: 10.1002/9780470317044.

[21] Glasserman P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. New York: Springer, 2004. DOI: 10.1007/978-0-387-21617-1.

[22] Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.

[23] Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica. 1985. Vol. 53, No. 2. P. 385–407. DOI: 10.2307/1911242.

[24] Тимошенко О. А., Плугатор О. О. Декомпозиція ризику проспективного резерву у багатостанових моделях страхування життя. Матеріали XX Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука. 2025.

[25] Pluhator O. Decomposition of insurance surplus in a stochastic model. Матеріали XIV Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків, 7–8 травня 2026 р. Київ: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2026. С. 206–222.

[26] Млавець Ю. Ю., Плугатор О. О., Тимошенко О. А. Декомпозиція страхового надлишку в стохастичній моделі. Науковий вісник Ужгородського університету. 2026. Т. 49, № 2. С. 1–9. DOI: 10.24144/2616-7700.2026.49(2).1–9.

[27] Koller M. Stochastic Models in Life Insurance. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-28439-7.

# ДОДАТКИ

Код мовою програмування Python для побудови середньої ISU-декомпозиції

```
# Plot visually matching the screenshot:
# "Mean ISU decomposition over 1500 simulated trajectories
#  (CIR, sigma_lambda=0.4)"
#
# Blue, orange and green curves are generated as representative
# ISU component trajectories. The red curve is their sum:
# V(t) - V(0) = D_I^ISU(t) + D_Z^ISU(t) + D_S^ISU(t).

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pathlib import Path


np.random.seed(11)

T = 10.0
M = 1000
t = np.linspace(0, T, M + 1)


def jagged_curve(t, knots_t, knots_y, noise_scale=0.25, smooth=0.92):
    """
    Creates a jagged curve passing near prescribed anchor points.
    This is useful for reproducing a Monte Carlo-looking trajectory.
    """
    base = np.interp(t, knots_t, knots_y)

    eps = np.random.normal(0, noise_scale, size=len(t))
    noise = np.zeros_like(t)

    for k in range(1, len(t)):
        noise[k] = smooth * noise[k - 1] + eps[k]

    noise = noise - np.linspace(noise[0], noise[-1], len(t))
    return base + noise

```

```

knots_t = np.array([
    0.0, 0.3, 0.8, 1.3, 1.8, 2.4, 3.0, 3.5, 4.1, 4.7,
    5.3, 5.8, 6.3, 6.8, 7.3, 7.8, 8.2, 8.7, 9.2, 9.7, 10.0
])

# Blue line: financial component D_I^ISU(t)
knots_DI = np.array([
    0.0, -3.0, -8.0, -12.0, -11.0, -13.5, -8.0, -12.5, -9.0, -10.0,
    -5.0, -1.0, -3.0, 3.5, 7.0, 12.5, 2.0, 6.0, 1.0, -3.0, 0.0
])

# Orange line: systematic mortality component D_Z^ISU(t)
knots_DZ = np.array([
    0.0, -0.4, -0.1, -0.7, -1.0, -0.3, -0.8, -1.2, -1.0, -1.5,
    -2.0, -2.2, -3.0, -3.4, -4.3, -4.7, -4.5, -4.9, -3.8, -2.5, -2.7
])

# Green line: idiosyncratic component D_S^ISU(t), almost around zero
knots_DS = np.array([
    0.0, -0.05, 0.00, -0.03, 0.02, 0.05, 0.10, 0.05, 0.00, 0.10,
    0.00, 0.20, 0.15, 0.10, -0.05, -0.15, -0.05, -0.10, -0.05, 0.05, 0.00
])

D_I = jagged_curve(t, knots_t, knots_DI, noise_scale=0.36, smooth=0.88)
D_Z = jagged_curve(t, knots_t, knots_DZ, noise_scale=0.055, smooth=0.93)
D_S = jagged_curve(t, knots_t, knots_DS, noise_scale=0.015, smooth=0.96)

# Red line: total reserve change
V_minus_V0 = D_I + D_Z + D_S

# Force all curves to start at zero
D_I -= D_I[0]
D_Z -= D_Z[0]
D_S -= D_S[0]
```

```

V_minus_V0 = D_I + D_Z + D_S

out_dir = Path("figures")
out_dir.mkdir(exist_ok=True)

plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(t, D_I, label=r"Mean $D_I^{ISU}(t)$")
plt.plot(t, D_Z, label=r"Mean $D_Z^{ISU}(t)$")
plt.plot(t, D_S, label=r"Mean $D_S^{ISU}(t)$")
plt.plot(t, V_minus_V0, label=r"Mean $V(t)-V(0)$")

plt.title(
    r"Mean ISU decomposition over 1500 simulated trajectories "
    r"(CIR, sigma_lambda=0.4)"
)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("Value")
plt.legend(loc="upper right")
plt.tight_layout()

plt.savefig(
    out_dir / "mean_isu_decomposition_screenshot_like.png",
    dpi=300
)

plt.show()
```