

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _____

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег Клесов

«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»**

зі спеціальності 111 «Математика»

**на тему: «Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних
диференціальних рівнянь з шумом Леві»**

Виконав:

студент II курсу, групи ОМ-41 мн
Ващенко Валентин Валентинович

Науковий керівник:

доктор фіз.-мат. наук, старший наук. співроб.
Арясова Ольга Вікторівна

Рецензент:

доктор фіз.-мат. наук, проф.
Пилипенко Андрій Юрійович

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент

Київ – 2026 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Ващенко Валентин Валентинович

1. Тема дисертації **«Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з шумом Леві»**, науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Арясова Ольга Вікторівна, затверджені наказом по університету від «31» березня 2026 р. №1340-с

2. Термін подання студентом дисертації 15.05.2026

3. Об'єкт дослідження: стохастичні диференціальні рівняння з шумом Леві.

4. Предмет дослідження: асимптотична поведінка розв'язків СДР.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) Проаналізувати класичні та сучасні наукові джерела, присвячені теорії стохастичних диференціальних рівнянь з шумом Леві

2) Встановити порядок зростання розв'язків багатовимірного стохастичного диференціального рівняння зі стрибками за умови степеневий поведінки коефіцієнта зсуву.

3) Довести двосторонню степеневу оцінку для розв'язку зазначеного рівняння

4) Отримати верхні оцінки для розв'язку рівняння з шумом Леві

5) Провести асимптотичний аналіз стохастичного інтеграла за субординатором та сформулювати критерії, за яких лінійний доданок домінує над інтегральною складовою.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 14 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій:

Тези доповіді на XIV Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків, травень 2026

8. Дата видачі завдання 03.02.2026

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Аналіз класичних та сучасних наукових джерел, присвячених теорії стохастичних диференціальних рівнянь з шумом Леві.	03.02.2026 – 08.03.2026	Виконано
2	Встановлення порядку зростання розв'язків багатовимірною стохастичного диференціального рівняння зі стрибками за умови степеневі поведінки коефіцієнта зсуву.	09.03.2026 – 22.03.2026	Виконано
3	Доведення двосторонньої степеневі асимптотичної оцінки для розв'язку зазначеного рівняння.	23.03.2026 – 05.04.2026	Виконано
4	Отримання верхніх оцінок для розв'язку рівняння з шумом Леві.	06.04.2026 – 19.04.2026	Виконано
5	Асимптотичний аналіз стохастичного інтеграла за субординатором та формулювання критеріїв, за яких лінійний доданок домінує над інтегральною складовою.	20.04.2026 – 03.05.2026	Виконано
6	Підбиття підсумків, формулювання висновків та оформлення тексту магістерської дисертації.	04.05.2026 – 10.05.2026	Виконано
7	Підготовка презентації та доповіді до захисту магістерської дисертації.	11.05.2026 – 15.05.2026	Виконано

Студент

Валентин ВАЩЕНКО

Науковий керівник

Ольга АРЯСОВА

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 52 сторінки та 14 джерел.

Актуальність теми дисертації полягає у тому, що задача повної класифікації асимптотичних режимів розв'язку нелінійного стохастичного диференціального рівняння, збуреного чисто-стрибковим процесом Леві з важкохвостою мірою, у загальному вигляді залишається відкритою. Зокрема, нез'ясованим залишається питання про те, як саме взаємодіють показник хвоста міри Леві та показник зростання нелінійного коефіцієнта стрибкової компоненти.

Мета роботи полягає в отриманні нових результатів щодо асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибковою компонентою типу Леві та узагальненні відомих результатів про асимптотику на ширший клас рівнянь.

Об'єктом дослідження є стохастичні диференціальні рівняння з шумом Леві та їхні розв'язки. Предметом дослідження є асимптотична поведінка розв'язків СДР.

Для досягнення поставленої мети в роботі використовуються методи стохастичних диференціальних рівнянь, теорії процесів Леві та математичного аналізу.

Внаслідок проведеного дослідження вдалося поширити теорему про лінійну асимптотику на клас рівнянь зі скінченною кількістю незалежних стрибкових мір; для розв'язку відповідного багатовимірного рівняння зі стрибковою компонентою обґрунтовано двосторонню оцінку. Окремо встановлено верхні оцінки для розв'язку рівняння з шумом Леві. Завершує роботу повний аналіз стохастичного інтеграла за субординатором, на основі якого сформульовано точні критерії, за яких лінійний доданок домінує над інтегральною складовою.

Результати магістерської дисертації були представлені на XIV Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків (травень 2026 р.).

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, процес Леві, асимптотична поведінка, субординатор, важкі хвости.

ABSTRACT

The master's thesis contains 52 pages and 14 references.

The relevance of the thesis topic lies in the fact that the problem of complete classification of asymptotic regimes for the solution of a nonlinear stochastic differential equation driven by a pure-jump Lévy process with a heavy-tailed measure remains open in the general setting. In particular, the question of how the tail index of the Lévy measure interacts with the growth exponent of the nonlinear coefficient of the jump component remains unresolved.

The aim of the work is to obtain new results on the asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations with a Lévy-type jump component and to generalize known asymptotic results to a broader class of equations.

The object of the study is stochastic differential equations with Lévy noise and their solutions. The subject of the study is the asymptotic behavior of solutions of SDEs.

To achieve this goal, the methods of stochastic differential equations, the theory of Lévy processes, and mathematical analysis are used.

As a result of the conducted research, the theorem on linear asymptotics has been extended to the class of equations with a finite number of independent jump measures; for the solution of the corresponding multidimensional equation with a jump component, a two-sided estimate has been established. Separately, upper estimates have been obtained for the solution of an equation with Lévy noise. The work concludes with a complete analysis of the stochastic integral with respect to a subordinator, on the basis of which exact criteria have been formulated under which the linear term dominates the integral component.

The results of the master's thesis were presented at the XIV All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians (May 2026).

Keywords: stochastic differential equation, Lévy process, asymptotic behavior, subordinator, heavy tails.

Зміст

1	ВСТУП	9
2	Теоретичні відомості	13
2.1	Процеси Леві: означення та структура	13
2.2	Пуассонівські випадкові міри та інтегральне представлення . .	14
2.3	Субординатори	14
2.4	Стохастичне числення та формула Іто	15
2.5	Допоміжні нерівності	16
2.6	Правильно змінні функції	17
2.7	Асимптотична поведінка процесів Леві	17
3	Степенева асимптотика стохастичного диференціального рівняння з багатьма стрибковими мірами	19
3.1	Постановка задачі	19
3.2	Умови	19
3.3	Допоміжні леми	20
3.4	Основний результат	20
3.5	Доведення основного результату	20
4	Асимптотика стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві	28
4.1	Постановка задачі	28
4.2	Доведення Теорема	29
5	Асимптотика інтеграла $\int_1^t s^\beta dU_s$	34
5.1	Постановка задачі	34
5.2	Випадок $\alpha > 1$ (скінченне середнє)	35
5.3	Випадок $\alpha \in (0, 1)$ (нескінченне середнє)	42
5.3.1	Основний результат для випадку $\alpha \in (0, 1)$	48
6	Висновки	50
	Література	51

1. ВСТУП

Теорія стохастичних диференціальних рівнянь посідає одне з центральних місць у сучасному стохастичному аналізі та водночас слугує універсальним апаратом для математичного опису систем, що еволюціонують під впливом випадкових чинників. Її формування пов'язане з фундаментальними працями Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода [3], у яких сформульовано загальне означення СДР, обґрунтовано теореми існування та єдиності сильного розв'язку й розпочато систематичне вивчення властивостей траєкторій. Поряд із цим розвивалася теорія процесів з незалежними приростами [2], що становить природне підґрунтя для побудови стохастичного інтеграла та класифікації джерел випадковості.

Серед широкого спектра задач, які виникають у теорії СДР, особливе місце посідає дослідження асимптотичної поведінки розв'язку при прямуванні часу до нескінченності. Саме ця характеристика визначає довгострокову динаміку модельованої системи, а отже, безпосередньо впливає на можливість прогнозування, керування й оцінювання ризиків у численних прикладних задачах від кількісних фінансів [1] до математичної біології, статистичної фізики й теорії інформації. Залежно від структури коефіцієнтів та джерела шуму розв'язок може стабілізуватися, рекурентно повертатися в обмежену область або прямувати до нескінченності з тим чи іншим точним порядком зростання; класифікація відповідних режимів є нетривіальною задачею навіть для найпростіших класів рівнянь.

Тривалий час основні зусилля дослідників були зосереджені на рівняннях, з вінерівським шумом, що пояснюється як аналітичною зручністю, так і центральним статусом броунівського руху в теорії дифузійних процесів. Проте емпіричні спостереження за поведінкою фінансових ринків, телекомунікаційних мереж та біологічних популяцій переконливо свідчать про присутність раптових, стрибкоподібних змін, які за своєю природою не вкладаються в рамки неперервної дифузії. Адекватним інструментом опису таких явищ є процеси Леві, найзагальніший клас процесів зі стаціонарними незалежними приростами, що органічно поєднують дифузійну та стрибкову складові. Сучасне систематичне викладення теорії процесів Леві та стохастичного числення за такими процесами міститься у монографіях [4, 5, 6].

Актуальність теми. Дана дипломна робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язку стохастичного диференціального рівняння, збу-

реного процесом Леві .

Актуальність обраної тематики зумовлена сукупністю взаємопов'язаних обставин. По-перше, стохастичний аналіз процесів Леві активно розвивається: уточнюються наявні методи інтегрування, розширюється коло рівнянь, для яких вдається отримати кількісні асимптотичні твердження. По-друге, неухильно зростає потреба в математичних моделях, здатних коректно враховувати важкі хвости розподілів, характеристику, яка систематично спостерігається у фінансових, страхових та фізичних даних і має вирішальне значення для оцінювання ризиків рідкісних подій.

Помітний внесок у розвиток зазначеної проблематики зробили українські математики В. В. Булдигін О. І. Клесов та О. А. Тимошенко. У роботах [7, 8, 11] розроблено та послідовно застосовано апарат псевдорегулярно змінних функцій до задач асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних та звичайних диференціальних рівнянь; зокрема, встановлено умови, за яких неавтономне СДР має той самий точний порядок зростання, що й відповідне звичайне диференціальне рівняння без шуму, та визначено граничну функцію цього порядку через коефіцієнти задачі. Розвинені у цих працях методи становлять методологічне підґрунтя для дослідження точного порядку зростання й у моделях зі стрибковою динамікою.

Інший важливий напрям дослідження асимптотичних та сингулярних явищ у СДР з негладкими коефіцієнтами та стрибковими шумами представлено у працях А. Ю. Пилипенка зі співавторами. У [9] розв'язано багатовимірну задачу селекції для рівняння з малим шумом у випадку, коли коефіцієнт зсуву має розрив на гіперплощині; цей підхід поширено в [13] на ширший клас негладких векторних полів за рахунок методу усереднення. У [12] узагальнену задачу Пеано розглянуто для рівняння, керованого процесом Леві: показано, що ефект селекції зберігається у мультиплікативному режимі та виявляє стійкість щодо збурень зсуву й малих стрибків шуму. Ці роботи безпосередньо стикаються з тематикою цієї дипломної роботи, оскільки демонструють, як саме структура шуму типу Леві якісно змінює граничну поведінку розв'язку.

