НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.8

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________________ Клесов О.І.
«____»____________20____ р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою
«Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Зведення задачі дробово-лінійного програмування зі знаменником цільової функції довільного знаку до лінійної задачі»

Виконав: ____________
студент ІІ курсу, групи ОМ-41мн
Писарюк Денис Сергійович

Науковий керівник: ____________
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Крошко Наталія Віталіївна

Рецензент: ____________
Кандидат фізико-математичних наук
Доцент Спеціальної кафедри №1
Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»
Білий Валерій Олександрович

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ____________________

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
________________ Клесов О.І.
«____»____________20____ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Писарюку Денису Сергійовичу

1. Тема дисертації «Зведення задачі дробово-лінійного програмування зі знаменником цільової функції довільного знаку до лінійної задачі», науковий керівник дисертації Крошко Наталія Віталіївна, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, затверджені наказом по університету від «31» березня 2026 року №1340-с.

2. Термін подання студентом дисертації: 15 травня 2026 року.

3. Об'єкт дослідження: математичні моделі та методи дробово-лінійного програмування.

4. Предмет дослідження: метод декомпозиції та зведення задачі дробово-лінійного програмування зі знакозмінним знаменником цільової функції до еквівалентних задач лінійного програмування.

5. Перелік завдань, які необхідно виконати:

   (a) Здійснити огляд наукової літератури щодо класичних методів розв'язання задач дробово-лінійного програмування, дослідити проблему зміни знаку знаменника на допустимій множині та пов'язані з цим сингулярності.

(б) Математично обґрунтувати узагальнене перетворення змінних та розробити метод декомпозиції нелінійної задачі на ізольовані лінійні підзадачі зі специфічними рівняннями нормування.

(в) Сформулювати загальний покроковий алгоритм розв'язання задачі та продемонструвати його ефективність на змодельованій фінансово-економічній задачі тактичного планування.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 17 слайдів.

7. Дата видачі завдання: 03 лютого 2026 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури стосовно класичних методів дробово-лінійного програмування	03.02.26 – 15.02.26	Виконано
2.	Дослідження топологічних властивостей допустимої області та гіперплощини розриву	15.02.26 – 01.03.26	Виконано
3.	Розробка математичного апарату декомпозиції та перетворення змінних	01.03.26 – 15.03.26	Виконано
4.	Формулювання загального алгоритму розв'язання задачі	15.03.26 – 29.03.26	Виконано
5.	Побудова та розв'язання модельної фінансово-економічної задачі	29.03.26 – 12.04.26	Виконано
6.	Аналіз результатів, отримання висновків	12.04.26 – 26.04.26	Виконано
7.	Оформлення магістерської дисертації	26.04.26 – 14.05.26	Виконано

Студент Писарюк Денис Сергійович

Науковий керівник Крошко Наталія Віталіївна

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 56 сторінок, 17 слайдів ілюстративного матеріалу та 12 першоджерел.

Об'єктом даної роботи є математичні моделі та методи розв'язання задач дробово-лінійного програмування.

Предметом дослідження є метод зведення задачі дробово-лінійного програмування зі знаменником цільової функції довільного знаку до задач лінійного програмування.

Метою роботи є розробка, математичне обґрунтування та алгоритмічна реалізація декомпозиційного методу лінеаризації дробово-лінійної задачі зі знакозмінним знаменником для оптимізації фінансово-економічних моделей.

Ключові слова: дробово-лінійне програмування, знакозмінний знаменник, лінеаризація, декомпозиція, перетворення Чарнса-Купера, фінансове моделювання, оптимізація відносних показників.

ABSTRACT

The master's thesis contains 56 pages, 17 presentation slides and 12 bibliography items.

The object of this thesis is mathematical models and methods for solving linear-fractional programming problems.

The subject of research is the method of reducing the linear-fractional programming problem with the objective function denominator of arbitrary sign to linear programming problems.

The aim of this thesis is the development, mathematical justification, and algorithmic implementation of a decomposition method for linearizing a linear-fractional problem with an alternating sign denominator for the optimization of financial and economic models.

Key words: linear-fractional programming, alternating sign denominator, linearization, decomposition, Charnes-Cooper transformation, financial modeling, optimization of relative indicators.

Зміст

1 Вступ **7**

2 Передумови виникнення та теоретичні основи дробово-лінійного програмування **9**

2.1 Історичний нарис розвитку методів дробового програмування . . . 9

2.2 Економічні моделі та передумови виникнення задач ДЛП . 12

2.3 Загальна математична постановка задачі . . . 15

3 Класичні методи розв'язання задач дробово-лінійного програмування **19**

3.1 Прямі алгоритми (симплекс-метод для дробових функцій) 19

3.2 Класичне перетворення змінних Чарнса-Купера . . . 22

4 Зведення задачі зі знаменником довільного знаку до лінійної задачі **26**

4.1 Формалізація проблеми змінного знаку знаменника . . . 26

4.2 Перетворення змінних та рівняння нормування . . . 29

4.3 Загальний алгоритм розв'язання задачі . . . 34

5 Приклад та практична реалізація **40**

5.1 Формування модельної економічної задачі . . . 40

5.2 Покрокове розв'язання задачі за запропонованим алгоритмом . . . 44

5.3 Аналіз результатів та ефективності методу . . . 51

Висновки **53**

1 Вступ

У сучасній фінансовій математиці, актуарних розрахунках та дослідженні операцій задачі оптимізації показників відіграють фундаментальну роль. Моделюючи реальні економічні та виробничі процеси часто виникає потреба максимізації критеріїв ефективності, які за своєю природою є відношеннями. До таких критеріїв належать рентабельність виробництва (відношення сумарного прибутку до сумарних витрат), коефіцієнт поточної ліквідності, а також різноманітні показники ефективності з урахуванням ризику, зокрема коефіцієнт Шарпа. [1, 2]

Математично подібні задачі оптимізації описуються, як моделі дробово-лінійного програмування (ДЛП). У загальному вигляді задачу ДЛП можна записати так: знайти такий вектор $x \in \mathbb{R}^n$, що максимізує цільову функцію [3]

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max \tag{1.1}$$

за умов виконання системи лінійних обмежень, що формують множину допустимих розв'язків S:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}, \tag{1.2}$$

де $c, d \in \mathbb{R}^n$ — задані вектори коефіцієнтів чисельника та знаменника; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матриця коефіцієнтів системи обмежень; $b \in \mathbb{R}^m$ — вектор правих частин; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — скалярні константи; $(\cdot)^T$ — операція транспонування. Припускається, що множина S є непорожньою та обмеженою.

Основою для типових методів розв'язання задачі (1.1)–(1.2) є жорстка умова, що знаменник цільової функції має строго додатній знак на всій допустимих розв'язків S. Тобто вимагається $d^T x + \beta > 0$ для всіх $x \in S$. За виконання цієї умови, задача ДЛП алгоритмічно зводиться до еквівалентної задачі лінійного програмування, шляхом заміни змінних $y = t \cdot x$, де $t = (d^T x + \beta)^{-1}$.

Однак на практиці, поточний фінансовий та страховий сектори вимагають більш складних математичних моделей. Де це припущення часто порушується. Зокрема, під час математичного моделювання стратегій з урахуванням чистих грошових потоків, процесів реструктуризації боргів, наявності відкритих коротких позицій або багатокрокових хеджингових інструментів, знаменник критерію ефективності може набувати значень довільного знаку. У термінах багатовимірної геометрії це означає, що площина $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\}$ має непорожній перетин із багатогранником допустимих розв'язків S.

В такому разі змінна t може набувати від'ємних значень або ставати невизначеною, що повністю руйнує опуклу структуру еквівалентної лінійної задачі. Таким чином, це призводить до неможливості застосувати класичне перетворення змінних.

З огляду на це, розробка, строге математичне обґрунтування та алгоритмізація методів зведення такої узагальненої задачі ДЛП (зі знаменником довільного знаку) до еквівалентних лінійних моделей є вельми актуальною науковою та практичною проблемою.

Мета дослідження полягає у розробці та теоретичному обґрунтуванні математичного методу зведення задачі дробово-лінійного програмування зі знаменником цільової функції довільного знаку до серії еквівалентних задач лінійного програмування для гарантованого знаходження глобального оптимуму.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в подальшому розвитку та узагальненні класичного підходу до розв'язання задач ДЛМ, шляхом заміни змінних Чарнса-Купера, для задач ДЛП на випадок знаменника цільвої функції довільного знаку.

Одержані теоретичні результати та розроблений алгоритм мають високий прикладний потенціал і можуть бути безпосередньо застосовані у фінансовій та актуарній математиці. Запропонований підхід є алгоритмічно стійким, зручним для програмної реалізації та може виступати базовим оптимізаційним розрахунковим модулем у інформаційних системах підтримки прийняття рішень та управління фінансовими ризиками.

2 Передумови виникнення та теоретичні основи дробово-лінійного програмування

2.1 Історичний нарис розвитку методів дробового програмування

Розвиток економічної теорії та зростаючі потреби в якісному математичному моделюванні відповідних систем спонукали до пошуку нових інструментів, здатних належним чином задовольнити ці запити. На ранніх етапах становлення теорії дослідження операцій, зокрема в 1940-х роках, завдяки фундаментальним працям Л. Канторовича та Дж. Данціга домінуючою парадигмою стало лінійне програмування (ЛП). Воно давало можливість вирішувати такі фундаментальні завдання, як максимізація абсолютного прибутку або мінімізація абсолютних витрат, що задавалися лінійною цільовою функцією. Однак очевидно, що оперування виключно абсолютними показниками суттєво обмежує можливості аналізу економічних процесів. Це підштовхнуло дослідників до розробки більш універсальних математичних концепцій. Виникнення та подальший розвиток методів дробово-лінійного програмування (ДЛП) стали логічним кроком у розширенні інструментарію для розв'язання тих класів задач, які виходили за межі можливостей класичного ЛП.

Використання відношення двох лінійних функцій відкривало значно ширші можливості для математичного опису фінансово-економічних та виробничих процесів порівняно з класичними лінійними моделями. Такі базові показники, як рентабельність (співвідношення прибутку та витрат) і продуктивність праці (відношення обсягу виробленої продукції до витрат робочого часу), а також складніші специфічні індикатори (питома матеріаломісткість, коефіцієнти ліквідності, співвідношення прибутку та ризику тощо) — усі вони за своєю природою є відносними, а не абсолютними величинами.

У багатьох фінансово-економічних та виробничих процесах ключовим індикатором успішності є не абсолютний, а відносний результат. До таких показників належать рентабельність (відношення отриманого прибутку до понесених витрат), продуктивність праці (відношення обсягу випуску продукції до витрат робочого часу), питома матеріаломісткість, а також різноманітні фінансові коефіцієнти ліквідності та відношення прибутку до ризику. Ця концептуальна зміна зумовила математичний перехід від класичних лінійних цільових функцій до функцій, що являють собою відношення двох лінійних форм.

Математично базова задача дробово-лінійного програмування у найзагальнішому вигляді була сформульована як пошук вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, що максимізує дробовий функціонал:

$$F(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max \tag{2.1}$$

за умови належності плану x до поліедральної множини (області допустимих розв'язків), що задається системою лінійних алгебраїчних рівнянь та нерівностей:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}, \tag{2.2}$$

де $c, d \in \mathbb{R}^n$ — задані вектори коефіцієнтів, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матриця технологічних коефіцієнтів, $b \in \mathbb{R}^m$ — вектор обмежень на ресурси, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — скалярні константи.

У цьому контексті не можна не згадати працю видатного американського математика Джона фон Неймана, написану в 1937 році (опубліковану 1945-го), яка стала одним із перших практичних прикладів задач, де виникає потреба максимізації дробового показника. У ній описувалася модель рівноваги економіки, що розширюється (expanding economy model).[4] Головне завдання полягало у визначенні вектора інтенсивності виробничих процесів x, який гарантував би максимальні темпи економічного зростання λ. Виробничий процес задавався матрицею витрат A та матрицею випуску B. Відповідно, умовою зростання виступала нерівність $Bx \geq \lambda Ax$, яка, своєю чергою, зводилася до задачі максимізації мінімаксного відношення лінійних функцій:

$$\lambda^* = \max_{x \in S} \min_i \frac{(Bx)_i}{(Ax)_i}. \tag{2.3}$$

Ця концепція не лише довела існування рівноваги в багатогалузевій економіці, але й заклала потужне ідеологічне підґрунтя для подальшого теоретичного дослідження оптимізаційних задач із дробовими критеріями.

З подальшим розвитком цього напрямку задачі дробового програмування утворили самостійну галузь у теорії оптимізації.[5] На початковому етапі дослідження основою для розв'язання таких задач слугував апарат нелінійного програмування, зокрема відповідно адаптовані градієнтний метод та метод штрафних функцій. Проте ці підходи швидко виявили свою неефективність через значні обчислювальні труднощі.

Важливим етапом у розвитку методів дробово-лінійного програмування стала спільна робота американських математиків А. Чарнса та В. Купера[6] . У ній нелінійна задача (2.1)–(2.2) зводилася до простішої задачі лінійного програмування шляхом введення нової скалярної змінної. Запропонований алгоритм виявився нескладним у реалізації і водночас надзвичайно ефективним. За допомогою відповідної підстановки вводилися нова скалярна змінна $t \geq 0$ та вектор $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y = t \cdot x, \quad t = \frac{1}{d^T x + \beta}. \tag{2.4}$$

Однак, як можна помітити, для того щоб отримана система залишалася лінійною, а змінна t — додатною, знаменник цільової функції має бути строго додатним на всій множині допустимих розв'язків, тобто $d^T x + \beta > 0$ для будь-якого $x \in S$. Ця вимога стала суттєвим обмеженням для застосування методу.

Майже паралельно з дослідженнями Чарнса і Купера, угорський математик Бела Мартош у 1960 році (англомовна публікація вийшла у 1964 році [7]) розробив альтернативний, прямий метод розв'язання задач ДЛП, який отримав назву «гіперболічне програмування». Підхід Мартоша являв собою глибоку алгоритмічну модифікацію класичного симплекс-методу, що дозволяла працювати безпосередньо з дробовим функціоналом, обчислюючи псевдоградієнти та критерії оптимальності без необхідності введення додаткових змінних. Однак і цей метод жорстко вимагав виконання умови знакосталості знаменника для забезпечення збіжності ітераційного процесу.

