НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК 517.9

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

__________ Олег КЛЕСОВ

«____» __________ 2026 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Функціональні рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну»

Виконав:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-41мн
Шевченко Артем Олександрович ____________

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук
Павленков Володимир Володимирович ____________

Рецензент:
Заступник декана з наукової роботи
механіко-математичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Яневич Тетяна Олександрівна ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент ____________

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____________ Олег КЛЕСОВ
____________ 2026 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Шевченку Артему Олександровичу

1. Тема дисертації: «Функціональні рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну», науковий керівник дисертації кандидат фізико-математичних наук Павленков Володимир Володимирович, затверджені наказом по університету № 1340-с від 31.03.2026
2. Термін подання студентом дисертації: 15 травня 2026 року
3. Об’єкт дослідження: функціональні рівняння Коші.
4. Предмет дослідження: функціональні рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну та аналітичні, алгебраїчні й асимптотичні властивості їх розв'язків.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
   1) проаналізувати класичну теорію функціональних рівнянь Коші, дослідити структуру їх розв'язків;
   2) дослідити специфіку функціональних рівнянь на звужених областях визначення;
   3) розробити метод розв'язку узагальненого функціонального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну;
   4) отримати аналітичні розв'язки універсального функціонального рівняння Коші на асиметричній області;
   5) здійснити асимптотичну класифікацію отриманих розв'язків у рамках теорії правильно змінних функцій;

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: презентація на 17 слайдів.
7. Дата видачі завдання: 03 лютого 2026 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання	Примітка
1	Ознайомлення з літературою та написання Розділу 1	03.02.2026 - 28.02.2026	виконано
2	Дослідження адитивних і мультиплікативних рівнянь (Розділ 2)	01.03.2026 - 31.03.2026	виконано
3	Аналіз універсального рівняння Коші (Розділ 3)	01.04.2026 - 30.04.2026	виконано
4	Оформлення роботи, написання вступу та висновків	01.05.2026 - 15.05.2026	виконано

Студент Шевченко А. О.
Науковий керівник Павленков В. В.

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 63 с., 2 рис., 28 джерел, 17 слайдів презентації.

Об'єкт дослідження: функціональні рівняння Коші.

Предмет дослідження: функціональні рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну та аналітичні, алгебраїчні й асимптотичні властивості їх розв'язків.

Мета дослідження: системний аналіз розв'язків функціональних рівнянь Коші зі звуженою областю визначення, побудова загального розв'язку універсального функціонального рівняння Коші за умови обмеження однієї змінної мультиплікативною підгрупою.

Методи дослідження: методи функціонального аналізу, теорія груп, методи розв'язання лінійних функціонально-різницевих рівнянь, асимптотичний аналіз, теорія правильно змінних функцій.

Основні результати дослідження: У дисертаційній роботі здійснено комплексне дослідження функціональних рівнянь Коші з обмеженнями на одну змінну. Наведено детальний аналіз розв'язків класичних рівнянь за різних умов регулярності та специфіки звужених областей визначення.

Головним аналітичним результатом є побудова методу параметричної фіксації обмеженого аргументу для розв'язання універсального функціонального рівняння Коші на асиметричній області $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$, де змінна y обмежена мультиплікативною підгрупою $\mathbb{G}$. Доведено, що наявність ненульового адитивного зсуву діє як фільтр, що повністю знищує патологічні розв'язки. Встановлено дихотомію асимптотичної поведінки: доведено, що залежно від конфігурації параметрів, розв'язки рівняння генерують або клас правильно змінних функцій Карамати $\mathcal{RV}_\rho$, або клас експоненційної зміни де Хаана Γ.

Ключові слова: функціональне рівняння Коші, обмеження на одну змінну, звужена область визначення, різницеві рівняння, правильно змінні функції.

ABSTRACT

Master's thesis: 63 pp., 2 figures, 28 references, 17 presentation slides.

Object of research: Cauchy functional equations.

Subject of research: Cauchy functional equations with restrictions on one variable and the analytical, algebraic, and asymptotic properties of their solutions.

Purpose of research: systematic analysis of solutions to Cauchy functional equations with restricted domains, construction of the general solution for the universal Cauchy functional equation under the restriction of one variable to a multiplicative subgroup.

Research methods: methods of functional analysis, group theory, methods for solving linear functional-difference equations, asymptotic analysis, regular variation theory.

Main results of the research: The thesis provides a comprehensive study of Cauchy functional equations with restrictions on one variable. A detailed analysis of solutions to classical equations under various regularity conditions and specific features of restricted domains is presented.

The main analytical result is the development of a parametric fixation method for the restricted argument to solve the universal Cauchy functional equation on the asymmetric domain $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$, where the variable y is restricted to a multiplicative subgroup $\mathbb{G}$. It is proved that the presence of a non-zero additive shift acts as a filter that completely eliminates pathological solutions. A dichotomy of asymptotic behavior is established: it is proved that, depending on the parameter configuration, the solutions of the equation generate either the Karamata regularly varying class $\mathcal{RV}_\rho$ or the de Haan exponential variation class Γ.

Keywords: Cauchy functional equation, restrictions on one variable, restricted domain, difference equations, regularly varying functions.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

1. Базові математичні множини та простори

$\mathbb{N}$ --- множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ --- множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ --- множина раціональних чисел;

$\mathbb{Q}_{>0}$ --- множина додатних раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ --- множина дійсних чисел;

$\mathbb{R}_{>0}$ --- множина додатних дійсних чисел;

$\mathbb{R}^2$ --- двовимірний евклідовий простір (декартова площина);

X, Y --- довільні векторні (або банахові) простори;

$\mathbb{G}$ --- множина обмежень (адитивна або мультиплікативна підгрупа простору дійсних чисел);

$\mathbb{G}_f$ --- підгрупа регулярних точок функції f в асимптотичному аналізі;

Г --- графік функції у декартовій площині;

μ --- міра Лебега;

H, B --- базис Гамеля простору дійсних чисел $\mathbb{R}$ над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$.

2. Алгебраїчні структури та оператори

G, H, K --- довільні адитивні або мультиплікативні групи;

G/H --- фактор-група групи G за її підгрупою H;

U --- селектор сімейства суміжних класів фактор-групи;

M --- генератор (нетривіальний елемент) мультиплікативної підгрупи $\mathbb{G}$;

ln $\mathbb{G}$ --- адитивна підгрупа, утворена логарифмуванням елементів мультиплікативної групи $\mathbb{G}$;

$\perp$ --- відношення ортогональності;

$\langle x, y\rangle$ --- скалярний добуток векторів x та y;

$\|x\|$ --- норма вектора x;

$[x, y]$ --- дужка Лі елементів x та y.

3. Функціональні співвідношення, змінні та класи

f, g, h --- невідомі функції у функціональних рівняннях;

Z --- звужена область визначення функціонального рівняння ($Z \subset X \times X$);

a, b, c, d --- дійсні параметри універсального функціонального рівняння Коші;

$\Omega(x)$ --- допоміжна функція для відокремлення змінних;

P --- характеристичний корінь лінійного функціонально-різницевого рівняння;

Q --- вільний член неоднорідного функціонально-різницевого рівняння;

K_0, K_M --- константні значення шуканої функції у точках 1 та M відповідно;

$P_a(x)$ --- адитивно періодична складова розв'язку з періодом a;

$\omega(x)$ --- адитивно періодична функція з періодом 1;

$M(x)$ --- log-періодична складова розв'язку;

$I_{\mathbb{G}}(x)$ --- характеристична функція (індикатор) множини $\mathbb{G}$;

$d(x)$ --- функція Діріхле;

$\psi(\lambda)$ --- гранична функція у теорії правильного змінення;

$\mathcal{RV}_\rho$ --- (Regular Variation) клас правильно змінних функцій Карамати з індексом ρ;

Клас Γ --- клас функцій експоненційної (швидкої) зміни де Хаана.

4. Фінансові та актуарні позначення

$D(t)$ --- функція дисконтного множника для періоду t;

r --- безперервна безризикова процентна ставка;

$\rho(X)$ --- когерентна міра ризику для випадкової величини X;

$\mathbb{E}[X]$ --- математичне сподівання випадкової величини X;

$u(w)$ --- функція корисності з аргументом багатства w;

$A(w)$ --- коефіцієнт абсолютного несприйняття ризику Ерроу-Пратта.

5. Абревіатури та скорочення

CARA --- (Constant Absolute Risk Aversion) постійне абсолютне несприйняття ризику;

CRRA --- (Constant Relative Risk Aversion) постійне відносне несприйняття ризику;

ES --- (Expected Shortfall) очікуваний дефіцит;

HJM --- (Heath-Jarrow-Morton) структура Гіта-Джарроу-Мортона для моделювання кривих дохідності;

ICAAP --- (Internal Capital Adequacy Assessment Process) процес оцінки адекватності внутрішнього капіталу банку;

VaR --- (Value at Risk) вартість під ризиком.

ВСТУП

Функціональне рівняння Коші є однією з найважливіших тем у теорії функцій, що зумовлено його фундаментальним впливом на численні напрями сучасної математики та її застосувань [1, 16, 19]. У класичній теорії розв'язки цих рівнянь добре вивчені на всьому просторі дійсних чисел. Проте сучасні задачі математичного моделювання дедалі частіше вимагають переходу до звужених областей [18, 26]. Особливий науковий інтерес становить дослідження функціональних рівнянь Коші з обмеженнями на одну змінну [10, 20]. Аналіз таких асиметричних рівнянь вимагає відходу від класичного інструментарію симетричних підстановок та залучення методів теорії різницевих рівнянь.

Метою даної роботи є системний аналіз розв'язків функціональних рівнянь Коші з обмеженнями на одну змінну та побудова загального розв'язку універсального функціонального рівняння Коші за умови обмеження однієї змінної мультиплікативною підгрупою. Об'єктом дослідження є функціональні рівняння Коші, тоді як предметом виступають рівняння з обмеженнями на одну змінну та аналітичні, алгебраїчні й асимптотичні властивості їх розв'язків. Для досягнення поставленої мети було виконано низку завдань: проаналізовано функціональні рівняння на звужених областях, розроблено метод параметричної фіксації обмеженого аргументу та знайдено точні розв'язки універсального функціонального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну. У процесі роботи використовувалися методи функціонального аналізу, теорії груп, апарат лінійних функціонально-різницевих рівнянь [12], асимптотичний аналіз [4, 6].

Наукова новизна одержаних результатів полягає у доведенні того, що при розв'язанні універсального функціонального рівняння Коші на області $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$ наявність ненульового адитивного зсуву діє як фільтр, який повністю знищує патологічні періодичні розв'язки. Вперше для рівнянь з обмеженнями на одну змінну встановлено дихотомію асимптотичної поведінки: розв'язки генерують або клас правильно змінних функцій Карамати $\mathcal{RV}_\rho$, або клас експоненційної зміни де Хаана Γ.

Структурно магістерська дисертація складається зі вступу, трьох розділів, загальних висновків та списку літератури. Перший розділ присвячений класичній теорії функціональних рівнянь Коші, аналізу їх властивостей та опису розривних розв'язків з використанням базису Гамеля [14]. У другому розділі досліджуються функціональні рівняння на звужених областях [3, 8]. Третій розділ є основним: у ньому розроблено метод зведення універсального функціонального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну до лінійних різницевих рівнянь, проведено алгебраїчну класифікацію та асимптотичний аналіз розв'язків. Загальний обсяг дисертації становить 63 сторінки. Робота містить 2 рисунки, та список використаних джерел із 28 найменувань.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТА ЕВОЛЮЦІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОШІ

Теорія функціональних рівнянь відіграє ключову роль у сучасному математичному аналізі, надаючи інструментарій для визначення класів функцій через їхні алгебраїчні властивості. Центральним об'єктом дослідження у першому розділі є базове адитивне функціональне рівняння Коші. Зазначене рівняння формалізує концепцію адитивності та утворює теоретичний фундамент для вивчення складніших функціональних співвідношень.

У розділі наведено послідовний аналіз властивостей розв'язків адитивного функціонального рівняння Коші. З побудови розв'язку на множині раціональних чисел випливає, що наявність мінімальних умов регулярності, таких як неперервність або вимірність за Лебегом, редукує загальний розв'язок до класу лінійних однорідних функцій. Відмова від аксіоматики регулярності призводить до виникнення нелінійних розв'язків. Залучення апарату теорії множин та базису Гамеля дозволяє довести існування тотально розривних адитивних функцій, графік яких має властивість бути скрізь щільним у декартовій площині.

З метою уникнення топологічних патологій, притаманних розривним розв'язкам, розглядається теорія функціональних рівнянь на обмежених множинах. У розділі досліджено класифікацію умов обмеження та проаналізовано структуру розв'язків на фактор-групах і просторах з геометричною умовою ортогональної адитивності.

Завершальна частина розділу присвячена практичному застосуванню математичного апарату функціональних рівнянь у задачах кількісних фінансів та актуарної математики. Встановлено, що властивості експоненціальної мультиплікативності та субадитивності виступають необхідними математичними умовами для моделювання безперервного нарахування відсотків, побудови когерентних (узгоджених) мір ринкового ризику та агрегації економічних переваг в умовах невизначеності.

1.1. Класичні функціональні рівняння: від адитивності до загальних форм

Теорія функціональних рівнянь є математичною дисципліною на стику алгебри та аналізу, що досліджує співвідношення, у яких невідомими виступають функції. Історично розвиток цього напрямку тісно пов'язаний із задачею аксіоматичного визначення елементарних функцій. Центральним об'єктом класичної теорії є рівняння, вперше строго проаналізоване Оґюстеном Луї Коші у праці «Cours d'analyse» (1821) [7].

Адитивне функціональне рівняння Коші має вигляд:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ --- невідома функція. Рівняння (1.1) формалізує властивість адитивності, а аналіз його розв'язків є класичним прикладом взаємодії алгебраїчних умов із топологічними обмеженнями.

Розглянемо метод знаходження розв'язків цього рівняння, що розпочинається з дослідження його алгебраїчних наслідків [16]. Покладемо $x = y = 0$ у рівності (1.1); тоді отримуємо тотожність $f(0) = 0$. Підстановка $y = -x$ приводить до співвідношення $0 = f(x) + f(-x)$, звідки випливає непарність шуканої функції.

Метод математичної індукції дозволяє довести лінійність функції для натуральних множників. Оскільки для $n = 1$ твердження є тривіальним, припустимо виконання рівності $f(nx) = nf(x)$ для довільного n. Тоді для наступного кроку індукції виконується ланцюжок рівностей:

$$f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

З огляду на доведену раніше непарність функції, це правило симетрично поширюється на від'ємні числа, що дає тотожність для будь-якого цілого $z \in \mathbb{Z}$:

$$f(zx) = zf(x) \tag{1.2}$$

Наступним етапом є перехід до поля раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Нехай $r = \frac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Скористаємося властивістю (1.2) та запишемо:

$$pf(x) = f(px) = f\left(q\frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right)$$

Поділимо крайні частини на q; у результаті отримуємо властивість $\mathbb{Q}$-лінійності для будь-якого розв'язку адитивного функціонального рівняння Коші:

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Зафіксуємо $x = 1$ та введемо позначення $c = f(1)$; таким чином встановлюємо, що на множині раціональних чисел розв'язок має вигляд $f(r) = cr$ [11].

Оскільки множина $\mathbb{Q}$ є скрізь щільною в $\mathbb{R}$, подальше поширення отриманого розв'язку на множину ірраціональних чисел вимагає накладання додаткових умов регулярності, які дозволяють здійснити граничний перехід. Згідно з класичним доведенням Коші, за умови неперервності функції $f(x)$ рівність $f(x) = cx$ поширюється на всі дійсні числа [7]. Варто зауважити, що вимога глобальної неперервності є надлишковою: достатньо припустити неперервність функції хоча б в одній точці, оскільки властивість адитивності (1.1) автоматично гарантує її глобальну неперервність на всій числовій прямій. Отже, єдиними неперервними розв'язками функціонального рівняння Коші є лінійні однорідні функції.