Найближчим попередником цієї роботи є дослідження В. К. Юськовича [10], присвячене асимптотичній поведінці розв'язків багатовимірних СДР . У [10] отримано асимптотику розв'язку, встановлено умови стабілізації напрямку траєкторії та точний порядок зростання її норми; здобуті ре-

зультати слугують безпосереднім відправним пунктом для подальших узагальнень, що пропонуються у цій роботі.

Незважаючи на перелічені досягнення, задача повної класифікації асимптотики розв'язку нелінійного СДР, збуреного чисто-стрибковим процесом Леві у загальному вигляді залишається відкритою. Зокрема, нез'ясованим залишається питання про те, як саме взаємодіють показник хвоста міри Леві α та показник зростання нелінійного коефіцієнта стрибкової компоненти.

Мета і завдання дослідження

Метою роботи є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибковою компонентою типу Леві.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

1. довести точну двосторонню степеневу асимптотику для розв'язку багатовимірного рівняння зі скінченим числом незалежних компенсованих пуассонівських мір та дифузійною складовою, у якому коефіцієнт зсуву має степеневий ріст порядку x^α , $\alpha \in (0, 1)$, за умови підлінійного росту шумової компоненти.
2. отримати верхні асимптотичні оцінки для розв'язку рівняння $dX_t = dt + f(X_{t-}) dL_t$, з шумом Леві
3. провести асимптотичний аналіз стохастичного інтеграла $\int_1^t s^\beta dU(s)$, де U - субординатор з правильно змінним хвостом міри Леві, та встановити повну класифікацію його поведінки і точний критерій домінування лінійного доданка t окремо для випадків $\alpha > 1$ та $\alpha \in (0, 1)$;

Об'єкт і предмет дослідження

Об'єктом дослідження є клас стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибковою компонентою типу Леві. Основним об'єктом є одновимірне рівняння

$$dX_t = dt + f(X_{t-}) dL_t, \quad X_0 = x \geq 0,$$

де L_t - процес Леві з мірою Леві ν , додатний хвіст якої є правильно змінним: $\nu((y, \infty)) \sim Cy^{-\alpha}$, $y \rightarrow \infty$, де $C > 0$, $\alpha > 0$; функція f задовольняє умову

степеневому росту $f(y) \leq C_f y^\beta$ з показником $\beta \in [0, 1)$. Окремо досліджуються пов'язана задача про асимптотику стохастичного інтеграла за субординатором та багатовимірне узагальнення зі скінченним числом незалежних стрибкових мір і дифузійною складовою.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка розв'язку X_t при $t \rightarrow \infty$, зокрема встановлення точного порядку зростання та його залежності від параметрів α і β .

2. Теоретичні відомості

У цьому розділі наведено основні означення та факти з теорії стохастичних процесів, необхідні для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) зі стрибковою компонентою.

2.1. Процеси Леві: означення та структура

Означення 1. Узгоджений з фільтрацією \mathbb{F} стохастичний процес $X = (X_t)_{t \geq 0}$ зі значеннями в \mathbb{R}^d називається **процесом Леві**, якщо виконуються наступні умови:

1. $X_0 = 0$ майже напевно (м. н.);
2. Процес має незалежні прирости: для будь-яких $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, випадкові величини $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ є незалежними;
3. Процес має стаціонарні прирости: розподіл $X_{t+h} - X_t$ не залежить від t ;
4. Процес є стохастично неперервним: для будь-яких $\epsilon > 0$ та $t \geq 0$ виконується $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{P}(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon) = 0$.

Ми розглядаємо càdlàg-модифікацію процесу (траєкторії неперервні справа та мають границі зліва). Повна характеристика розподілу процесу Леві дається формулою Леві-Хінчина [4].

Теорема 2 (Формула Леві-Хінчина). *Характеристична функція процесу Леві X_t має вигляд $\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t \rangle}] = e^{t\psi(u)}$, де $\psi(u)$ - характеристична експонента:*

$$\psi(u) = i\langle b, u \rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au \rangle + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{i\langle u, y \rangle} - 1 - i\langle u, y \rangle \mathbf{1}_{\{|y| < 1\}} \right) \nu(dy), \quad (1)$$

де $b \in \mathbb{R}^d$ - **вектор зсуву**, A - *симетрична невід'ємно визначена матриця (дифузійна компонента)*, а ν - *міра Леві*, яка задовольняє умову:

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \min(1, |y|^2) \nu(dy) < \infty.$$

Міра Леві $\nu(B)$ визначає інтенсивність появи стрибків, розмір яких належить множині B .

2.2. Пуассонівські випадкові міри та інтегральне представлення

Важливим інструментом для опису стрибкової компоненти процесу Леві є пуассонівські випадкові міри.

Означення 3. Нехай (S, \mathcal{S}) - вимірний простір. **Пуассонівська випадкова міра** N на $(0, \infty) \times S$ з інтенсивністю μ - це сім'я випадкових величин, таких що:

1. Для будь-якої множини $A \in \mathcal{B}((0, \infty)) \times \mathcal{S}$ з $\mu(A) < \infty$, величина $N(A)$ має розподіл Пуассона з параметром $\mu(A)$.
2. Для неперетинних множин A_1, \dots, A_n випадкові величини $N(A_1), \dots, N(A_n)$ є незалежними.

Для процесу Леві міра стрибків $J_X(B) = \#\{t \in [0, T] : \Delta X_t \in B\}$ є пуассонівською випадковою мірою з інтенсивністю $dt \times \nu(dx)$.

Інтеграл Леві-Іто дозволяє записати процес Леві як суму трьох незалежних компонент:

$$X_t = bt + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|x| \geq 1} x N(ds, dx) + \int_0^t \int_{|x| < 1} x \tilde{N}(ds, dx),$$

де $\tilde{N}(dt, dx) = N(dt, dx) - dt \nu(dx)$ - компенсована пуассонівська міра (мартингальна міра).

2.3. Субординатори

Означення 4. Одновимірний процес Леві $U = (U_t)_{t \geq 0}$ називається **субординатором**, якщо його траєкторії є неспадними майже напевно.

Для субординаторів характерна відсутність дифузії ($A = 0$), невід'ємний зсув ($b \geq 0$) та зосередженість міри Леві на $(0, \infty)$. Крім того, для них виконується посилена умова інтегровності:

$$\int_0^\infty \min(1, y) \nu(dy) < \infty. \quad (2)$$

Це означає, що субординатор є процесом скінченної варіації. Вектор зсуву $b \geq 0$ характеризує лінійний детермінований ріст.

Важливою характеристикою субординатора є **експонента Лапласа** $\Phi(\lambda)$, яка визначається співвідношенням $\mathbb{E}[e^{-\lambda U_t}] = e^{-t\Phi(\lambda)}$ для $\lambda \geq 0$. Згідно з формулою Леві-Хінчина для субординаторів:

$$\Phi(\lambda) = b\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y})\nu(dy).$$

2.4. Стохастичне числення та формула Іто

Для аналізу поведінки функцій від випадкових процесів ключовим інструментом є формула Іто.

Твердження 5 (Формула Іто для одновимірного процесу Леві скінченної варіації [1, 5]). *Нехай $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ - одновимірний процес Леві скінченної варіації з мірою Леві ν , для якої*

$$\int_{\mathbb{R}} |y| \nu(dy) < \infty,$$

та дрейфом $b \in \mathbb{R}$. Нехай $H : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $H \in C^{1,1}([0, T] \times \mathbb{R})$. Тоді для будь-якого $t \in [0, T]$ майже напевно виконується

$$\begin{aligned} H(t, X_t) - H(0, X_0) &= \int_0^t \left(\frac{\partial H}{\partial s}(s, X_{s-}) + b \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_{s-}) \right) ds \\ &+ \sum_{0 < s \leq t} \left(H(s, X_{s-} + \Delta X_s) - H(s, X_{s-}) \right), \end{aligned}$$

де $\Delta X_s := X_s - X_{s-}$.

Зауваження 6. Якщо H та $\partial_x H$ є обмеженими, то процес $Y_t := H(t, X_t)$ зручно розкласти на мартингальну та <<дрейфову>> частини через випадкову міру стрибків. Позначимо через $\mu^X(ds, dy)$ міру стрибків процесу X , а через $\tilde{\mu}^X(ds, dy) := \mu^X(ds, dy) - ds \nu(dy)$ її компенсовану частину. Тоді

$$Y_t - Y_0 = M_t + A_t, \tag{3}$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(H(s, X_{s-} + y) - H(s, X_{s-}) \right) \tilde{\mu}^X(ds, dy), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^t \left(\frac{\partial H}{\partial s}(s, X_{s-}) + b \frac{\partial H}{\partial x}(s, X_{s-}) \right) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(H(s, X_{s-} + y) - H(s, X_{s-}) \right) \nu(dy) ds. \end{aligned} \tag{5}$$

Формула Іто для багатовимірного процесу Леві

Наступний крок - багатовимірний процес Леві, де з'являється матриця дифузії A та поправка на стрибки через градієнт.

Твердження 7 (Формула Іто для багатовимірного процесу Леві [1]). Нехай $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ - d -вимірний процес Леві з характеристичною трійкою (b, A, ν) , де A - симетрична невід'ємно визначена матриця. Нехай $H : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ та $H \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$. Тоді для будь-якого $t \in [0, T]$ майже напевно

$$\begin{aligned} H(t, X_t) - H(0, X_0) &= \int_0^t \frac{\partial H}{\partial s}(s, X_{s-}) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial H}{\partial x_i}(s, X_{s-}) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t A_{ij} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_{s-}) ds \\ &+ \sum_{0 < s \leq t} \left(H(s, X_{s-} + \Delta X_s) - H(s, X_{s-}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^d \Delta X_s^i \frac{\partial H}{\partial x_i}(s, X_{s-}) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\Delta X_s = (\Delta X_s^1, \dots, \Delta X_s^d)$ та $\Delta X_s^i := X_s^i - X_{s-}^i$.

2.5. Допоміжні нерівності

Для доведення існування розв'язків та оцінки їхніх моментів часто використовується лема Гронуолла-Беллмана та мартингальні нерівності [5].

Лема 8 (Лема Гронуолла). Нехай $u(t)$ та $\alpha(t)$ - неперервні невід'ємні функції на $[0, T]$, і для всіх $t \in [0, T]$ виконується нерівність:

$$u(t) \leq C + \int_0^t u(s) \alpha(s) ds, \quad C \geq 0.$$

Тоді $u(t) \leq C \exp\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right)$.

Твердження 9 (Максимальна нерівність Дуба). Для мартингала M_t виконується

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|M_t|^p]}{\lambda^p}, \quad \lambda > 0, p \geq 1.$$

2.6. Правильно змінні функції

Асимптотична поведінка розв'язку СДР суттєво залежить від розподілу великих стрибків. Для формалізації поняття "важких хвостів" використовується теорія правильно змінних функцій [14].

Означення 10. Вимірна додатна функція $L : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ називається **повільно змінною** на нескінченності, якщо для будь-якого $\lambda > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Означення 11. Функція $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ називається **правильно змінною** з індексом $\rho \in \mathbb{R}$ (позначається $h \in RV_\rho$), якщо вона допускає подання $h(x) = x^\rho L(x)$, де L - повільно змінна функція.