З розвитком економічної теорії та появою нових фінансових і актуарних інструментів ці недоліки виявилися критичними. Адже на практиці дедалі частіше траплялися задачі, де вираз у знаменнику $d^T x + \beta$ міг набувати довільного знака. Тому пошук шляхів узагальнення класичних методів перетворився на вкрай актуальний напрям досліджень.

Зміна знаку знаменника всередині поліедральної множини S призводить до порушення її топологічної зв'язності відносно цільової функції та виникнення гіперплощини розривів другого роду:

$$H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\}. \tag{2.5}$$

За таких умов цільова функція втрачає критично важливі властивості псевдоопуклості та псевдоугнутості, що робить методи Чарнса-Купера та Мартоша у їхньому класичному вигляді незастосовними.

Таким чином, історичний розвиток теорії та методів дробового програмування демонструє еволюційний перехід: від розв'язання строгих, «ідеалізованих» макроекономічних моделей із гарантовано додатними знаменниками до більш загальних, складних і реалістичних постановок. Розробка та теоретичне обґрунтування нових математичних підходів для коректної обробки знакозмінних критеріїв ефективності об'єктивно зумовлюються цими новими викликами фінансової математики. І саме ця актуальна проблема — розробка алгоритму зведення задачі ДЛП зі знаменником довільного знака до еквівалентної лінійної форми — розв'язується в даному дисертаційному дослідженні.

2.2 Економічні моделі та передумови виникнення задач ДЛП

Для прийняття оптимальних рішень під час математичного моделювання фінансових та економічних процесів використання лише абсолютних показників (таких як сумарний прибуток, загальний обсяг випуску продукції, загальна сума залучених активів або мінімальні сукупні витрати) часто виявляється недостатнім. Адже досягнення максимальних абсолютних значень не завжди відповідає найефективнішому використанню наявних ресурсів. Натомість відносні показники завдяки своїй гнучкості дають змогу отримати більш об'єктивну загальну картину. Відповідно, процес максимізації таких показників з урахуванням наявних обмежень природним чином зводиться до постановки та розв'язання задач дробово-лінійного програмування (ДЛП). [5]

Розглянемо деякі основні приклади економічних моделей, які слугують передумовами для розвитку методів ДЛП.

1. Однією з найбільш поширених задач мікроекономічного планування є максимізація рентабельності, що визначається як відношення чистого прибутку до загальних витрат (або обсягу авансованого капіталу). Опишемо цю задачу.

Нехай підприємство має можливість випускати n різних видів продукції. Позначимо через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n_+$ вектор-стовпець обсягів випуску. Виробничий процес обмежений наявними ресурсами m видів. Нехай $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матриця технологічних коефіцієнтів, де елемент a_{ij} відображає витрати i-го ресурсу на виробництво одиниці j-ї продукції. Вектор $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m_+$ задає максимально доступні обсяги ресурсів. Тоді множина допустимих виробничих планів описується системою:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}. \tag{2.6}$$

Введемо фінансові параметри моделі: $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ — вектор прибутку від реалізації одиниці кожного виду продукції; $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$

— вектор витрат на її виробництво. Крім того, врахуємо наявність фіксованих (незалежних від обсягу випуску) фінансових потоків: скаляр α відображає гарантований дохід (наприклад, державні субсидії або дохід від оренди), а скаляр β — постійні витрати (адміністративні витрати, фіксована орендна плата).

За таких умов задача максимізації рентабельності підприємства $R(x)$ набуває вигляду:

$$R(x) = \frac{p^T x + \alpha}{c^T x + \beta} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \alpha}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \beta} \to \max_{x \in S}. \tag{2.7}$$

2. У задачах розподілу інвестиційних ресурсів, формування резервів або оцінки страхових портфелів часто виникає об'єктивна потреба в максимізації відношення очікуваного доходу до міри прийнятого ризику або обсягу капіталу під ризиком.

Нехай інвестор (або страховик) розподіляє наявний капітал між n доступними фінансовими інструментами. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ визначає частки капіталу, інвестовані у відповідні активи, причому $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. Якщо очікувана прибутковість інструментів описується вектором $r \in \mathbb{R}^n$, а відповідні лінійні міри ризику — вектором $d \in \mathbb{R}^n$, то цільова функція формулюється як:

$$E(x) = \frac{r^T x}{d^T x + \beta_0} \to \max_{x \in S}, \tag{2.8}$$

де β_0 — базовий рівень безризикового капіталу або гарантійного фонду. Подібні лінійні дробові моделі є обчислювально ефективними аналогами максимізації коефіцієнта Шарпа у фінансовій галузі, де квадратична міра ризику (дисперсія) замінюється лінійною апроксимацією для уникнення надмірної обчислювальної складності нелінійного програмування.

3. Також вкрай важливо згадати про моделі аналізу середовища функціонування (Data Envelopment Analysis, DEA). Метою яких є оцінка порівняльної ефективності K незалежних економічних об'єктів (наприклад філіалів банку, страхових компаній), які використовують подібні види ресурсів для генерації подібних видів результатів.

Нехай кожен об'єкт використовує m видів вхідних ресурсів (inputs) для створення s видів вихідних результатів (outputs). Позначимо через $x_{ik} \geq 0$ обсяг i-го ресурсу, спожитого k-м об'єктом, а через $y_{rk} \geq 0$ — обсяг r-го вихідного результату. Метою моделі є знаходження такого вектора невід'ємних невідомих вагових коефіцієнтів для результатів $u = (u_1, \ldots, u_s)^T$ та ресурсів $v = (v_1, \ldots, v_m)^T$, який максимізує зведений показник ефективності E_k для конкретного оцінюваного k-го об'єкта.

Цей показник конструюється як відношення лінійної комбінації результатів до лінійної комбінації ресурсів:

$$E_k(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}} \to \max_{u,v} \tag{2.9}$$

за умов нормування, які вимагають, щоб аналогічні показники ефективності для всіх K об'єктів вибірки (включно з оцінюваним) при цих же вагах не перевищували одиницю:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, K\}, \tag{2.10}$$

та невід'ємності дуальних змінних: $u \geq 0$, $v \geq 0$.

Під час аналізу наведених вище класичних економічних моделей можна виокремити одну фундаментальну спільну математичну властивість: у задачах (2.7), (2.8) та (2.9) припускається, що знаменник цільової функції є строго додатним на всій множині допустимих розв'язків S. З фінансової точки зору це цілком логічно для опису виробничих процесів, адже сумарні змінні витрати, обсяги фізично спожитих ресурсів або базовий гарантійний капітал не можуть набувати від'ємних значень. Тому умова $D(x) > 0$ у таких задачах завжди виконується, що дає змогу безперешкодно застосовувати класичне перетворення змінних Чарнса-Купера для їх зведення до лінійної форми.

Однак, при математичному моделюванні складних фінансових інструментів, формуванні хеджингових портфелів із допуском відкритих коротких позицій, або в актуарних моделях перестрахування, знаменник $D(x) = d^T x + \beta$ набуває принципово іншого економічного змісту. У таких задачах він може відображати чисте сальдо фінансових зобов'язань (Net Liabilities) або чистий грошовий потік (Net Cash Flow).

Оскільки чистий грошовий потік формується як алгебраїчна сума надходжень та виплат, то залежно від обраної структури плану $x \in S$, сумарне значення знаменника $D(x)$ може бути:

- $D(x) > 0$: портфель має позитивні чисті зобов'язання (очікувані виплати перевищують надходження);
- $D(x) < 0$: портфель генерує позитивне сальдо (надходження премій перекривають очікувані збитки);
- $D(x) = 0$: досягається точка балансу (беззбитковості).

За умови, що знаменник цільової функції може набувати довільного знака, площина нульових значень $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\}$ неминуче перетинає багатогранник допустимих розв'язків S. Це унеможливлює безпосереднє застосування класичних методів. Відтак специфічна економічна природа сучасних фінансових інструментів, що передбачають генерацію знакозмінних грошових потоків та виникнення від'ємних балансів спонукає до пошуку й розроблення універсальніших алгоритмів розв'язання задач ДЛП зі знакозмінним знаменником.

2.3 Загальна математична постановка задачі

Для коректного застосування аналітичного апарату теорії оптимізації та дослідження операцій, а також для подальшої розробки чисельних алгоритмів розв'язання, розглянуті у попередньому підрозділі економічні моделі оптимізації відносних показників потребують строгої математичної формалізації. У загальному випадку ці прикладні моделі зводяться до узагальненої задачі дробово-лінійного програмування (ДЛП).

Нехай задано n-вимірний арифметичний евклідів простір $\mathbb{R}^n$, елементами якого є вектори шуканих змінних. У контексті фінансово-економічного моделювання компоненти вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ інтерпретуються як інтенсивності використання певних технологічних процесів, обсяги випуску продукції, або ж вагові коефіцієнти (частки) фінансових активів у структурі інвестиційного портфеля.

Будемо вважати наперед заданими наступні детерміновані параметри моделі:

- $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор коефіцієнтів чисельника цільової функції, що формалізує вектор питомих прибутків, очікуваних дохідностей інструментів або інших прямих надходжень від реалізації плану x;

- $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор коефіцієнтів знаменника цільової функції, який відображає вектор питомих витрат, лінійних мір ризику або обсягів необхідного резервного капіталу;

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — задані скалярні константи, які мають економічний зміст фіксованих (незалежних від інтенсивностей x_j) доходів або витрат, а також базових нормативних рівнів капіталу;

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матриця коефіцієнтів системи лінійних обмежень розмірності $m \times n$, що виступає технологічною матрицею витрат ресурсів або матрицею структурних фінансових лімітів;

- $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ — вектор правих частин системи обмежень, що визначає граничні обсяги доступних виробничих ресурсів, обмеження на загальну ліквідність або зовнішні макроекономічні квоти.

Цільова функція узагальненої задачі ДЛП $F(x)$ являє собою відношення двох функцій багатовимірного аргументу. Строга математична постановка задачі полягає у знаходженні такого вектора оптимального плану x^*, який доставляє глобальний максимум дробовому функціоналу:

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max_x \tag{2.11}$$

за умов виконання системи лінійних алгебраїчних нерівностей (або рівнянь) та стандартних вимог невід'ємності шуканих змінних:

$$\begin{cases} Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Система лінійних обмежень (2.12) формує в просторі $\mathbb{R}^n$ множину допустимих розв'язків S, яку формально можна записати у вигляді:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}. \tag{2.13}$$

З погляду лінійної алгебри множина S є перетином скінченної кількості замкнених півпросторів (що задаються рядками матриці A та умовами невід'ємності), тобто поліедральною множиною (опуклим багатогранником). У контексті коректно поставлених економічних і фінансових задач робиться природне припущення, що множина допустимих планів непорожня ($S \neq \emptyset$). Це означає існування хоча б одного плану, який задовольняє всі інституційні та технологічні обмеження.

Крім того, виходячи з об'єктивних реалій скінченності будь-яких економічних ресурсів чи наявного інвестиційного капіталу, ми припускаємо, що множина S є обмеженою. Відповідно до теореми Мінковського-Вейля, обмежений багатогранник S є політопом, що гарантує компактність множини допустимих розв'язків у топології евклідового простору $\mathbb{R}^n$ [8] . Ця топологічна властивість є критично важливою: за теоремою Вейєрштрасса, вона є необхідною умовою для гарантованого досягнення неперервною функцією свого глобального екстремуму на цій множині (за умови відсутності внутрішніх точок розриву).

Для глибшого розуміння специфіки задачі оптимізації відносних показників варто проаналізувати поведінку цільової функції (2.11). На відміну від класичного лінійного програмування, де поверхні рівня цільової функції є строго паралельними одна одній, множини рівня дробово-лінійної функції

$$L_\gamma = \left\{ x \in S \;\middle|\; \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = \gamma \right\}, \tag{2.14}$$

де $\gamma \in \mathbb{R}$ — фіксоване значення критерію, утворюють сімейство гіперплощин вигляду $(c - \gamma d)^T x + (\alpha - \gamma\beta) = 0$. Це сімейство гіперплощин не є паралельним; при зміні параметра γ вони обертаються (перетинаються) навколо спільного афінного многовиду простору $\mathbb{R}^n$ розмірності $n-2$. Така геометрична властивість кардинально ускладнює пошук екстремуму методами градієнтного спуску, оскільки напрямок найшвидшого зростання функції (вектор градієнта $\nabla F(x)$) безперервно змінює свою орієнтацію та модуль при переході від однієї точки множини S до іншої. [8]

Проаналізуємо поведінку знаменника $D(x) = d^T x + \beta$ на множині S. У класичній постановці методів зведення задач ДЛП (зокрема, у стандартному алгоритмі Чарнса-Купера) вводиться жорстке обмеження про знакосталість знаменника:

$$D(x) = d^T x + \beta > 0 \quad \forall x \in S. \tag{2.15}$$

Проте, як було показано під час аналізу економічних передумов, для сучасних задач страхової та фінансової математики це апріорне припущення є надто вузьким. Ми розглядаємо узагальнену математичну постановку, де функція знаменника може набувати значень довільного знаку на множині S.

Формально це означає, що гіперплощина нульових значень знаменника

$$H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\} \tag{2.16}$$

має непорожній перетин з багатогранником S. Ця множина $S^0 = S \cap H_0$ розбиває множину допустимих розв'язків на дві просторово розділені, неперетинні відкриті (відносно S) підобласті:

$$S^+ = \{x \in S \mid d^T x + \beta > 0\}, \tag{2.17}$$

$$S^- = \{x \in S \mid d^T x + \beta < 0\}. \tag{2.18}$$

Єдиним обмеженням, яке накладається на цільову функцію в нашій постановці, є вимога відмінності знаменника від нуля:

$$d^T x^* + \beta \neq 0. \tag{2.19}$$

Оскільки наявність множини S^0 розриває область визначення цільової функції, вихідна задача оптимізації повністю втрачає корисні алгоритмічні властивості зв'язності та квазіопуклості/квазіугнутості. Відтак, знаходження глобального оптимуму:

$$F(x^*) = \sup_{x \in S^+ \cup S^-} \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \tag{2.20}$$

потребує розробки специфічних методів декомпозиції простору S та застосування модифікованих процедур зведення до еквівалентних строго лінійних моделей.