Отримані результати природним чином узагальнюються на інші базові алгебраїчні операції. До класичних функціональних рівнянь Коші традиційно відносять ще три форми, які за допомогою відповідних замін змінних зводяться до адитивного вигляду (1.1) [16]:

1. **Експоненційне рівняння Коші:**

$$f(x + y) = f(x)f(y) \tag{1.4}$$

Рівняння описує відображення адитивної групи в мультиплікативну. Якщо припустити, що функція $f(x)$ є строго додатною, то логарифмування обох частин зведе (1.4) до адитивного вигляду $\ln f(x + y) = \ln f(x) + \ln f(y)$. Звідси випливає, що за умови неперервності та нетривіальності ($f(x) \not\equiv 0$), єдиним розв'язком є експоненційна функція $f(x) = e^{cx}$, де $c \in \mathbb{R}$.

2. **Логарифмічне рівняння Коші:**

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1.5}$$

Рівняння визначене для додатних дійсних чисел $x, y > 0$. Шляхом експоненційної заміни аргументів $x = e^u, y = e^v$ воно зводиться до форми (1.1), а його єдиним неперервним розв'язком є логарифмічна функція $f(x) = c \log x$ [11].

3. **Мультиплікативне рівняння Коші:**

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{1.6}$$

Для неперервних функцій над $\mathbb{R}$ розв'язками рівняння (1.6) є степеневі функції $f(x) = |x|^c$ або $f(x) = |x|^c \mathrm{sgn}(x)$, а також тривіальні константи 0 та 1 [16].

Природним узагальненням класичної теорії є рівняння Пексідера [11]:

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \tag{1.7}$$

Незважаючи на наявність трьох невідомих функцій, це рівняння зводиться до адитивного рівняння Коші. Зафіксуємо константи $a = g(0)$ та $b = h(0)$; тоді можна виразити g і h через f. Підставимо $y = 0$ та $x = 0$, що дає $g(x) = f(x) - b$ та $h(y) = f(y) - a$ відповідно. Після підстановки вихідне співвідношення набуває вигляду:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - a - b \tag{1.8}$$

Введення допоміжної функції $A(x) = f(x) - a - b$ редукує рівняння (1.8) до класичної форми $A(x + y) = A(x) + A(y)$. Відповідно, загальний неперервний розв'язок рівняння Пексідера формується на базі лінійної функції $A(x) = cx$:

$$f(x) = cx + a + b, \quad g(x) = cx + a, \quad h(x) = cx + b \tag{1.9}$$

Відмова від умови неперервності приводить до проблеми існування нелінійних розв'язків рівняння (1.1). Фундаментальний результат у цьому напрямку отримав Георг Гамель у 1905 році [14], запропонувавши розглядати множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ як нескінченновимірний векторний простір над полем $\mathbb{Q}$. Доведення існування базису цього простору вимагає залучення Аксіоми вибору, яка гарантує існування базису Гамеля --- множини $H \subset \mathbb{R}$. Наявність такого базису забезпечує можливість єдиного подання будь-якого дійсного числа x у вигляді лінійної комбінації:

$$x = \sum_{k=1}^{n} r_k h_k, \quad h_k \in H, r_k \in \mathbb{Q} \tag{1.10}$$

Зазначений розклад надає метод для побудови розривних та нелінійних розв'язків. Оскільки адитивність вимагає лише $\mathbb{Q}$-лінійності, значення функції f можна задати довільно на кожному елементі базису, після чого розв'язок однозначно поширюється на всі дійсні числа за правилом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k f(h_k) \tag{1.11}$$

Якщо вибрати значення для двох базисних елементів h_1 та h_2 таким чином, щоб виконувалася нерівність $\frac{f(h_1)}{h_1} \neq \frac{f(h_2)}{h_2}$, то отримана функція (1.11) гарантовано не буде збігатися з жодною лінійною функцією $f(x) = cx$ [11].

Топологічні властивості побудованих таким чином нелінійних розв'язків є екстремальними. Вони є тотально розривними, а їхній графік $G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ є скрізь щільним у декартовій площині $\mathbb{R}^2$ [16]. Як наслідок, на будь-якому заданому інтервалі така функція є необмеженою як зверху, так і знизу.

Важливим результатом, що доповнює дослідження регулярності розв'язків, є теорема Островського (1929), яка доводить, що обмеженість розв'язку рівняння Коші на будь-якій множині додатної міри Лебега є достатньою умовою його неперервності та, відповідно, лінійності [21]. Виявлена дихотомія між лінійними розв'язками за умов регулярності та розривними розв'язками без них мотивує подальше дослідження функціональних рівнянь за умов послаблення регулярності або шляхом накладання обмежень на саму область визначення.

1.2. Базис Гамеля та побудова розривних розв'язків адитивного рівняння Коші

Як зазначалося у попередньому підрозділі, наявність умов регулярності зводить будь-який розв'язок адитивного функціонального рівняння Коші до лінійної однорідної функції. Протягом тривалого часу в математичній спільноті залишалося відкритим питання щодо можливості існування адитивних функцій, які не підпорядковуються зазначеному правилу та мають нелінійний характер. Розв'язання цієї задачі вимагало виходу за межі методів класичного аналізу та залучення апарату теорії множин, що інтенсивно розвивався на початку XX століття.

Результати, отримані німецьким математиком Георгом Гамелем у 1905 році, базувалися на радикальній зміні алгебраїчної перспективи розгляду континууму [14]. Гамель запропонував розглядати множину всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ як нескінченновимірний лінійний векторний простір над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$, що дозволило абстрагуватися від природної топології числової прямої та зосередитися на її алгебраїчній структурі.

Центральним завданням у межах такої постановки проблеми була побудова базису для зазначеного абстрактного простору. Оскільки множина дійсних чисел має потужність континууму $\mathfrak{c}$, а поле раціональних чисел є лише зліченним, шуканий базис також повинен мати потужність континууму. Доведення існування такого базису спирається на теорему Цермело [15] про цілком впорядкування множин. У сучасному функціональному аналізі цей крок формалізується через застосування леми Цорна або еквівалентної їй аксіоми вибору. Використання аксіоми вибору є визначальним моментом, оскільки воно вказує на неможливість конструктивного задання нелінійних розв'язків рівняння Коші у вигляді явної аналітичної формули. Існування таких розв'язків доводиться виключно концептуально, виходячи з існування самого базису.

Згідно з алгебраїчним означенням, базисом Гамеля називається така підмножина лінійно незалежних елементів $B \subset \mathbb{R}$, яка генерує весь простір $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$. Лінійна незалежність у цьому контексті означає, що для будь-якого скінченного набору елементів $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ лінійна комбінація дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі раціональні коефіцієнти є нульовими:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i b_i = 0 \iff r_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad r_i \in \mathbb{Q}. \tag{1.12}$$

Властивість генерування простору гарантує, що кожне дійсне число $x \in \mathbb{R}$ допускає розклад у вигляді скінченної лінійної комбінації елементів базису:

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i, \tag{1.13}$$

де $r_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, а $b_i \in B$. Найважливішою властивістю подання (1.13), яка безпосередньо випливає з умови лінійної незалежності (1.12), є єдиність такого розкладу для кожного дійсного числа x.

Наявність єдиного розкладу (1.13) дозволяє формалізувати алгоритм конструювання нелінійних адитивних функцій, що складається з двох етапів. На першому етапі значення шуканої функції f задаються довільним чином для кожного елемента базису Гамеля, що фактично визначає відображення $f : B \to \mathbb{R}$. На другому етапі, використовуючи властивість єдиності розкладу, ми поширюємо цю функцію на всю множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ за правилом $\mathbb{Q}$-лінійності:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right) := \sum_{i=1}^{n} r_i f(b_i). \tag{1.14}$$

Побудована за правилом (1.14) функція задовольняє функціональне рівняння Коші на всій числовій прямій. Розглянемо два дійсних числа x та y, розклади яких за базисом Гамеля мають вигляд $x = \sum_{i=1}^{k} p_i b_i$ та $y = \sum_{i=1}^{k} q_i b_i$, де $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$. Їхня сума визначається виразом $x + y = \sum_{i=1}^{k}(p_i + q_i)b_i$. Застосуємо означення (1.14) до суми аргументів:

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^{k}(p_i + q_i)f(b_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i f(b_i) + \sum_{i=1}^{k} q_i f(b_i) = f(x) + f(y). \tag{1.15}$$

Рівність (1.15) підтверджує адитивність сконструйованої функції [14].

Для того щоб адитивна функція f не була лінійною функцією вигляду $f(x) = cx$, достатньо порушити пропорційність значень хоча б на двох базисних елементах. Оберімо два довільні елементи базису Гамеля $b_1, b_2 \in B$ та визначимо їхні образи $f(b_1)$ та $f(b_2)$ таким чином, щоб виконувалася нерівність:

$$\frac{f(b_1)}{b_1} \neq \frac{f(b_2)}{b_2}. \tag{1.16}$$

У такому разі загальний розв'язок не буде лінійним. Цей факт пояснюється тим, що існування єдиної константи c, для якої $f(x) = cx$ для всіх x, вимагало б виконання рівностей $f(b_1) = cb_1$ та $f(b_2) = cb_2$, що суперечить умові (1.16).

Адитивні функції, побудовані за допомогою базису Гамеля, класифікуються як патологічні об'єкти математичного аналізу через їхні нетипові топологічні властивості. Оскільки такі функції є нелінійними, згідно з теоремами Коші та Островського вони є розривними у кожній точці числової прямої [14].

Характерною ознакою такої патології є властивість графіка функції $G = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ бути скрізь щільним на декартовій площині $\mathbb{R}^2$. Доведемо це твердження, розглянувши двовимірний підпростір, згенерований елементами b_1 та b_2. Позначимо $y_1 = f(b_1)$ та $y_2 = f(b_2)$. Умова нелінійності (1.16) еквівалентна тому, що визначник матриці, складеної з цих значень, є ненульовим:

$$b_1 y_2 - b_2 y_1 \neq 0. \tag{1.17}$$

Нерівність (1.17) вказує на лінійну незалежність векторів $\vec{v}_1 = (b_1, y_1)$ та $\vec{v}_2 = (b_2, y_2)$ у просторі $\mathbb{R}^2$. Отже, вони утворюють базис зазначеного простору, що дозволяє подати будь-яку точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ у вигляді лінійної комбінації:

$$(x_0, y_0) = c_1(b_1, y_1) + c_2(b_2, y_2), \tag{1.18}$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Оскільки множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є скрізь щільною в $\mathbb{R}$, ми можемо з довільною точністю $\varepsilon > 0$ наблизити дійсні коефіцієнти c_1, c_2 раціональними числами $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. З огляду на властивість $\mathbb{Q}$-лінійності функції f, точка $r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 = (r_1 b_1 + r_2 b_2, r_1 y_1 + r_2 y_2)$ належить графіку функції f.

У будь-якому околі довільної точки (x_0, y_0) площини існує точка, що належить графіку нелінійної адитивної функції. Зазначена топологічна особливість призводить до того, що функція є тотально необмеженою: на будь-якому заданому інтервалі (a, b) функція $f(x)$ набуває значень, близьких до довільного наперед заданого дійсного числа.

Аналіз алгебраїчної структури базису Гамеля та топологічної поведінки патологічних розв'язків є необхідним етапом дослідження. Він демонструє, що за відсутності умов регулярності (вимірності або обмеженості) множина розв'язків рівняння Коші має хаотичний характер, що унеможливлює її практичне застосування. Це створює теоретичну мотивацію для переходу до вивчення функціональних рівнянь на звужених областях, де алгебраїчні обмеження дозволяють частково усунути зазначені патології.

1.3. Функціональні рівняння на обмежених множинах: огляд проблематики

Теоретико-множинні ускладнення та існування патологічних розривних розв'язків, що виникають у просторах без аксіоматики регулярності, спонукають дослідників до перегляду класичного формулювання функціонального рівняння Коші. Загальна мотивація для вивчення зазначеного рівняння на обмежених множинах базується на тому факті, що сімейство його розв'язків перебуває у прямій залежності від області, на якій визначається виконання відповідної рівності [18]. Нехай X та Y є заданими лінійними просторами або групами, а $f : X \to Y$ --- невідомою функцією. У класичному аналізі адитивність традиційно вимагається для всього декартового добутку аргументів простору $X \times X$, проте теорія рівнянь з обмеженнями розглядає лише певну підмножину $Z \subset X \times X$. У такому разі адитивне функціональне рівняння набуває обмеженого вигляду:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall (x, y) \in Z. \tag{1.19}$$

Фундаментальна класифікація М. Кучми дозволяє поділити умови, що визначають множину обмежень Z, на три основні алгебраїчні типи [18]. До першого типу належать явні умови, за яких підмножина Z задається апріорі та не залежить від властивостей невідомої функції f. Прикладом такого обмеження є детерміноване звуження області визначення додатним ортантом $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ або ж розгляд рівняння на декартовому добутку простору та його власної адитивної підгрупи.

Другий тип формують неявні умови, де множина Z конструюється через значення шуканої функції f. Класичною ілюстрацією зазначеного підходу є функціональне рівняння Мікусінського, для якого множина обмежень визначається як:

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x + y) \neq 0\}. \tag{1.20}$$

Зазначена умова виключає з розгляду пари аргументів, сума образів яких дорівнює нульовому елементу, що дозволяє уникнути виродження розв'язків на певних інтервалах та зберігає цілісність відображення.

Третій тип охоплює дескриптивні умови, де множина Z задається через її теоретико-мірні або топологічні властивості. Класичний приклад --- коли рівняння (1.19) виконується майже скрізь, що означає $\mu(Z^c) = 0$ (де μ --- двовимірна міра Лебега). У цьому випадку ключовою є теорема де Брьойна. Вона стверджує: якщо функція є адитивною майже скрізь на площині, то існує строго адитивна на всьому просторі функція $F(x)$, яка відрізняється від початкової лише на множині міри нуль. Це дозволяє звести задачу до класичного рівняння Коші.

Особливий інтерес для подальшого аналізу становить розв'язання рівняння (1.19) за умов явних алгебраїчних обмежень типу підгруп. Розглянемо строгу постановку проблеми, де $X = G$ є довільною адитивною групою, а рівняння Коші виконується на асиметричній множині $Z = G \times H$, де $H \leq G$ є фіксованою підгрупою [26]. Зазначена асиметрія аргументів принципово змінює структуру розв'язку відображення.

Згідно з результатами Й. Табора, загальний розв'язок $f : G \to K$ розщеплюється на гомоморфну складову та частину, що є константною на суміжних класах. Розглянемо фактор-групу G/H та оберемо селектор U, який містить по одному представнику з кожного суміжного класу. Тоді будь-який елемент $x \in G$ допускає єдине подання:

$$x = u + h, \quad u \in U,\ h \in H. \tag{1.21}$$

Скористаємося адитивністю (1.19) для випадку $y = h$; тоді отримаємо рівність $f(u + h) = f(u) + f(h)$. Оскільки аргумент h належить підгрупі H, звуження функції f на цю підгрупу є гомоморфізмом $g : H \to K$. Позначимо довільні значення на селекторі як $\phi(u) = f(u)$ та врахуємо, що $h = x - u$. У результаті приходимо до загальної формули розв'язку:

$$f(x) = \phi(u) + g(x - u), \tag{1.22}$$

де g детермінує алгебраїчні вимоги на підгрупі, а функція ϕ визначає значення на фактор-множині.