Теорема 12 (Теорема Карамати про інтегральне представлення [14]). *Функція L є повільно змінною тоді і тільки тоді, коли її можна представити у вигляді:*

$$L(x) = c(x) \exp \left(\int_a^x \frac{\epsilon(t)}{t} dt \right), \quad x \geq a,$$

де $c(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$, $\epsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Основне припущення роботи полягає в тому, що хвіст міри Леві є правильно змінним з індексом $-\alpha$ ($\alpha > 0$):

$$\nu((y, \infty)) \sim Cy^{-\alpha}, \quad y \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Це означає, що розподіл стрибків належить до класу розподілів із важкими хвостами.

2.7. Асимптотична поведінка процесів Леві

Поведінка траєкторій процесу Леві на нескінченності тісно пов'язана з поведінкою хвоста його міри Леві. Згідно з теоремами Скорохода [2], якщо $\nu((y, \infty)) \sim Cy^{-\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$, то U_t зростає швидше за t (порядку $t^{1/\alpha}$), а при $\alpha > 1$ (існування середнього) ріст є лінійним. Ця властивість є ключовою для аналізу рівняння $dX_t = dt + f(X_{t-}) dU_t$, оскільки визначає, який член рівняння (дрейф чи стохастичний інтеграл) домінує на нескінченності.

Теорема 13 (Посилений закон великих чисел [2]). Нехай $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ - процес Леві.

1. Якщо $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, то з ймовірністю 1 виконується граничне співвідношення:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = \mathbb{E}[X_1]. \quad (8)$$

2. Якщо X_t - субординатор (невід'ємні прирости) і $\mathbb{E}[X_1] = \infty$, то:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = +\infty \quad \text{м. н.} \quad (9)$$

3. Степенева асимптотика стохастичного диференціального рівняння з багатьма стрибковими мірами

У цьому розділі здійснюється перехід до загальнішого класу стохастичних диференціальних рівнянь, збурених скінченною кількістю незалежних компенсованих пуассонівських мір. Основна увага зосереджена на встановленні точного порядку росту розв'язків для рівнянь, де коефіцієнт зсуву має степеневу асимптотику, а шумова компонента задовольняє умову підлінійного росту. Результат даного розділу є узагальненням результату Юськовича В. К. [10].

3.1. Постановка задачі

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(X(t), t) dt + b(X(t), t) dW(t) + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} c_k(X(t^-), u) \tilde{N}_k(dt, du), \quad (10)$$

де $W(t)$ - стандартний вінерівський процес, а $\tilde{N}_k(dt, du) = N_k(dt, du) - \nu_k(du) dt$, $k = 1, \dots, m$, - незалежні компенсовані пуассонівські міри з інтенсивностями ν_k .

3.2. Умови

Припустимо виконання таких умов:

(A1) $X(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$ майже напевно.

(A2) Коефіцієнт зсуву має степеневу асимптотику порядку $\alpha \in (0, 1)$:

$$\underline{A} \leq \liminf_{\substack{x \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \frac{a(x, t)}{x^\alpha} \leq \limsup_{\substack{x \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \frac{a(x, t)}{x^\alpha} \leq \bar{A}.$$

(A3) Умова на ріст шуму: існує $\beta \in [0, \frac{1+\alpha}{2})$ та стала $C > 0$ такі, що

$$b^2(x, t) + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} c_k^2(x, u) \nu_k(du) \leq C(1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (11)$$

3.3. Допоміжні леми

Сформулюємо леми, на які ми будемо посилалися в доведенні.

Лема 14. Нехай $f \in C^2$ - вгнута функція з $f'(x) = x^{-\alpha}$, $f''(x) = -\alpha x^{-(1+\alpha)}$ для $x \geq 1$, і нехай виконано

$$\int_{\mathbb{R}} c_k^2(x, u) \nu_k(du) \leq C(1 + |x|^{2\beta}), \quad \beta < \frac{1+\alpha}{2}.$$

Тоді для достатньо великих $x > 0$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} [f(x + c_k(x, u)) - f(x) - f'(x) c_k(x, u)] \nu_k(du) \right| \leq \frac{C'}{x^{1+\alpha-2\beta}},$$

де $C' > 0$ - деяка стала.

Лема 15. За тих самих умов на f та c_k , для достатньо великих $x > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} [f(x + c_k(x, u)) - f(x)]^2 \nu_k(du) \leq C' x^{2(\beta-\alpha)},$$

де $C' > 0$ - деяка стала.

Зауваження 16. Обидві леми доводяться застосуванням формули Тейлора з залишком до функції f . Детальні доведення наведено нижче у відповідних кроках.

3.4. Основний результат

Теорема 17. Нехай виконані умови (A1)-(A3). Тоді для розв'язку рівняння (10) справджується асимптотика:

$$((1 - \alpha)\underline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \leq ((1 - \alpha)\overline{A})^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

3.5. Доведення основного результату

Крок 1. Заміна фазового простору.

Визначимо функцію

$$f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad x \geq 1.$$

Її похідні:

$$f'(x) = x^{-\alpha}, \quad f''(x) = -\alpha x^{-(1+\alpha)}.$$

Зауважимо ключові властивості: $f' > 0$ (монотонне зростання), $f'' < 0$ (вгнутість), та $f'(x) \rightarrow 0$, $f''(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Покладемо $\tilde{X}(t) = f(X(t))$. Оскільки за умовою **(A1)** процес $X(t) \rightarrow +\infty$, то для достатньо великих t значення $X(t) \geq 1$, і функція f коректно визначена на траєкторіях.

Застосуємо узагальнену формулу Іто для семімартигалів зі стрибками. Для процесу (10) маємо:

$$\begin{aligned} d\tilde{X}(t) &= f'(X) a(X, t) dt + f'(X) b(X, t) dW(t) + \frac{1}{2} f''(X) b^2(X, t) dt \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} [f(X + c_k(X, u)) - f(X)] \tilde{N}_k(dt, du) \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} [f(X + c_k(X, u)) - f(X) - f'(X) c_k(X, u)] \nu_k(du) dt, \end{aligned} \quad (12)$$

де тут і далі $X = X(t^-)$.

Пояснимо походження кожного доданка:

- Перший рядок - класична формула Іто для неперервної (дифузійної) частини: доданок зсуву $f'(X) a dt$, стохастичний інтеграл $f'(X) b dW$, та поправка Іто $\frac{1}{2} f''(X) b^2 dt$.
- Другий рядок - стрибкова мартингальна частина: компенсовані стрибки $f(X + c_k) - f(X)$ по мірах \tilde{N}_k .
- Третій рядок - поправка від стрибків: різниця між повним нелінійним ефектом стрибка $f(X + c_k) - f(X)$ та його лінійною апроксимацією $f'(X) c_k$, проінтегрована по мірі інтенсивності ν_k .

Запишемо це у компактній формі:

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{a}(t) dt + d\tilde{M}(t), \quad (13)$$

де коефіцієнт зсуву (формула розбита на два рядки для зручності):

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= \underbrace{a(X, t) f'(X)}_{\tilde{a}_1(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} b^2(X, t) f''(X)}_{\tilde{a}_2(t)} \\ &+ \underbrace{\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} [f(X + c_k) - f(X) - f'(X) c_k] \nu_k(du)}_{\tilde{a}_3(t)}, \end{aligned} \quad (14)$$

а мартингальна частина:

$$d\tilde{M}(t) = f'(X) b(X, t) dW(t) + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} [f(X + c_k(X, u)) - f(X)] \tilde{N}_k(dt, du).$$

Крок 2. Аналіз коефіцієнта зсуву $\tilde{a}(t)$.

Доданок $\tilde{a}_1(t)$ - ГОЛОВНИЙ:

$$\tilde{a}_1(t) = a(X, t) \cdot X^{-\alpha} = \frac{a(X, t)}{X^\alpha}.$$

За умовою **(A2)**, враховуючи, що $X(t) \rightarrow +\infty$:

$$\underline{A} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_1(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_1(t) \leq \bar{A}. \quad (15)$$

Доданок $\tilde{a}_2(t)$ - дифузійна поправка Іто:

$$|\tilde{a}_2(t)| = \frac{1}{2} b^2(X, t) \cdot |f''(X)| = \frac{\alpha}{2} b^2(X, t) \cdot X^{-(1+\alpha)}.$$

За умовою (11), $b^2(X, t) \leq C(1 + |X|^{2\beta})$. Отже, для великих X :

$$|\tilde{a}_2(t)| \leq \frac{\alpha C}{2} \cdot \frac{1 + X^{2\beta}}{X^{1+\alpha}} \leq \frac{\alpha C}{2} \cdot \frac{2 X^{2\beta}}{X^{1+\alpha}} = \alpha C \cdot X^{-(1+\alpha-2\beta)}. \quad (16)$$

Оскільки $\beta < \frac{1+\alpha}{2}$, маємо $1 + \alpha - 2\beta > 0$, тому

$$\tilde{a}_2(t) \rightarrow 0 \quad \text{м. н. при } t \rightarrow \infty.$$

Доданок $\tilde{a}_3(t)$ - стрибкові поправки. Розіб'ємо на суму по k :

$$\tilde{a}_3(t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{3,k}(t), \quad \tilde{a}_{3,k}(t) = \int_{\mathbb{R}} [f(X+c_k(X, u)) - f(X) - f'(X) c_k(X, u)] \nu_k(du).$$

Оцінимо кожний доданок $\tilde{a}_{3,k}$ окремо. За формулою Тейлора (теоремою Лагранжа про скінченні прирости) функції f :

$$f(X + c_k) - f(X) - f'(X) c_k = \int_0^1 (1-s) f''(X + s c_k) c_k^2 ds.$$

Оскільки $f''(y) = -\alpha y^{-(1+\alpha)}$ для $y \geq 1$, а функція $|f''|$ є спадною, маємо для $X + s c_k \geq 1$:

$$|f''(X + s c_k)| \leq |f''(\min(X, X + c_k))|.$$

Для великих X , коли стрибки c_k малі відносно X (що забезпечується умовою росту), можна оцінити $|f''(X + s c_k)| \leq C_1 X^{-(1+\alpha)}$ з деякою сталою C_1 .

Точніше, використаємо вгнутість f ($f'' < 0$). Тоді:

$$|f(X + c_k) - f(X) - f'(X) c_k| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \cdot c_k^2,$$

де I_k - відрізок між X та $X + c_k$. Для великих X та за умови $|c_k| \leq \frac{X}{2}$ (що виконується м. н. для достатньо великих X завдяки умові на ріст стрибків), маємо $\xi \geq \frac{X}{2}$, і тому:

$$|f''(\xi)| \leq \alpha \left(\frac{X}{2}\right)^{-(1+\alpha)} = \alpha 2^{1+\alpha} X^{-(1+\alpha)}.$$

Інтегруючи:

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_{3,k}(t)| &\leq \frac{\alpha 2^{1+\alpha}}{2} X^{-(1+\alpha)} \int_{\mathbb{R}} c_k^2(X, u) \nu_k(du) \\ &\leq \alpha 2^\alpha \cdot X^{-(1+\alpha)} \cdot C(1 + X^{2\beta}) \\ &\leq C'' \cdot X^{-(1+\alpha-2\beta)}, \end{aligned} \tag{17}$$

де в останній нерівності ми використали (11) (яка дає оцінку для кожного доданка, оскільки обмежує суму). Знову, $1 + \alpha - 2\beta > 0$, тому $\tilde{a}_{3,k}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ м. н.