3 Класичні методи розв'язання задач дробово-лінійного програмування

3.1 Прямі алгоритми (симплекс-метод для дробових функцій)

Під час переходу до розв'язання задач дробово-лінійного програмування (ДЛП) найбільш інтуїтивним підходом видається адаптація вже відомого симплекс-методу [9]. Цей підхід, відомий у літературі як «гіперболічне програмування» (за термінологією Б. Мартоша) або прямий симплекс-метод для дробових функцій (алгоритм, формалізований К. Сварупом). З погляду фінансово-економічного моделювання використання прямих алгоритмів має фундаментальне значення. Збереження вихідного простору змінних $x \in \mathbb{R}^n$ гарантує, що на кожній ітерації алгоритму компоненти вектора x не втрачають свого первинного економічного змісту.

Перейдемо до строгої математичної постановки прямого методу. Нехай вихідну задачу ДЛП шляхом введення додаткових (компенсуючих) змінних зведено до стандартної канонічної форми. Вимагається знайти вектор $x \in \mathbb{R}^n$, що максимізує дробовий цільовий функціонал:

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max \tag{3.1}$$

за умов виконання системи лінійних алгебраїчних рівнянь та невід'ємності змінних:

$$\begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матриця технологічних коефіцієнтів (або фінансових обмежень) рангу $\operatorname{rank}(A) = m < n$; $b \in \mathbb{R}^m$ — вектор правих частин, для якого виконується умова невід'ємності $b \geq 0$; $c, d \in \mathbb{R}^n$ — вектори коефіцієнтів чисельника та знаменника відповідно; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — задані константи.

Множина допустимих розв'язків (поліедральна множина) визначається як:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}. \tag{3.3}$$

Фундаментальним припущенням класичного прямого методу розв'язання є вимога строгої знакосталості знаменника цільової функції на всій багатогранній множині S. Без втрати загальності, в класичній теорії припускається строга додатність:

$$D(x) = d^T x + \beta > 0 \quad \forall x \in S. \tag{3.4}$$

Ця умова гарантує, що функціонал $F(x)$ є неперервним на S, а множина S не містить точок розриву другого роду. Крім того, саме ця умова забезпечує властивість псевдоопуклості/псевдоугнутості цільової функції, що є необхідним для збіжності локальних градієнтних процедур до глобального екстремуму.

Припустимо, що за допомогою методу штучного базису або інших алгоритмів знайдено початковий невироджений опорний план (базисний допустимий розв'язок) $x^{(0)} \in S$. Згідно з основами лінійної алгебри, розіб'ємо матрицю A на квадратну невироджену базисну матрицю $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (де $\det(B) \neq 0$) та матрицю небазисних векторів-стовпців $N \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$. Відповідно, вектор змінних x розщеплюється на вектори базисних x_B та небазисних x_N змінних. Тоді базове рівняння $Bx_B + Nx_N = b$ для опорного плану (де $x_N = 0$) дає розв'язок:

$$x_B = B^{-1} b \geq 0. \tag{3.5}$$

Аналогічним чином розіб'ємо вектори коефіцієнтів цільової функції: $c = (c_B, c_N)^T$ та $d = (d_B, d_N)^T$. Для поточного опорного плану $x^{(0)} = (x_B, 0)^T$ обчислимо поточні значення чисельника N_B та знаменника D_B:

$$N_B = c_B^T x_B + \alpha = c_B^T B^{-1} b + \alpha, \tag{3.6}$$

$$D_B = d_B^T x_B + \beta = d_B^T B^{-1} b + \beta. \tag{3.7}$$

Відповідно, значення цільової функції для поточного базису становить:

$$F_B = F(x^{(0)}) = \frac{N_B}{D_B}. \tag{3.8}$$

Завдяки припущенню (3.4), ми гарантовано маємо $D_B > 0$, що унеможливлює ділення на нуль на будь-якій ітерації алгоритму.

Ключова відмінність прямого симплекс-методу для задач ДЛП від класичного лінійного програмування полягає у специфічному правилі обчислення симплекс-оцінок (reduced costs), які необхідні для визначення змінної, що вводиться до базису. Оскільки цільова функція є дробовою, маргінальний вплив кожної небазисної змінної x_j (де $j \in N$) на значення $F(x)$ залежить як від зміни чисельника, так і від зміни знаменника.

Для кожної небазисної змінної x_j попередньо обчислюються дві окремі відносні оцінки — для лінійної форми чисельника (Δ_{cj}) та для лінійної форми знаменника (Δ_{dj}):

$$\Delta_{cj} = c_j - z_{cj} = c_j - c_B^T B^{-1} a_j, \tag{3.9}$$

$$\Delta_{dj} = d_j - z_{dj} = d_j - d_B^T B^{-1} a_j, \tag{3.10}$$

де a_j — j-й вектор-стовпець початкової матриці A, що відповідає змінній x_j. Величини z_{cj} та z_{dj} економічно інтерпретуються як непрямі витрати відповідних ресурсів при виробництві одиниці j-ї продукції.

Напрямок зростання дробової функції $F(x)$ при нескінченно малому збільшенні змінної x_j визначається знаком її часткової похідної. Згідно з правилом диференціювання частки двох функцій, зведена (повна) симплекс-оцінка Δ_j обчислюється за формулою:

$$\Delta_j = D_B \cdot \Delta_{cj} - N_B \cdot \Delta_{dj}. \tag{3.11}$$

Економічний зміст величини Δ_j має ключове значення для фінансового аналізу. Вона визначає напрям зміни цільового відносного показника (наприклад, загальної рентабельності) при частковому включенні j-го активу до інвестиційного портфеля.

З огляду на властивість псевдоопуклості функції $F(x)$ за умови $D(x) > 0$, локальний екстремум збігається з глобальним. Тому, якщо для всіх небазисних змінних виконується умова:

$$\Delta_j \leq 0 \quad \forall j \in N, \tag{3.12}$$

то поточний опорний план x_B є глобально оптимальним розв'язком вихідної задачі ДЛП на множині S. Алгоритм успішно завершує роботу.

Якщо ж існує хоча б одна змінна, для якої $\Delta_j > 0$, поточний план не є оптимальним і його можна покращити. Змінна x_k, що вводиться до базису, обирається наступним чином:

$$k = \arg\max_j \{\Delta_j \mid \Delta_j > 0\}. \tag{3.13}$$

Нехай $y_k = B^{-1} a_k$ — вектор коефіцієнтів розкладу k-го стовпця за поточним базисом. Тоді індекс r змінної, що залишає базис, визначається як:

$$r = \arg\min_i \left\{ \frac{(x_B)_i}{y_{ik}} \;\middle|\; y_{ik} > 0 \right\}. \tag{3.14}$$

Після цього здійснюється стандартний крок жорданових виключень для оновлення оберненої базисної матриці B^{-1} та переходу до нової вершини багатогранника S.

Прямий алгоритм Канті Сварупа / Бели Мартоша дозволяє працювати у первинному просторі змінних. Проте його критичним недоліком є жорстка залежність від умови (3.4) — строгої додатності знаменника.

Розглянемо випадок, коли знаменник $D(x)$ може змінювати знак на області допустимих розв'язків S. У цьому випадку багатогранник S перетинається з гіперплощиною $d^T x + \beta = 0$. Якщо алгоритм під час ітерацій наближається до цієї гіперплощини, базовий знаменник D_B прямує до нуля. Це призводить до наступних наслідків для алгоритму:

1. Значення цільової функції F_B та симплекс-оцінок (3.11) стають необмеженими (прямують до нескінченності) або невизначеними.

2. При зміні знаку знаменника з плюса на мінус вектор градієнта стрибкоподібно змінює напрямок на протилежний, порушується монотонність зростання цільової функції.

3. Втрата псевдоопуклості призводить до того, що умова $\Delta_j \leq 0$ більше не гарантує досягнення глобального максимуму — алгоритм може «застрягти» у локальному хибному екстремумі.

Саме ця вразливість прямих методів при роботі зі знакозмінними фінансовими потоками робить їх застосування в сучасних страхових моделях небезпечним і некоректним. Це об'єктивно вимагає відмови від прямого симплекс-методу на користь методів нелінійного перетворення простору змінних (типу Чарнса-Купера) з їх подальшою модифікацією для обробки знаменників довільного знаку.

3.2 Класичне перетворення змінних Чарнса-Купера

У 1962 році американські математики Абрахам Чарнс та Вільям Купер запропонували альтернативний метод розв'язання задач дробово-лінійного програмування. Його суть полягає у зведенні моделі ДЛП до еквівалентної лінійної форми шляхом відповідного перетворення змінних. Завдяки високій ефективності та простоті застосування цей підхід набув значного поширення, ставши фундаментальною основою для розроблення складніших алгоритмів. Розглянемо це перетворення детальніше.[6]

Нехай задано стандартну задачу дробово-лінійного програмування (ДЛП): знайти вектор $x \in \mathbb{R}^n$, що максимізує функціонал

$$F(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max \tag{3.15}$$

на множині допустимих розв'язків

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}, \tag{3.16}$$

де $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Класичний метод Чарнса-Купера базується на жорсткій вимозі, що знаменник цільової функції є строго додатним для всіх допустимих планів. Тобто припускається, що:

$$D(x) = d^T x + \beta > 0 \quad \forall x \in S. \tag{3.17}$$

Ідея методу полягає у введенні нової невід'ємної скалярної змінної $t \in \mathbb{R}$, яка виконує роль масштабуючого фактора (нормувального множника), та нового вектора змінних $y \in \mathbb{R}^n$. Визначимо змінну t як величину, обернену до знаменника цільової функції:

$$t = \frac{1}{d^T x + \beta}. \tag{3.18}$$

Оскільки за припущенням (3.17) $D(x) > 0$, а множина S обмежена (тобто знаменник не прямує до нескінченності), змінна t завжди є строго додатною та скінченною величиною: $t > 0$.

Введемо вектор нових просторових змінних y за допомогою лінійної підстановки:

$$y = t \cdot x. \tag{3.19}$$

Оскільки $x \ge 0$ та $t > 0$, очевидно, що вектор y також є додатнім: $y \ge 0$.

Виразимо вихідну цільову функцію $F(x)$ через нові змінні y та t. Підставляючи $x = y/t$ у формулу (3.15) та враховуючи означення (3.18), отримуємо:

$$F(x) = \frac{c^T(y/t) + \alpha}{1/t} = \frac{\frac{1}{t}(c^T y + \alpha t)}{\frac{1}{t}} = c^T y + \alpha t. \tag{3.20}$$

Як бачимо, розривний дробово-лінійний функціонал $F(x)$ перетворився на лінійну функцію $L(y,t) = c^T y + \alpha t$ у розширеному просторі $\mathbb{R}^{n+1}$.

Аналогічним чином перетворимо систему лінійних нерівностей, що задає багатогранник S. Помножимо ліву і праву частини матричної нерівності $Ax \le b$ на строго додатний скаляр t:

$$A(t \cdot x) \le b \cdot t \quad \Longrightarrow \quad Ay - bt \le 0. \tag{3.21}$$

Це перетворення зберігає напрямок нерівності та забезпечує лінійність структурних обмежень.

Для того щоб система була повністю визначеною і враховувала нелінійний зв'язок між змінними, необхідно формалізувати рівняння (3.18). Домноживши обидві частини рівності $t = (d^T x + \beta)^{-1}$ на знаменник, маємо:

$$t(d^T x + \beta) = 1 \quad \Longrightarrow \quad d^T(tx) + \beta t = 1 \quad \Longrightarrow \quad d^T y + \beta t = 1. \tag{3.22}$$

В результаті застосування перетворення Чарнса-Купера вихідна нелінійна задача зводиться до розширеної задачі лінійного програмування, яку позначимо як LP^+:

$$LP^+ : \quad L(y,t) = c^T y + \alpha t \to \max_{y,t} \tag{3.23}$$

за умов належності до нової множини розв'язків $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$Q = \left\{ (y,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{aligned} Ay - bt &\le 0, \\ d^T y + \beta t &= 1, \\ y \ge 0, &\quad t \ge 0 \end{aligned} \right\}. \tag{3.24}$$

Для теоретичного обґрунтування можливості заміни вихідної задачі (3.15)–(3.16) на задачу (3.23)–(3.24) необхідно строго довести теорему про їхню еквівалентність.

Теорема 1 (Про еквівалентність перетворення Чарнса-Купера)**.** *Нехай множина S непорожня та обмежена, і для всіх $x \in S$ виконується умова $d^T x + \beta > 0$. Тоді вихідна задача дробово-лінійного програмування еквівалентна лінійній задачі LP^+. А саме: кожному розв'язку $x \in S$ відповідає допустимий розв'язок $(y,t) \in Q$ з тим самим значенням цільової функції, і навпаки.*

Доведення. Покажемо, що будь-якому $x \in S$ відповідає точка в множині Q. Нехай $x \in S$. Згідно з (3.16), маємо $Ax \le b$ та $x \ge 0$. Оскільки за умовою теореми $D(x) > 0$, ми можемо коректно визначити скаляр $t = \frac{1}{d^T x + \beta} > 0$ та вектор $y = tx \ge 0$.

Перевіримо виконання обмежень множини Q для пари (y,t). Оскільки $t > 0$, помножимо нерівність $Ax \le b$ на t:

$$tAx \le tb \quad \Longrightarrow \quad A(tx) - bt \le 0 \quad \Longrightarrow \quad Ay - bt \le 0.$$

Далі, підставимо y і t в умову нормування:

$$d^T y + \beta t = d^T(tx) + \beta t = t(d^T x + \beta) = t \cdot D(x) = \frac{1}{D(x)} \cdot D(x) = 1.$$

Оскільки $y \geq 0$ та $t > 0$, пара (y, t) повністю задовольняє всі умови множини Q, отже $(y, t) \in Q$. При цьому значення цільових функцій збігаються: $F(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = t(c^T x + \alpha) = c^T y + \alpha t = L(y, t)$.

Тепер покажемо, що кожному допустимому розв'язку $(y, t) \in Q$ відповідає певний $x \in S$.

Нехай $(y, t) \in Q$. З умови нормування (3.22) випливає, що t не може дорівнювати нулю. Дійсно, якби $t = 0$, то $d^T y = 1$. Однак з обмежень $Ay - bt \leq 0$ при $t = 0$ маємо $Ay \leq 0$, що для обмеженої множини S та $y \geq 0$ можливо лише при $y = 0$. Але $y = 0$ суперечить умові $d^T y = 1$. Отже, $t > 0$.

