Науковий семінар
«Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів»

Про теорему Гаусса

Клесов О.І. (КПІ ім. Ігоря Сікорського)

02.04.2026

$f(x)$ щільність

$\{f(x-\mu), \mu \in R\}$

Теорема. (1809) (Гаусс)

$x_1, \dots, x_n$; $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

Тоді f – гаусса щільн

За вибіркою

$L(\mu) = f(x_1-\mu)\dots f(x_n-\mu)$

$\ln L(\mu) = \sum_{k=1}^{n} \ln f(x_i-\mu)$

$\frac{d}{d\mu} L(\mu) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{d\mu} \ln(x_k-\mu)$

Теорема. $f(x) \to 0$, $x \to \pm\infty$

непер.
унімод.
симетр.

Якщо $\forall n \geq 1$ $\forall x_1 \dots x_n$

$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$

То $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{(x-\mu)^2/2\sigma^2\}$

Тайшер Teicher (1962)

f неп. зліва

$n = 2, 3$

Azzolini (2023)

Теорема. f диф.

f' неп. хоча би в одній точці

Якщо $n \geq 3 \Rightarrow f$ гаусс.

Теорема. f диф.

якщо $n \geq 3 = f$ гаусс.

$f(x) \neq 0$ $\forall x$

Доведення.

$g(x) = \frac{d}{d\mu} \ln f(x-\mu)$

$\frac{d}{d\mu} \ln L(\mu) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k-\mu)$

$\sum_{k=1}^{n} g(x_k-\mu) = 0$

$\sum_{k=1}^{n} g(x_k-\bar{x}) = 0$

Крок 2.

$x_1 = 2u$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dots = x_n = u$

$\bar{x} = u$

$0 = g(2u-\mu) + g(-\mu) + (n-2)g(u-\mu)$

Крок 1. $x_1 = \dots = x_n = u$

$n g(u-\bar{x}) = 0$

$g(0) = 0$

$g(u) + g(-u) = 0$

Крок 3.

$x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = -u-v$

$0 = x_4 = \dots = x_5$

1809 $\boxed{g(u) + g(v) = g(u+v)}$

$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)}{f(x)}$

Теорема Бера-Осгуда

D – множина точок розриву g

$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, D_n – не щільн у конечному інтервалі

Теорема про категорії

$\overline{D}$ є всюди щільним в R

$\Rightarrow \exists$ точка непер. g

$\boxed{g(x) = cx}$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cx^2}$