Механіку зазначеного розщеплення можна продемонструвати на конкретних числових множинах. Нехай базовою групою є множина дійсних чисел

$G = \mathbb{R}$, а обмежувальною підгрупою --- множина цілих чисел $H = \mathbb{Z}$. Рівняння набуває вигляду:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Z}. \tag{1.23}$$

Покладемо $y = 1$ та введемо позначення $f(1) = c$; тоді отримуємо рекурентне співвідношення $f(x + 1) = f(x) + c$. Метод математичної індукції дозволяє довести, що для будь-якого цілого зсуву $n \in \mathbb{Z}$ виконується рівність:

$$f(x + n) = f(x) + cn. \tag{1.24}$$

Для виділення періодичної складової введемо допоміжну функцію $P(x) = f(x) - cx$. Дослідимо її поведінку при зсуві аргументу на ціле число n, застосувавши властивість (1.24):

$$P(x+n) = f(x+n) - c(x+n) = f(x) + cn - cx - cn = f(x) - cx = P(x). \tag{1.25}$$

Тотожність (1.25) доводить, що функція $P(x)$ є періодичною з періодом $T = 1$. Звідси випливає загальний вигляд розв'язку для обмеження на підгрупі цілих чисел:

$$f(x) = cx + P(x). \tag{1.26}$$

Таким чином, загальний розв'язок є сумою лінійної функції та довільної одно-періодичної функції, що виконує роль константи на суміжних класах $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Структура розв'язку (1.26) стає більш специфічною при заміні цілих чисел на щільну підгрупу раціональних чисел $H = \mathbb{Q}$. Рівняння розглядається для $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{Q}$. Оскільки функція f є строго адитивною на $\mathbb{Q}$, її звуження на множину раціональних чисел збігається з лінійною функцією $f(q) = cq$. Повторне застосування допоміжної функції $P(x) = f(x) - cx$ для раціонального зсуву q приводить до рівності:

$$P(x+q) = f(x+q) - c(x+q) = f(x) + f(q) - cx - cq = f(x) + cq - cx - cq = P(x). \tag{1.27}$$

Рівність (1.27) означає, що функція $P(x)$ є $\mathbb{Q}$-періодичною та набуває сталих значень на кожному нескінченно щільному суміжному класі. З топологічної точки зору вимога неперервності розв'язку змушує функцію $P(x)$ бути глобальною константою, тоді як за відсутності регулярності розв'язок редукується до патологічних розривних функцій.

Потужним напрямком сучасних досліджень є геометричні обмеження, зокрема ортогональна адитивність [22]. У такій постановці класична умова Коші обмежується парами векторів гільбертового або банахового простору, скалярний добуток яких дорівнює нулю:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{за умови } \langle x, y \rangle = 0. \tag{1.28}$$

Загальний розв'язок рівняння (1.28) відрізняється від суто лінійного відображення. Оскільки для ортогональних векторів виконується теорема Піфагора $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, будь-яке відображення, що залежить від квадрата норми, автоматично задовольняє умову ортогональної адитивності. Отже, загальний розв'язок має гібридну структуру:

$$f(x) = a(\|x\|^2) + A(x), \tag{1.29}$$

де a позначає адитивне відображення, а A --- лінійний функціонал [3]. Сучасні праці доводять, що за умов наближеної ортогональності зазначені функції на банахових просторах зводяться до адитивних відображень [8].

Актуальним вектором досліджень є перенесення концепцій умовної адитивності на алгебраїчні структури які не підпорядковуються умові асоціативності, зокрема на алгебри Лі. Проблематика охоплює вивчення рівнянь типу Єнсена:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \tag{1.30}$$

за умов комутування елементів, що формалізується рівністю дужки Лі нулю $[x, y] = 0$. Новітні дослідження демонструють стійкість узагальнених диференціювань дужок Лі та підтверджують, що відповідні відображення зберігають лінійність на алгебрах Лі під дією контрольних функцій Гаврути та Рассіаса [17]. Зазначені результати підтверджують, що ідеї умовної адитивності формують фундамент для аналізу просторів із нетривіальною алгебраїчною геометрією.

1.4. Застосування функціональних рівнянь у фінансовій та актуарній математиці

Перехід від абстрактних алгебраїчних структур та топологічних просторів до прикладних задач кількісних фінансів демонструє універсальність апарату функціональних рівнянь. У сучасній фінансовій та актуарній математиці функціональні співвідношення та нерівності формують фундамент для моделювання вартості грошей з часом, оцінки ринкових ризиків та агрегації економічних переваг інвесторів в умовах невизначеності.

Типовим прикладом застосування цієї теорії є моделювання процесів безперервного нарахування відсотків та побудова функцій дисконтування. Розглянемо ідеальний фінансовий ринок без транзакційних витрат, на якому відсутні можливості для реалізації просторового чи часового арбітражу. Нехай $D(t)$ позначає дисконтний множник, що визначає приведену вартість одиниці капіталу, яка буде отримана через проміжок часу $t \geq 0$. З огляду на мультиплікативну природу вартості грошей у часі, дисконтний множник для сумарного періоду $t + s$ має дорівнювати добутку дисконтних множників для послідовних часових відрізків t та s. Математично зазначена вимога формалізується у вигляді експоненціального функціонального рівняння Коші:

$$D(t+s) = D(t)D(s), \quad \forall t, s \geq 0. \tag{1.31}$$

Дослідження рівняння (1.31) зводиться до адитивної форми за допомогою логарифмування обох частин рівності: $\ln D(t+s) = \ln D(t) + \ln D(s)$. Припустимо, що функція $D(t)$ є вимірною за Лебегом, що є необхідною вимогою для опису стохастичних фінансових процесів, та не дорівнює нулю тотожно; тоді єдиним розв'язком рівняння (1.31) є експоненціальна функція:

$$D(t) = e^{-rt}, \tag{1.32}$$

де параметр $r > 0$ інтерпретується як безперервна безризикова процентна ставка.

Зазначений підхід є базовим для моделювання часової структури процентних ставок, відомої як крива дохідності (yield curve). У складніших моделях дисконтний множник узагальнюється до ціни дисконтної облігації $P(t, T)$, а миттєва форвардна ставка визначається через логарифмічну похідну $f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T)$. Сучасні підходи до аналізу динаміки кривої дохідності, зокрема структура Гіта-Джарроу-Мортона (HJM), покладаються на функціональні співвідношення, у межах яких зміна миттєвих форвардних ставок описується стохастичними диференціальними рівняннями з частинними похідними на нескінченновимірних просторах. Зміна цих кривих визначає ринок [13], а запровадження нових просторів без використання довільних експоненціальних ваг дозволяє точніше калібрувати моделі до реальних даних, що є актуальним в умовах від'ємних процентних ставок [23].

Функціональні нерівності також утворюють основу архітектури сучасного банківського ризик-менеджменту. Математичне визначення когерентних мір ризику базується на системі аксіом, запропонованих у праці Ф. Артцнера та співавторів [2]. Нехай $\mathcal{X}$ позначає лінійний простір випадкових величин, що представляють майбутні фінансові позиції банку на кінець періоду. Відображення $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ визначається як когерентна міра ризику, якщо воно задовольняє наступну систему функціональних співвідношень:

1. трансляційна інваріантність: $\rho(X+c) = \rho(X) - c$ для будь-якої константи $c \in \mathbb{R}$;
2. позитивна однорідність: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ для всіх $\lambda \geq 0$;
3. монотонність: якщо $X \leq Y$ майже напевно, то $\rho(X) \geq \rho(Y)$;
4. субадитивність: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ для будь-яких $X, Y \in \mathcal{X}$.

Властивість субадитивності концептуально є спрощенням адитивного функціонального рівняння Коші. У комбінації з позитивною однорідністю субадитивність визначає властивість опуклості міри ризику:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{1.33}$$

Функціональна нерівність (1.33) задає верхню межу для сумарного ризику та відображає сублінійність за Берцом, топологічні аспекти якої досліджено у працях Н. Бінгхема та А. Осташевського [5]. В економічному контексті субадитивність формалізує принцип диверсифікації, згідно з яким ризик об'єднаного портфеля не може перевищувати суму ризиків його окремих компонентів.

Зазначена нерівність є визначальним критерієм для регуляторної оцінки ринкових ризиків та розрахунку адекватності капіталу (ICAAP). Поширена міра вартості під ризиком (Value at Risk, VaR) у загальному випадку не задовольняє умову субадитивності, що може призводити до некоректного оцінювання ефекту диверсифікації. На противагу цьому, міра очікуваного дефіциту (Expected Shortfall, ES), яка визначається як умовне математичне сподівання збитків у хвості розподілу, строго задовольняє зазначену нерівність, внаслідок чого ES замінила VaR як основний регуляторний стандарт у межах угод Базель III та Базель IV [28].

В актуарній математиці функціональні рівняння використовуються для моделювання функцій корисності та встановлення страхових тарифів. Принцип нульової корисності (zero utility principle), що застосовується для розрахунку страхової премії, базується на розв'язанні неявних інтегро-функціональних рівнянь. Нехай $u(w)$ позначає двічі диференційовну функцію корисності, w --- початковий капітал, а X --- випадкову величину збитку. Справедлива премія π визначається як корінь рівняння:

$$\mathbb{E}[u(w + \pi - X)] = u(w). \tag{1.34}$$

Розв'язання рівнянь вигляду (1.34) дозволяє пов'язати преференції суб'єкта із зовнішніми ризиками [27].

Специфічні класи преференцій інвесторів однозначно характеризуються розв'язками класичних функціональних рівнянь. Зокрема, вимога інваріантності щодо зсуву редукується до функціонального рівняння Коші-Пексідера, єдиним строго зростаючим та угнутим розв'язком якого є експоненціальна функція корисності:

$$u(x) = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}. \tag{1.35}$$

Властивість інваріантності щодо масштабу визначає клас постійного відносного несприйняття ризику (CRRA) і редукується до мультиплікативного функціонального рівняння, розв'язками якого є степеневі або логарифмічні функції корисності [24].

У підсумку зазначимо, що апарат функціональних рівнянь є потужним інструментом для опису ринкових процесів, що забезпечує математичне обґрунтування відсутності арбітражу та стійкості фінансових систем. Детальний аналіз методів розв'язання зазначених рівнянь у контексті економічних наук наведено у монографії Я. Ацеля [1].

2. АДИТИВНІ ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ РІВНЯННЯ КОШІ З ОБМЕЖЕННЯМ НА ОДНУ ЗМІННУ

Другий розділ роботи присвячено аналізу розв'язків функціональних рівнянь Коші за умови звуження області визначення однієї зі змінних. Увага зосереджується на асиметричній постановці задачі, де базова умова адитивності виконується для неперервного аргументу $x \in \mathbb{R}$ та обмеженого аргументу $y \in \mathbb{G}$.

Встановлено, що існування нетривіальних розв'язків вимагає від множини обмежень $\mathbb{G}$ наявності алгебраїчної структури адитивної групи. Зазначена алгебраїчна властивість дозволяє здійснити розклад загального розв'язку на лінійну та періодичну складові. Доводиться, що для довільного числа $a \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ розв'язок має вигляд:

$$f(x) = \frac{f(a)}{a}x + P_a(x),$$

де $P_a(x)$ є періодичною функцією з періодом a, яка містить всі нелінійні властивості відображення.

Застосування апарату базису Гамеля та декомпозиції розв'язку на лінійну та періодичну компоненти дозволяє розкрити внутрішню структуру патологічних розв'язків класичного рівняння Коші. Доводиться, що лінійна складова розривних функцій не є інваріантом і цілком залежить від вибору опорної точки розкладу. Встановлено тотожність, яка демонструє ефект нівелювання розривів: різниця двох скрізь розривних періодичних функцій з раціонально незалежними періодами генерує абсолютно гладку неперіодичну пряму.

Завершальний етап розділу присвячено узагальненню отриманих результатів на класи мультиплікативних та логарифмічних функціональних рівнянь. Використання логарифмічних та експоненціальних ізоморфізмів дозволяє звести рівняння вигляду $f(xy) = f(x)f(y)$ та $f(xy) = f(x) + f(y)$ до адитивної форми. Внаслідок цього встановлюється загальний вигляд розв'язків для частково обмежених областей, зокрема факторизаційне подання для додатнозначних розв'язків мультиплікативного рівняння:

$$f(x) = x^c \cdot M(x),$$

де $M(x)$ є log-періодичною компонентою.

2.1. Постановка задачі та алгебраїчна структура множини обмежень

У даному підрозділі досліджується адитивне функціональне рівняння Коші за умови обмеження області визначення однієї зі змінних. Розглядається співвідношення вигляду:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{G}, \tag{2.1}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ --- шукана функція, а $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$ --- фіксована множина обмежень. Рівняння (2.1) є розширенням класичного адитивного функціонального рівняння Коші, властивості якого для випадку $x, y \in \mathbb{R}$ детально вивчені у працях Я. Ацеля [1] та М. Кучми [18].

Існують функції, які не задовольняють класичне адитивне функціональне рівняння Коші на площині $\mathbb{R}^2$, проте є розв'язками рівняння (2.1) для специфічних множин $\mathbb{G}$. Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 1. Визначимо функцію $f(x) = cx + \sin x$ для довільної константи $c \in \mathbb{R}$ на всій числовій прямій. Наявність нелінійної тригонометричної компоненти унеможливлює виконання умови адитивності. Зафіксуємо множину обмежень у вигляді дискретної ґратки $\mathbb{G} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Для довільних аргументів $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{G}$ значення функції від їхньої суми становить:

$$f(x+y) = c(x+y) + \sin(x+y) = cx + cy + \sin x \cos y + \cos x \sin y. \tag{2.2}$$

Оскільки аргумент y є кратним повному періоду 2π, виконуються тотожності $\cos y = 1$ та $\sin y = 0$. Застосування зазначених тотожностей до виразу (2.2) дає:

$$f(x+y) = cx + cy + \sin x. \tag{2.3}$$

Сума ізольованих значень функції обчислюється як:

$$f(x) + f(y) = (cx + \sin x) + (cy + \sin y). \tag{2.4}$$

Рівність $\sin y = 0$ для всіх $y \in \mathbb{G}$ зводить вираз (2.4) до вигляду $cx + cy + \sin x$. Еквівалентність виразів (2.3) та (2.4) підтверджує, що рівняння (2.1) виконується. Множина $\mathbb{G}$ у цьому прикладі утворює адитивну групу.

Приклад 2. Дослідимо розривну функцію $f(x) = x + 1 - d(x)$ для $x \in \mathbb{R}$, де $d(x)$ --- функція Діріхле. Задамо множину обмежень як $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$. Для довільних $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{Q}$ запишемо ліву частину функціонального рівняння:

$$f(x+y) = x + y + 1 - d(x+y). \tag{2.5}$$

Додавання раціонального числа y не змінює раціональності числа x, що забезпечує виконання тотожності $d(x+y) = d(x)$. Відповідно, вираз (2.5) набуває вигляду:

$$f(x+y) = x + y + 1 - d(x). \tag{2.6}$$

Сума значень функції з урахуванням рівності $d(y) = 1$ для будь-якого $y \in \mathbb{Q}$ дорівнює:

$$f(x) + f(y) = x + 1 - d(x) + y + 1 - d(y) = x + y + 1 - d(x). \tag{2.7}$$

Збіг виразів (2.6) та (2.7) доводить, що досліджувана розривна функція є розв'язком рівняння (2.1). Множина обмежень $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$ утворює скрізь щільну в $\mathbb{R}$ адитивну групу.

Приклад 3. Розглянемо узагальнену конструкцію вигляду $f(x) = cx + \alpha(1 - I_{\mathbb{G}}(x))$, де $c, \alpha \in \mathbb{R}$, а $I_{\mathbb{G}}(x)$ --- характеристична функція довільної фіксованої адитивної групи $\mathbb{G} \leq \mathbb{R}$. Оцінимо значення функції від суми аргументів для $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{G}$:

$$f(x+y) = c(x+y) + \alpha(1 - I_{\mathbb{G}}(x+y)). \tag{2.8}$$

Властивості адитивних груп гарантують, що сума $x + y \in \mathbb{G}$ тоді і тільки тоді, коли $x \in \mathbb{G}$. Характеристична функція є інваріантною щодо зсуву на елемент групи, тобто $I_{\mathbb{G}}(x+y) = I_{\mathbb{G}}(x)$. Вираз (2.8) редукується до $cx+cy+\alpha(1-I_{\mathbb{G}}(x))$. Сума значень функції визначається як:

$$f(x) + f(y) = cx + \alpha(1 - I_{\mathbb{G}}(x)) + cy + \alpha(1 - I_{\mathbb{G}}(y)). \tag{2.9}$$

Умова $y \in \mathbb{G}$ фіксує значення $I_{\mathbb{G}}(y) = 1$, внаслідок чого останній доданок у виразі (2.9) дорівнює нулю. Результат збігається з лівою частиною рівняння.