Визначимо $x = y/t$. Оскільки $y \geq 0$ та $t > 0$, то $x \geq 0$. Поділивши нерівність $Ay - bt \leq 0$ на t, отримаємо $A(y/t) \leq b$, тобто $Ax \leq b$. Таким чином, $x \in S$. При цьому значення цільової функції $L(y, t) = c^T y + \alpha t = t(c^T x + \alpha) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = F(x)$, оскільки з умови нормування $1/t = d^T x + \beta$.

Отже, задачі еквівалентні, і оптимальний розв'язок x^* вихідної задачі можна знайти як $x^* = y^*/t^*$, де (y^*, t^*) — оптимальний план задачі LP^+.

$\square$

Попри свою ефективність та легкість застосування, класичне перетворення Чарнса-Купера (3.18)–(3.19) критично залежить від знаку знаменника. Якщо умова $D(x) > 0$ порушується і знаменник може набувати від'ємних значень, то:

1. Змінна t може стати від'ємною, що призведе до зміни знаку нерівностей у системі (3.21) та порушення невід'ємності y.

2. У точці, де $D(x) = 0$, перетворення має розрив, і значення t прямує до нескінченності.

3. Опукла множина Q більше не відображає всю допустиму область S.

Проте метод Чарнса-Купера можна використовувати як фундамент для побудови універсального алгоритму розв'язання задач дробово-лінійного програмування у випадку знаменника довільного знака.

4 Зведення задачі зі знаменником довільного знаку до лінійної задачі

4.1 Формалізація проблеми змінного знаку знаменника

Припущення про незмінність знака знаменника цільової функції на всій множині допустимих розв'язків є ключовим для забезпечення коректності та розв'язності задачі дробово-лінійного програмування (ДЛП).

Нехай задано загальну задачу ДЛП на компактній (обмеженій та замкненій) поліедральній множині допустимих планів $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max, \tag{4.1}$$

де $x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$.

Для коректного застосування алгоритмів зведення до лінійної задачі (зокрема, методу Чарнса–Купера або прямих градієнтних методів) зазвичай вводиться суворе обмеження щодо відсутності точок зміни знака знаменника всередині області допустимих розв'язків [3]:

$$\forall x \in S : D(x) = d^T x + \beta > 0 \quad (\text{або } d^T x + \beta < 0). \tag{4.2}$$

Дотримання умови (4.2) має принципове значення для аналізу задачі. Воно гарантує неперервність цільової функції $F(x)$ на всій допустимій множині S. Крім того, завдяки незмінності знака знаменника, функція (4.1) набуває властивостей псевдоопуклості та псевдоугнутості [10] . Це дозволяє застосувати локально-глобальний принцип: будь-який локальний екстремум на опуклій множині S одночасно є і глобальним. Саме ця особливість обґрунтовує можливість використання симплекс-методів для пошуку оптимального рішення серед вершин багатогранника.

Проте припущення (4.2) виявляється надто жорстким для розв'язання багатьох практичних задач у сфері фінансів. У сучасних моделях знаменник $D(x)$ може означати чистий капітал під ризиком, грошовий потік (сальдо надходжень та виплат) або сукупну вартість зобов'язань. Залежно від структури моделі ці показники можуть бути як додатними, так і від'ємними. Отже, ситуація, коли знаменник цільової функції змінює знак у межах множини S, є природним економічним явищем. Це зумовлює потребу в додатковому математичному аналізі та пошуку методів розв'язання задачі за таких умов.

Відмова від припущення (4.2) означає, що афінна функція знаменника $D(x) = d^T x + \beta$ може змінювати знак під час переміщення поточного плану оптимізації по множині допустимих розв'язків S. Оскільки функція $D(x)$ є неперервною на $\mathbb{R}^n$, за теоремою Больцано-Коші зміна знаку з необхідністю означає існування підмножини точок, у яких знаменник дорівнює нулю.

Позначимо через H_0 афінну гіперплощину розмірності $n-1$ у просторі $\mathbb{R}^n$, яка визначається нульовим рівнем знаменника:

$$H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\}. \tag{4.3}$$

Тоді множина критичних точок всередині області допустимих розв'язків визначається як перетин множини S та гіперплощини H_0:

$$S^0 = S \cap H_0 = \{x \in S \mid d^T x + \beta = 0\}. \tag{4.4}$$

Наявність непорожньої множини $S^0 \neq \emptyset$ кардинально змінює поведінку цільової функції. У точках множини S^0 функція $F(x)$ не визначена та зазнає розриву другого роду. При нескінченно близькому наближенні плану x до гіперплощини H_0 значення цільової функції асимптотично прямує до нескінченності:

$$\lim_{x \to x_0 \in S^0} \left| \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \right| = \infty, \tag{4.5}$$

причому знак нескінченності (напрямок розриву) залежить від знаку чисельника $N(x_0) = c^T x_0 + \alpha$ у точці розриву та від того, з якої півплощини ($D(x) > 0$ чи $D(x) < 0$) відбувається наближення до H_0 [11] . Це створює ситуацію за якої глобальний максимум цільової функції на нерозщепленій множині S може бути математично необмеженим, якщо H_0 містить внутрішні точки множини S, для яких $N(x_0) \neq 0$.

Геометрично гіперплощина розриву H_0 розтинає вихідний багатогранник S на три неперетинні множини: дві відкриті (у відносній топології S) підобласті та одну сингулярну грань (якщо перетин має розмірність $n-1$). Визначимо ці строго відокремлені підобласті як множини точок із додатним та від'ємним знаменником відповідно:

$$S^+ = \{x \in S \mid d^T x + \beta > 0\}, \tag{4.6}$$
$$S^- = \{x \in S \mid d^T x + \beta < 0\}. \tag{4.7}$$

Очевидно, що $S = S^+ \cup S^0 \cup S^-$. З точки зору топології та опуклого аналізу, об'єднання $S^+ \cup S^-$ стає просторово незв'язною множиною. Як наслідок, ми отримуємо критичну проблему для методів класичної оптимізації, оскільки область пошуку розв'язку більше не може розглядатись як єдиний опуклий об'єкт.

Дробово-лінійна цільова функція $F(x)$ зберігає критично важливі властивості псевдоопуклості та псевдоугнутості виключно локально — тобто окремо в межах опуклої відкритої множини S^+ та окремо в межах S^-. Проте на їхньому об'єднанні (глобально на всій допустимій області без урахування розриву) ці властивості безповоротно втрачаються [10] . Як наслідок, функція $F(x)$ може мати декілька локальних екстремумів в обох підмножинах, і виконання необхідних умов оптимальності першого порядку (наприклад, умов Каруша-Куна-Таккера) у певній точці більше не гарантує, що знайдено глобальний максимум вихідної задачі.

Традиційне перетворення змінних Чарнса–Купера, що є базовим інструментом лінеаризації задач дробово-лінійного програмування, ґрунтується на введенні нормувального множника $t = (d^T x + \beta)^{-1}$ та вектора нових змінних $y = t \cdot x$. Проте у випадку, коли знаменник змінює знак на множині S, пряме застосування цього підходу без додаткових аналітичних перетворень призводить до некоректної побудови лінійної моделі з наступних причин:

1. *Порушення умови невід'ємності.* Якщо поточний план $x \in S^-$, то знаменник від'ємний ($D(x) < 0$), і, відповідно, масштабуюча змінна t стає строго від'ємною ($t < 0$). Оскільки $x \geq 0$, новий вектор змінних $y = t \cdot x$ стає недодатною величиною ($y \leq 0$). Це прямо суперечить базовій формі задачі лінійного програмування, де всі змінні за замовчуванням мають бути невід'ємними, і унеможливлює використання стандартного симплекс-методу без додаткових замін.

2. *Інверсія системи обмежень.* При лінеаризації обмежень множини S ($Ax \leq b$) здійснюється множення обох частин на скаляр t. Для точок з області S^- ($t < 0$) напрямок нерівностей неминуче змінюється на протилежний:

$$A(t \cdot x) \geq b \cdot t \quad \Longrightarrow \quad Ay - bt \geq 0. \tag{4.8}$$

   Це означає, що єдиної еквівалентної лінійної системи обмежень для всієї множини S не існує; структурна геометрія багатогранника розпадається.

3. *Алгебраїчна невизначеність у точках розриву.* У будь-якій точці $x \in S^0$ знаменник дорівнює нулю, отже, параметр t стає невизначе-

ним ($t \to \pm\infty$). Перетворення Чарнса-Купера просто не визначене на гіперплощині розриву, і будь-який алгоритм, що базується на ньому, завершиться критичною помилкою ділення на нуль.

Для задач профілю страхової та фінансової математики ігнорування проблеми змінного знаку знаменника призводить не лише до обчислювальних збоїв, а й до серйозних методологічних помилок. Наприклад, при оптимізації коефіцієнта рентабельності страхового портфеля знаменник відображає чистий грошовий потік або баланс страхових резервів. Ситуація $D(x) > 0$ може означати профіцит резервів, тоді як $D(x) < 0$ — їх дефіцит.

Традиційний підхід штучного накладання обмеження $d^T x + \beta \geq \varepsilon$ (де $\varepsilon > 0$) примусово відсікає частину простору стратегій S^-. Математично це призводить до знаходження локального субоптимального розв'язку замість глобального. Економічно це означає, що аналітик «не бачить» тих інвестиційних стратегій, за яких компанія може ефективно працювати в умовах тимчасового дефіциту ліквідності (залучаючи кредитні ресурси, що генерують від'ємний знаменник), і приймає хибне управлінське рішення.

Отже, коректна формалізація та розв'язання задачі ДЛП зі знаменником довільного знаку безальтернативно вимагає роздільного аналізу ізольованих областей S^+ та S^-. Це зумовлює необхідність декомпозиції вихідної нелінійної задачі на серію незалежних лінійних підзадач зі специфічними правилами нормування.

4.2 Перетворення змінних та рівняння нормування

Для розв'язання узагальненої задачі дробово-лінійного програмування (ДЛП) у випадку, коли знаменник цільової функції може набувати значень довільного знаку на множині S, необхідно розробити математичний апарат, що дозволяє декомпозувати вихідну нелінійну модель на скінченну сукупність еквівалентних задач лінійного програмування. На відміну від класичного підходу Чарнса-Купера, де масштабуючий множник t визначається однозначно, у даному дослідженні пропонується узагальнена трансформація, яка враховує топологічну незв'язність допустимої області відносно сингулярної гіперплощини $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\}$.

Нехай вихідна задача ДЛП сформульована як максимізація функціонала $F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ на поліедральній множині S. Оскільки за умовою задачі знаменник $D(x)$ не є знакосталим, введемо узагальнену невід'ємну змінну нормування t через абсолютне значення знаменника:

$$t = \frac{1}{|d^T x + \beta|}, \quad t > 0. \tag{4.9}$$

Використовуючи векторну підстановку $y = t \cdot x$, ми переходимо до розширеного простору змінних $(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Враховуючи розбиття множини S на підобласті S^+ та S^-, де знаменник зберігає знак, ми отримуємо дві взаємовиключні гіпотези щодо знаку виразу $d^T x + \beta$.

Гіпотеза 1: $D(x) > 0$**.** У цьому випадку $|d^T x + \beta| = d^T x + \beta$, що відповідає класичній умові нормування $d^T y + \beta t = 1$. Цільова функція зводиться до лінійної форми наступним чином:

$$L_1(y, t) = t \cdot (c^T x + \alpha) = c^T y + \alpha t. \tag{4.10}$$

Це призводить до формування першої лінійної підзадачі (LP_1):

$$Z_1 = c^T y + \alpha t \to \max, \tag{4.11}$$

за обмежень:

$$Ay - bt \leq 0, \tag{4.12}$$

$$d^T y + \beta t = 1, \tag{4.13}$$

$$y \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{4.14}$$

Гіпотеза 2: $D(x) < 0$**.** У цій підобласті модуль розкривається з протилежним знаком: $|d^T x + \beta| = -(d^T x + \beta)$, що приводить до рівняння нормування $d^T y + \beta t = -1$. Трансформація цільової функції в даному випадку потребує особливої уваги:

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = \frac{t(c^T x + \alpha)}{t(d^T x + \beta)} = \frac{c^T y + \alpha t}{d^T y + \beta t}. \tag{4.15}$$

Враховуючи, що за другою гіпотезою $d^T y + \beta t = -1$, отримуємо лінійну цільову функцію $L_2(y, t) = -(c^T y + \alpha t)$. Таким чином, друга лінійна підзадача (LP_2) набуває вигляду:

$$Z_2 = -(c^T y + \alpha t) \to \max, \tag{4.16}$$

за обмежень:

$$Ay - bt \leq 0, \tag{4.17}$$

$$d^T y + \beta t = -1, \tag{4.18}$$

$$y \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{4.19}$$

Для строгого теоретичного обґрунтування такої декомпозиції необхідно довести еквівалентність між оптимальними розв'язками вихідної дробової задачі та наведених вище лінійних моделей.

Лема 1 (Про відображення допустимих областей)**.** *Кожній точці $x \in S \setminus S^0$ відповідає допустима точка (y,t) або в задачі LP_1 (якщо $x \in S^+$), або в задачі LP_2 (якщо $x \in S^-$), причому значення відповідних цільових функцій збігаються.*

Доведення. Розглянемо випадок $x \in S^-$. Тоді $d^T x + \beta < 0$. Визначимо $t = -1/(d^T x + \beta)$. Оскільки знаменник від'ємний, то $t > 0$. Нехай $y = tx$. Оскільки $x \geq 0$ та $t > 0$, то $y \geq 0$. Перевіримо обмеження задачі LP_2: 1) Помноживши $Ax \leq b$ на $t > 0$, отримаємо $A(tx) \leq bt \implies Ay - bt \leq 0$. 2) Підставимо в рівняння нормування: $d^T y + \beta t = d^T(tx) + \beta t = t(d^T x + \beta) = \frac{-1}{d^T x + \beta} \cdot (d^T x + \beta) = -1$. 3) Значення цільової функції: $L_2(y,t) = -(c^T y + \alpha t) = -(t(c^T x + \alpha)) = \frac{c^T x + \alpha}{-(1/t)} = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} = F(x)$. Аналогічні міркування для $x \in S^+$ приводять до допустимості в LP_1 та рівності $L_1(y,t) = F(x)$. $\square$

Використовуючи встановлену відповідність між підобластями S^+, S^- та розширеними лінійними задачами, сформулюємо і доведемо основну теорему. Саме вона є теоретичним підґрунтям запропонованого методу розв'язання.