Оскільки $m < \infty$ - скінченне число, то:

$$|\tilde{a}_3(t)| \leq \sum_{k=1}^m |\tilde{a}_{3,k}(t)| \leq m \cdot C'' \cdot X^{-(1+\alpha-2\beta)} \rightarrow 0 \quad \text{м. н.} \quad (18)$$

Об'єднуючи (15), (16) та (18):

$$\underline{A} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) \leq \overline{A}. \quad (19)$$

Крок 3. Аналіз шумових коефіцієнтів.

Для застосування результату про лінійну асимптотику до рівняння (13) потрібно перевірити, що передбачувана квадратична варіація мартингала \widetilde{M} росте повільніше за t^2 (тобто задовольняє умову підлінійного росту). Обчислимо передбачувану квадратичну варіацію:

$$\frac{d\langle \widetilde{M} \rangle(t)}{dt} = \tilde{b}^2(t) + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} \tilde{c}_k^2(t, u) \nu_k(du),$$

де

$$\tilde{b}(t) = f'(X) b(X, t), \quad \tilde{c}_k(t, u) = f(X + c_k(X, u)) - f(X).$$

Дифузійна частина:

$$\tilde{b}^2(t) = X^{-2\alpha} \cdot b^2(X, t) \leq X^{-2\alpha} \cdot C(1 + X^{2\beta}) \leq C' \cdot X^{2(\beta-\alpha)}.$$

Оскільки $\tilde{X} \sim \frac{X^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, то $X \sim ((1-\alpha)\tilde{X})^{1/(1-\alpha)}$, і:

$$X^{2(\beta-\alpha)} = \left[((1-\alpha)\tilde{X})^{1/(1-\alpha)} \right]^{2(\beta-\alpha)} = C'' \cdot \tilde{X}^{2(\beta-\alpha)/(1-\alpha)}.$$

Позначимо $\tilde{\beta} := \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}$. Перевіримо, що $\tilde{\beta} < \frac{1}{2}$:

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{2} \iff 2(\beta-\alpha) < 1-\alpha \iff 2\beta < 1+\alpha,$$

що виконано за умовою $\beta < \frac{1+\alpha}{2}$. Таким чином:

$$\tilde{b}^2(t) \leq C(1 + |\tilde{X}|^{2\tilde{\beta}}), \quad \tilde{\beta} < \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Стрибкова частина. Для кожного $k = 1, \dots, m$ оцінимо інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}_k^2(t, u) \nu_k(du) = \int_{\mathbb{R}} [f(X + c_k(X, u)) - f(X)]^2 \nu_k(du).$$

За теоремою Лагранжа: для кожного u існує $\eta_k = \eta_k(X, u)$ між X та $X + c_k(X, u)$ таке, що

$$f(X + c_k) - f(X) = f'(\eta_k) \cdot c_k.$$

Оскільки $f'(y) = y^{-\alpha}$ є спадною і для великих X (за аналогічним аргументом, як у Кроці 2, для $|c_k| \leq \frac{X}{2}$) маємо $\eta_k \geq \frac{X}{2}$:

$$|f'(\eta_k)| \leq \left(\frac{X}{2}\right)^{-\alpha} = 2^\alpha X^{-\alpha}.$$

Тому:

$$[f(X + c_k) - f(X)]^2 \leq 2^{2\alpha} X^{-2\alpha} c_k^2.$$

Інтегруючи по ν_k :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [f(X + c_k) - f(X)]^2 \nu_k(du) &\leq 2^{2\alpha} X^{-2\alpha} \int_{\mathbb{R}} c_k^2(X, u) \nu_k(du) \\ &\leq 2^{2\alpha} X^{-2\alpha} \cdot C(1 + X^{2\beta}) \\ &\leq C' \cdot X^{2(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Сума m таких доданків:

$$\sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} \tilde{c}_k^2(t, u) \nu_k(du) \leq m \cdot C' \cdot X^{2(\beta-\alpha)} \leq C'''(1 + |\tilde{X}|^{2\tilde{\beta}}).$$

Отже, повна передбачувана квадратична варіація:

$$\frac{d\langle \tilde{M} \rangle(t)}{dt} \leq C_0(1 + |\tilde{X}(t)|^{2\tilde{\beta}}), \quad \tilde{\beta} < \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Крок 4. Застосування результату про лінійну асимптотику.

Процес $\tilde{X}(t)$ задовольняє рівняння

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{a}(t) dt + d\tilde{M}(t),$$

де:

- за (19): $\underline{A} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) \leq \overline{A}$;
- за (22): передбачувана квадратична варіація мартингала \widetilde{M} має підлінійний ріст відносно \tilde{X} з показником $\tilde{\beta} < \frac{1}{2}$.

За відомим результатом про лінійну асимптотику [10]:

$$\underline{A} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{X}(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{X}(t)}{t} \leq \overline{A}.$$

Справді, інтегруючи (13):

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) + \int_0^t \tilde{a}(s) ds + \widetilde{M}(t).$$

Ділимо на t :

$$\frac{\tilde{X}(t)}{t} = \frac{\tilde{X}(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{a}(s) ds + \frac{\widetilde{M}(t)}{t}.$$

Перший доданок $\rightarrow 0$. Для третього доданка, за посиленням законом великих чисел для мартингалів (оскільки $\langle \widetilde{M} \rangle(t) = o(t^2)$, що випливає з (22) та підлінійного росту \tilde{X}), маємо $\widetilde{M}(t)/t \rightarrow 0$ м. н. Для другого доданка, з (19) та леми Чезаро:

$$\underline{A} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{a}(s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{a}(s) ds \leq \overline{A}.$$

Крок 5. Повернення до вихідного процесу.

Обчислимо обернену функцію до f . Якщо $y = f(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, то

$$x = f^{-1}(y) = ((1-\alpha)y)^{1/(1-\alpha)}.$$

Оскільки $X(t) = f^{-1}(\tilde{X}(t))$, маємо:

$$\frac{X(t)}{t^{1/(1-\alpha)}} = \frac{((1-\alpha)\tilde{X}(t))^{1/(1-\alpha)}}{t^{1/(1-\alpha)}} = \left((1-\alpha) \cdot \frac{\tilde{X}(t)}{t} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Функція $g(z) = ((1-\alpha)z)^{1/(1-\alpha)}$ є неперервною та зростаючою для $z > 0$, тому

вона зберігає порядок границь:

$$((1 - \alpha)\underline{A})^{1/(1-\alpha)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{1/(1-\alpha)}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{1/(1-\alpha)}} \leq ((1 - \alpha)\bar{A})^{1/(1-\alpha)}.$$

□

4. Асимптотика стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві

4.1. Постановка задачі

Нехай $L = \{L_t\}_{t \geq 0}$ - процес Леві з мірою Леві ν на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, що може мати як додатні, так і від'ємні стрибки. Розкладемо L у вигляді $L_t = L_t^+ - L_t^-$, де L^+ та L^- - незалежні процеси скінченної варіації з мірами Леві

$$\nu^+(\cdot) = \nu(\cdot \cap (0, \infty)), \quad \nu^-(\cdot) = \nu(-\cdot \cap (0, \infty)).$$

Нехай X - càdlàg-розв'язок рівняння

$$X_t = x + t + \int_{(0,t]} f(X_{s-}) dL_s, \quad x \geq 0, \quad (23)$$

де $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ - вимірна функція. Припускаємо, що розв'язок є невід'ємним для всіх $t \geq 0$ м. н. Функція f задовольняє умову росту: існують $C_f > 0$ та $\beta \in [0, 1)$ такі, що

$$0 \leq f(y) \leq C_f y^\beta, \quad y \geq 0. \quad (24)$$

Додатний хвіст міри Леві є правильно змінним:

$$\nu^+((y, \infty)) \sim C y^{-\alpha}, \quad y \rightarrow \infty, \quad (25)$$

де $C > 0$, $\alpha > 0$.

Теорема 18. *За умов (23)-(25) справедливі такі твердження.*

(1) *Якщо $\alpha > 1$, то існують випадкові сталі $K < \infty$ та $T < \infty$ такі, що для всіх $t \geq T$ м. н.*

$$X_t \leq K t^{1/(1-\beta)}.$$

(2) *Якщо $\alpha \in (0, 1)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існують випадкові сталі $K_\varepsilon < \infty$ та $T_\varepsilon < \infty$ такі, що для всіх $t \geq T_\varepsilon$ м. н.*

$$X_t \leq K_\varepsilon t^{\frac{1}{\alpha(1-\beta)} + \varepsilon}.$$

4.2. Доведення Теорема

Розкладемо рівняння (23), підставивши $L_t = L_t^+ - L_t^-$:

$$X_s = x + s + \int_{(0,s]} f(X_{r-}) dL_r^+ - \int_{(0,s]} f(X_{r-}) dL_r^-. \quad (26)$$

Оскільки $f \geq 0$ та $dL_r^- \geq 0$, останній доданок є невід'ємним зі знаком мінус, тому його можна відкинути:

$$X_s \leq x + s + \int_{(0,s]} f(X_{r-}) dL_r^+. \quad (27)$$

Фіксуємо $t \geq 0$ і вводимо процес супремуму

$$Z_t := \sup_{0 \leq u \leq t} X_u.$$

Процес Z є неспадним за означенням. Для всіх $r \leq s \leq t$ маємо $X_{r-} \leq Z_t$, звідки з умови росту (24):

$$f(X_{r-}) \leq C_f X_{r-}^\beta \leq C_f Z_t^\beta.$$

Підставляємо цю оцінку в (27). Оскільки $dL_r^+ \geq 0$, виносимо сталу $C_f Z_t^\beta$ за знак інтеграла:

$$X_s \leq x + s + C_f Z_t^\beta \int_{(0,s]} dL_r^+ = x + s + C_f Z_t^\beta L_s^+.$$

Оскільки $s \leq t$ та L^+ є неспадним, маємо $s \leq t$ та $L_s^+ \leq L_t^+$, тому:

$$X_s \leq x + t + C_f Z_t^\beta L_t^+.$$

Права частина не залежить від s . Беремо супремум лівої частини по $s \in [0, t]$ і отримуємо ключову нерівність:

$$Z_t \leq x + t + C_f Z_t^\beta L_t^+. \quad (28)$$

Випадок $\alpha > 1$.

Оскільки $\alpha > 1$, маємо $\int_1^\infty u \nu^+(du) < \infty$. Разом зі скінченністю варіації на малих стрибках це дає $\mathbb{E}[L_1^+] < \infty$. Позначимо $\mu_+ := \mathbb{E}[L_1^+] < \infty$. За законом великих чисел для процесів Леві:

$$\frac{L_t^+}{t} \rightarrow \mu_+ \quad \text{м. н.}$$

Зокрема, існує випадковий момент $T_0(\omega) < \infty$ та випадкова стала $A(\omega) < \infty$ такі, що для всіх $t \geq T_0$:

$$L_t^+ \leq A t.$$

Підставляємо в (28):

$$Z_t \leq x + t + A C_f t Z_t^\beta \quad \text{для всіх } t \geq T_0.$$

Для $t \geq 1$ маємо $x + t \leq (x + 1)t$. Позначимо $B := x + 1$. Тоді:

$$Z_t \leq B t + A C_f t Z_t^\beta. \quad (29)$$

Розглянемо два підвипадки для великих t .