Існування нетривіального розв'язку у цьому випадку безпосередньо спирається на той факт, що множина обмежень $\mathbb{G}$ є адитивною групою.

Приклад 4. Визначимо множину обмежень як $\mathbb{G} = \{0\}$. Рівняння (2.1) набуває вигляду $f(x+0) = f(x) + f(0)$, що еквівалентно умові $f(0) = 0$. За такої постановки розв'язком є будь-яка функція, що проходить через початок координат. Множина $\mathbb{G} = \{0\}$ утворює тривіальну (вироджену) адитивну групу. Надалі у роботі будуть розглядатись невироджені множини обмежень.

Аналіз наведених прикладів фіксує спільну закономірність: у кожному випадку множина обмежень $\mathbb{G}$, на якій виконується умовна адитивність, утворює адитивну підгрупу простору дійсних чисел. Встановимо необхідність цієї властивості для загального випадку.

Лема 2.1.1. Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє функціональне рівняння (2.1) для всіх $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{G}$. Якщо $\mathbb{G}$ --- невироджена множина всіх значень y, для яких виконується дана рівність, то вона утворює адитивну підгрупу групи дійсних чисел, тобто задовольняє наступну систему аксіом:

1) існування нейтрального елемента: $0 \in \mathbb{G}$;
2) замкненість відносно операції додавання: якщо $y_1, y_2 \in \mathbb{G}$, то $y_1 + y_2 \in \mathbb{G}$;
3) існування оберненого елемента: якщо $y \in \mathbb{G}$, то $(-y) \in \mathbb{G}$.

Доведення.

1) Доведемо наявність нейтрального елемента $0 \in \mathbb{G}$. За умовою леми множина $\mathbb{G}$ є невиродженою, отже, існує деякий елемент $a \in \mathbb{G}$, такий що $a \neq 0$. Оскільки $a \in \mathbb{G}$, то за означенням цієї множини тотожність виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+a) = f(x) + f(a). \tag{2.10}$$

Покладемо $x = 0$:

$$f(0+a) = f(0) + f(a) \implies f(a) = f(0) + f(a) \implies f(0) = 0.$$

Тепер перевіримо, чи належить елемент $y = 0$ множині $\mathbb{G}$. Для цього потрібно впевнитись, що рівність $f(x+y) = f(x) + f(y)$ виконується при $y = 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Дійсно, враховуючи доведену вище властивість $f(0) = 0$, маємо:

$$f(x+0) = f(x) + f(0) \implies f(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

Оскільки тотожність $f(x+0) = f(x) + f(0)$ є істинною, то $y = 0$ задовольняє умову приналежності до множини $\mathbb{G}$. Отже, $0 \in \mathbb{G}$.

2) Розглянемо два довільні елементи $y_1, y_2 \in \mathbb{G}$. Застосуємо рівняння (2.1) послідовно. Для довільного $\omega \in \mathbb{R}$ виконуються тотожності $f(\omega + y_1) = f(\omega) + f(y_1)$ та $f(\omega + y_2) = f(\omega) + f(y_2)$. Покладемо $\omega = x + y_1$ і обчислимо значення функції від суми аргументів:

$$f(x + y_1 + y_2) = f((x + y_1) + y_2) = f(x + y_1) + f(y_2). \tag{2.11}$$

Адитивність за елементом y_1 дозволяє розкрити перший доданок у правій частині (2.11):

$$f(x + y_1) + f(y_2) = f(x) + f(y_1) + f(y_2). \tag{2.12}$$

З іншого боку, згрупуємо аргументи у вигляді $x + (y_1 + y_2)$. Зіставлення результату (2.12) з умовою адитивності доводить виконання рівності $f(x+(y_1+y_2)) = f(x) + f(y_1 + y_2)$. Відповідно, елемент $(y_1 + y_2)$ задовольняє рівняння Коші, що підтверджує замкненість множини $\mathbb{G}$ відносно додавання.

3) Встановлення існування оберненого елемента спирається на властивість непарності функції на множині $\mathbb{G}$. Використаємо доведений факт $0 \in \mathbb{G}$ та покладемо $x = -y$ для довільного $y \in \mathbb{G}$ у рівняння (2.1):

$$f(-y + y) = f(-y) + f(y) \implies f(0) = f(-y) + f(y). \tag{2.13}$$

Враховуючи рівність $f(0) = 0$, отримуємо тотожність $f(-y) = -f(y)$. Розглянемо значення функції для аргументу $x - y$:

$$f(x-y) = f(x-y) + f(y) - f(y) = f(x-y+y) - f(y) = f(x) - f(y). \tag{2.14}$$

Застосування властивості непарності до виразу $-f(y)$ трансформує (2.14) у такий вигляд:

$$f(x + (-y)) = f(x) + f(-y). \tag{2.15}$$

Рівність (2.15) є формальним записом рівняння (2.1) для елемента $(-y)$. Отже, для кожного елемента множини $\mathbb{G}$ існує обернений елемент. Лему доведено.

Результат Леми 2.1.1 звужує клас допустимих множин обмежень до адитивних підгруп простору $\mathbb{R}$. Згідно з класичними теоремами топологічної алгебри, довільна адитивна підгрупа дійсних чисел належить до одного з двох класів: вона є або дискретною (ізоморфною $\mathbb{Z}$), або скрізь щільною в $\mathbb{R}$ [16]. Топологія множини $\mathbb{G}$ безпосередньо визначає властивості розв'язків.

2.2. Адитивне рівняння Коші: виділення лінійної та періодичної компонент

У попередньому підрозділі було доведено, що існування нетривіальних розв'язків функціонального рівняння Коші з обмеженням на одну змінну вимагає, щоб множина обмежень $\mathbb{G}$ утворювала адитивну підгрупу простору дійсних чисел. Зазначений факт створює теоретичне підґрунтя для декомпозиції загального розв'язку. Метою даного підрозділу є математичне доведення того, що будь-який розв'язок досліджуваного рівняння розщеплюється на лінійну та періодичну складові, а також аналіз умов, за яких періодична компонента тотожно дорівнює нулю.

Розглянемо функціональне рівняння:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{G}, \tag{2.16}$$

де $\mathbb{G} \leq \mathbb{R}$ --- невироджена адитивна підгрупа.

Сформулюємо та доведемо теорему про розщеплення розв'язку.

Теорема 2.2.1 Нехай множина $\mathbb{G}$ є невиродженою адитивною підгрупою дійсних чисел, і зафіксовано довільний елемент $a \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$. Тоді будь-яку функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задовольняє рівняння (2.16), можна однозначно подати у вигляді:

$$f(x) = c_a x + P_a(x), \tag{2.17}$$

де $c_a = \frac{f(a)}{a}$ --- константа, що визначає лінійну компоненту, а $P_a(x)$ --- періодична функція з періодом a, яка задовольняє початкову умову $P_a(0) = 0$.

Доведення. Оскільки за умовою теореми $a \in \mathbb{G}$, то згідно з рівнянням (2.16) для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується тотожність:

$$f(x+a) = f(x) + f(a). \tag{2.18}$$

Введемо до розгляду допоміжну функцію $P_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, визначивши її наступним чином:

$$P_a(x) = f(x) - \frac{f(a)}{a}x. \tag{2.19}$$

Дослідимо властивості функції $P_a(x)$ при зсуві аргументу на величину a. Застосуємо означення (2.19) для аргументу $x + a$:

$$P_a(x + a) = f(x + a) - \frac{f(a)}{a}(x + a). \tag{2.20}$$

Підставимо вираз (2.18) у рівність (2.20) та розкриємо дужки:

$$P_a(x + a) = f(x) + f(a) - \frac{f(a)}{a}x - f(a) = f(x) - \frac{f(a)}{a}x. \tag{2.21}$$

Права частина рівності (2.21) збігається з початковим означенням функції $P_a(x)$. Звідси випливає тотожність $P_a(x+a) = P_a(x)$, що доводить періодичність функції $P_a(x)$ з періодом a.

Для визначення значення функції у нулі покладемо $x = 0$ у вираз (2.19). Враховуючи доведений у Лемі 2.1.1 факт, що $f(0) = 0$, отримуємо:

$$P_a(0) = f(0) - \frac{f(a)}{a} \cdot 0 = 0. \tag{2.22}$$

Отже, розклад (2.17) існує і задовольняє всі заявлені умови. Теорему доведено.

Періодична складова $P_a(x)$ успадковує алгебраїчні властивості вихідної функції $f(x)$ на множині обмежень $\mathbb{G}$. Сформулюємо цей факт у вигляді окремого твердження.

Лема 2.2.1 Періодична компонента $P_a(x)$, визначена рівністю (2.19), є розв'язком функціонального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну (2.16) на тій самій множині обмежень $\mathbb{G}$.

Доведення. Розглянемо суму аргументів $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{G}$. Згідно з означенням функції P_a:

$$P_a(x + y) = f(x + y) - c_a(x + y). \tag{2.23}$$

Застосуємо властивість адитивності $f(x + y) = f(x) + f(y)$:

$$P_a(x + y) = f(x) + f(y) - c_a x - c_a y = (f(x) - c_a x) + (f(y) - c_a y)\,. \tag{2.24}$$

Використання означення функції P_a зводить рівність (2.24) до вигляду:

$$P_a(x+y) = P_a(x) + P_a(y). \tag{2.25}$$

Рівність (2.25) підтверджує, що P_a задовольняє функціональне рівняння Коші з обмеженнями. Лему доведено.

Завершальним етапом аналізу властивостей розв'язку функціонального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну є дослідження теоретико-мірних характеристик множини обмежень $\mathbb{G}$. Якщо множина обмежень $\mathbb{G}$ має строго додатну міру Лебега у просторі $\mathbb{R}$, рівняння з обмеженнями стає еквівалентним до класичного симетричного рівняння.

Теорема 2.2.2. Нехай функція f задовольняє рівняння (2.16). Якщо множина обмежень $\mathbb{G}$ є вимірною за Лебегом і має строго додатну міру ($\mu(\mathbb{G}) > 0$), то $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

Доведення. Доведення спирається на залучення фундаментального результату теорії міри --- теореми Штейнгауза [25]. Визначимо алгебраїчну різницю множини $\mathbb{G}$ як множину всіх можливих різниць її елементів:

$$\mathbb{G} - \mathbb{G} = \{y_1 - y_2 \mid y_1, y_2 \in \mathbb{G}\}. \tag{2.26}$$

Згідно з теоремою Штейнгауза, якщо вимірна множина має додатну міру Лебега, то її алгебраїчна різниця гарантовано містить відкритий окіл нуля. Отже, існує таке дійсне число $\varepsilon > 0$, що інтервал $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{G} - \mathbb{G}$.

Відповідно до Леми 2.1.1, множина $\mathbb{G}$ утворює адитивну підгрупу, внаслідок чого вона є замкненою відносно операції віднімання. Це означає, що алгебраїчна різниця збігається з самою множиною: $\mathbb{G} - \mathbb{G} = \mathbb{G}$. Звідси випливає, що відкритий інтервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$ належить множині $\mathbb{G}$.

Зафіксуємо довільне дійсне число $x \in \mathbb{R}$. Тоді існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $\left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon$. Це означає, що елемент $\frac{x}{n}$ належить інтервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$, а отже, і підгрупі $\mathbb{G}$. Скористаємося властивістю замкненості підгрупи $\mathbb{G}$ відносно додавання. Оскільки елемент $\frac{x}{n} \in \mathbb{G}$, то сума n таких елементів також належить множині $\mathbb{G}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} = n\left(\frac{x}{n}\right) = x \in \mathbb{G}. \tag{2.27}$$

Оскільки x було обрано довільно з множини дійсних чисел, рівність (2.27) доводить, що $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{G}$. З урахуванням початкової умови $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, отримуємо тотожність $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. Теорему доведено.

Практичний наслідок цієї теореми полягає у тому, що збереження асиметрії рівняння (2.16) (і як наслідок, існування розривних періодичних компонент розв'язку) можливе лише за умови, що множина обмежень $\mathbb{G}$ є нуль-множиною у сенсі міри Лебега ($\mu(\mathbb{G}) = 0$).

Викладений у даному підрозділі апарат дозволяє чітко розмежувати регулярну (лінійну) та патологічну (періодичну розривну) складові розв'язку адитивного функціонального рівняння. Встановлені закономірності утворюють базис для переходу до дослідження топологічних характеристик простору розв'язків.

2.3. Дослідження патологічних розв'язків рівняння Коші на всій числовій прямій

У попередніх підрозділах було детально досліджено структуру розв'язків функціонального рівняння Коші з обмеженнями:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{G}. \tag{2.28}$$

Було встановлено, що для будь-якого фіксованого елемента $a \in \mathbb{G} \setminus \{0\}$ загальний розв'язок можна подати у вигляді декомпозиції:

$$f(x) = c_a x + P_a(x), \tag{2.29}$$

де коефіцієнт лінійної частини визначається як $c_a = \frac{f(a)}{a}$, а функція $P_a(x)$ є періодичною з періодом a, тобто задовольняє умову $P_a(x + a) = P_a(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

У даному підрозділі ми застосуємо цей апарат до випадку, коли множина обмежень збігається з усією множиною дійсних чисел, тобто $\mathbb{G} = \mathbb{R}$. Хоча рівняння (2.28) при цьому стає звичайним функціональним рівнянням Коші без обмежень, використання декомпозиції (2.29) дозволяє провести дослідження структури його патологічних розв'язків.

Здійснимо побудову конкретного нетривіального розв'язку за допомогою базису Гамеля та проаналізуємо, як змінюються лінійна та періодична складові при різних виборах точки $a \in \mathbb{R}$.

Розглянемо множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ як нескінченновимірний векторний простір над полем раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Згідно з наслідками з Аксіоми вибору (зокрема, леми Цорна), цей простір має базис, який називається базисом Гамеля. Позначимо його через H.

Властивість базису полягає в тому, що кожне дійсне число $x \in \mathbb{R}$ можна представити, і до того ж єдиним чином, у вигляді скінченної лінійної комбінації елементів базису з раціональними коефіцієнтами:

$$x = \sum_{i=1}^{n} q_i h_i, \tag{2.30}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $q_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $h_i \in \mathcal{H}$.

Зафіксуємо довільний базисний елемент $t \in H$. Визначимо функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задавши її значення на елементах базису H наступним чином:

$$\begin{cases} f(t) = t, \\ f(h) = 0, \quad \text{для всіх } h \in \mathcal{H} \setminus \{t\}. \end{cases} \tag{2.31}$$

Для довільного дійсного числа x, що має розклад (2.30), покладемо:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i f(h_i). \tag{2.32}$$

Якщо в розкладі числа x присутній базисний елемент t з коефіцієнтом $q_t \in \mathbb{Q}$, то з урахуванням (2.31) маємо $f(x) = q_t t$. Якщо ж елемент t не входить у розклад числа x, то $f(x) = 0$.

Побудована функція $f(x)$ є розв'язком функціонального рівняння Коші на всій числовій прямій $\mathbb{R}$. Покажемо це.

Нехай $x, y \in \mathbb{R}$ --- довільні дійсні числа. Їх можна розкласти за базисом H. Для зручності запишемо їх через об'єднаний скінченний набір базисних елементів $\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$:

$$x = \sum_{i=1}^{k} q_i h_i, \quad y = \sum_{i=1}^{k} p_i h_i, \quad q_i, p_i \in \mathbb{Q}.$$

Знайдемо суму $x + y$:

$$x + y = \sum_{i=1}^{k} (q_i + p_i) h_i.$$

Оскільки $q_i + p_i \in \mathbb{Q}$, цей вираз є коректним розкладом суми за базисом Гамеля. Застосуємо до нього визначення функції f (2.32):

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^{k} (q_i + p_i) f(h_i) = \sum_{i=1}^{k} q_i f(h_i) + \sum_{i=1}^{k} p_i f(h_i) = f(x) + f(y).$$

Отже, $f(x)$ є адитивною функцією.