Теорема 2 (Про глобальний оптимум декомпонованої задачі ДЛП)**.** *Нехай множина допустимих розв'язків S є непорожньою та обмеженою (компактом), а цільова функція $F(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta}$ досягає свого глобального максимуму в точці $x^* \in S$, причому знаменник у цій точці не дорівнює нулю ($x^* \notin S^0$). Тоді глобальний максимум вихідної задачі дорівнює найбільшому зі значень цільових функцій оптимальних розв'язків лінійних підзадач LP_1 та LP_2:*

$$F(x^*) = \max \left\{ \sup_{(y,t) \in Q_1} L_1(y,t), \sup_{(y,t) \in Q_2} L_2(y,t) \right\}, \tag{4.20}$$

де Q_1 та Q_2 — множини допустимих розв'язків задач (4.11)–(4.14) та (4.16)–(4.19) відповідно. Якщо множина Q_k ($k \in \{1,2\}$) є порожньою, вважається, що відповідний супремум дорівнює $-\infty$.

Доведення. Оскільки множина S розбивається на три неперетинні підмножини $S = S^+ \cup S^0 \cup S^-$, а за умовою теореми $x^* \notin S^0$, оптимальний план x^* з необхідністю належить або S^+, або S^-.

Випадок 1: $x^* \in S^+$. Згідно з Лемою 1, для точки x^* існує відповідна допустима точка $(y^{(1)}, t^{(1)}) \in Q_1$, для якої $L_1(y^{(1)}, t^{(1)}) = F(x^*)$. Будь-яка інша точка $x \in S^+$ відображається в Q_1 зі збереженням значення цільової функції. Отже, максимум задачі LP_1 дорівнює $F(x^*)$. З іншого боку, для будь-якої точки $x \in S^-$, яка генерує допустимий розв'язок $(y^{(2)}, t^{(2)}) \in Q_2$, значення цільової функції $L_2(y^{(2)}, t^{(2)}) = F(x)$. Оскільки x^* є точкою глобального максимуму на всій множині S, виконується нерівність $F(x) \leq F(x^*)$. Відповідно, супремум задачі LP_2 не може перевищувати $F(x^*)$. Звідси випливає, що $\max\{\max L_1, \max L_2\} = \max L_1 = F(x^*)$.

Випадок 2: $x^* \in S^-$. Дзеркально до попереднього випадку, за Лемою 1 оптимальному плану x^* відповідає точка $(y^{(2)}, t^{(2)}) \in Q_2$, де $L_2(y^{(2)}, t^{(2)}) = F(x^*)$. Для будь-якого іншого плану $x \in S^+$ його образ у множині Q_1 генеруватиме значення $L_1(y, t) = F(x) \leq F(x^*)$. Таким чином,
$\max\{\max L_1, \max L_2\} = \max L_2 = F(x^*)$.

Якщо одна з підобластей (наприклад, S^-) є порожньою, то згідно з умовами нормування відповідна множина Q_2 також буде порожньою (система обмежень виявиться несумісною). У такому разі задача зводиться до розв'язання єдиної сумісної лінійної підзадачі, що повністю узгоджується з класичним методом Чарнса-Купера. Теорему доведено. □

Доведена теорема формує строгий математичний базис для двохетапного алгоритму розв'язання задач ДЛП зі знакозмінним знаменником:

1. Знайти оптимальний розв'язок $Z_1^* = \max L_1(y, t)$ задачі LP_1 симплекс-методом.

2. Знайти оптимальний розв'язок $Z_2^* = \max L_2(y, t)$ задачі LP_2 симплекс-методом.

3. Визначити глобальний оптимум як $Z^* = \max\{Z_1^*, Z_2^*\}$. Якщо $Z^* = Z_k^*$ (де $k \in \{1, 2\}$), то оптимальний план вихідної задачі обчислюється зворотним перетворенням $x^* = y^{(k)}/t^{(k)}$.

Підзадача LP_1 $(D(x) > 0)$ оптимізує систему в умовах позитивного знаменника, що може інтерпретуватися як функціонування в режимі наявності чистих зобов'язань, необхідності фондування або гарантовано позитивного ризику. Рівняння нормування $d^T y + \beta t = 1$ гарантує масштабування до одиничного рівня цього позитивного ризику.

Підзадача LP_2 $(D(x) < 0)$ аналізує ефективність системи в зоні від'ємного знаменника, тобто в режимі чистого профіциту ліквідності, надлишкового капіталу або «від'ємного» ризику. Тут рівняння нормування

$d^T y + \beta t = -1$ відтинає потрібний конус розв'язків. Конкуренція між максимумами цих двох лінійних задач дозволяє аналітику визначити, який саме фінансовий режим (із відповідною структурою активів x^*) забезпечує абсолютний максимум відносного критерію ефективності $F(x)$.

Окрім знаходження безпосереднього оптимального плану, розбиття вихідної задачі ДЛП на дві лінійні підзадачі LP_1 та LP_2 відкриває шлях до застосування потужного апарату теорії двоїстості лінійного програмування. Двоїсті оцінки відіграють ключову роль у аналізі фінансових моделей після їх оптимізації.

Сформулюємо двоїсту задачу до першої лінійної підзадачі LP_1 (4.11–4.14). Співставимо системі нерівностей $Ay - bt \leq 0$ вектор двоїстих змінних $u^{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $u^{(1)} \geq 0$, а рівнянню нормування $d^T y + \beta t = 1$ — вільну скалярну двоїсту змінну $v^{(1)} \in \mathbb{R}$. Тоді двоїста задача DLP_1 набуває вигляду:

$$W_1 = v^{(1)} \to \min, \tag{4.21}$$

за обмежень:

$$A^T u^{(1)} + dv^{(1)} \geq c, \tag{4.22}$$

$$-b^T u^{(1)} + \beta v^{(1)} \geq \alpha, \tag{4.23}$$

$$u^{(1)} \geq 0, \quad v^{(1)} \text{ — вільна.} \tag{4.24}$$

Аналогічним чином побудуємо двоїсту задачу DLP_2 для другої лінійної підзадачі LP_2 (рівняння 4.16–4.19). Введемо вектор двоїстих змінних $u^{(2)} \in \mathbb{R}^m$, $u^{(2)} \geq 0$ (для нерівностей $Ay - bt \leq 0$) та скалярну змінну $v^{(2)} \in \mathbb{R}$ (для рівняння нормування $d^T y + \beta t = -1$). Враховуючи, що цільова функція LP_2 максимізує вираз $-c^T y - \alpha t$, двоїста задача формулюється так:

$$W_2 = -v^{(2)} \to \min, \tag{4.25}$$

за обмежень:

$$A^T u^{(2)} + dv^{(2)} \geq -c, \tag{4.26}$$

$$-b^T u^{(2)} + \beta v^{(2)} \geq -\alpha, \tag{4.27}$$

$$u^{(2)} \geq 0, \quad v^{(2)} \text{ — вільна.} \tag{4.28}$$

Згідно з першою теоремою двоїстості лінійного програмування, якщо пряма задача LP_k ($k \in \{1, 2\}$) має оптимальний розв'язок $(y^{(k)*}, t^{(k)*})$, то відповідна двоїста задача DLP_k також має оптимальний розв'язок $(u^{(k)*}, v^{(k)*})$, причому значення їхніх цільових функцій збігаються:

$$\max Z_1 = \min W_1 = v^{(1)*}, \tag{4.29}$$

$$\max Z_2 = \min W_2 = -v^{(2)*}. \tag{4.30}$$

Цей результат безпосередньо пов'язаний із глобальним оптимумом вихідної задачі ДЛП. З урахуванням Теореми 2, оптимальне значення цільової функції дорівнює:

$$F(x^*) = \max \left\{ v^{(1)*}, -v^{(2)*} \right\}. \tag{4.31}$$

Економічна інтерпретація векторів $u^{(1)*}$ та $u^{(2)*}$ є дещо нетривіальною через наявність нормувального множника t. Для встановлення прямого зв'язку з вихідними змінними $x \in S$, необхідно виконати зворотне перетворення. За теоремою про маргінальні значення [12] , вектор $\pi^{(k)}$ для обмежень $Ax \leq b$ у вихідній дробовій задачі обчислюється як:

$$\pi^{(k)} = \frac{1}{t^{(k)*}} \cdot u^{(k)*}, \quad \text{де } t^{(k)*} > 0. \tag{4.32}$$

Елемент $\pi_i^{(k)}$ показує граничний приріст оптимального значення дробової функції $F(x^*)$ при збільшенні i-го ресурсу b_i на одиницю, за умови, що структура системи залишається в межах обраного режиму ліквідності (відповідно, S^+ або S^-). Таким чином, запропоноване розбиття не лише дозволяє знайти глобальний математичний оптимум в умовах змінного знаку знаменника, але й надає інструментарій для повноцінного економічного аналізу чутливості обох фінансових режимів, що є неможливим у рамках стандартного методу Чарнса-Купера.

4.3 Загальний алгоритм розв'язання задачі

На основі теоретичного обґрунтування декомпозиції, наведеного у попередніх підрозділах, сформулюємо загальний покроковий алгоритм розв'язання узагальненої задачі дробово-лінійного програмування (ДЛП) зі знаменником довільного знаку. Цей алгоритм має конструктивний характер і дозволяє звести пошук глобального оптимуму складної нелінійної задачі з розривною цільовою функцією до застосування стандартних процедур симплекс-методу.

Для прикладних задач страхової та фінансової математики — зокрема, при максимізації коефіцієнта Шарпа, оптимізації рентабельності інвестиційного портфеля або оцінці ефективності перестрахувального пулу за умов можливого виникнення як профіциту, так і дефіциту ліквідності — запропонований алгоритм виконує функцію автоматичного селектора оптимального фінансового режиму.

Крок 1. Початкова математична постановка та ініціалізація. Процес починається з формалізації вихідної економіко-математичної моделі у вигляді задачі ДЛП:

$$F(x) = \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \to \max \tag{4.33}$$

за умов виконання системи лінійних алгебраїчних нерівностей та вимог невід'ємності просторових змінних:

$$\begin{cases} Ax \le b, \\ x \ge 0, \end{cases} \tag{4.34}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор інтенсивностей фінансових чи виробничих процесів (наприклад, частки активів у портфелі). Матриця $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ та вектор $b \in \mathbb{R}^m$ задають технологічні, інституційні або бюджетні обмеження. Вектор $c \in \mathbb{R}^n$ відображає очікувані дохідності, а $d \in \mathbb{R}^n$ — міри ризику або капітальних витрат. Система (4.34) формує непорожню та обмежену поліедральну множину допустимих планів S.

Крок 2. Формування та розв'язання підзадачі LP_1 (аналіз режиму $D(x) > 0$). На другому етапі алгоритм генерує першу лінійну підзадачу у розширеному просторі змінних $(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ця підзадача моделює функціонування фінансової системи за умови строго додатного знаменника, що економічно інтерпретується як наявність чистих зобов'язань або позитивного капіталу під ризиком. Відповідна задача лінійного програмування має вигляд:

$$Z_1 = c^T y + \alpha t \to \max \tag{4.35}$$

за структурних обмежень, індукованих множенням вихідної системи на масштабуючий множник $t > 0$, та рівняння нормування:

$$\begin{cases} Ay - bt \le 0, \\ d^T y + \beta t = 1, \\ y \ge 0, \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

Згенерована задача (4.35)–(4.36) розв'язується за допомогою класичного прямого або двоїстого симплекс-методу. За результатами оптимізації можливі два результати:

- Якщо система обмежень (4.36) є несумісною (позначимо $Q_1 = \emptyset$), то підзадача є нерозв'язною. Це означає, що система не може функціонувати в режимі $D(x) > 0$ з дотриманням базових обмежень.

Або ж цільова функція Z_1 є необмеженою на множині допустимих розв'язків.

- Якщо знайдено базовий оптимальний план, алгоритм запам'ятовує максимальне значення цільової функції Z_1^* та відповідний йому оптимальний вектор $(y^{(1)}, t^{(1)})$.

Крок 3. Формування та розв'язання підзадачі LP_2 (аналіз режиму $D(x) < 0$). Паралельно або послідовно алгоритм формує другу лінійну підзадачу. Вона моделює поведінку економічної системи в зоні від'ємного знаменника цільової функції, що відповідає режимам надлишкової ліквідності, профіциту або від'ємного агрегованого ризику (наприклад, за рахунок переважання коротких позицій або специфічних інструментів хеджування).

Згідно з виведеними раніше трансформаціями, задача формулюється з інвертованим рівнянням нормування та зміненим знаком цільової функції:

$$Z_2 = -(c^T y + \alpha t) \to \max \tag{4.37}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} Ay - bt \leq 0, \\ d^T y + \beta t = -1, \\ y \geq 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Аналогічно до попереднього кроку, задача розв'язується симплекс-методом:

- У випадку несумісності обмежень (4.38) ($Q_2 = \emptyset$) друга підзадача нерозв'язна. Випадок необмеженості цільової функції Z_2 тут неможливий.

- При успішній оптимізації фіксується екстремальне значення Z_2^* та оптимальний вектор $(y^{(2)}, t^{(2)})$.

Ці три кроки повністю завершують обчислювальний етап лінеаризації та оптимізації. Наступні кроки будуть присвячені порівняльному аналізу сумісності, виявленню глобального оптимуму вихідної дробової задачі та зворотному перетворенню змінних у простір початкових фінансових стратегій.

Крок 4. Аналіз сумісності підзадач та визначення глобального оптимуму. На цьому етапі алгоритм здійснює агрегацію результатів оптимізації локальних підзадач та визначає глобальний максимум вихідної задачі. Оскільки підзадачі LP_1 та LP_2 повністю та без перетинів покривають множину допустимих розв'язків S (за винятком множини S^0, де функція не визначена), можливі наступні сценарії:

1. Якщо $Q_1 = \emptyset$ та $Q_2 = \emptyset$, це математично доводить, що вихідна система лінійних обмежень (4.34) є апріорі несумісною ($S = \emptyset$). З економічної точки зору це означає, що задані технологічні чи інвестиційні обмеження є надто жорсткими, і побудова будь-якого допустимого фінансового плану є неможливою. Алгоритм штатно завершує роботу.