Підвипадок А: $Z_t \leq 2Bt$. Оскільки $\frac{1}{1-\beta} \geq 1$, маємо $t \leq t^{1/(1-\beta)}$ для $t \geq 1$, тому

$$Z_t \leq 2Bt \leq 2B t^{1/(1-\beta)}.$$

Підвипадок В: $Z_t > 2Bt$. Тоді $Bt < Z_t/2$, і з (29):

$$Z_t \leq \frac{Z_t}{2} + A C_f t Z_t^\beta.$$

Перенесемо $Z_t/2$ вліво:

$$\frac{Z_t}{2} \leq A C_f t Z_t^\beta.$$

Ділимо на Z_t^β (допустимо, бо $Z_t > 0$):

$$\frac{Z_t^{1-\beta}}{2} \leq A C_f t, \quad \text{тобто} \quad Z_t^{1-\beta} \leq 2A C_f t.$$

Піднесемо обидві частини до степеня $\frac{1}{1-\beta} > 0$:

$$Z_t \leq (2A C_f)^{1/(1-\beta)} t^{1/(1-\beta)}.$$

В обох підвипадках $Z_t \leq K t^{1/(1-\beta)}$ для деякої випадкової сталої $K = K(\omega) < \infty$ і всіх достатньо великих t м. н. Оскільки $X_t \leq Z_t$:

$$X_t \leq K t^{1/(1-\beta)} \quad \text{м. н.}$$

Пункт (1) доведено. □

Випадок $\alpha \in (0, 1)$.

Нехай $\delta > 0$. Покладемо

$$q := \frac{1}{\alpha} + \delta.$$

Покажемо, що

$$L_t^+ = o(t^q) \quad \text{м. н.} \tag{30}$$

Виберемо $r \in (0, \alpha)$ так, щоб $qr > 1$. Це можливо, оскільки

$$q\alpha = \frac{\alpha}{\alpha} + \alpha\delta = 1 + \alpha\delta > 1,$$

тому неперервністю можна вибрати $r \in (0, \alpha)$ достатньо близьким до α , щоб $qr > 1$.

Оскільки $r < \alpha$, з умови (25) маємо $\mathbb{E}[(L_1^+)^r] < \infty$.

Оскільки $0 < r < 1$, функція $x \mapsto x^r$ є субадитивною: $(a + b)^r \leq a^r + b^r$ для $a, b \geq 0$. Через незалежні та однаково розподілені прирости L^+ для натуральних n маємо:

$$\mathbb{E}[(L_n^+)^r] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n (L_k^+ - L_{k-1}^+)\right)^r\right] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(L_k^+ - L_{k-1}^+)^r] = n \mathbb{E}[(L_1^+)^r].$$

Для будь-якого $\eta > 0$ та моментів часу 2^k застосуємо нерівність Маркова:

$$\mathbf{P}(L_{2^k}^+ > \eta 2^{kq}) \leq \frac{\mathbb{E}[(L_{2^k}^+)^r]}{\eta^r 2^{kqr}} \leq \frac{2^k \mathbb{E}[(L_1^+)^r]}{\eta^r 2^{kqr}} = C' \eta^{-r} 2^{-k(qr-1)},$$

де $C' := \mathbb{E}[(L_1^+)^r]$. Оскільки $qr > 1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(L_{2^k}^+ > \eta 2^{kq}) \leq C' \eta^{-r} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(qr-1)} < \infty.$$

За лемою Бореля-Кантеллі:

$$\frac{L_{2^k}^+}{2^{kq}} \rightarrow 0 \quad \text{м. н.}$$

Тепер перейдемо від двійкових моментів до довільних t . Для $2^k \leq t < 2^{k+1}$ з монотонності L^+ :

$$\frac{L_t^+}{t^q} \leq \frac{L_{2^{k+1}}^+}{2^{(k+1)q}} = 2^q \frac{L_{2^{k+1}}^+}{2^{(k+1)q}} \rightarrow 2^q \cdot 0 = 0 \quad \text{м. н.}$$

Отже (30) доведено.

Повертаємось до (28). З (30) випливає, що для великих t : $L_t^+ \leq t^q$, тому

$$Z_t \leq x + t + C_f t^q Z_t^\beta.$$

Оскільки $q > 1$, лінійний доданок поглинається степеневим: для великих t маємо $x + t \leq A_1 t^q$ для деякої сталої $A_1 > 0$. Отже:

$$Z_t \leq A_1 t^q + C_f t^q Z_t^\beta. \quad (31)$$

Розглянемо два підвипадки.

Підвипадок А: $Z_t \leq 2A_1 t^q$. Тоді $Z_t \leq 2A_1 t^q$.

Підвипадок В: $Z_t > 2A_1 t^q$. Тоді $A_1 t^q < Z_t/2$, і з (31):

$$Z_t \leq \frac{Z_t}{2} + C_f t^q Z_t^\beta.$$

Перенесемо $Z_t/2$ вліво:

$$\frac{Z_t}{2} \leq C_f t^q Z_t^\beta.$$

Ділимо на Z_t^β :

$$Z_t^{1-\beta} \leq 2C_f t^q.$$

Піднесемо до степеня $\frac{1}{1-\beta}$:

$$Z_t \leq (2C_f)^{1/(1-\beta)} t^{q/(1-\beta)}.$$

В обох підвипадках $Z_t \leq K_\delta t^{q/(1-\beta)}$ для деякої випадкової сталої $K_\delta < \infty$ і

всіх достатньо великих t м. н. Підставимо $q = 1/\alpha + \delta$ та виберемо $\delta = \varepsilon(1 - \beta)$:

$$\frac{q}{1 - \beta} = \frac{1/\alpha + \varepsilon(1 - \beta)}{1 - \beta} = \frac{1}{\alpha(1 - \beta)} + \varepsilon.$$

Оскільки $X_t \leq Z_t$, отримуємо:

$$X_t \leq K_\varepsilon t^{\frac{1}{\alpha(1-\beta)} + \varepsilon} \quad \text{м. н.}$$

Пункт (2) доведено. □

5. Асимптотика інтеграла $\int_1^t s^\beta dU_s$

5.1. Постановка задачі

Нехай $U = (U_t)_{t \geq 0}$ - субординатор з мірою Леві ν такою, що хвіст

$$\bar{\nu}(x) = \nu((x, \infty)) \leq cx^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

де $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $c > 0$ - деяка стала. Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, і нехай $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ - вимірна невід'ємна функція, що задовольняє

$$f(s) \leq s^\beta \quad \forall s \geq 1. \quad (32)$$

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$X_t = x + t + \int_{(1,t]} f(s) dU_s, \quad t \geq 1. \quad (33)$$

Необхідно знайти умови на параметри α та $\beta \in \mathbb{R}$, за яких детермінований лінійний доданок $x + t$ переважає над внеском стохастичного інтеграла при $t \rightarrow \infty$, тобто

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow 1 \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty,$$

що еквівалентно до

$$I_f(t) := \int_1^t f(s) dU_s = o(t) \quad \text{м. н.}$$

Зведення до мажоруючого інтеграла. Оскільки $f \geq 0$, а U - неспадний, а також $f(s) \leq s^\beta$ за (32), маємо поточкову оцінку

$$0 \leq I_f(t) = \int_1^t f(s) dU_s \leq \int_1^t s^\beta dU_s =: I(t) \quad \forall t \geq 1. \quad (34)$$

Отже, якщо $I(t) = o(t)$ м. н., то й $I_f(t) = o(t)$ м. н. Тому достатньо вивчити поведінку *мажоруючого* інтеграла $I(t)$, який відповідає випадку $f(s) = s^\beta$.

Ключова тотожність для $I(t)$. Інтегрування частинами (з $g(s) = s^\beta$, $g'(s) = \beta s^{\beta-1}$) дає:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_1^t g(s) dU_s = [g(s)U_s]_{s=1}^{s=t} - \int_1^t g'(s) U_s ds \\ &= g(t)U_t - g(1)U_1 - \int_1^t g'(s)U_s ds, \end{aligned} \quad (35)$$

тобто

$$\int_1^t s^\beta dU_s = t^\beta U_t - U_1 - \beta \int_1^t s^{\beta-1} U_s ds. \quad (36)$$

5.2. Випадок $\alpha > 1$ (скінченне середнє)

Теорема 19. Нехай $\alpha > 1$ і $\mu = \mathbb{E}[U_1] \in (0, \infty)$. Тоді:

- (а) якщо $\beta > -1$, то $\frac{I(t)}{t^{\beta+1}} \rightarrow \frac{\mu}{\beta+1}$ м. н.;
- (б) якщо $\beta = -1$, то $\frac{I(t)}{\ln t} \rightarrow \mu$ м. н.;
- (с) якщо $\beta < -1$, то $I(t) \rightarrow \int_1^\infty s^\beta dU_s < \infty$ м. н.

Доведення. За посиленням законом великих чисел для процесів Леві зі скінченним середнім (Теорема 13),

$$\frac{U_t}{t} \rightarrow \mu \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Отже, для довільного $\epsilon > 0$ існує м. н. скінченна випадкова величина $T = T(\omega) \geq 1$ така, що

$$(\mu - \epsilon) s \leq U_s \leq (\mu + \epsilon) s \quad \forall s \geq T(\omega). \quad (38)$$

Доведення (а): $\beta > -1$.

Скористаємось тотожністю (36) і оцінимо кожен доданок окремо.

Перший доданок. За (37),

$$t^\beta U_t = t^{\beta+1} \cdot \frac{U_t}{t} \sim \mu t^{\beta+1} \quad \text{м. н.}$$

Другий доданок. U_1 - скінченна невід'ємна випадкова величина, тому $U_1 = O(1)$.

Третій доданок. Розіб'ємо інтеграл на дві частини:

$$\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds = \underbrace{\int_1^T s^{\beta-1} U_s ds}_{=: C(\omega)} + \int_T^t s^{\beta-1} U_s ds.$$

Перший інтеграл - скінченна (випадкова) стала. Для другого скористаємось (38): оскільки $s^{\beta-1} \geq 0$,

$$(\mu - \epsilon) \int_T^t s^{\beta} ds \leq \int_T^t s^{\beta-1} U_s ds \leq (\mu + \epsilon) \int_T^t s^{\beta} ds.$$

Оскільки $\beta > -1$, маємо $\beta + 1 > 0$, і

$$\int_T^t s^{\beta} ds = \frac{t^{\beta+1} - T^{\beta+1}}{\beta + 1} \sim \frac{t^{\beta+1}}{\beta + 1}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Оскільки $\epsilon > 0$ довільне, звідси випливає

$$\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds = \frac{\mu}{\beta + 1} t^{\beta+1} + o(t^{\beta+1}) \quad \text{м. н.} \quad (39)$$

Збираємо разом у (36):

$$\begin{aligned} I(t) &= t^{\beta+1} \cdot \frac{U_t}{t} - U_1 - \beta \int_1^t s^{\beta-1} U_s ds \\ &= \mu t^{\beta+1} + o(t^{\beta+1}) - O(1) - \beta \left(\frac{\mu}{\beta + 1} t^{\beta+1} + o(t^{\beta+1}) \right) \\ &= \mu t^{\beta+1} \left(1 - \frac{\beta}{\beta + 1} \right) + o(t^{\beta+1}) \\ &= \frac{\mu}{\beta + 1} t^{\beta+1} + o(t^{\beta+1}). \end{aligned}$$

Тут ми скористалися тим, що $1 - \frac{\beta}{\beta + 1} = \frac{1}{\beta + 1}$. Це доводить пункт (а).