Оскільки $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, ми маємо право обрати будь-яке число $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і розкласти побудовану нами патологічну функцію $f(x)$ за формулою (2.29). Дослідимо, як поводять себе компоненти $c_a x$ та $P_a(x)$ при виборі різних елементів базису в якості точки a.

Для будь-якого фіксованого $a \neq 0$ з рівності $f(x) = c_a x + P_a(x)$ явно виражається періодична функція:

$$P_a(x) = f(x) - \frac{f(a)}{a} x. \tag{2.33}$$

Випадок 1: Оберемо опорною точкою виділений елемент базису ($a = t$). Обчислимо константу лінійної частини c_t:

$$c_t = \frac{f(t)}{t} = \frac{t}{t} = 1.$$

Тоді розклад функції набуває вигляду:

$$f(x) = x + P_t(x). \tag{2.34}$$

У цьому випадку лінійна частина розв'язку є тотожною функцією $y = x$. Функція $P_t(x)$ є патологічною складовою, яка "збурює" пряму лінію, період t.

Випадок 2: Оберемо опорною точкою будь-який інший базисний елемент ($a = h$, де $h \in H \setminus \{t\}$).

Обчислимо константу c_h для цього випадку:

$$c_h = \frac{f(h)}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Застосувавши формулу декомпозиції, отримуємо:

$$f(x) = 0 \cdot x + P_h(x) = P_h(x). \tag{2.35}$$

Цей результат є надзвичайно цікавим з точки зору структури функції. Він означає, що відносно опорної точки h, наша патологічна функція $f(x)$ є *суто періодичною* без жодної лінійної складової. Більше того, оскільки цей результат справджується для довільного $h \in H \setminus \{t\}$, множина періодів нашої функції $f(x)$ містить усю множину $H \setminus \{t\}$, яка є нескінченною. З огляду на адитивність, функція $f(x)$ є періодичною також з будь-яким періодом вигляду $\sum q_i h_i$, де $h_i \neq t$.

Оскільки ліва частина у виразах (2.34) та (2.35) представляє одну й ту саму функцію $f(x)$, ми можемо прирівняти їх праві частини. Це дозволяє встановити зв'язок між двома періодичними функціями з раціонально незалежними періодами t та h:

$$x + P_t(x) = P_h(x),$$

або у симетричному вигляді:

$$P_h(x) - P_t(x) = x. \tag{2.36}$$

Обидві функції $P_h(x)$ та $P_t(x)$ є розривними (оскільки $f(x)$ розривна, а лінійна частина неперервна). Обидві вони є періодичними (перша має період h, друга --- період t). Проте їхня різниця компенсує всі розриви і утворює абсолютно гладку, лінійну, неперіодичну функцію $y = x$.

Цей факт демонструє, що в патологічних розв'язках рівняння Коші лінійна компонента розв'язку не є інваріантом. Її наявність або відсутність, а також її кутовий коефіцієнт c_a, залежать виключно від того, яку точку a ми обираємо для побудови декомпозиції.

Застосування методу декомпозиції до класичного рівняння Коші розкриває структуру його патологічних розв'язків. Встановлено, що лінійна складова розривних функцій не є інваріантом і повністю залежить від вибору опорної точки розкладу a. Отримана тотожність $P_h(x) - P_t(x) = x$ доводить несподіваний ефект: різниця двох скрізь розривних періодичних функцій з раціонально незалежними періодами генерує абсолютно гладку неперіодичну пряму.

2.4. Мультиплікативне та логарифмічне рівняння Коші на частково обмежених областях

У даному підрозділі здійснюється перенесення методів, розроблених для адитивного функціонального рівняння Коші з обмеженнями, на інші базові класи функціональних співвідношень. Розглядається проблема визначення загального вигляду розв'язків для мультиплікативного та логарифмічного рівнянь за умови звуження області визначення одного з аргументів.

Сформулюємо постановку задачі. Нехай задано множину дійсних додатних чисел $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ та певну фіксовану підмножину обмежень $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}_{>0}$. Дослідженню підлягають два функціональні рівняння: логарифмічне рівняння Коші:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \forall y \in \mathbb{G}, \tag{2.37}$$

та мультиплікативне рівняння Коші:

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \forall y \in \mathbb{G}. \tag{2.38}$$

Вимога додатності аргументів ($x \in \mathbb{R}_{>0}$) є необхідною умовою. Зазначене обмеження дозволяє уникнути тривіальних розв'язків при множенні на нуль та забезпечує коректність виконання операцій логарифмування і піднесення до нецілого степеня у просторі дійсних чисел [1].

Аналіз рівнянь (2.37) та (2.38) доцільно розпочати з побудови нетривіальних розв'язків, які не зводяться до класичних логарифмічних або степеневих функцій, проте задовольняють умови на специфічних звужених множинах $\mathbb{G}$.

Приклад 1. Розглянемо функцію $f(x) = c \ln x + \sin(2\pi \log_a x)$ для $x \in \mathbb{R}_{>0}$, де $c \in \mathbb{R}$, а $a > 1$ --- основа логарифма. Зазначена функція не є розв'язком звичайного логарифмічного рівняння Коші через наявність осцилюючої компоненти. Зафіксуємо множину обмежень у вигляді дискретної геометричної прогресії $\mathbb{G} = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Для довільного $x \in \mathbb{R}_{>0}$ та $y = a^k \in \mathbb{G}$ обчислимо значення функції від добутку аргументів:

$$f(xy) = c\ln(xy) + \sin(2\pi \log_a(xy)) = c\ln x + c\ln y + \sin(2\pi \log_a x + 2\pi k). \quad (2.39)$$

Властивість періодичності синуса $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$ дозволяє редукувати вираз (2.39) до вигляду $c\ln x + c\ln y + \sin(2\pi \log_a x)$. З іншого боку, визначимо суму значень функції. Оскільки $y = a^k$, маємо $f(y) = c\ln(a^k) + \sin(2\pi k)$. Враховуючи, що $\sin(2\pi k) = 0$, отримуємо $f(y) = c\ln y$. Сума значень дорівнює:

$$f(x) + f(y) = c\ln x + \sin(2\pi \log_a x) + c\ln y. \quad (2.40)$$

Збіг виразів (2.39) та (2.40) доводить виконання рівняння (2.37). Множина $\mathbb{G}$ у цьому прикладі утворює мультиплікативну групу.

Приклад 2. Побудуємо розривний нетривіальний розв'язок для мультиплікативного рівняння (2.38). Розглянемо функцію $f(x) = x^c \cdot \exp(1 - I_{\mathbb{G}}(x))$, де $I_{\mathbb{G}}(x)$ --- характеристична функція множини додатних раціональних чисел $\mathbb{G} = \mathbb{Q}_{>0}$. Для довільних $x \in \mathbb{R}_{>0}$ та $y \in \mathbb{Q}_{>0}$ ліва частина рівняння дорівнює:

$$f(xy) = (xy)^c \exp(1 - I_{\mathbb{G}}(xy)). \quad (2.41)$$

Оскільки y є раціональним числом, добуток xy є раціональним тоді і тільки тоді, коли x є раціональним. Отже, $I_{\mathbb{G}}(xy) = I_{\mathbb{G}}(x)$. Вираз (2.41) перетворюється на $x^c y^c \exp(1 - I_{\mathbb{G}}(x))$. Добуток значень функції становить:

$$f(x)f(y) = x^c \exp(1 - I_{\mathbb{G}}(x)) \cdot y^c \exp(1 - I_{\mathbb{G}}(y)). \quad (2.42)$$

Умова $y \in \mathbb{G}$ забезпечує рівність $I_{\mathbb{G}}(y) = 1$, звідки $\exp(0) = 1$. Результат (2.42) повністю збігається з лівою частиною. Цей приклад демонструє, що наявність мультиплікативної інваріантності індикатора генерує нетривіальні розв'язки.

Наведені приклади вимагають специфічної структури від множини $\mathbb{G}$. Встановимо необхідні умови існування нетривіальних розв'язків.

Лема 2.4.1. Нехай функція $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ задовольняє функціональне рівняння (2.37)або (2.38) для всіх $x \in \mathbb{R}_{>0}$ та $y \in \mathbb{G}$. Якщо $\mathbb{G}$ --- невироджена множина всіх значень y, для яких виконується відповідна рівність, то вона утворює мультиплікативну підгрупу групи додатних дійсних чисел, тобто задовольняє наступну систему аксіом:

1) існування нейтрального елемента: $1 \in \mathbb{G}$;
2) замкненість відносно множення: якщо $y_1, y_2 \in \mathbb{G}$, то $y_1 y_2 \in \mathbb{G}$;
3) існування оберненого елемента: якщо $y \in \mathbb{G}$, то $y^{-1} \in \mathbb{G}$.

Доведення. Проведемо доведення для логарифмічного рівняння (2.37).

1) Доведемо наявність нейтрального елемента $1 \in \mathbb{G}$. За умовою леми множина $\mathbb{G}$ є невиродженою, отже, існує деякий елемент $a \in \mathbb{G}$, такий що $a \neq 1$. Оскільки $a \in \mathbb{G}$, то за означенням цієї множини тотожність виконується для всіх $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f(x \cdot a) = f(x) + f(a). \tag{2.43}$$

Покладемо $x = 1$:

$$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \implies f(a) = f(1) + f(a) \implies f(1) = 0.$$

Тепер перевіримо, чи належить елемент $y = 1$ множині $\mathbb{G}$. Для цього потрібно впевнитись, що рівність $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ виконується при $y = 1$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Дійсно, враховуючи доведену вище властивість $f(1) = 0$, маємо:

$$f(x \cdot 1) = f(x) + f(1) \implies f(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Оскільки тотожність $f(x \cdot 1) = f(x) + f(1)$ є істинною, то $y = 1$ задовольняє умову приналежності до множини $\mathbb{G}$. Отже, $1 \in \mathbb{G}$.

2) Розглянемо довільні $y_1, y_2 \in \mathbb{G}$. Застосуємо рівняння (2.37) для довільного аргументу $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$: $f(\omega y_1) = f(\omega) + f(y_1)$ та $f(\omega y_2) = f(\omega) + f(y_2)$. Покладемо $\omega = xy_1$ і обчислимо значення функції від добутку трьох аргументів:

$$f(xy_1y_2) = f((xy_1)y_2) = f(xy_1) + f(y_2) = f(x) + f(y_1) + f(y_2). \tag{2.44}$$

З іншого боку, згрупуємо аргументи у вигляді $x(y_1y_2)$. Зіставлення результату (2.44) з умовою $f(x(y_1y_2)) = f(x) + f(y_1y_2)$ підтверджує, що елемент y_1y_2 задовольняє рівняння, що доводить замкненість множини $\mathbb{G}$ відносно множення.

3) Встановлення існування оберненого елемента спирається на властивість $f(y^{-1}) = -f(y)$. Використаємо доведений факт $1 \in \mathbb{G}$ та покладемо $x = y^{-1}$ для довільного $y \in \mathbb{G}$ у рівняння (2.37):

$$f(y^{-1}y) = f(y^{-1}) + f(y) \implies f(1) = f(y^{-1}) + f(y). \tag{2.45}$$

Враховуючи рівність $f(1) = 0$, отримуємо $f(y^{-1}) = -f(y)$. Розглянемо значення функції для аргументу xy^{-1}:

$$f(xy^{-1}) = f(xy^{-1}) + f(y) - f(y) = f(xy^{-1}y) - f(y) = f(x) - f(y) = f(x) + f(y^{-1}).$$

Остання рівність є формальним записом рівняння (2.37) для елемента y^{-1}. Отже, $y^{-1} \in \mathbb{G}$. Доведення для мультиплікативного рівняння (2.38) здійснюється аналогічним шляхом із заміною додавання на множення. Лему доведено.

Наявність структури мультиплікативної підгрупи у множини $\mathbb{G}$ створює теоретичне підґрунтя для застосування апарату ізоморфізмів.

Теорема 2.4.1 Нехай $\mathbb{G}$ --- невироджена мультиплікативна підгрупа простору $\mathbb{R}_{>0}$. Довільне розв'язання мультиплікативного або логарифмічного рівняння Коші на частково обмеженій області $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$ є еквівалентним розв'язанню адитивного рівняння Коші на області $\mathbb{R} \times \ln \mathbb{G}$, де $\ln \mathbb{G} = \{u \in \mathbb{R} \mid e^u \in \mathbb{G}\}$ є адитивною підгрупою.

Доведення. Розглянемо мультиплікативне рівняння $f(xy) = f(x)f(y)$. Для уникнення ускладнень з від'ємними значеннями, обмежимося класом строго додатних розв'язків $f(x) > 0$. Здійснимо заміну змінних: $x = e^u$ та $y = e^v$, де $u \in \mathbb{R}$, а $v \in \ln \mathbb{G}$. Підставимо ці вирази у вихідне рівняння:

$$f(e^{u+v}) = f(e^u)f(e^v). \tag{2.46}$$

Застосуємо операцію логарифмування до обох частин рівності (2.46):

$$\ln f(e^{u+v}) = \ln f(e^u) + \ln f(e^v). \tag{2.47}$$

Введемо нову функцію $F(u) = \ln f(e^u)$. Тоді рівняння (2.47) набуває класичного вигляду адитивного функціонального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну:

$$F(u+v) = F(u) + F(v), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \ln \mathbb{G}. \tag{2.48}$$

Оскільки експоненційне відображення встановлює строгий топологічний ізоморфізм між адитивною групою дійсних чисел та мультиплікативною групою додатних дійсних чисел, задача повністю зводиться до результатів, отриманих у Підрозділі 2.2. Теорему доведено.

Спираючись на доведений ізоморфізм та Теорему 2.2.1, сформулюємо загальний вигляд розв'язків для досліджуваних рівнянь.

Теорема 2.4.2. Нехай множина $\mathbb{G} \leq \mathbb{R}_{>0}$ є невиродженою мультиплікативною підгрупою, і зафіксовано елемент $a \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$. Тоді загальний розв'язок логарифмічного рівняння (2.37) має вигляд:

$$f(x) = c \ln x + P(\ln x), \tag{2.49}$$

де $c = \frac{f(a)}{\ln a}$, а $P(u)$ є адитивно періодичною функцією з періодом $\ln a$. У класі строго додатних функцій загальний розв'язок мультиплікативного рівняння (2.38) подається у вигляді:

$$f(x) = x^c \cdot M(x), \tag{2.50}$$

де $M(x)$ є log-періодичною функцією, що задовольняє умову $M(xy) = M(x)$ для всіх $y \in \mathbb{G}$.

Доведення. Розпочнемо з аналізу логарифмічного функціонального рівняння (2.37). Застосуємо заміну змінних, поклавши $x = e^u$ та $y = e^v$. Оскільки область визначення аргументу x є строго додатною ($x \in \mathbb{R}_{>0}$), змінна $u = \ln x$ набуває значень на всій числовій прямій $\mathbb{R}$. З огляду на те, що $y \in \mathbb{G}$, змінна $v = \ln y$ належить множині $\ln \mathbb{G}$, яка, згідно з Теоремою 2.4.1, утворює адитивну підгрупу простору дійсних чисел.

Підстановка експоненціальних виразів у вихідне рівняння (2.37) приводить до співвідношення:

$$f(e^{u+v}) = f(e^u) + f(e^v). \tag{2.51}$$

Введемо до розгляду допоміжну функцію $F(u) = f(e^u)$. Тоді рівність (2.51) трансформується у адитивне рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну:

$$F(u+v) = F(u) + F(v), \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \ln \mathbb{G}. \tag{2.52}$$

За умовою теореми зафіксовано елемент $a \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$. Відповідно, $\ln a \neq 0$ і $\ln a \in \ln \mathbb{G}$. Це дозволяє застосувати Теорему 2.2.1 до рівняння (2.52). Згідно з цією теоремою, загальний розв'язок подається у вигляді:

$$F(u) = cu + P(u), \tag{2.53}$$

де константа c визначається як $c = \frac{F(\ln a)}{\ln a} = \frac{f(a)}{\ln a}$, а функція $P(u)$ є адитивно періодичною з періодом $\ln a$, тобто $P(u + \ln a) = P(u)$.