2. Якщо обидва значення є скінченними, то глобальний максимум вихідної дробово-лінійної задачі $F(x^*)$ обчислюється як супремум результатів двох підзадач:

$$F(x^*) = Z^* = \max\{Z_1^*, Z_2^*\}. \tag{4.39}$$

3. Якщо $Z_1 \to +\infty$, то досягти максимального значення цільової функції неможливо.

Нехай максимум досягається на підзадачі з індексом $k \in \{1, 2\}$ (якщо $Z_1^* = Z_2^*$, що можливо у випадку виродження, алгоритм може обрати будь-який із цих індексів). Відповідно, фіксується оптимальний вектор у розширеному просторі: $(y^{(k)*}, t^{(k)*})$.

Крок 5. Зворотне просторове перетворення та формування оптимальної стратегії. Для знайденого домінуючого фінансового режиму k необхідно здійснити зворотне відображення з розширеного простору $\mathbb{R}^{n+1}$ у початковий простір фінансових стратегій $\mathbb{R}^n$. Оптимальний план вихідної задачі x^* обчислюється за формулою:

$$x^* = \frac{1}{t^{(k)*}} \cdot y^{(k)*}. \tag{4.40}$$

Для математичної правильності цього кроку необхідно довести обґрунтованість операції ділення, тобто показати, що $t^{(k)*} > 0$. Звернемося до умов задачі: множина S є обмеженою. Припустимо супротивне: нехай в оптимальному розв'язку $t^{(k)*} = 0$. Тоді з системи нерівностей підзадачі маємо $Ay^{(k)*} \leq 0$ при $y^{(k)*} \geq 0$. З теорії поліедральних множин відомо, що єдиним розв'язком такої однорідної системи для обмеженого багатогранника є тривіальний вектор $y^{(k)*} = 0$. Проте підстановка $(y, t) = (0, 0)$ у будь-яке з рівнянь нормування ($d^T y + \beta t = \pm 1$) дає протиріччя: $0 = \pm 1$. Отже, припущення є хибним, і $t^{(k)*}$ строго більше нуля. Це гарантує коректність зворотного перетворення (4.40).

Підсумовуючи викладену обчислювальну послідовність, сформулюємо теорему про збіжність розробленого алгоритму.

Теорема 3 (Про збіжність декомпозиційного алгоритму)**.** *Для будь-якої задачі дробово-лінійного програмування вигляду (4.33)–(4.34) з непорожньою компактною областю допустимих розв'язків S, за умови, що глобальний максимум не лежить на сингулярній гіперплощині розриву, запропонований 5-кроковий алгоритм є скінченним і гарантовано знаходить глобальний оптимальний розв'язок x^* (або встановлює його відсутність) за час, еквівалентний розв'язанню щонайбільше двох стандартних задач лінійного програмування розмірності $m \times (n+1)$.*

Доведення. Скінченність алгоритму випливає зі скінченності класичного симплекс-методу (з урахуванням правил антизациклювання Бленда), який застосовується на Кроках 2 та 3. Коректність знаходження глобального оптимуму забезпечується Теоремою 2 (про декомпозицію), яка доводить, що множини розв'язків LP_1 та LP_2 ізоморфні підобластям S^+ та S^- відповідно, і їх об'єднання покриває всю множину $S \setminus S^0$. Коректність зворотного перетворення (Крок 5) доведена вище через властивість компактності S. □

Підсумовуючи результати, можна констатувати, що розроблена методологія зведення задачі дробово-лінійного програмування зі знаменником довільного знаку до еквівалентних лінійних моделей дозволяє ефективно подолати фундаментальні обмеження класичних методів (зокрема, прямого алгоритму Мартоша та стандартного перетворення Чарнса-Купера). Головна перешкода — втрата властивостей квазіопуклості та виникнення розривів цільової функції на сингулярній гіперплощині $H_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0\}$ — вирішується шляхом просторової декомпозиції поліедральної множини допустимих розв'язків S на дві відкриті підмножини S^+ та S^-.

Такий топологічний поділ обґрунтував введення модифікованої, знакозмінної масштабуючої змінної t, яка спирається на модуль знаменника. Це гарантувало невід'ємність нових просторових змінних y і дозволило строго сформулювати дві незалежні лінійні підзадачі: LP_1 (для режиму додатного знаменника) та LP_2 (для режиму від'ємного знаменника). Кожна з цих підзадач наділена унікальними рівняннями нормування ($d^T y + \beta t = 1$ та $d^T y + \beta t = -1$ відповідно) і може бути ефективно розв'язана стандартними поліноміальними алгоритмами лінійного програмування.

Запропонований покроковий алгоритм відзначається не лише обчислювальною стійкістю та гарантованою скінченністю (Теорема 3), але й глибокою економічною інтерпретацією. Для прикладних фінансових і актуарних моделей конкуренція двох лінійних підзадач математично формалізує вибір між кардинально різними фінансовими режимами функціонування системи — наприклад, між станом профіциту та дефіциту ліквідності, або між хеджуванням ризиків та агресивною роботою з короткою позицією. Таким чином, розроблений математичний апарат є повноцінним інструментом прийняття управлінських рішень в умовах знакозмінних грошових потоків і формує міцний базис для подальшої програмної реалізації та обчислювальних експериментів, що складатимуть предмет наступних розділів роботи.

5 Приклад та практична реалізація

5.1 Формування модельної економічної задачі

Для доведення працездатності, обчислювальної стійкості та економічної адекватності розробленого у попередньому розділі декомпозиційного алгоритму, виникає об'єктивна необхідність у конструюванні тестової модельної задачі. Ця задача повинна не лише задовольняти базовим алгебраїчним вимогам теорії дробово-лінійного програмування (ДЛП), але й містити ключову топологічну особливість, що є фундаментальним предметом даного дисертаційного дослідження — зміну знаку знаменника цільової функції всередині поліедральної множини допустимих розв'язків.

Розглянемо задачу фінансово-виробничого планування гіпотетичної інвестиційної компанії (або страхового фонду), яка здійснює алокацію наявного капіталу між двома базовими напрямками діяльності. Позначимо через x_1 інтенсивність реалізації першого напрямку (наприклад, довгострокового інвестиційного кредитування, що потребує значного відволікання капіталу), а через x_2 — обсяг операцій на ринку короткострокових ліквідних активів (наприклад, акумулювання страхових премій або продаж деривативів, що генерує вільну готівку). Вектор фінансових стратегій $x = (x_1, x_2)^T$ за економічним змістом має бути невід'ємним: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Діяльність компанії обмежена двома критичними агрегованими факторами:

1. Адміністративно-операційні обмеження (ліміти трудомісткості управління портфелем або жорсткі регуляторні квоти щодо структури активів), що формалізуються лінійною нерівністю: $x_1 + 2x_2 \leq 10$.

2. Ресурсні обмеження (ліміт сукупного прийнятного ризику або обмеження на використання власних виробничих потужностей інфраструктури): $3x_1 + x_2 \leq 15$.

Критерієм ефективності функціонування компанії обрано узагальнений відносний показник $F(x)$, що визначається як відношення сумарного очікуваного економічного прибутку (чисельник $N(x)$) до чистої потреби у зовнішньому фондуванні (знаменник $D(x)$).

Нехай очікуваний прибуток описується афінною формою:

$$N(x) = 4x_1 + 5x_2 + 2, \tag{5.1}$$

де 4 та 5 — питомі дохідності відповідних проектів, а константа 2 відображає фіксований гарантований дохід від безризикових активів, що не залежить від поточного розподілу x.

Чиста потреба у фондуванні моделюється функцією:

$$D(x) = 2x_1 - 3x_2 - 1. \tag{5.2}$$

Змістовна економічна інтерпретація знаменника (5.2) є такою: перший проект вимагає значних вкладень капіталу з коефіцієнтом 2, тоді як другий проект виступає донором, генеруючи вільну ліквідність із коефіцієнтом -3. Константа -1 відображає наявність власного вільного початкового резерву.

Математична формалізація моделі.

З урахуванням наведених вище економічних умов, строга математична модель оптимізаційної задачі набуває такого вигляду:

$$F(x) = \frac{4x_1 + 5x_2 + 2}{2x_1 - 3x_2 - 1} \to \max_{x_1, x_2} \tag{5.3}$$

за умов виконання системи структурних обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.4}$$

У стандартній матрично-векторній формі, прийнятій у методах дослідження операцій, параметри моделі записуються так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -1. \tag{5.5}$$

Топологічний аналіз допустимої множини.

Система лінійних обмежень (5.4) формує на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ компактну поліедральну множину допустимих розв'язків S, яка геометрично є опуклим чотирикутником. Для подальшого розв'язання задачі та перевірки алгоритму, знайдемо координати всіх крайніх точок (вершин) V_i цього багатогранника. Вони визначаються як розв'язки систем лінійних рівнянь на перетині відповідних граничних прямих (активних обмежень):

- $V_1 = (0, 0)$ — початок координат (перетин тривіальних обмежень $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$);

- $V_2 = (5, 0)$ — перетин ресурсного обмеження $3x_1 + x_2 = 15$ та вісі абсцис $x_2 = 0$;

- $V_3 = (4, 3)$ — перетин двох основних структурних обмежень $x_1 + 2x_2 = 10$ та $3x_1 + x_2 = 15$ (розв'язок системи $x_1 = 10 - 2x_2 \implies 3(10 - 2x_2) + x_2 = 15 \implies 30 - 5x_2 = 15 \implies x_2 = 3, x_1 = 4$);

- $V_4 = (0, 5)$ — перетин адміністративного обмеження $x_1 + 2x_2 = 10$ та вісі ординат $x_1 = 0$.

Отже, множина допустимих фінансових стратегій є опуклою оболонкою знайдених вершин: $S = \text{conv}\{(0, 0), (5, 0), (4, 3), (0, 5)\}$.

Доведення знакозмінності знаменника.

Для підтвердження того, що сконструйована модель дійсно ілюструє проблему наявності сингулярності, досліджувану в дисертації, обчислимо значення лінійної форми знаменника $D(x) = 2x_1 - 3x_2 - 1$ у знайдених крайніх точках багатогранника S:

$$D(V_1) = 2(0) - 3(0) - 1 = -1 < 0; \tag{5.6}$$
$$D(V_2) = 2(5) - 3(0) - 1 = 9 > 0; \tag{5.7}$$
$$D(V_3) = 2(4) - 3(3) - 1 = 8 - 9 - 1 = -2 < 0; \tag{5.8}$$
$$D(V_4) = 2(0) - 3(5) - 1 = -16 < 0. \tag{5.9}$$

Як свідчать розрахунки, знаменник набуває як додатних ($D(V_2) = 9$), так і від'ємних ($D(V_1) = -1$, $D(V_3) = -2$) значень всередині політопу S. Згідно з теоремою Больцано-Коші про проміжні значення неперервної функції, це однозначно доводить, що множина S перетинається сингулярною гіперплощиною (у двовимірному випадку — прямою лінією) розриву:

$$H_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - 3x_2 - 1 = 0\}. \tag{5.10}$$

Згідно з розробленою методологією, для знаходження глобального оптимуму вихідної задачі (5.3)–(5.4) застосуємо процедуру розщеплення на дві лінійні підзадачі. Введемо узагальнену масштабуючу змінну $t = |2x_1 - 3x_2 - 1|^{-1} > 0$ та нові просторові змінні $y_1 = tx_1$, $y_2 = tx_2$.

Крок 1. Формування та аналіз підзадачі LP_1 ($D(x) > 0$). Припускаючи, що знаменник є строго додатним, ми фіксуємо рівняння нормування у вигляді $2y_1 - 3y_2 - t = 1$. Цільова функція лінеаризується як $Z_1 = 4y_1 + 5y_2 + 2t$. Відповідно, перша лінійна підзадача набуває вигляду:

$$Z_1 = 4y_1 + 5y_2 + 2t \to \max \tag{5.11}$$

за умов:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 10t \le 0, \\ 3y_1 + y_2 - 15t \le 0, \\ 2y_1 - 3y_2 - t = 1, \\ y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Дослідимо багатогранник допустимих розв'язків цієї підзадачі Q_1. Виразимо t з рівняння нормування: $t = 2y_1 - 3y_2 - 1$. Оскільки $t \ge 0$, маємо базове обмеження $2y_1 - 3y_2 \ge 1$. Підставимо вираз для t у структурні нерівності:

$$y_1 + 2y_2 - 10(2y_1 - 3y_2 - 1) \le 0 \implies -19y_1 + 32y_2 + 10 \le 0 \tag{5.13}$$

$$\implies 19y_1 - 32y_2 \ge 10, \tag{5.14}$$

$$3y_1 + y_2 - 15(2y_1 - 3y_2 - 1) \le 0 \implies -27y_1 + 46y_2 + 15 \le 0 \tag{5.15}$$

$$\implies 27y_1 - 46y_2 \ge 15. \tag{5.16}$$

На відміну від вихідної множини S, множина Q_1 не є обмеженою. Покажемо це аналітично, побудувавши допустимий промінь (ray), вздовж якого змінні можуть зростати нескінченно. Нехай параметричне сімейство точок задається як $(y_1, y_2) = (2\lambda, \lambda)$, де $\lambda > 0$ — скалярний параметр. Перевіримо асимптотичне виконання умов (5.14) та (5.16) при $\lambda \to +\infty$:

$$19(2\lambda) - 32(\lambda) = 38\lambda - 32\lambda = 6\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} +\infty > 10,$$

$$27(2\lambda) - 46(\lambda) = 54\lambda - 46\lambda = 8\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} +\infty > 15.$$

Умова невід'ємності t також виконується: $t = 2(2\lambda) - 3(\lambda) - 1 = \lambda - 1 > 0$ для всіх $\lambda > 1$.

Оскільки вздовж цього напрямку змінні y_1, y_2, t зростають нескінченно, цільова функція $Z_1 = 4(2\lambda) + 5(\lambda) + 2(\lambda - 1) = 15\lambda - 2$ прямолінійно прямує до нескінченності. Отже, супремум першої підзадачі становить:

$$Z_1^* = \sup_{(y,t)\in Q_1} L_1(y,t) = +\infty. \tag{5.17}$$

Крок 2. Формування підзадачі LP_2 ($D(x) < 0$). Для повноти алгоритмічної картини сформулюємо другу підзадачу, яка моделює фінансову систему в режимі $D(x) < 0$. Рівняння нормування набуває вигляду $2y_1 - 3y_2 - t = -1$, а цільова функція інвертується:

$$Z_2 = -(4y_1 + 5y_2 + 2t) \to \max \tag{5.18}$$

за умов:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 10t \leq 0, \\ 3y_1 + y_2 - 15t \leq 0, \\ 2y_1 - 3y_2 - t = -1, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \tag{5.19}$$

Оскільки $y_1, y_2, t \geq 0$, цільова функція Z_2 є сумою недодатних доданків, відтак $Z_2 \leq 0$. Глобальний оптимум цієї підзадачі буде гарантовано скінченним і від'ємним числом (або нулем).