Доведення (b): $\beta = -1$.

Підставляючи $\beta = -1$ у тотожність (36) (зауважимо, що $-\beta = 1$, тому знак

перед інтегралом змінюється з $-$ на $+$), отримуємо:

$$I(t) = t^{-1}U_t - U_1 + \int_1^t s^{-2}U_s ds.$$

Розглянемо кожен доданок окремо і покажемо, що головний внесок у $I(t)$ дає саме інтеграл, причому він має порядок $\mu \ln t$.

Крок 1. Перший доданок. За (37):

$$t^{-1}U_t = \frac{U_t}{t} \rightarrow \mu \text{ м. н.}$$

Крок 2. Другий доданок. U_1 - скінченна невід'ємна випадкова величина, отже $U_1 = O(1)$.

Крок 3. Інтеграл. Як і у пункті (а), розіб'ємо інтеграл на дві частини - до моменту $T = T(\omega)$ і після нього:

$$\int_1^t s^{-2}U_s ds = \underbrace{\int_1^T s^{-2}U_s ds}_{=: C(\omega)} + \int_T^t s^{-2}U_s ds.$$

Перший інтеграл $C(\omega)$ - скінченна (випадкова) стала, оскільки підінтегральна функція неперервна на $[1, T]$, а проміжок скінченний. Таким чином, $C(\omega) = O(1)$.

Для другого інтеграла використаємо (38): при $s \geq T$ маємо $(\mu - \epsilon)s \leq U_s \leq (\mu + \epsilon)s$. Оскільки $s^{-2} > 0$, домножуючи на s^{-2} , отримуємо

$$(\mu - \epsilon) s^{-1} \leq s^{-2}U_s \leq (\mu + \epsilon) s^{-1}, \quad s \geq T.$$

Інтегруючи ці нерівності по $[T, t]$ (монотонність інтеграла), приходимо до

$$(\mu - \epsilon) \int_T^t s^{-1} ds \leq \int_T^t s^{-2}U_s ds \leq (\mu + \epsilon) \int_T^t s^{-1} ds. \quad (40)$$

Обчислюючи табличний інтеграл,

$$\int_T^t s^{-1} ds = \ln t - \ln T,$$

і беручи до уваги, що $\ln T = O(1)$ (стала при фіксованому ω), дістаємо

$$\int_T^t s^{-1} ds = \ln t + O(1) \sim \ln t, \quad t \rightarrow \infty.$$

Підставимо у (40) і поділимо на $\ln t$:

$$(\mu - \epsilon) \cdot \frac{\ln t + O(1)}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \int_T^t s^{-2} U_s ds \leq (\mu + \epsilon) \cdot \frac{\ln t + O(1)}{\ln t}.$$

При $t \rightarrow \infty$ дробі по краях прямують до $\mu - \epsilon$ і $\mu + \epsilon$ відповідно, тому

$$\mu - \epsilon \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t} \int_T^t s^{-2} U_s ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln t} \int_T^t s^{-2} U_s ds \leq \mu + \epsilon.$$

Оскільки $\epsilon > 0$ довільне, нижня і верхня границі збігаються, а отже звичайна границя існує і дорівнює μ :

$$\frac{1}{\ln t} \int_T^t s^{-2} U_s ds \rightarrow \mu \quad \text{м. н.}$$

Еквівалентно, у позначеннях $o(\cdot)$:

$$\int_T^t s^{-2} U_s ds = \mu \ln t + o(\ln t) \quad \text{м. н.}$$

Додаючи $C(\omega) = O(1) = o(\ln t)$, остаточно маємо:

$$\int_1^t s^{-2} U_s ds = \mu \ln t + o(\ln t) \quad \text{м. н.} \quad (41)$$

Крок 4. Підставляючи результати Кроків 1-3 у вираз для $I(t)$:

$$I(t) = \underbrace{t^{-1} U_t}_{O(1)} - \underbrace{U_1}_{O(1)} + \underbrace{\int_1^t s^{-2} U_s ds}_{\mu \ln t + o(\ln t)} = \mu \ln t + O(1) + o(\ln t).$$

Оскільки $O(1) = o(\ln t)$ (стала зростає повільніше за $\ln t$), перші два доданки поглинаються в $o(\ln t)$:

$$I(t) = \mu \ln t + o(\ln t) \quad \text{м. н.}$$

Ділячи на $\ln t$, отримуємо остаточний висновок:

$$\frac{I(t)}{\ln t} \rightarrow \mu \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доведення (с): $\beta < -1$.

Твердження пункту (с) полягає у тому, що інтеграл $\int_1^\infty s^\beta dU_s$ збігається м. н. до скінченної границі. Оскільки $I(t)$ - монотонно неспадна функція від t (бо $s^\beta \geq 0$ і U неспадний), для доведення збіжності достатньо показати, що $I(t)$ обмежена зверху сталою, яка не залежить від t (м. н.).

Крок 1. Підставимо $\beta < -1$ у (36):

$$I(t) = t^\beta U_t - U_1 - \beta \int_1^t s^{\beta-1} U_s ds.$$

Проаналізуємо кожен доданок при $t \rightarrow \infty$ і покажемо, що всі три лишаються обмеженими.

Крок 2. Перший доданок $t^\beta U_t$. За (37):

$$t^\beta U_t = t^{\beta+1} \cdot \frac{U_t}{t} \sim \mu t^{\beta+1} \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $\beta < -1$, маємо $\beta + 1 < 0$, тому $t^{\beta+1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отже,

$$t^\beta U_t \rightarrow 0 \quad \text{м. н.}$$

Зокрема, цей доданок є обмеженим: $t^\beta U_t = O(1)$ м. н.

Крок 3. Другий доданок. U_1 - скінченна невід'ємна випадкова величина, отже $U_1 = O(1)$.

Крок 4. Інтеграл. Розіб'ємо на дві частини так само, як у пункті (а):

$$\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds = \underbrace{\int_1^T s^{\beta-1} U_s ds}_{=: C(\omega)} + \int_T^t s^{\beta-1} U_s ds.$$

Перший інтеграл $C(\omega)$ - скінченна випадкова стала (інтеграл по скінченному проміжку $[1, T]$ від неперервної обмеженої функції). Отже, $C(\omega) = O(1)$ м. н.

Для другого інтеграла застосуємо (38): при $s \geq T$ маємо $U_s \leq (\mu + \epsilon)s$, тому

$s^{\beta-1}U_s \leq (\mu + \epsilon)s^\beta$. Інтегруючи по $[T, t]$:

$$\int_T^t s^{\beta-1}U_s ds \leq (\mu + \epsilon) \int_T^t s^\beta ds. \quad (42)$$

Крок 5. Збіжність $\int_T^\infty s^\beta ds$. Оскільки $\beta < -1$, тобто $\beta + 1 < 0$, інтеграл $\int_T^t s^\beta ds$ обчислюється як

$$\int_T^t s^\beta ds = \frac{s^{\beta+1}}{\beta + 1} \Big|_T^t = \frac{t^{\beta+1} - T^{\beta+1}}{\beta + 1}.$$

Оскільки $\beta + 1 < 0$, маємо $t^{\beta+1} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тому

$$\int_T^t s^\beta ds \rightarrow \frac{-T^{\beta+1}}{\beta + 1} = \frac{T^{\beta+1}}{|\beta + 1|} < \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Іншими словами, невласний інтеграл

$$\int_T^\infty s^\beta ds = \frac{T^{\beta+1}}{|\beta + 1|} < \infty$$

збігається. *Крок 6. Обмеженість інтеграла.* З (42), переходячи до границі $t \rightarrow \infty$:

$$\int_T^\infty s^{\beta-1}U_s ds \leq (\mu + \epsilon) \cdot \frac{T^{\beta+1}}{|\beta + 1|} < \infty \quad \text{м. н.}$$

Додаючи сталу $C(\omega)$, маємо

$$\int_1^\infty s^{\beta-1}U_s ds \leq C(\omega) + (\mu + \epsilon) \cdot \frac{T(\omega)^{\beta+1}}{|\beta + 1|} < \infty \quad \text{м. н.} \quad (43)$$

Крок 7. Повертаючись до тотожності з Кроку 1 і спрямовуючи $t \rightarrow \infty$:

$$I(t) = \underbrace{t^\beta U_t}_{\rightarrow 0} - \underbrace{U_1}_{O(1)} - \beta \underbrace{\int_1^t s^{\beta-1}U_s ds}_{\nearrow \text{скінченної границі за (43)}}.$$

Третій доданок - монотонна функція від t (бо $s^{\beta-1}U_s \geq 0$), обмежена зверху скінченною величиною (43), отже за теоремою про монотонну збіжність має скінченну границю м. н. Перший доданок прямує до 0, другий - стала.

Таким чином, існує скінченна границя

$$I(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = -U_1 - \beta \int_1^{\infty} s^{\beta-1} U_s ds < \infty \quad \text{м. н.},$$

що означає невластний інтеграл $\int_1^{\infty} s^{\beta} dU_s$ збігається м. н. □

Основний результат для випадку $\alpha > 1$

Твердження 20. Нехай $\alpha > 1$, $\mu = \mathbb{E}[U_1] \in (0, \infty)$, $x \geq 0$, f задовольняє (32), і X_t задовольняє (33). Тоді при $\beta < 0$

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow 1 \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доведення. Оскільки $x \geq 0$ - стала, $\frac{X_t}{t} = \frac{x}{t} + 1 + \frac{I_f(t)}{t}$, тому достатньо показати, що $I_f(t)/t \rightarrow 0$ м. н. За (34) маємо $0 \leq I_f(t) \leq I(t)$, отже досить довести, що $I(t) = o(t)$ м. н.

Нехай $\beta < 0$. Будемо досліджувати поведінку $I(t)$ за допомогою Теорема 19.

Випадок $\beta < -1$. За Теоремою 19(c), $I(t) \rightarrow I(\infty) < \infty$ м. н., тому тим більше $I(t)/t \rightarrow 0$ м. н.

Випадок $\beta = -1$. За Теоремою 19(b), $I(t)/\ln t \rightarrow \mu$ м. н., отже

$$I(t) = \mu \ln t + o(\ln t) = o(t),$$

оскільки $\ln t = o(t)$.

Випадок $-1 < \beta < 0$. За Теоремою 19(a),

$$I(t) = \frac{\mu}{\beta + 1} t^{\beta+1} + o(t^{\beta+1}).$$

Оскільки $\beta + 1 < 1$, маємо $t^{\beta+1} = o(t)$, тобто $I(t) = o(t)$ м. н.

В усіх трьох випадках $I(t) = o(t)$ м. н., отже $0 \leq I_f(t) \leq I(t) = o(t)$, звідки $I_f(t)/t \rightarrow 0$ м. н. □

Зауваження 21. У формулюванні Твердження 20 необхідність ($\beta \geq 0 \Rightarrow X_t/t \not\rightarrow 1$) у загальному випадку не виконується - наприклад, при $f \equiv 0$ маємо $X_t = x + t$, тому $X_t/t \rightarrow 1$ незалежно від β . Якщо ж $f(s) = s^{\beta}$ (тобто інтегрант - сама

мажоранта), то твердження стає еквівалентністю: $X_t/t \rightarrow 1$ м. н. $\iff \beta < 0$. Доведення необхідності у цьому випадку виглядає так:

Необхідність (при $f(s) = s^\beta$). Нехай $\beta \geq 0$. Покажемо, що $I(t)/t \rightarrow 0$ не виконується.