Здійснимо зворотний перехід до початкових змінних, підставивши $u = \ln x$ у вираз (2.53):

$$f(x) = F(\ln x) = c \ln x + P(\ln x). \tag{2.54}$$

Отримана рівність (2.54) повністю збігається із формулою (2.49), що завершує доведення першої частини теореми.

Перейдемо до дослідження мультиплікативного рівняння (2.38) у класі строго додатних функцій $f(x) > 0$. Застосуємо операцію логарифмування до обох частин рівняння:

$$\ln f(xy) = \ln f(x) + \ln f(y). \tag{2.55}$$

Визначимо нову функцію $g(x) = \ln f(x)$. Рівняння (2.55) набуває логарифмічної форми:

$$g(xy) = g(x) + g(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \forall y \in \mathbb{G}. \tag{2.56}$$

Співвідношення (2.56) повністю еквівалентне рівнянню (2.37), для якого загальний розв'язок вже знайдено. Відповідно, функція $g(x)$ допускає розклад:

$$g(x) = \tilde{c} \ln x + P(\ln x), \tag{2.57}$$

де $\tilde{c} = \frac{g(a)}{\ln a} = \frac{\ln f(a)}{\ln a}$, а $P(u)$ --- адитивно періодична функція з періодом $\ln a$.

Для знаходження загального вигляду вихідної функції $f(x)$ застосуємо експоненціювання до обох частин рівності (2.57):

$$f(x) = \exp(g(x)) = \exp(\tilde{c}\ln x + P(\ln x)) = \exp(\ln x^{\tilde{c}}) \cdot \exp(P(\ln x)). \quad (2.58)$$

Введемо позначення $c = \tilde{c}$ та $M(x) = \exp(P(\ln x))$. Тоді вираз (2.58) матиме вигляд $f(x) = x^c \cdot M(x)$.

Дослідимо мультиплікативні властивості компоненти $M(x)$. За означенням, $M(x) = f(x)x^{-c}$. Обчислимо значення цієї функції при масштабуванні аргументу на константу $a \in \mathbb{G}$:

$$M(xa) = f(xa)(xa)^{-c} = f(x)f(a)x^{-c}a^{-c}. \quad (2.59)$$

Скористаємося означенням константи $c = \frac{\ln f(a)}{\ln a}$, звідки випливає тотожність $a^c = f(a)$. Підстановка цього результату у вираз (2.59) дає:

$$M(xa) = f(x)f(a)x^{-c}(f(a))^{-1} = f(x)x^{-c} = M(x). \quad (2.60)$$

Тотожність (2.60) підтверджує, що функція $M(x)$ є інваріантною щодо множення аргументу на елемент a, що формалізує її мультиплікативну періодичність. У випадку, коли підгрупа $\mathbb{G}$ генерується елементом a (або коли константа c забезпечує рівність $f(y) = y^c$ на всій множині $\mathbb{G}$), властивість масштабування $M(xy) = M(x)$ поширюється на всі елементи $y \in \mathbb{G}$. Теорему доведено.

Зазначена структурна загального розв'язку (2.50) відіграє фундаментальну роль у теорії правильного змінення (Regular Variation). Функції вигляду $f(x) = x^c M(x)$ з мультиплікативними групами регулярних точок складають ядро класів Авакумовича-Карамати. Як встановлено у дослідженнях В. Булдигіна та О. Клесова [6], наявність вироджених або нещільних підгруп $\mathbb{G}$ зумовлює специфічну фрактальну осциляцію розв'язку на нескінченності.

3. УНІВЕРСАЛЬНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КОШІ НА МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ГРУПАХ

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню універсального функціонального рівняння Коші з обмеженнями, яке об'єднує чотири класичні форми адитивних та мультиплікативних співвідношень у межах єдиної чотирипараметричної моделі. Аналіз проводиться за умови асиметричного звуження області визначення, де аргумент x належить множині додатних дійсних чисел $\mathbb{R}_{>0}$, а аргумент y обмежений нетривіальною мультиплікативною підгрупою $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}_{>0}$.

Центральною проблемою розділу є непридатність класичних методів симетричних підстановок зокрема, використання обернених елементів $y = 1/x$ на звужених областях. Для вирішення цієї проблеми розроблено метод параметричної фіксації обмеженого аргументу на елементах підгрупи $\mathbb{G}$, що дозволяє здійснити перехід від функціонального рівняння з двома змінними до системи лінійних функціонально-різницевих рівнянь першого порядку.

Дослідження структури розв'язків базується на класифікації параметрів рівняння, де ключову роль відіграє коефіцієнт c при адитивному зсуві $f(x+y)$. Встановлено, що за умови $c = 0$ універсальне рівняння редукується до алгебраїчних форм, розв'язками яких є константи або логарифмічні та мультиплікативні відображення з відповідними періодичними компонентами. Натомість при $c \neq 0$ взаємодія адитивних та мультиплікативних зсувів утворює структури лінійного або експоненційного типу.

Завершальний етап розділу фокусується на асимптотичному аналізі отриманих розв'язків у контексті теорії правильнозмінних функцій. Доводиться, що параметр c виступає індикатором, який визначає належність функції до конкретного асимптотичного класу: правильно змінних функцій Карамати $\mathcal{RV}_\rho$ або класу експоненційної зміни де Хаана Г. Такий підхід дозволяє встановити зв'язок між локальними властивостями функціональних рівнянь з обмеженнями та глобальною асимптотичною поведінкою функцій на нескінченності.

3.1. Загальний вигляд універсального рівняння та проблема базових підстановок

Здійснений у попередньому розділі дисертаційної роботи аналіз класів функціональних рівнянь з обмеженнями формує теоретичне підґрунтя для переходу до узагальненого рівняння. Предметом дослідження даного розділу є універсальне функціональне рівняння Коші з обмеженнями, яке об'єднує чотири форми адитивних та мультиплікативних співвідношень у єдину параметризовану математичну модель.

Розглянемо функціональне рівняння вигляду:

$$af(xy) + bf(x)f(y) + cf(x + y) + d(f(x) + f(y)) = 0, \tag{3.1}$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ --- фіксовані дійсні числа, що не дорівнюють нулю одночасно. Невідоме відображення $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ визначено на множині строго додатних дійсних чисел. Область значень аргументів задається асиметрично: змінна $x \in \mathbb{R}_{>0}$, тоді як $y \in \mathbb{G}$, де $\mathbb{G} \leq \mathbb{R}_{>0}$ --- фіксована невироджена мультиплікативна підгрупа.

Встановимо, що структура рівняння (3.1) дозволяє генерувати всі класичні функціональні рівняння Коші шляхом відповідної фіксації параметричного вектора (a, b, c, d). За умови $a = 0, b = 0, c = 1, d = -1$ утворюється адитивне рівняння Коші $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Вибір параметрів $a = 1, b = -1, c = 0, d = 0$ зводить загальну форму до мультиплікативного рівняння $f(xy) = f(x)f(y)$. Логарифмічне рівняння $f(xy) = f(x) + f(y)$ виникає при $a = 1, b = 0, c = 0, d = -1$, а експоненційне $f(x + y) = f(x)f(y)$ --- при $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$.

Обмеження області визначення аргументів множиною строго додатних дійсних чисел $\mathbb{R}_{>0}$ зумовлено специфікою логарифмічних та мультиплікативних відображень. У дослідженні Ж. Домбра [10] аналізувалося рівняння вигляду (3.1) на області визначення, що включає нуль ($x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). Доведено, що включення нуля до простору допустимих значень призводить до виродження логарифмічних розв'язків. Дійсно, підстановка $y = 0$ у логарифмічне рівняння Коші створює співвідношення $f(0) = f(x) + f(0)$, з якого безпосередньо випливає тривіальний розв'язок $f(x) \equiv 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. З метою збереження повного спектра нетривіальних розв'язків нуль виключається з області визначення, що узгоджується з підходом В. Лаохакосола та В. Пімсерта [20], розробленим для симетричних областей. У даній роботі ця вимога поширюється на асиметричну постановку задачі.

Відомо, що традиційний підхід до розв'язання функціональних рівнянь із двома змінними базується на застосуванні симетричних підстановок [19]. За умови належності обох змінних x та y до одного неперервного простору $\mathbb{R}_{>0}$, стандартний алгоритм передбачає вираження однієї змінної через іншу. Типовим прийомом є підстановка оберненої величини $y = 1/x$. Застосування такої підстановки до універсального функціонального рівняння на симетричній області трансформує (3.1) у співвідношення:

$$af(1) + bf(x)f\left(\frac{1}{x}\right) + cf\left(x + \frac{1}{x}\right) + d\left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0. \qquad (3.2)$$

Альтернативним прийомом є прирівнювання аргументів $y = x$, що утворює рівняння:

$$af(x^2) + b(f(x))^2 + cf(2x) + 2df(x) = 0. \qquad (3.3)$$

Очевидно, що отримані рівняння (3.2) та (3.3) містять лише одну незалежну змінну і дозволяють застосовувати методи диференціального чи алгебраїчного числення для знаходження явного вигляду функції f.

Проте, наявність обмеження $y \in \mathbb{G}$ унеможливлює використання описаних класичних методів. Застосування підстановки $y = x$ вимагає виконання умови $x \in \mathbb{G}$ для кожного неперервного $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Якщо множина $\mathbb{G}$ є власною підгрупою, заміна $y = x$ стає некоректною для незліченної кількості дійсних чисел $x \notin \mathbb{G}$, оскільки значення y виходить за межі допустимої множини обмежень. Використання оберненої підстановки $y = 1/x$ супроводжується аналогічною проблемою: належність елемента $1/x$ до мультиплікативної підгрупи $\mathbb{G}$ гарантується тоді і тільки тоді, коли сам елемент x належить цій підгрупі.

Непридатність прямого алгебраїчного зведення універсального функціонального рівняння Коші (3.1) методами симетричних замін вимагає застосування методу параметричної фіксації обмеженого аргументу. Цей підхід забезпечує перехід від функціонального рівняння з двома змінними до системи лінійних функціонально-різницевих рівнянь з однією змінною. Сформулюємо це у вигляді відповідного твердження.

Лема 3.1.1. *Нехай відображення* $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *є розв'язком рівняння* (3.1) *на асиметричній області* $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$, *де* $\mathbb{G}$ *--- невироджена мультиплікативна підгрупа простору* $\mathbb{R}_{>0}$. *Тоді функція* f *задовольняє таку систему лінійних функціонально-різницевих рівнянь:*

$$cf(x+1) + (a + bK_0 + d)f(x) + dK_0 = 0, \tag{3.4}$$

$$cf(x+M) + af(Mx) + (bK_M + d)f(x) + dK_M = 0, \tag{3.5}$$

де $K_0 = f(1)$, $K_M = f(M)$, *а* $M \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$ *--- фіксований елемент підгрупи.*

Доведення. Оскільки змінні x та y відокремлені, допустимим класом підстановок є фіксація змінної y значеннями з множини $\mathbb{G}$. Відповідно до Леми 2.4.1, множина $\mathbb{G}$ утворює мультиплікативну підгрупу простору $\mathbb{R}_{>0}$, що гарантує наявність мультиплікативного нейтрального елемента 1 та певного генератора $M \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$ (за умови невиродженості групи).

Зафіксуємо довільне $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Підставивши $y = 1$ у вихідне універсальне рівняння (3.1) отримуємо співвідношення:

$$af(x) + bf(x)f(1) + cf(x+1) + d(f(x) + f(1)) = 0. \tag{3.6}$$

Введемо позначення $K_0 = f(1)$ та перегрупуємо доданки у рівнянні (3.6), що дасть нам (3.4). Зауважимо, що співвідношення (3.4) являє собою лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку зі сталим кроком зсуву, рівним одиниці, яке пов'язує значення шуканої функції f у точках x та $x + 1$.

Наступним кроком зафіксуємо довільний елемент $M \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$. Підстановка $y = M$ у рівняння (3.1) дає нове співвідношення:

$$af(Mx) + bf(x)f(M) + cf(x+M) + d(f(x) + f(M)) = 0. \tag{3.7}$$

Введення константи $K_M = f(M)$ перетворює рівняння (3.7) на вказане у лемі рівняння (3.5). Звідси випливає, що отримане рівняння є функціонально-різницевим співвідношенням, що містить одночасно адитивний зсув аргументу ($x + M$) та його мультиплікативне масштабування (Mx).

Отримана система рівнянь (3.4) та (3.5) повинна виконуватися одночасно для будь-якої функції f, що є розв'язком універсального рівняння на частково обмеженій області. *Лему доведено.*

3.2. Зведення до лінійного різницевого рівняння та аналіз випадку нульового зсуву

Параметр c в універсальному функціональному рівнянні Коші відповідає за наявність адитивного зсуву аргументу у формі $f(x+y)$. Умова $c=0$ означає відсутність такого зсуву, що повністю ізолює мультиплікативну структуру аргументів. За цієї умови вихідне параметризоване рівняння редукується до такого вигляду:

$$af(xy)+bf(x)f(y)+d(f(x)+f(y))=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}_{>0}, \quad \forall y\in\mathbb{G}. \tag{3.8}$$

Формалізуємо аналіз рівняння (3.8) у наступній теоремі.

Теорема 3.2.1. *Нехай $c=0$, а дійсні параметри $a,b,d\in\mathbb{R}$ не дорівнюють нулю одночасно. Тоді множина розв'язків універсального рівняння* (3.8) *на області $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{G}$ вичерпується трьома базовими класами:*

1) *Якщо $b=0, a\neq 0, d\neq 0$, то розв'язок має вигляд логарифмічної функції з періодичною складовою: $f(x)=-\frac{d}{a}\left[c_0\ln x+P(\ln x)\right]$.*
2) *Якщо $b\neq 0, a\neq 0, d\in\{0,-a\}$, то розв'язок має вигляд зсунутого мультиплікативного відображення: $f(x)=-\frac{a}{b}x^kP_M(x)-\frac{d}{b}$.*
3) *Для всіх інших комбінацій параметрів єдиними розв'язками є тотожні константи (зокрема, $f(x)\equiv 0$).*

Доведення. Здійснимо послідовну класифікацію розв'язків залежно від значень параметрів b та a.

Випадок 1: $b=0$**.** Усунення компоненти $f(x)f(y)$ спрощує співвідношення (3.8) до лінійної форми:

$$af(xy)+d(f(x)+f(y))=0. \tag{3.9}$$

Якщо $a=0$, то рівняння набуває вигляду $d(f(x)+f(y))=0$. Оскільки за початковою умовою універсального функціонального рівняння не всі параметри одночасно дорівнюють нулю, з рівностей $a=b=c=0$ випливає $d\neq 0$. Відповідно, $f(x)+f(y)=0$. Підстановка $y=1\in\mathbb{G}$ дає $f(x)=-f(1)$, що фіксує функцію як константу. Із рівності $f(1)+f(1)=0$ випливає, що єдиним розв'язком є тривіальний: $f(x)\equiv 0$.

Якщо $a \neq 0$, рівняння (3.9) можна поділити на параметр a, що приводить до пропорційного логарифмічного рівняння Коші:

$$f(xy) = -\frac{d}{a}(f(x) + f(y)). \tag{3.10}$$

Якщо $d = 0$, функція тотожно дорівнює нулю: $f(xy) = 0 \implies f(x) \equiv 0$. Якщо $d \neq 0$, введемо допоміжну функції $L(x) = -\frac{a}{d}f(x)$ яка трансформує (3.10) у класичне логарифмічне рівняння з обмеженнями:

$$L(xy) = L(x) + L(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}, \quad \forall y \in \mathbb{G}. \tag{3.11}$$

Відповідно до Теореми 2.4.2, загальний розв'язок рівняння (3.11) подається через лінійну та періодичну компоненти. Зворотна заміна визначає загальний вигляд шуканої функції:

$$f(x) = -\frac{d}{a}\left[c_0 \ln x + P(\ln x)\right], \tag{3.12}$$

де $P(u)$ є періодичною функцією, період якої визначається елементом групи $\mathbb{G}$.