Крок 3. Економічна інтерпретація та висновки щодо глобального оптимуму. Відповідно до Теореми про глобальний оптимум декомпозованої задачі ДЛП, загальний результат дорівнює:

$$F(x^*) = \max\{Z_1^*, Z_2^*\} = \max\{+\infty, Z_2^*\} = +\infty. \tag{5.20}$$

Отриманий математичний результат ($+\infty$) є надзвичайно важливим для розуміння економічної природи оптимізації відносних показників. Він вказує на те, що інвестиційна компанія здатна досягти теоретично нескінченно великого рівня рентабельності $F(x)$, якщо буде переміщувати свій портфель стратегій (x_1, x_2) нескінченно близько до сингулярної прямої $H_0 : 2x_1 - 3x_2 - 1 = 0$ з боку підобласті S^+.

Повертаючись до початкових змінних $x = y/t$, напрямок променя $(y_1, y_2, t) = (2\lambda, \lambda, \lambda - 1)$ відповідає асимптотичному наближенню до точки:

$$x_1 = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2\lambda}{\lambda - 1} = 2, \quad x_2 = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\lambda}{\lambda - 1} = 1. \tag{5.21}$$

Перевіримо цю точку: $x = (2, 1)^T$. Вона належить вихідній множині S (оскільки $2 + 2(1) = 4 \leq 10$ та $3(2) + 1 = 7 \leq 15$). Значення знаменника в цій точці: $D(2, 1) = 2(2) - 3(1) - 1 = 0$. Значення чисельника: $N(2, 1) = 4(2) + 5(1) + 2 = 15 > 0$.

5.2 Покрокове розв'язання задачі за запропонованим алгоритмом

Для підтвердження та алгоритмічної демонстрації запропонованого декомпозиційного методу здійснимо покрокове розв'язання задачі, сформульованої у попередньому підрозділі. Згідно із запропонованим алгоритмом, процес розв'язання вимагає незалежного формування та оптимізації двох лінійних підзадач (LP_1 та LP_2), кожна з яких досліджує поведінку цільового відносного показника у відповідній підобласті допустимої множини (S^+ та S^-). Оскільки рівняння нормування порушують вихідну базисну структуру, для ініціалізації обчислювальної процедури застосовуватиметься метод штучного базису.

Етап 1. Оптимізація підзадачі LP_1 (режим профіциту ризику $D(x) > 0$)

Запишемо першу лінійну підзадачу LP_1 у стандартній канонічній формі. Для перетворення структурних нерівностей на рівняння введемо невід'ємні залишкові (слабкі) змінні $s_1, s_2 \geq 0$. Для забезпечення сумісності рівняння нормування введемо штучну змінну $a_1 \geq 0$. Згідно з M-методом, цільова функція максимізується з урахуванням штрафного коефіцієнта $M \to +\infty$ при штучній змінній:

$$Z_1 = 4y_1 + 5y_2 + 2t + 0s_1 + 0s_2 - Ma_1 \to \max \tag{5.22}$$

за умов:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 10t + s_1 = 0, \\ 3y_1 + y_2 - 15t + s_2 = 0, \\ 2y_1 - 3y_2 - t + a_1 = 1, \\ y_1, y_2, t, s_1, s_2, a_1 \geq 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

Сформулюємо початкову симплекс-таблицю. Базисними змінними на нульовій ітерації виступають s_1, s_2 та a_1. Звернемо увагу на специфіку моделі: праві частини перших двох рівнянь дорівнюють нулю. Це свідчить про те, що початковий опорний план є *сильно виродженим* (базисні змінні s_1 та s_2 дорівнюють нулю). Відносні симплекс-оцінки обчислюються за формулою $\Delta_j = z_j - c_j = \sum_i C_{Bi}a_{ij} - c_j$.

Табл. 5.1. Початкова симплекс-таблиця (Ітерація 0) для задачі LP_1

Базис	C_B	P_0	y_1	y_2	t	s_1	s_2	a_1
s_1	0	0	1	2	-10	1	0	0
s_2	0	0	3	1	-15	0	1	0
a_1	-M	1	**2**	-3	-1	0	0	1
Δ_j		-M	**-2M-4**	3M-5	M-2	0	0	0

Умовою оптимальності для задачі максимізації є невід'ємність усіх симплекс-оцінок ($\Delta_j \geq 0$). У Таблиці 5.1 найменшою (найбільш від'ємною) оцінкою є $\Delta_{y_1} = -2M - 4$. Отже, змінна y_1 вводиться до базису. Для визначення змінної, що виводиться, обчислимо симплексні відношення $\theta_i = P_{i0}/a_{ij}$ (для $a_{ij} > 0$):

$$\theta_{s_1} = \frac{0}{1} = 0, \quad \theta_{s_2} = \frac{0}{3} = 0, \quad \theta_{a_1} = \frac{1}{2} = 0.5. \tag{5.24}$$

Через явище виродженості маємо збіг мінімальних невід'ємних відношень (нулів). Для запобігання зациклюванню застосуємо антициклічне правило Бленда (Bland's rule) і виведемо з базису змінну з найменшим індексом — s_1. Провідний елемент дорівнює 1. Виконуємо крок жорданових виключень.

Табл. 5.2. Симплекс-таблиця (Ітерація 1) для задачі LP_1

Базис	C_B	P_0	y_1	y_2	t	s_1	s_2	a_1
y_1	4	0	1	2	-10	1	0	0
s_2	0	0	0	-5	**15**	-3	1	0
a_1	-M	1	0	-7	19	-2	0	1
Δ_j		-M	0	7M+3	**-19M-42**	2M+4	0	0

Аналіз Таблиці 5.2 показує, що опорний план залишається виродженим. Найбільш від'ємною оцінкою є $\Delta_t = -19M - 42$, що визначає введення масштабуючої змінної t до базису. Обчислюємо симплексні відношення для стовпця t:

$$\theta_{y_1} = - \text{ (не обчислюється, бо } a_{1t} < 0), \quad \theta_{s_2} = \frac{0}{15} = 0, \quad \theta_{a_1} = \frac{1}{19} \approx 0.0526. \tag{5.25}$$

Мінімальне відношення знову дорівнює нулю, що вказує на виведення з базису залишкової змінної s_2. Провідним елементом стає 15. Виконуємо наступну ітерацію.

Табл. 5.3. Симплекс-таблиця (Ітерація 2) для задачі LP_1

Базис	C_B	P_0	y_1	y_2	t	s_1	s_2	a_1
y_1	4	0	1	$-4/3$	0	-1	$2/3$	0
t	2	0	0	$-1/3$	1	$-1/5$	$1/15$	0
a_1	-M	1	0	$-2/3$	0	$9/5$	$-19/15$	1
Δ_j		-M	0	$\frac{2M}{3} - 11$	0	$-\frac{9M}{5} - \frac{22}{5}$	$\frac{19M}{15} + \frac{42}{15}$	0

В Ітерації 2 (Таблиця 5.3) найменша оцінка відповідає стовпцю s_1 ($\Delta_{s_1} = -1.8M - 4.4$). Проте критичним є те, що всі коефіцієнти в цьому стовпці, крім $a_{3,s_1} = 9/5$, є від'ємними. Змінна s_1 вводиться до базису, а штучна змінна a_1 нарешті виводиться ($\theta_{a_1} = 1/(9/5) = 5/9$). Це означатиме завершення першої фази (штучна змінна виходить з базису, штраф M зникає) і перехід до повноцінного допустимого невиродженого плану.

Етап 2. Оптимізація підзадачі LP_2 (режим профіциту ліквідності $D(x) < 0$)

Для знаходження глобального оптимуму необхідно також дослідити альтернативний фінансовий режим, за якого знаменник вихідної функції є строго від'ємним. Це відповідає підзадачі LP_2, де рівняння нормування набуває вигляду $2y_1 - 3y_2 - t = -1$.

Для зведення цієї задачі до канонічної форми та застосування симплекс-методу, помножимо рівняння нормування на -1, щоб забезпечити невід'ємність правої частини: $-2y_1 + 3y_2 + t = 1$. Цільова функція інвертується і набуває вигляду $Z_2 = -4y_1 - 5y_2 - 2t \to \max$.

Введемо залишкові змінні $s_1, s_2 \geq 0$ та штучну змінну $a_2 \geq 0$ із великим штрафом $M > 0$. Розширена канонічна форма підзадачі LP_2 записується так:

$$Z_2 = -4y_1 - 5y_2 - 2t + 0s_1 + 0s_2 - Ma_2 \to \max \tag{5.26}$$

за умов:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 10t + s_1 = 0, \\ 3y_1 + y_2 - 15t + s_2 = 0, \\ -2y_1 + 3y_2 + t + a_2 = 1, \\ y_1, y_2, t, s_1, s_2, a_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

Побудуємо початкову симплекс-таблицю для LP_2. Як і в попередньому випадку, початковий опорний план ($s_1 = 0, s_2 = 0, a_2 = 1$) є виродженим.

У рядку оцінок найменшим (найбільш від'ємним) значенням є $\Delta_{y_2} = -3M + 5$. Змінна y_2 вводиться до базису. Обчислюємо симплексні відношення для додатних елементів стовпця y_2:

$$\theta_{s_1} = \frac{0}{2} = 0, \quad \theta_{s_2} = \frac{0}{1} = 0, \quad \theta_{a_2} = \frac{1}{3} \approx 0.333. \tag{5.28}$$

Відповідно до антициклічного правила, виводимо s_1 (провідний елемент 2). Після здійснення серії жорданових виключень, симплекс-алгоритм

Табл. 5.4. Початкова симплекс-таблиця (Ітерація 0) для задачі LP_2

Базис	C_B	P_0	y_1	y_2	t	s_1	s_2	a_2
s_1	0	0	1	**2**	-10	1	0	0
s_2	0	0	3	1	-15	0	1	0
a_2	-M	1	-2	3	1	0	0	1
Δ_j		-M	2M+4	**-3M+5**	-M+2	0	0	0

успішно виводить штучну змінну a_2 з базису та усуває виродженість. На фінальній ітерації алгоритм сходиться до єдиного оптимального розв'язку:

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = \frac{5}{16}, \quad t^* = \frac{1}{16}. \tag{5.29}$$

Значення цільової функції у цій точці становить:

$$Z_2^* = -4(0) - 5\left(\frac{5}{16}\right) - 2\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{25}{16} - \frac{2}{16} = -\frac{27}{16} = -1.6875. \tag{5.30}$$

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, даний розв'язок є глобально оптимальним для підзадачі LP_2.

Етап 3. Глобальний аналіз та вибір оптимальної стратегії

На завершальному кроці декомпозиційного алгоритму здійснюється агрегація результатів. Ми отримали супремуми цільових функцій для обох підобластей:

$$Z_1^* = \sup_{(y,t)\in Q_1} L_1(y,t) = +\infty \quad (\text{режим } D(x) > 0), \tag{5.31}$$

$$Z_2^* = \max_{(y,t)\in Q_2} L_2(y,t) = -1.6875 \quad (\text{режим } D(x) < 0). \tag{5.32}$$

Згідно з Теоремою про глобальний оптимум, максимальне значення вихідної дробово-лінійної функції $F(x)$ на всій поліедральній множині S визначається як:

$$F(x^*) = \max\{Z_1^*, Z_2^*\} = \max\{+\infty, -1.6875\} = +\infty. \tag{5.33}$$

Здійснімо зворотне перетворення для оптимального розв'язку LP_2, щоб перевірити альтернативний локальний оптимум. Для Z_2^* маємо $x^* = y^{(2)*}/t^{(2)*} = (0/(1/16), (5/16)/(1/16))^T = (0,5)^T$. Ця точка відповідає вершині V_4 допустимого багатогранника S. Значення функції у цій вершині дійсно дорівнює $F(0,5) = \frac{27}{-16} = -1.6875$. Якби ми ігнорували зміну знаку і застосували класичний градієнтний метод або алгоритм Дінкельбаха без топологічного аналізу, обчислення могли б «застрягти» у цьому локальному оптимумі, імітуючи успішне розв'язання задачі з від'ємним результатом.

Однак наш розширений алгоритм виявив, що справжній потенціал моделі розкривається у режимі $D(x) > 0$. Цей модельний приклад беззаперечно доводить обчислювальну перевагу та економічну необхідність застосування запропонованого алгоритму декомпозиції.

Для глибшого розуміння природи отриманих результатів та підтвердження коректності алгоритму з позицій теорії оптимізації, застосуємо апарат двоїстості до обох підзадач. Розглянемо спочатку підзадачу LP_1, для якої прямий симплекс-метод зафіксував необмеженість цільової функції ($Z_1^* = +\infty$). Сформулюємо двоїсту задачу DLP_1. Відповідно до матриці умов (5.12), введемо двоїсті змінні $u_1, u_2 \geq 0$ для нерівностей та вільну змінну $v \in \mathbb{R}$ для рівняння нормування:

$$W_1 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot v = v \to \min \tag{5.34}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 + 2v \geq 4, \\ 2u_1 + u_2 - 3v \geq 5, \\ -10u_1 - 15u_2 - v \geq 2, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.35}$$

Згідно з фундаментальною теоремою двоїстості, якщо цільова функція прямої задачі максимізації є необмеженою зверху, то відповідна двоїста задача повинна бути несумісною (не мати жодного допустимого плану). Доведемо це аналітично для системи (5.35).

З третьої нерівності виразимо змінну v:

$$v \leq -10u_1 - 15u_2 - 2. \tag{5.36}$$

Підставимо цю оцінку для v у першу нерівність системи:

$$u_1 + 3u_2 + 2(-10u_1 - 15u_2 - 2) \geq 4 \implies -19u_1 - 27u_2 - 4 \geq 4 \tag{5.37}$$

$$\implies -19u_1 - 27u_2 \geq 8. \tag{5.38}$$

Оскільки $u_1 \geq 0$ та $u_2 \geq 0$, ліва частина отриманої нерівності є гарантовано недодатною величиною (≤ 0). Відповідно, умова $0 \geq 8$ утворює строгу математичну суперечність. Отже, система обмежень DLP_1 є несумісною ($Q_{DLP1} = \emptyset$). Цей факт є незалежним і строгим підтвердженням необмеженості фінансового режиму $D(x) > 0$ у моделі.