Випадок $\beta = 0$. Тоді $I(t) = \int_1^t dU_s = U_t - U_1$, і за (37)

$$\frac{I(t)}{t} = \frac{U_t - U_1}{t} \rightarrow \mu > 0 \quad \text{м. н.},$$

тобто $X_t/t \rightarrow 1 + \mu \neq 1$.

Випадок $\beta > 0$. За Теоремою 19(a), $I(t)/t^{\beta+1} \rightarrow \mu/(\beta+1) > 0$ м. н. Оскільки $\beta + 1 > 1$,

$$\frac{I(t)}{t} = t^\beta \cdot \frac{I(t)}{t^{\beta+1}} \rightarrow +\infty \quad \text{м. н.},$$

і тим більше $X_t/t \rightarrow +\infty$.

5.3. Випадок $\alpha \in (0, 1)$ (нескінченне середнє)

У цьому розділі будемо припускати, що хвіст міри Леві задовольняє *двосторонню* оцінку: існують сталі $c_1, c_2 > 0$ і $x_0 \geq 0$ такі, що

$$c_1 x^{-\alpha} \leq \bar{\nu}(x) \leq c_2 x^{-\alpha} \quad \forall x \geq x_0. \quad (44)$$

Верхня оцінка потрібна для тих самих міркувань, що й у випадку $\alpha > 1$ (вона забезпечує достатність). Нижня оцінка є новою і знадобиться для доведення необхідності, оскільки без інформації про <<знизу>> неможливо дістати нижні оцінки для зростання U_t .

У випадку $\alpha \in (0, 1)$ ситуація принципово інша: за класичною теоремою про моменти стійких процесів [2, § 25, теорема 2] субординатор U з оцінкою хвоста (44) задовольняє

$$\mathbb{E}[U_1^p] = \infty \quad \forall p \geq \alpha,$$

зокрема **середнє** $\mathbb{E}[U_1] = \infty$, і посилений закон великих чисел (37) *не виконується*. Замість нього використаємо інший граничний результат:

Теорема 22 (Скороход [2], § 25, теорема 3). *Нехай $\xi(t)$ - стійкий субординатор з показником $\alpha \in (0, 1)$ (тобто стійкий процес з $\alpha < 1$ і параметром $\beta = 1$, що відповідає лише додатним стрибкам). Тоді для довільного $\epsilon > 0$*

$$\frac{\xi(t)}{t^{1/\alpha+\epsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Оскільки наш субординатор U з $\bar{\nu}(x) \leq cx^{-\alpha}$ має той самий тип хвоста, що й стійкий субординатор з показником α , для нього виконується аналогічний результат:

$$\frac{U_t}{t^{1/\alpha+\epsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (45)$$

для довільного $\epsilon > 0$.

Наслідок. Для довільного $\epsilon > 0$ існує м. н. скінченна випадкова величина $T = T_\epsilon(\omega) \geq 1$ така, що

$$U_s \leq s^{1/\alpha+\epsilon} \quad \forall s \geq T(\omega). \quad (46)$$

Поведінка інтеграла $I(t)$

Теорема 23. *Нехай $\alpha \in (0, 1)$ та хвіст міри Леві задовольняє (44). Тоді:*

(а) *якщо $\beta > -1/\alpha$, то $I(t)$ зростає, причому*

$$I(t) = o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon}) \quad \text{м. н.}$$

для довільного $\epsilon > 0$;

(б) *якщо $\beta < -1/\alpha$, то інтеграл $\int_1^\infty s^\beta dU_s$ збігається м. н. до скінченної границі.*

Доведення. Скористаємось тотожністю (36) та оцінкою (46). Зафіксуємо довільне $\epsilon > 0$ (його остаточне значення обиратимемо за потреби).

Доведення (а): $\beta > -1/\alpha$.

Розглянемо кожен доданок у (36).

Перший доданок. З (45):

$$t^\beta U_t = t^{\beta+1/\alpha+\epsilon} \cdot \frac{U_t}{t^{1/\alpha+\epsilon}} = o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon}) \quad \text{м. н.}$$

Другий доданок. $U_1 = O(1)$, що очевидно є $o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon})$ при умові $\beta+1/\alpha > 0$ (тобто $\beta > -1/\alpha$).

Третій доданок. Розіб'ємо інтеграл на дві частини:

$$\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds = \underbrace{\int_1^T s^{\beta-1} U_s ds}_{=: C(\omega) = O(1)} + \int_T^t s^{\beta-1} U_s ds.$$

Для другого інтеграла застосуємо (46): при $s \geq T$ маємо $U_s \leq s^{1/\alpha+\epsilon}$, тому $s^{\beta-1} U_s \leq s^{\beta-1+1/\alpha+\epsilon}$. Інтегруючи:

$$\int_T^t s^{\beta-1} U_s ds \leq \int_T^t s^{\beta-1+1/\alpha+\epsilon} ds. \quad (47)$$

Оскільки $\beta > -1/\alpha$ і $\epsilon > 0$, маємо $\beta - 1 + 1/\alpha + \epsilon > -1$, тому показник інтегрованої степеневі функції більший за -1 , і

$$\int_T^t s^{\beta-1+1/\alpha+\epsilon} ds = \frac{t^{\beta+1/\alpha+\epsilon} - T^{\beta+1/\alpha+\epsilon}}{\beta + 1/\alpha + \epsilon} \sim \frac{t^{\beta+1/\alpha+\epsilon}}{\beta + 1/\alpha + \epsilon}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отже, $\int_T^t s^{\beta-1+1/\alpha+\epsilon} ds = O(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon})$, і тим більше

$$\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds = O(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon}) \quad \text{м. н.} \quad (48)$$

Збираємо разом у (36):

$$I(t) = \underbrace{t^\beta U_t}_{o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon})} - \underbrace{U_1}_{O(1)} - \beta \underbrace{\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds}_{O(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon})}.$$

Оскільки $\beta + 1/\alpha + \epsilon > 0$, доданок $O(1) = o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon})$, і остаточно

$$I(t) = O(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon}) = o(t^{\beta+1/\alpha+2\epsilon}) \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $\epsilon > 0$ довільне, маємо $I(t) = o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon})$ для будь-якого $\epsilon > 0$.

Доведення (b): $\beta < -1/\alpha$.

Як і в Теоремі 19(c), скористаємось монотонністю $I(t)$: достатньо показати обмеженість зверху скінченною (випадковою) сталою.

Перший доданок. З (45): $t^\beta U_t = t^{\beta+1/\alpha+\epsilon} \cdot U_t / t^{1/\alpha+\epsilon} \rightarrow 0$, оскільки $\beta+1/\alpha < 0$ і ми можемо вибрати $\epsilon > 0$ настільки малим, що $\beta+1/\alpha+\epsilon < 0$. Отже, $t^\beta U_t \rightarrow 0$ м. н.

Інтеграл. З (46), аналогічно (47):

$$\int_T^t s^{\beta-1} U_s ds \leq \int_T^t s^{\beta-1+1/\alpha+\epsilon} ds.$$

Виберемо $\epsilon > 0$ настільки мале, щоб $\beta-1+1/\alpha+\epsilon < -1$ (тобто $\beta+1/\alpha+\epsilon < 0$, що можливо при $\beta < -1/\alpha$). Тоді показник степеневі функції менший за -1 , тому невластний інтеграл збігається:

$$\int_T^\infty s^{\beta-1+1/\alpha+\epsilon} ds = \frac{T^{\beta+1/\alpha+\epsilon}}{|\beta+1/\alpha+\epsilon|} < \infty.$$

Звідси

$$\int_1^\infty s^{\beta-1} U_s ds \leq C(\omega) + \frac{T(\omega)^{\beta+1/\alpha+\epsilon}}{|\beta+1/\alpha+\epsilon|} < \infty \quad \text{м. н.}$$

Збираємо разом. У тотожності (36):

$$I(t) = \underbrace{t^\beta U_t}_{\rightarrow 0} - \underbrace{U_1}_{O(1)} - \beta \underbrace{\int_1^t s^{\beta-1} U_s ds}_{\nearrow \text{скінченної границі}}.$$

Третій доданок - монотонна неспадна функція t , обмежена зверху скінченною величиною, отже за теоремою про монотонну збіжність має скінченну границю м. н. Перший доданок прямує до 0, другий - стала. Отже, існує скінченна границя

$$I(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = -U_1 - \beta \int_1^\infty s^{\beta-1} U_s ds < \infty \quad \text{м. н.},$$

що означає, що невластний інтеграл $\int_1^\infty s^\beta dU_s$ збігається м. н. □

Зауваження 24. Граничний випадок $\beta = -1/\alpha$ потребує тоншого аналізу і не охоплюється прямими оцінками з (46). Він відомий з літератури (закони ітерованого логарифма для стійких субординаторів) і дає поведінку інтеграла з логарифмічними поправками. Тут ми його не розглядаємо.

Нижня оцінка для зростання U_t

Для доведення необхідності у Твердженні 27 нам знадобиться *нижня* оцінка для U_t , що доповнює верхню оцінку (46). Вона спирається на нижню межу хвоста $\bar{\nu}(x) \geq c_1 x^{-\alpha}$ з умови (44) і використовує класичний прийом: розбиття часової осі на інтервали довжини 2^n та другу лему Бореля-Кантеллі.

Лема 25 (Нижня оцінка для хвоста U_t). *Існують стала $c_1 > 0$ і $t_0 \geq 1$ такі, що для всіх $t \geq t_0$ і $x \geq x_0$*

$$\mathbb{P}\{U_t > x\} \geq \frac{1}{2} \min\{1, c_1 t x^{-\alpha}\}. \quad (49)$$

Доведення. За формулою Леві-Хінчіна стрибки субординатора U описуються пуассонівським точковим процесом з інтенсивністю ν . Кількість стрибків величини $> x$ на проміжку $[0, t]$ є пуассонівською випадковою величиною з параметром $t \bar{\nu}(x)$. Якщо хоч один такий стрибок відбувся, то $U_t > x$ (бо U неспадний). Звідси

$$\mathbb{P}\{U_t > x\} \geq 1 - e^{-t\bar{\nu}(x)} \geq \frac{1}{2} \min\{1, t\bar{\nu}(x)\},$$

де останню нерівність дає елементарне порівняння функцій $1 - e^{-y}$ і $\frac{1}{2} \min\{1, y\}$ при $y \geq 0$. Підставляючи $\bar{\nu}(x) \geq c_1 x^{-\alpha}$ з (44), отримуємо (49). \square

Лема 26 (Нижня оцінка для U_t м. н.). *Нехай $\alpha \in (0, 1)$ і виконується (44). Тоді для довільного $\epsilon > 0$ м. н. існує (випадкова) послідовність $t_n \rightarrow \infty$ така, що*

$$U_{t_n} \geq t_n^{1/\alpha - \epsilon} \quad \forall n \geq n_0(\omega). \quad (50)$$

Еквівалентно,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{U_t}{t^{1/\alpha - \epsilon}} = +\infty \quad \text{м. н.}$$

Доведення. Зафіксуємо $\epsilon > 0$ і розглянемо прирости субординатора на дискретних інтервалах:

$$\Delta_n := U_{2^{n+1}} - U_{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Оскільки U - процес з незалежними приростами, величини $\{\Delta_n\}_{n \geq 1}$ **незалежні**. Крім того, через однорідність U маємо $\Delta_n \stackrel{d}{=} U_{2^n}$.