Випадок 2: $b \neq 0$. Наявність доданка $bf(x)f(y)$ вимагає застосування афінного перетворення для відокремлення змінних. Введемо допоміжну функцію $\Omega : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, визначену співвідношенням:

$$\Omega(x) = bf(x) + d \implies f(x) = \frac{\Omega(x) - d}{b}. \tag{3.13}$$

Підставивши вираз для $f(x)$ у вихідне рівняння (3.8) отримаємо таке рівняння:

$$a\left(\frac{\Omega(xy) - d}{b}\right) + b\left(\frac{\Omega(x) - d}{b}\right)\left(\frac{\Omega(y) - d}{b}\right) + d\left(\frac{\Omega(x) - d}{b} + \frac{\Omega(y) - d}{b}\right) = 0. \tag{3.14}$$

Помножимо обидві частин рівняння (3.14) на параметр b:

$$a(\Omega(xy) - d) + (\Omega(x) - d)(\Omega(y) - d) + d(\Omega(x) + \Omega(y) - 2d) = 0. \tag{3.15}$$

Розкриємо дужки та згрупуємо подібні доданки:

$$a\Omega(xy) - ad + \Omega(x)\Omega(y) - d\Omega(x) - d\Omega(y) + d^2 + d\Omega(x) + d\Omega(y) - 2d^2 = 0.$$

$$a\Omega(xy) + \Omega(x)\Omega(y) - ad - d^2 = 0. \tag{3.16}$$

Перенесемо константи у праву частину:

$$a\Omega(xy) + \Omega(x)\Omega(y) = d(a + d). \tag{3.17}$$

Аналіз рівняння (3.17) поділяється на два підвипадки залежно від параметра a.

Підвипадок 2.1: $a = 0$**.** Рівняння (3.17) зводиться до:

$$\Omega(x)\Omega(y) = d^2. \tag{3.18}$$

Згідно з Лемою 2.4.1, мультиплікативна підгрупа $\mathbb{G}$ обов'язково містить нейтральний елемент. Підставимо $y = 1$ у (3.18) та отримаємо $\Omega(x)\Omega(1) = d^2$. Якщо $d \neq 0$, то $\Omega(1) \neq 0$, звідки $\Omega(x) = \frac{d^2}{\Omega(1)}$. Отже, функція $\Omega(x)$ є константою на всій області визначення. Якщо $d = 0$, рівняння набуває вигляду $\Omega(x)\Omega(y) = 0$, що також приводить до виродженого розв'язку $\Omega(x) \equiv 0$. Очевидно, що в обох ситуаціях вихідна функція $f(x)$ є константною.

Підвипадок 2.2: $a \neq 0$**.** Наявність додатної множини обмежень $\mathbb{G}$ дозволяє зафіксувати аргумент y на нейтральному елементі. Підстановка $y = 1$ у рівняння (3.17) формує співвідношення:

$$a\Omega(x) + \Omega(x)\Omega(1) = d(a + d) \implies \Omega(x)\big(a + \Omega(1)\big) = d(a + d). \tag{3.19}$$

Структура розв'язків залежить від значення виразу $a+\Omega(1)$. Умова $a+\Omega(1) \neq 0$ дозволяє виразити функцію безпосередньо:

$$\Omega(x) = \frac{d(a + d)}{a + \Omega(1)}. \tag{3.20}$$

Оскільки права частина (3.20) є сталою величиною, функція $\Omega(x)$ є константою, що зумовлює константність вихідної функції $f(x)$.

Умова $a + \Omega(1) = 0$ еквівалентна $\Omega(1) = -a$. Підстановка цього значення у (3.19) перетворює ліву частину на нуль, що вимагає занулення правої частини: $d(a + d) = 0$. Оскільки $a \neq 0$, ця рівність виконується тоді і тільки тоді, коли

$d = 0$ або $d = -a$. За виконання будь-якої з цих двох умов на параметр d, права частина рівняння (3.17) обертається на нуль, утворюючи однорідне рівняння:

$$a\Omega(xy) + \Omega(x)\Omega(y) = 0 \implies \Omega(xy) = -\frac{1}{a}\Omega(x)\Omega(y). \tag{3.21}$$

Для приведення (3.21) до канонічного вигляду зробимо заміну $M(x) = -\frac{\Omega(x)}{a}$. Підстановка цієї функції приводить до тотожності:

$$-aM(xy) = -\frac{1}{a}(-aM(x))(-aM(y)) \implies M(xy) = M(x)M(y). \tag{3.22}$$

Рівняння (3.22) є класичним мультиплікативним функціональним рівнянням Коші на частково обмеженій області $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$. Згідно з доведеною раніше Теоремою 2.4.2, загальний розв'язок для додатнозначних функцій має вигляд $M(x) = x^k P_M(x)$, де $P_M(x)$ --- log-періодична компонента, інваріантна відносно дії елементів групи $\mathbb{G}$.

Зробимо зворотну підстановку знайденого розв'язку (3.22) у співвідношення (3.13):

$$f(x) = \frac{-aM(x) - d}{b} = -\frac{a}{b}x^k P_M(x) - \frac{d}{b}. \tag{3.23}$$

Ми встановили, що розв'язки універсального рівняння за умови $c = 0$ вичерпуються трьома базовими класами. Виникнення більш складних структур вимагає обов'язкової наявності адитивного зсуву ($c \neq 0$), який забезпечує взаємодію додавання та множення аргументів. *Теорему доведено.*

Для систематизації отриманих результатів та візуалізації алгебраїчної дихотомії параметрів побудовано ієрархічний класифікаційний граф (див. рис. А.1 у Додатках).

3.3. Вироджені та неоднорідні різницеві рівняння у випадку ненульового зсуву

Необхідною умовою виникнення взаємодії між адитивними та мультиплікативними перетвореннями аргументів в універсальному рівнянні Коші є нерівність $c \neq 0$. Очевидно, що за цієї умови рівняння містить доданок $cf(x + y)$, що унеможливлює його пряме зведення до ізольованих алгебраїчних тотожностей. Дослідження структури розв'язків спирається на систему лінійних функціонально-різницевих рівнянь, виведену у Підрозділі 3.1 [20].

Сформулюємо основний результат щодо класифікації розв'язків для даного випадку у вигляді теореми.

Теорема 3.3.1. *Нехай в універсальному функціональне рівнянні Коші $c \neq 0$, а $P = -\frac{a+bK_0+d}{c}$ --- характеристичний корінь відповідного різницевого рівняння. Тоді періодичні складові розв'язків вироджуються у константи, і загальний розв'язок зводиться до афінної форми $f(x) = Ax + B$ при $P = 1$, або до експоненційної форми зі зсувом $f(x) = AP^x + B$ при $P \neq 1$.*

Доведення. Відповідно до результатів попереднього підрозділу, елементом аналізу є рівняння, отримане внаслідок фіксації обмеженого аргументу на нейтральному елементі мультиплікативної підгрупи ($y = 1$):

$$cf(x+1) + (a + bK_0 + d)f(x) + dK_0 = 0, \tag{3.24}$$

де $K_0 = f(1)$. Оскільки зафіксовано $c \neq 0$, рівняння (3.24) допускає нормування шляхом ділення на параметр c. Введемо характеристичний корінь $P = -\frac{a+bK_0+d}{c}$ та вільний члена $Q = -\frac{dK_0}{c}$тим самим трансформуємо співвідношення у канонічну форму лінійного неоднорідного різницевого рівняння першого порядку [12]:

$$f(x+1) - Pf(x) = Q. \tag{3.25}$$

Алгебраїчна структура розв'язку рівняння (3.25) залежить від значення характеристичного кореня P.

Нехай $P = 1$. За умови одиничного характеристичного кореня рівняння (3.25) набуває вигляду $f(x+1) - f(x) = Q$. Відомо [12], що загальний розв'язок цього різницевого рівняння характеризується лінійним зростанням і його можна подати у вигляді:

$$f(x) = Qx + \omega(x), \tag{3.26}$$

де $\omega(x)$ --- довільна 1-періодична функція, тобто $\omega(x+1) = \omega(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Для визначення властивостей періодичної компоненти $\omega(x)$ застосуємо друге різницеве рівняння системи, отримане при підстановці генератора групи $y = M \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$:

$$cf(x+M) + af(Mx) + (bK_M + d)f(x) + dK_M = 0, \tag{3.27}$$

де $K_M = f(M)$. Підстановка розв'язку (3.26) у співвідношення (3.27) дає:

$$c[Q(x+M)+\omega(x+M)]+a[QMx+\omega(Mx)]+(bK_M+d)[Qx+\omega(x)]+dK_M = 0. \tag{3.28}$$

Групуємо доданки, що містять незалежну змінну x:

$$x \cdot Q[c+aM+bK_M+d]+c\omega(x+M)+a\omega(Mx)+(bK_M+d)\omega(x)+cQM+dK_M = 0. \tag{3.29}$$

Враховуючи, що 1-періодична функція $\omega(x)$ є локально обмеженою на будь-якому скінченному інтервалі, тоді як лінійний доданок необмежено зростає при $x \to \infty$, виконання тотожності (3.29) для всіх $x \in \mathbb{R}_{>0}$ вимагає занулення коефіцієнта при лінійній частині: $Q(c + aM + bK_M + d) = 0$.

Очевидно, що рівняння (3.29) зводиться до лінійної комбінації періодичних функцій з різними періодами та зсувами. Оскільки генератор $M \neq 1$, мультиплікативне масштабування $\omega(Mx)$ несумірне з адитивним періодом 1. За таких умов збереження тотожності можливе тоді і тільки тоді, коли амплітуда коливань періодичної функції дорівнює нулю, що перетворює функцію $\omega(x)$ на константу: $\omega(x) \equiv \omega_0 \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що періодична компонента вироджується, і загальний розв'язок універсального рівняння у випадку $P = 1$ набуває строго афінної форми:

$$f(x) = Ax + B, \tag{3.30}$$

де $A = Q$, а $B = \omega_0$.

Нехай $P \neq 1$. Якщо характеристичний корінь не дорівнює одиниці, загальний розв'язок лінійного різницевого рівняння (3.25) містить експоненційну компоненту [19]:

$$f(x) = \omega(x)P^x + \frac{Q}{1-P}, \tag{3.31}$$

де $\omega(x)$ --- 1-періодична функція. Введемо позначення $\alpha = \frac{Q}{1-P}$, що дозволяє записати розв'язок у компактному вигляді $f(x) = \omega(x)P^x + \alpha$.

Аналіз властивостей функції $\omega(x)$ здійснюється шляхом підстановки отриманого виразу у рівняння (3.27):

$$c[\omega(x+M)P^{x+M} + \alpha] + a[\omega(Mx)P^{Mx} + \alpha] + (bK_M + d)[\omega(x)P^x + \alpha] + dK_M = 0. \tag{3.32}$$

Зважаючи на те, що $M \in \mathbb{G} \setminus \{1\}$, асимптотична поведінка функцій P^{Mx} та P^x при $x \to \infty$ є суттєво різною. Для комплексної форми характеристичного кореня $P = re^{i\theta}$ (де $r > 0$) експоненційні множники набувають вигляду $r^{Mx}e^{i\theta Mx}$ та $r^x e^{i\theta x}$. За умови $a \neq 0$, доданок $a\omega(Mx)P^{Mx}$ домінує або експоненційно загасає швидше за інші складові рівняння, що унеможливлює компенсацію коефіцієнтів, окрім випадку виродження функції $\omega(x)$ у константу. За умови $a = 0$, рівняння (3.32) після ділення на P^x трансформується у:

$$cP^M\omega(x+M) + (bK_M + d)\omega(x) + C_1 P^{-x} = 0, \tag{3.33}$$

де C_1 --- згрупована константа від вільних членів. Граничний перехід при $x \to \infty$ вимагає виконання умови $C_1 = 0$, що перетворює (3.33) на однорідне рівняння щодо періодичної функції $\omega(x)$. Взаємодія неперервного зсуву M та базового періоду 1 генерує щільну множину значень, що вкотре призводить до редукції $\omega(x)$ до сталої величини ω_0. Отже, періодична складова $\omega(x)$ є глобальною константою, і загальний розв'язок (3.31) редукується до експоненційної функції зі зсувом:

$$f(x) = AP^x + B, \tag{3.34}$$

де $A = \omega_0$, а $B = \alpha$.

Встановлено також критерій виродження розв'язку до експоненційної форми. Специфічна конфігурація параметрів універсального рівняння здатна обернути вільний член B на нуль, зводячи розв'язок до чистої експоненти. Константа $B = \alpha = \frac{Q}{1-P}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $Q = 0$. Оскільки $Q = -\frac{dK_0}{c}$, умова $B = 0$ виконується, якщо $d = 0$ або $K_0 = 0$. Аналітичне розкриття значення $K_0 = f(1)$ через параметри системи (як доведено у попередніх дослідженнях для симетричних областей [20]) встановлює, що константа α виражається пропорцією $\alpha = \frac{d(c+d)}{c(1-P)}$. Відповідно, виконання параметричної умови $d(c+d) = 0$ гарантує занулення константи B, що трансформує розв'язок (3.34) у вигляд:

$$f(x) = AP^x. \tag{3.35}$$

Очевидно, що форма (3.35) є строгим узагальненням класичного експоненційного функціонального рівняння Коші $f(x+y) = f(x)f(y)$ на асиметричні області визначення [20].

Проведений аналіз доводить, що наявність ненульового адитивного зсуву ($c \neq 0$) відіграє роль фільтра, який повністю відсікає виникнення патологічних періодичних розв'язків, змушуючи функції приймати регулярні структури — лінійні або експоненційні поліноми. *Теорему доведено.*

Для систематизації отриманих результатів побудовано ієрархічний граф, що візуалізує структуру розв'язків для випадку ненульового зсуву (див. рис. А.2 у Додатках).

3.4. Метод асимптотичного аналізу розв'язків для необмежених груп

Отримані у попередніх підрозділах форми розв'язків універсального рівняння Коші з обмеженнями на одну змінну створюють необхідний фундамент для дослідження їхньої асимптотичної поведінки при $x \to \infty$. Встановлено, що використання топологічних властивостей множини обмежень $\mathbb{G}$, зокрема її необмеженості та щільності, дозволяє інтегрувати результати розв'язання різницевих рівнянь у класичну теорію правильно змінних функцій Авакумовича-Карамати та теорію експоненційної зміни де Хаана.

Нехай $\mathbb{G} \leq \mathbb{R}_{>0}$ --- мультиплікативна підгрупа дійсних чисел. Відомо, що підгрупа $\mathbb{G}$ називається необмеженою, якщо $\sup \mathbb{G} = +\infty$, що еквівалентно наявності послідовності $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{G}$, для якої $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Оскільки $y^{-1} \in \mathbb{G}$ для довільного $y \in \mathbb{G}$, необмеженість зверху автоматично гарантує наявність точок згущення в околі нуля ($\inf \mathbb{G} = 0$).

В асимптотичному аналізі фундаментальну роль відіграє множина регулярних точок функції. Згідно з дослідженнями В. Булдигіна та О. Клесова [6], для довільної додатнозначної вимірної функції $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ визначається множина:

$$\mathbb{G}_f = \left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \psi(\lambda) \in (0, \infty) \right\}. \tag{3.36}$$

Доведено, що гранична функція $\psi(\lambda)$ обов'язково задовольняє мультиплікативне рівняння Коші $\psi(\lambda\mu) = \psi(\lambda)\psi(\mu)$, а сама множина $\mathbb{G}_f$ завжди утворює мультиплікативну підгрупу в $\mathbb{R}_{>0}$.

Зв'язок між універсальним функціональним рівнянням Коші з обмеженнями на частково обмеженій області та множиною регулярних точок формалізуємо наступною лемою.