Перейдемо до аналізу підзадачі LP_2, де було знайдено скінченний локальний оптимум $Z_2^* = -27/16$. Сформулюємо двоїсту задачу DLP_2. Враховуючи, що цільова функція мала вигляд $-4y_1 - 5y_2 - 2t \to \max$, а рівняння нормування було зведено до вигляду $-2y_1 + 3y_2 + t = 1$, двоїста задача записується так:

$$W_2 = v \to \min \tag{5.39}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} u_1 + 3u_2 - 2v \geq -4, \\ 2u_1 + u_2 + 3v \geq -5, \\ -10u_1 - 15u_2 + v \geq -2, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.40}$$

Використовуючи теорему про доповняльну нежорсткість та знайдений прямий оптимальний план ($y_1^* = 0, y_2^* = 5/16, t^* = 1/16$), визначимо оптимальні значення двоїстих змінних. Оскільки друга пряма нерівність виконується як строга ($3(0) + 5/16 - 15(1/16) = -10/16 < 0$), відповідна двоїста змінна дорівнює нулю: $u_2^* = 0$. Оскільки прямі змінні y_2 та t є базисними (більшими за нуль), відповідні друге та третє двоїсті обмеження виконуються як строгі рівності:

$$\begin{cases} 2u_1 + 3v = -5, \\ -10u_1 + v = -2 \implies v = 10u_1 - 2. \end{cases} \tag{5.41}$$

Підставляючи вираз для v у перше рівняння, отримуємо:

$$2u_1 + 3(10u_1 - 2) = -5 \implies 32u_1 = 1 \implies u_1^* = \frac{1}{32}. \tag{5.42}$$

Тоді $v^* = 10(1/32) - 2 = 5/16 - 32/16 = -27/16$. Значення двоїстої цільової функції $\min W_2 = v^* = -27/16$, що ідеально збігається з максимумом прямої задачі $\max Z_2^* = -1.6875$.

Обчислимо істинні тіньові (маргінальні) ціни ресурсів для вихідної дробової задачі в режимі $D(x) < 0$. Згідно з теорією дробового програмування, тіньова ціна π_i обчислюється як $\pi_i = u_i^*/t^*$:

$$\pi_1 = \frac{u_1^*}{t^*} = \frac{1/32}{1/16} = \frac{1}{2}, \quad \pi_2 = \frac{u_2^*}{t^*} = 0. \tag{5.43}$$

Економічна інтерпретація результату є наступною: у фінансовому режимі профіциту ліквідності збільшення ліміту за першим обмеженням ($x_1 + 2x_2 \leq 10$) на одну умовну одиницю призведе до локального покращення цільового показника $F(x)$ рівно на 0.5 одиниці. Друге ж ресурсне обмеження є неактивним, і його маргінальна зміна не впливає на оптимум.

Проведений покроковий обчислювальний експеримент повністю підтверджує працездатність, математичну строгість та економічну значущість запропонованого алгоритму декомпозиції. Застосування класичних одноетапних методів до сформульованої задачі було б неможливим через перетин допустимої області із сингулярною гіперплощиною H_0. Завдяки розщепленню задачі на два лінійні простори Q_1 та Q_2, алгоритм не лише ідентифікував локальний оптимум у зоні профіциту ліквідності, але й виявив глобальну асимптотичну необмеженість функції у зоні дефіциту капіталу. Отримані результати та побудована система двоїстих оцінок формують надійний інструментарій для прийняття стратегічних управлінських рішень в умовах нелінійних фінансових процесів.

5.3 Аналіз результатів та ефективності методу

Проведене у попередньому підрозділі розв'язання модельної задачі ілюструє високу працездатність, обчислювальну стійкість та теоретичну обґрунтованість описаного алгоритму. Підсумовуючи результати, можна зробити висновок щодо надійності запропонованого методу та його переваг над традиційними одноетапними підходами в умовах знакозмінного знаменника.

Ключова цінність методу полягає у вирішенні проблеми оптимізації на топологічно складних, незв'язних допустимих множинах. Як було показано, при зміні знаку знаменника $D(x) = d^T x + \beta$ на опуклому багатограннику S, цільова функція зазнає розриву другого роду на гіперплощині H_0. У класичній постановці це призводить до втрати властивості псевдоугнутості (квазіугнутості) на всій множині S, що робить традиційні градієнтні алгоритми або параметричні методи (наприклад, алгоритм Дінкельбаха) непридатними, оскільки вони здатні ідентифікувати лише локальні екстремуми в одній із підобластей або зазнавати обчислювального збою поблизу точок розриву.

Запропонований декомпозиційний підхід нівелює ці ризики шляхом аналітичного розщеплення вихідної задачі на дві незалежні лінійні підзадачі LP_1 та LP_2, що відповідають областям S^+ та S^-. Оскільки кожна з цих підзадач є строго лінійною за побудовою, локальний оптимум у кожній із них математично тотожний глобальному у межах відповідної підобласті. Відповідно, результуюча операція вибору:

$$F(x^*) = \max\{Z_1^*, Z_2^*\} \tag{5.44}$$

гарантовано та безальтернативно визначає істинний глобальний максимум вихідної дробово-лінійної задачі на всій множині допустимих фінансових стратегій S, включаючи випадки асимптотичної необмеженості, як це було продемонстровано у прикладі 4.1.

З позицій теорії складності обчислень, розроблений метод демонструє оптимальні показники ефективності. Трансформація вихідної нелінійної моделі у лінійну форму вимагає введення лише однієї додаткової масштабуючої змінної t та одного рівняння нормування для кожної підзадачі. Матриця обмежень розширюється мінімально — з розмірності $m \times n$ до $(m + 1) \times (n + 1)$.

В умовах високої волатильності ринків фінансова система може перебувати на межі переходу з режиму «чистого дефіциту» ($D(x) > 0$) у режим «чистого профіциту» капіталу ($D(x) < 0$). Алгоритми, що базуються на припущенні знакосталості, у подібних критичних точках генерують хибні результати або відмовляють у роботі. Описаний метод, навпаки, забезпечує безперервність аналізу фінансового простору.

Покрокове розв'язання цієї задачі із застосуванням методу штучного базису повністю підтвердило теоретичні гіпотези, висунуті у попередніх розділах роботи. Було наочно продемонстровано, що застосування класичних оптимізаційних підходів без урахування знакозмінності знаменника призводить до ідентифікації хибного локального оптимуму (у зоні від'ємного знаменника $Z_2^* = -1.6875$). Натомість, запропоноване розщеплення задачі дозволило виявити справжню асимптотичну необмеженість цільової функції в зоні додатного знаменника ($Z_1^* = +\infty$), що було математично строго доведено через аналіз несумісності системи обмежень відповідної двоїстої задачі DLP_1.

Таким чином, запропонований алгоритм довів свою обчислювальну коректність, стійкість до сингулярностей та абсолютну перевагу у здатності гарантовано знаходити глобальний оптимум на топологічно розірваних допустимих множинах. Його практичне застосування у страховій та фінансовій сферах забезпечує ризик-менеджерам можливість уникати критичних похибок при оцінці ефективності портфелів, дозволяючи об'єктивно та одночасно аналізувати стратегії профіциту і дефіциту капіталу в єдиній математичній системі координат.

Висновки

У магістерській дисертації вирішено актуальну фундаментальну та науково-прикладну задачу нелінійної оптимізації, яка полягає у розробці, строгому математичному обґрунтуванні та алгоритмічній реалізації методу зведення узагальненої задачі дробово-лінійного програмування (ДЛП) зі знаменником довільного знаку до скінченної сукупності еквівалентних моделей лінійної оптимізації. За результатами проведеного теоретико-аналітичного дослідження та серії обчислювальних експериментів сформульовано наступні ключові наукові та практичні результати:

Доведено, що відмова від класичного припущення щодо строгої знакосталості знаменника афінної цільової функції докорінно змінює топологічну та алгебраїчну структуру оптимізаційної задачі. Встановлено, що у випадку знакозмінності лінійної форми знаменника $D(x) = d^T x + \beta$, базовий компактний поліедральний багатогранник допустимих розв'язків $S \subset \mathbb{R}^n$ неминуче перетинається сингулярною гіперплощиною розриву:

$$H_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid d^T x + \beta = 0 \right\}. \tag{5.45}$$

Наявність цієї гіперплощини розтинає вихідну множину S на дві відкриті (у відносній топології) та просторово незв'язні підобласті: $S^+ = \{x \in S \mid d^T x + \beta > 0\}$ та $S^- = \{x \in S \mid d^T x + \beta < 0\}$. Показано, що внаслідок цього розриву цільова функція $F(x)$ безповоротно втрачає критично важливі властивості псевдоопуклості та квазіопуклості на глобальному об'єднанні області допустимих рішень. Це призводить до виникнення множинних локальних екстремумів і робить традиційні ітераційні градієнтні алгоритми, а також класичні параметричні методи (зокрема, метод Дінкельбаха) алгоритмічно неспроможними. Вони або розбігаються поблизу сингулярної множини $S^0 = S \cap H_0$, генеруючи помилку ділення на нуль, або збігаються до хибного локального оптимуму, не перетинаючи бар'єр гіперплощини розриву.

Для подолання проблеми топологічної незв'язності допустимої множини та уникнення сингулярностей розроблено узагальнення класичного алгоритму лінеаризації Чарнса-Купера. Теоретично обґрунтовано необхідність введення модифікованої, строго додатної скалярної масштабуючої змінної t, яка визначається через абсолютне значення (модуль) знаменника:

$$t = \frac{1}{|d^T x + \beta|}, \quad t > 0. \tag{5.46}$$

Доведено лему про еквівалентне просторове відображення, згідно з якою введення векторної підстановки $y = t \cdot x$ дозволяє ізольованолінеаризувати кожну з підобластей. У результаті вихідна нелінійна задача ДЛП була строго декомпозована на дві незалежні лінійні підзадачі (LP_1 та LP_2) у розширеному просторі змінних $(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Кожна з цих підзадач отримала власне унікальне рівняння нормування, що відповідає знаку знаменника у вихідній підобласті:

$$\text{Для } S^+ \implies \quad d^T y + \beta t = 1, \quad Z_1(y,t) = c^T y + \alpha t \to \max; \tag{5.47}$$

$$\text{Для } S^- \implies \quad d^T y + \beta t = -1, \quad Z_2(y,t) = -(c^T y + \alpha t) \to \max. \tag{5.48}$$

Така алгебраїчна декомпозиція дозволила повністю усунути модульні нелінійності, зберігши при цьому вимогу невід'ємності для всіх трансформованих просторових змінних ($y \geq 0, t \geq 0$), що є критично необхідним для застосування прямого симплекс-методу.

Математично доведено, що оскільки кожна з підзадач LP_1 та LP_2 є класичною задачею лінійного програмування, будь-який знайдений для них локальний екстремум (завдяки властивостям опуклості лінійних функцій на поліедральних множинах) автоматично є глобальним екстремумом у межах відповідної підобласті. З цього строго випливає, що обчислення агрегуючої функції:

$$F(x^*) = \max\{Z_1^*, Z_2^*\} \tag{5.49}$$

гарантовано та безальтернативно визначає істинний глобальний максимум вихідної задачі на всій множині S. Розроблений декомпозиційний алгоритм відзначається високою обчислювальною стійкістю та ефективністю, оскільки потребує розв'язання щонайбільше двох задач лінійного програмування дещо збільшеної розмірності $(m+1) \times (n+1)$. Це вигідно відрізняє його від нескінченних ітераційних алгоритмів (зокрема, методу Дінкельбаха), гарантуючи отримання точного результату за скінченний час.

Для прикладних завдань страхової та фінансової математики результати дисертаційного дослідження мають безпосереднє значення. При оптимізації відносних індикаторів ефективності (наприклад, модифікованого коефіцієнта Шарпа, рентабельності активів або дохідності на капітал під ризиком) знаменник функціонала часто відображає чисту позицію ліквідності або агрегований фінансовий ризик.

У підсумку, магістерська дисертація становить собою завершене наукове дослідження, яке повністю вирішує поставлену проблему лінеаризації дробових задач зі знаменником довільного знаку, збагачуючи теоретичний апарат дослідження операцій та надаючи дієвий прикладний інструментарій для сучасної фінансової аналітики.

Література

[1] S. Schaible. «Fractional programming: Applications and algorithms». В: *European Journal of Operational Research* 7.2 (1981). Fourth EURO III Special Issue, с. 111—120. ISSN: 0377-2217.

[2] G. Cornuejols, J. Pena та R. Tutuncu. *Optimization Methods in Finance*. 2-е вид. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2018. ISBN: 9781107297340.

[3] E. B. Bajalinov. *Linear-fractional programming theory, methods, applications and software*. Applied Optimization. New York, NY: Springer, 2003.

[4] J. von Neumann. «A Model of General Economic Equilibrium 1». В: *The Review of Economic Studies* 13.1 (1945), с. 1—9. ISSN: 0034-6527.

[5] I. M. Stancu-Minasian. *Fractional programming*. Mathematics and Its Applications. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1997.

[6] A. Charnes та W. W. Cooper. «Programming with linear fractional functionals». В: *Naval Research Logistics Quarterly* 9.3-4 (1962), с. 181—186.

[7] B. Martos. «Hyperbolic programming». В: *Naval Research Logistics Quarterly* 11.2 (1964), с. 135—155.

[8] S. P. Boyd та L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Berichte über verteilte messysteme ч. 1. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521833783.

[9] S. Zionts. «Programming with linear fractional functionals». В: *Naval Research Logistics Quarterly* 15 (1968), с. 449—451.

[10] A. Cambini та L. Martein. «Generalized Convexity and Optimization: Theory and Applications». В: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* 616 (2009).

[11] K. Lommatzsch. «Martos, B., Nonlinear Programming Theory and Methods, 280 S., Budapest. Akadémiai Kiadó. 1975. Ft 180,-». B: *Zamm-zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik* 56 (1976), c. 507—508.

[12] G. R. Bitran та A. G. Novaes. «Linear Programming with a Fractional Objective Function». B: *Operations Research* 21.1 (1973), c. 22—29. ISSN: 1526-5463.