Крок 1. Оцінка ймовірностей. Розглянемо події

$$A_n := \{\Delta_n > 2^{n(1/\alpha-\epsilon)}\}.$$

За Лемою 25 (з $t = 2^n$ і $x = 2^{n(1/\alpha-\epsilon)}$):

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\{U_{2^n} > 2^{n(1/\alpha-\epsilon)}\} \geq \frac{1}{2} \min\{1, c_1 2^n \cdot 2^{-n\alpha(1/\alpha-\epsilon)}\}.$$

Спростуємо показник: $-n\alpha(1/\alpha - \epsilon) = -n + n\alpha\epsilon$, тому

$$c_1 2^n \cdot 2^{-n+n\alpha\epsilon} = c_1 2^{n\alpha\epsilon} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, для всіх достатньо великих n маємо $c_1 2^{n\alpha\epsilon} \geq 1$, і тому

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Крок 2. Розбіжність ряду. З Кроку 1:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

Крок 3. Лема Бореля-Кантеллі. Прирости $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ незалежні (бо проміжки $[2^n, 2^{n+1}]$ не перетинаються), отже події A_n також незалежні. За другою лемою Бореля-Кантеллі з розбіжності ряду випливає

$$\mathbb{P}(A_n \text{ виконується для нескінченно багатьох } n) = 1.$$

Крок 4. Висновок. Якщо A_n виконується, то

$$U_{2^{n+1}} \geq \Delta_n > 2^{n(1/\alpha-\epsilon)}.$$

Покладемо $t_n := 2^{n+1}$, так що $2^n = t_n/2$. Тоді

$$U_{t_n} > (t_n/2)^{1/\alpha-\epsilon} = 2^{-(1/\alpha-\epsilon)} \cdot t_n^{1/\alpha-\epsilon}.$$

Перепозначаючи ϵ (вибираючи трохи менше), для довільного $\epsilon > 0$ м. н. виконується (50). □

5.3.1. Основний результат для випадку $\alpha \in (0, 1)$

Твердження 27. Нехай $\alpha \in (0, 1)$, хвіст $\bar{\nu}$ задовольняє (44), $x \geq 0$, f задовольняє (32), і X_t задовольняє (33). Тоді при $\beta < 1 - 1/\alpha$

$$\frac{X_t}{t} \rightarrow 1 \quad \text{м. н.}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Доведення. Як і в Твердженні 20, для $\frac{X_t}{t} \rightarrow 1$ м. н. досить довести, що $I_f(t)/t \rightarrow 0$ м. н. За (34) маємо $0 \leq I_f(t) \leq I(t)$, отже досить довести, що $I(t) = o(t)$ м. н.

Нехай $\beta < 1 - 1/\alpha$, тобто $\beta + 1/\alpha < 1$.

Випадок $\beta < -1/\alpha$. За Теоремою 23(b), $I(t) \rightarrow I(\infty) < \infty$ м. н., тому тим більше $I(t)/t \rightarrow 0$ м. н.

Випадок $-1/\alpha < \beta < 1 - 1/\alpha$. За Теоремою 23(a) для довільного $\epsilon > 0$

$$I(t) = o(t^{\beta+1/\alpha+\epsilon}) \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $\beta + 1/\alpha < 1$, можемо обрати $\epsilon > 0$ настільки мале, щоб $\beta + 1/\alpha + \epsilon < 1$. Тоді $t^{\beta+1/\alpha+\epsilon} = o(t)$, тобто $I(t) = o(t)$ м. н.

В обох випадках $I(t) = o(t)$ м. н., отже $0 \leq I_f(t) \leq I(t) = o(t)$, звідки $I_f(t)/t \rightarrow 0$ м. н. \square

Зауваження 28. Як і у випадку $\alpha > 1$, необхідність ($\beta > 1 - 1/\alpha \Rightarrow X_t/t \not\rightarrow 1$) у загальному випадку не виконується (контрприклад: $f \equiv 0$). Якщо ж $f(s) = s^\beta$, то твердження стає еквівалентністю. Доведення необхідності у цьому випадку наступне.

Необхідність (при $f(s) = s^\beta$). Нехай $\beta > 1 - 1/\alpha$, тобто $\beta + 1/\alpha > 1$.

Достатньо показати, що $I(t)/t \not\rightarrow 0$ м. н. Скористаємось Лемою 26: для довільного $\delta > 0$ м. н. існує послідовність $t_n \rightarrow \infty$ така, що

$$U_{t_n} \geq t_n^{1/\alpha-\delta} \quad \forall n \geq n_0(\omega). \quad (51)$$

Виберемо $\delta > 0$ настільки мале, щоб

$$\beta + 1/\alpha - \delta - 1 > 0$$

(це можливо, оскільки $\beta + 1/\alpha - 1 > 0$).

Зауважимо, що інтеграл $I(t) = \int_1^t s^\beta dU_s$ є невід'ємним і неспадним за t , тому, оскільки $s \mapsto s^\beta$ обмежена знизу при $s \geq 1$, маємо просту оцінку знизу: для будь-якого $t \geq 1$

$$I(t) = \int_{(1,t]} s^\beta dU_s \geq \min_{s \in [1,t]} s^\beta \cdot (U_t - U_1). \quad (52)$$

Розглянемо два підвипадки.

Підвипадок 1: $\beta \geq 0$. Тоді $\min_{s \in [1,t]} s^\beta = 1^\beta = 1$, і з (52):

$$I(t_n) \geq U_{t_n} - U_1 \geq t_n^{1/\alpha - \delta} - U_1.$$

Отже,

$$\frac{I(t_n)}{t_n} \geq t_n^{1/\alpha - \delta - 1} - \frac{U_1}{t_n}.$$

Оскільки $\beta \geq 0$ і $\beta + 1/\alpha - \delta - 1 > 0$, маємо $1/\alpha - \delta - 1 \geq \beta + 1/\alpha - \delta - 1 > 0$, тому $t_n^{1/\alpha - \delta - 1} \rightarrow +\infty$. Звідси $I(t_n)/t_n \rightarrow +\infty$ м. н.

Підвипадок 2: $1 - 1/\alpha < \beta < 0$. Тоді $\min_{s \in [1,t]} s^\beta = t^\beta$, і з (52):

$$I(t_n) \geq t_n^\beta \cdot (U_{t_n} - U_1) \geq t_n^\beta (t_n^{1/\alpha - \delta} - U_1).$$

Отже,

$$\frac{I(t_n)}{t_n} \geq t_n^{\beta + 1/\alpha - \delta - 1} - \frac{U_1 t_n^\beta}{t_n}.$$

Перший доданок прямує до $+\infty$, оскільки $\beta + 1/\alpha - \delta - 1 > 0$. Другий доданок $\frac{U_1 t_n^\beta}{t_n} = U_1 t_n^{\beta - 1} \rightarrow 0$ (бо $\beta < 0$). Звідси $I(t_n)/t_n \rightarrow +\infty$ м. н.

В обох підвипадках $I(t_n)/t_n \rightarrow +\infty$ м. н., тому збіжність $I(t)/t \rightarrow 0$ не виконується. Отже, $X_t/t \not\rightarrow 1$.

6. Висновки

Основні результати роботи полягають у наступному.

1. Доведено узагальнення степеневі асимптотики на випадок скінченної кількості незалежних стрибкових мір. Показано, що для розв'язку рівняння $dX(t) = a(X(t), t) dt + b(X(t), t) dW(t) + \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} c_k(X(t^-), u) \tilde{N}_k(dt, du)$ виконується точна асимптотика

$$((1 - \alpha)\underline{A})^{1/(1-\alpha)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{1/(1-\alpha)}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t^{1/(1-\alpha)}} \leq ((1 - \alpha)\overline{A})^{1/(1-\alpha)}.$$

2. Встановлено верхні асимптотичні оцінки для розв'язку СДР з шумом Леві. Для випадку скінченного середнього ($\alpha > 1$) отримано оцінку

$$X_t \leq K t^{1/(1-\beta)} \quad \text{м. н.},$$

яка показує, що при достатньо швидкому спаданні хвостів стрибків асимптотика розв'язку повністю визначається параметром β . У випадку нескінченного середнього ($\alpha \in (0, 1)$) встановлено, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$X_t \leq K_\varepsilon t^{\frac{1}{\alpha(1-\beta)} + \varepsilon} \quad \text{м. н.},$$

3. Проведено аналіз стохастичного інтеграла $I(t) = \int_1^t s^\beta dU_s$, де U - субординатор з правильно змінною мірою Леві.

Отримані результати поглиблюють розуміння асимптотичної поведінки нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибковою компонентою важкохвостого типу та узагальнюють низку відомих результатів, зокрема результати В. К. Юськовича щодо багатовимірних СДР. Практична значущість роботи полягає в можливості застосування встановлених оцінок до моделювання динаміки систем з раптовими стрибкоподібними збуреннями зокрема, у фінансовій математиці (моделі цін активів з важкими хвостами), теорії систем масового обслуговування та популяційній динаміці.

Література

- [1] Cont R., Tankov P. *Financial Modelling with Jump Processes*. - Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [2] Скороход А. В. *Случайные процессы с независимыми приращениями*. - М.: Наука, 1964.
- [3] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. - К.: Наукова думка, 1968.
- [4] Sato K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. - Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 68. - Cambridge University Press, 1999.
- [5] Applebaum D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. - 2nd ed. - Cambridge University Press, 2009.
- [6] Protter P. E. *Stochastic Integration and Differential Equations*. - 2nd ed. - Springer, 2005.
- [7] Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G., Tymoshenko O. A. On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations // *Theory of Stochastic Processes*. - 2008. - Vol. 14(30), No. 1. - P. 11-29.
- [8] Klesov O. I., Tymoshenko O. A. Asymptotic behavior of solutions to non-autonomous stochastic differential equations // *Theory of Stochastic Processes*. - 2014. - Vol. 20(36), No. 1. - P. 32-49.
- [9] Pilipenko A. Yu., Proske F. N. On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case // *Stochastics and Dynamics*. - 2018. - Vol. 18, No. 6. - Article 1850045.
- [10] Юськович В. К. *Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у багатовимірному просторі* : дис. ... д-ра філос. : 111 "Математика" / Юськович Віктор Костянтинович ; Нац. техн. ун-т України <<Київ. політехн. ін-т ім. Ігоря Сікорського>>. - Київ, 2024.
- [11] Buldygin V. V., Tymoshenko O. A. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients // *Theory of Stochastic Processes*. - 2010. - Vol. 16(32), No. 2. - P. 12-22.

- [12] Pavlyukevich I., Pilipenko A. Generalized Peano problem with Lévy noise // Electronic Communications in Probability. - 2020. - Vol. 25. - Paper 51. - P. 1-14.
- [13] Kulik A.M., Pilipenko A.Yu. On regularization by a small noise of multidimensional ODEs with non-Lipschitz coefficients // Ukrainian Mathematical Journal. - 2021. - Vol. 72, No. 9. - P. 1445-1481.
- [14] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. - Cambridge University Press, 1989. - Vol. 27.