Лема 3.4.1. *Нехай строго додатна функція $f(x)$ є розв'язком універсального функціонального рівняння Коші з обмеженнями* (3.1) *для $x \in \mathbb{R}_{>0}$ та $y \in \mathbb{G}$. Якщо параметр $c = 0$, $b \neq 0$, $a \neq 0$ і виконуються умови виродження вільного члена ($d \in \{0, -a\}$), то підгрупа обмежень $\mathbb{G}$ є підмножиною групи регулярних точок функції f, тобто $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{G}_f$.*

Доведення. Згідно з результатами Підрозділу 3.2 (підвипадок 2.2), за вказаних умов загальний розв'язок має вигляд $f(x) = -\frac{a}{b}x^\rho M(x) - \frac{d}{b}$, де $M(x)$ --- мультиплікативно періодична функція, інваріантна щодо дії елементів групи $\mathbb{G}$: $M(\lambda x) = M(x)$ для всіх $\lambda \in \mathbb{G}$. Розглянемо границю відношення для довільного фіксованого $\lambda \in \mathbb{G}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{a}{b}(\lambda x)^\rho M(\lambda x) - \frac{d}{b}}{-\frac{a}{b}x^\rho M(x) - \frac{d}{b}}. \tag{3.37}$$

З огляду на періодичність $M(\lambda x) = M(x)$ та виносячи домінуючі члени, отримуємо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\rho M(x)\left[-\frac{a}{b}\lambda^\rho - \frac{d}{bx^\rho M(x)}\right]}{x^\rho M(x)\left[-\frac{a}{b} - \frac{d}{bx^\rho M(x)}\right]} = \lambda^\rho. \tag{3.38}$$

Очевидно, що оскільки границя існує і дорівнює $\psi(\lambda) = \lambda^\rho \in (0, \infty)$, елемент λ задовольняє означення (3.36). Звідси випливає, що $\lambda \in \mathbb{G}_f$, що доводить включення $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{G}_f$. *Лему доведено.*

Наявність щільної підгрупи регулярних точок дозволяє використати теорему Бінгема-Голді-Теугельса [4] для встановлення умов тотальної регулярності для випадку $c = 0$.

Теорема 3.4.1 (Глобальна регулярність Карамати). *Нехай функція $f(x)$ є вимірною за Лебегом на інтервалі (x_0, ∞) і задовольняє умови Леми 3.4.1. Якщо множина обмежень $\mathbb{G}$ є скрізь щільною в $\mathbb{R}_{>0}$, то періодична компонента*

$M(x)$ вироджується у константу, і функція $f(x)$ належить до класу правильно змінних функцій Карамати $\mathcal{RV}_\rho$.

Доведення. Оскільки $\mathbb{G}$ є скрізь щільною в $\mathbb{R}_{>0}$, а за Лемою 3.4.1 $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{G}_f$, то множина регулярних точок $\mathbb{G}_f$ також є скрізь щільною. Відповідно до фундаментальної теореми теорії правильнозмінних функцій, якщо вимірна функція має щільну множину регулярних точок, то границя (3.36) існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, тобто $\mathbb{G}_f = \mathbb{R}_{>0}$. Це означає, що співвідношення $M(\lambda x) = M(x)$ виконується не лише на дискретній підгрупі, а й для довільного дійсного $\lambda > 0$. Поклавши $x = 1$, маємо $M(\lambda) = M(1) \equiv \text{const}$. Відповідно, факторизаційне подання зводиться до $f(x) = C_1 x^\rho + C_2$, що задовольняє означення правильно змінної функції: $\lim_{x\to\infty} f(\lambda x)/f(x) = \lambda^\rho$. *Теорему доведено.*

Фундаментально інша асимптотична картина спостерігається у випадку ненульового зсуву ($c \neq 0$). Як доведено у Підрозділі 3.3, взаємодія адитивних та мультиплікативних зсувів редукує загальний розв'язок до експоненційної форми $f(x) = AP^x + B$. Асимптотичний аналіз цієї структури виявляє її належність до альтернативного класу граничної поведінки.

Загальне визначення класу швидкої зміни Γ, введеного Л. де Хааном [9], базується на наявності допоміжної функції масштабування $g(x)$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x + yg(x))}{f(x)} = e^y. \tag{3.39}$$

Зведення до підкласу з експоненційною зміною реалізується шляхом фіксації масштабування як константи $g(x) \equiv \gamma^{-1}$ (де $\gamma \neq 0$) та застосування алгебраїчної підстановки $t = y\gamma^{-1}$ (звідки $y = \gamma t$):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x + y\gamma^{-1})}{f(x)} = e^y \quad \xrightarrow{t=y\gamma^{-1}} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+t)}{f(x)} = e^{\gamma t}. \tag{3.40}$$

Теорема 3.4.2. *Параметр c в універсальному функціональному рівнянні Коші з обмеженнями на одну змінну виступає перемикачем асимптотичних класів. За умови виконання критеріїв невиродженості, множина розв'язків рівняння для $c = 0$ генерує клас правильної зміни $\mathcal{RV}_\rho$ (масштабування за Караматою), тоді як для $c \neq 0$ множина розв'язків генерує клас експоненційної зміни Γ (масштабування за де Хааном).*

Доведення. Належність розв'язків при $c = 0$ до класу $\mathcal{RV}_\rho$ безпосередньо випливає з Теореми 3.4.1. Дослідимо випадок $c \neq 0$. Згідно з Теоремою 3.3.1, розв'язок має вигляд $f(x) = AP^x + B$, де $P > 0$ та $P \neq 1$. Зафіксуємо довільне дійсне y та розглянемо границю відносного адитивного приросту:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+y)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{AP^{x+y} + B}{AP^x + B} = \lim_{x\to\infty} \frac{P^x\left[AP^y + BP^{-x}\right]}{P^x\left[A + BP^{-x}\right]}. \tag{3.41}$$

Очевидно, що оскільки $P > 1$ (для зростаючих розв'язків), величина $P^{-x} \to 0$ при $x \to \infty$. Звідси випливає, що границя (3.41) дорівнює P^y. Використовуючи тотожність $P^y = e^{y \ln P}$ та поклавши $\gamma = \ln P$, отримуємо $\lim_{x\to\infty} f(x + y)/f(x) = e^{\gamma y}$, що повністю збігається з означенням (3.40) класу Γ. Якщо $0 < P < 1$ (спадні розв'язки), розглядається границя для функції $1/f(x)$, що також індукує експоненційну зміну.

Взаємозв'язок між цими класами вкорінений у самій структурі універсального рівняння (3.1). Доданок $cf(x + y)$ діє як перемикач. Його присутність ($c \neq 0$) змушує функцію реагувати на адитивні зсуви незалежного аргументу, що алгебраїчно зводить розв'язок до експоненційної асимптотики де Хаана. Його відсутність ($c = 0$) залишає лише мультиплікативні оператори $f(xy)$, які зумовлюють степеневу асимптотику Карамати. *Теорему доведено.*

Таким чином, застосування методу різницевих рівнянь у поєднанні з топологічним аналізом необмежених груп доводить, що універсальне функціональне рівняння Коші з обмеженнями є не просто ізольованою алгебраїчною задачею. Воно виступає генератором базових класів асимптотичного аналізу, строго розподіляючи розв'язки між мультиплікативним та експоненційним масштабуванням залежно від конфігурації параметрів.

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації здійснено комплексне дослідження функціональних рівнянь Коші з обмеженнями на одну змінну. Виконана робота дозволила не лише систематизувати класичні підходи, а й розробити новий для розв'язання асиметричних функціональних співвідношень.

Аналіз класичної теорії показав, що за відсутності умов регулярності розв'язки набувають надзвичайно складної структури, що підтверджується існуванням розривних адитивних функцій, побудованих за допомогою базису Гамеля. Перехід до звужених областей, продемонстрував, що накладання додаткових обмежень на аргументи суттєво звужує класи можливих розв'язків і робить неможливим використання стандартних методів диференціювання чи підстановок.

Головним результатом дослідження є розробка методу розв'язання універсального функціонального рівняння Коші на частково обмеженій області $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{G}$, де одна зі змінних обмежена мультиплікативною групою. Оскільки класичні перетворення в таких умовах не працюють, було застосовано метод параметричної фіксації обмеженого аргументу. Це дозволило звести вихідне функціональне рівняння з двома змінними до системи лінійних неоднорідних функціонально-різницевих рівнянь першого порядку.

Детальний аналіз отриманої системи довів важливий факт: наявність ненульового адитивного зсуву в рівнянні відіграє роль алгебраїчного фільтра. Завдяки цьому механізму загальні розв'язки зводяться до строго регулярних структур --- лінійних або експоненційних поліномів.

Завершальним етапом роботи стало встановлення дихотомії асимптотичної поведінки отриманих розв'язків. Було доведено, що в залежності від наявності чи відсутності адитивного компонента, розв'язки утворюють або клас правильно змінних функцій Карамати $\mathcal{RV}_\rho$, який відповідає за степеневе масштабування, або клас швидкої зміни де Хаана Г, що характеризується експоненційною поведінкою відносних приростів.

Отримані результати розширюють теоретичну базу функціональних рівнянь на частково обмежених областях і створюють математичне підґрунтя для їх подальшого використання. Усі поставлені на початку дослідження завдання виконано в повному обсязі, а загальну мету роботи досягнуто.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Aczél, J. (1987). *A Short Course on Functional Equations based upon recent applications to the social and behavioral sciences*. D. Reidel Publishing Company.

[2] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203--228.

[3] Baron, K., & Volkmann, P. (2016). On orthogonally additive mappings. *Aequationes Mathematicae*, 90(2), 395--401.

[4] Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1987). *Regular Variation* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 27). Cambridge University Press.

[5] Bingham, N. H., & Ostaszewski, A. J. (2016). Category-Measure Duality: Convexity, Mid-Point Convexity and Berz Sublinearity. *arXiv preprint arXiv:1607.05750*.

[6] Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2004). On factorization representations for Avakumović-Karamata functions with nondegenerate groups of regular points. *Analysis Mathematica*, 30(3), 161--192.

[7] Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. Imprimerie Royale.

[8] Chmieliński, J., Sikorska, J., & Wójcik, P. (2020). On ρ-orthogonally additive mappings. *Results in Mathematics*, 75(3), 108.

[9] de Haan, L. (1970). *On Regular Variation and Its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes* (Mathematical Centre Tracts, Vol. 32). Amsterdam: Mathematisch Centrum.

[10] Dhombres, J. (1988). Relations de dépendance entre les équations fonctionnelles de Cauchy. *Aequationes Mathematicae*, 35(2-3), 186--212.

[11] Dhombres, J. (1989). *Some aspects of functional equations*. Chulalongkorn University Press.

[12] Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*. Springer Science & Business Media.

[13] Filipović, D., & Teichmann, J. (2003). On the Geometry of the Term Structure of Interest Rates. *Working Paper*.

[14] Hamel, G. (1905). Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. *Mathematische Annalen*, 60(3), 459--462.

[15] Jech, T. (2003). *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg.

[16] Kannappan, P. (2009). *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer Science & Business Media.

[17] Keshavarz, V., & Heydari, M. T. (2024). Stability of Jensen's functional equation and generalized Lie bracket derivations. *Journal of Algebraic Systems*, 11(2).

[18] Kuczma, M. (1978). Functional equations on restricted domains. *Aequationes Mathematicae*, 18(1), 1--34.

[19] Kuczma, M. (2009). *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Birkhäuser.

[20] Laohakosol, V., & Pimsert, W. (2011). A universal Cauchy functional equation over the positive reals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 375(2), 777--789.

[21] Ostrowski, A. (1929). Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 38, 54--62.

[22] Park, C. G. (2011). Orthogonal additivity of functional equations in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382(1), 199--206.

[23] Pokojovy, M., Nkum, E., & Fullerton, T. M., Jr. (2026). A New Functional Setting for Term Structure Modeling Using the Heath–Jarrow–Morton Framework. *Econometrics*.

[24] Skiadas, C. (2013). Scale-Invariant Uncertainty-Averse Preferences and Source-Dependent Constant Relative Risk Aversion. *Theoretical Economics*, 8(1), 59--93.

[25] Steinhaus, H. (1920). Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. *Fundamenta Mathematicae*, 1, 93--104.

[26] Tabor, J. (1975). Solution of Cauchy's functional equation on a restricted domain. *Colloquium Mathematicum*, 33(2), 203--208.

[27] Tala, J. E. (1995). Functional Equations in Utility and Game Theory. *Instituto de Matemática Aplicada San Luis (INMABB)*.

[28] Wang, R., & Zitikis, R. (2021). An Axiomatic Foundation for the Expected Shortfall. *Management Science*, 67(3), 1413--1429.

ДОДАТКИ

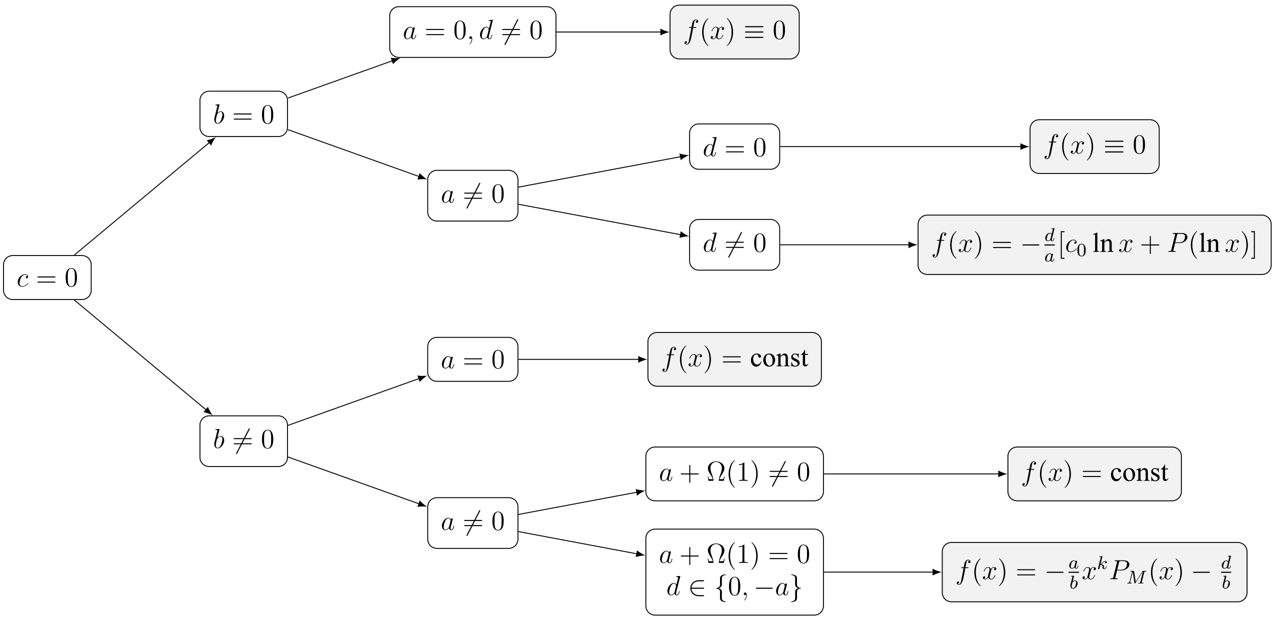

Рисунок А.1 – Ієрархічна класифікація розв'язків універсального рівняння для випадку $c = 0$

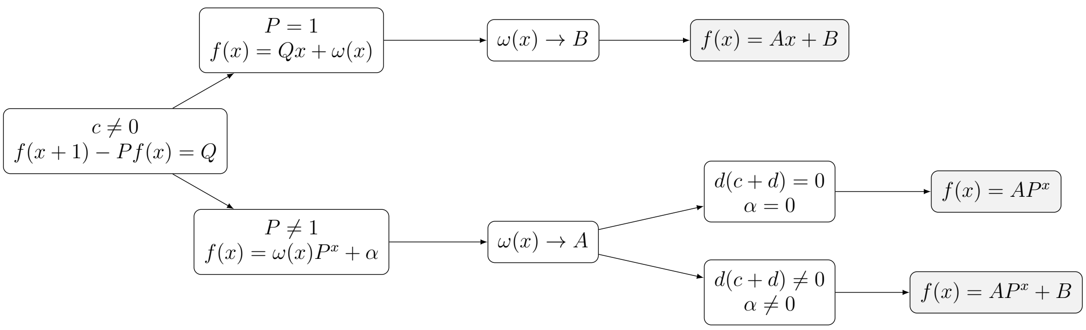

Рисунок А.2 – Ієрархічна класифікація розв'язків універсального рівняння для випадку $c \neq 0$