Лекція 6

ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

1. Перестановки

Нехай множина A складається з n елементів $a_1, \dots, a_n$. В цьому випадку ми записуємо $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Означення 1. Розташування елементів множини A у певному порядку називається *перестановкою*.

Кожну перестановку можна однозначно визначити, якщо записати елементи множини A у певному порядку, наприклад $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$. Щоб визначити скільки існує різних перестановок, зауважимо, що їх стільки, скільки існує різних векторів $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, у яких всі координати різні і належать A. Множину таких векторів позначимо V. Розглянемо операцію

$$O = \{\text{вибрати вектор з } V\}. \tag{1}$$

Цю операцію можна виконати за допомогою послідовності таких дій:

$$D_k = \{\text{вибрати елемент з } A \text{ для } k\text{-ої координати вектора}\} \tag{2}$$

$1 \le k \le n$, тобто $O = D_1 \otimes \dots \otimes D_n$. Оскільки координати вектора $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ не повторюються, то $m_1 = n$, $m_2 =$

[0]Printed from the file [discretka_L=05.tex] on 25.7.2013

$n-1, \ldots, m_n = 1$. За основним правилом комбінаторики (див. розділ 5.4) операцію O можна виконати $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ способами.

Означення 2. Число $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ називається *факторіалом* числа n і позначається $n!$. Ми покладаємо також $0! = 1$ та $1! = 1$.

Інший розв'язок. Позначимо через p_i кількість можливих перестановок i елементів. Задача полягає у знаходженні p_n. Множину V всіх перестановок можна розбити на n множин $V_k = \{$на останньому місці стоїть елемент $a_k\}$, $1 \leq k \leq n$. Оскільки ці множини попарно не перетинаться, то за правилом додавання (3.2) отримуємо $p_n = |V_1| + \cdots + |V_n|$. Всі числа $|V_k|$ рівні між собою і дорівнюють p_{n-1}. Тому

$$p_n = np_{n-1}, \qquad n \geq 2. \tag{3}$$

Оскільки $p_1 = 1$, то методом математичної індукції легко довести, що $p_n = n!$. $\square$

Задача 1. *Методом математичної індукції довести, що $p_n = n!$.*

Рівняння (3) називається *рекурентним рівнянням для факторіала.*

Задача 2. *В чемпіонаті країни з футболу приймають участь 16 команд. Після закінчення змагань складається таблиця, в якій команди розташовані згідно за їхніми результатами. (a) Скільки існує різних таблиць результатів чемпіонату? (b) Скільки існує різних таблиць, у яких перше і друге місце займають певні дві команди?*

Відповідь (задача 2). (a) 16!; (b) 14! (оскільки треба впорядкувати тільки 14 команд).

2. Впорядковані розміщення

Задача 3. *(продовження задачі 2) Тільки перші чотири команди отримують право грати в европейських змаганнях. Скільки існує таблиць чемпіонату з різними розподілами перших чотирьох місць?*

Відповідь (задача 3). $\frac{16!}{12!}$.

Розв'язання задачі 3. Кожна таблиця чемпіонату починається з запису команд, які зайняли перші чотири місця, тобто (c_1, c_2, c_3, c_4), де c_i — це команда, яка посіла i-те місце. Формування такого запису є операцією O, а кількість способів, якими цю операцію можна здійснити, є відповіддю до задачі.

Щоб сформувати такий запис, необхідно здійснити чотири дії D_1, D_2, D_3, D_4: i-та дія D_i полягає у виборі команди для i-го місця. Зрозуміло, що $|D_1| = 16$. Оскільки дія D_2 виконується після D_1, то $|D_2| = 15$ (одна з команд вже обрана дією D_1). Аналогічно, $|D_3| = 14$ та $|D_4| = 13$. Згідно з основним правилом комбінаторики (див. розділ 5.4) $|O| = |D_1| \cdot |D_2| \cdot |D_3| \cdot |D_4|$, тобто $|O| = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13$. Це число можна записати таким чином $\frac{16!}{12!}$.

Означення 3. Нехай множина A складається з n елементів, а $r \leq n$. Будь-який запис $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$ різних елементів з A називається розміщенням r елементів з множини A; для скорочення ми також кажемо, що $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$ — це *розміщення з n по r*.

Позначимо через V множину векторів, що мають r (різних) координат, кожна з яких є елементом множини A. Як і у випадку перестановок, розглянемо операцію (1) (але вже для іншої множини V) та дії (2), але вже для $1 \leq k \leq r$. Тоді

$O = D_1 \otimes \cdots \otimes D_r$. Крім того, $m_1 = n, m_2 = n-1, \ldots, m_r = n-r+1$. За правилом множення, операцію O можна виконати $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$ способами. Зрозуміло, що $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Ми позначаємо $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Інший розв'язок задачі 3. Позначимо через $p(i,j)$ кількість можливих розміщень j елементів з існуючих i елементів. Задача полягає у знаходженні $p(n,r)$. Множину V всіх розміщень можна розбити на n підмножин

$$V_k = \{\text{на останньому місці стоїть елемент } a_k\}, \quad 1 \le k \le n.$$

Оскільки ці множини попарно не перетинаються, то за правилом додавання (3.2) отримуємо $p(n,r) = |V_1| + \cdots + |V_n|$. Всі числа $|V_k|$ рівні між собою і дорівнюють $p(n-1, r-1)$. Тому

$$p(n,r) = np(n-1,r-1), \qquad n \ge 2. \tag{4}$$

Оскільки $p(i,1) = i$ для будь-якого $1 \le i \le n$, то методом математичної індукції легко довести, що $p(n,r) = A_n^r$. $\square$

Задача 4. *Методом математичної індукції довести, що* $p(n,r) = A_n^r$.

Приклад 1. Обирається Miss World. У змаганні приймає участь 30 учасниць, серед яких Miss Ukraine. Оголошуються перші 6 місць. (a) Скільки існує різних результатів змагань? (b) Скільки існує різних результатів, у яких Miss Ukraine займає одне з перших шести місць? Відповідь до (a): $A_{30}^6 = \frac{30!}{24!}$. Відповідь до (b): $A_{30}^6 - A_{29}^6$ (з загальної кількості можливих результатів віднімаємо такі, у яких Miss Ukraine *не займає* одне з перших шести місць).

3. Не впорядковані розміщення

Існує багато задач, де порядок, в якому записані числа $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}\}$, не має жодного значення.

Задача 5. *У бібліотеці існує обмеження, що кожний студент може отримати не більше 5 книжок. Список рекомендованої лекторами літератури складається з 8 назв. Скільки існує способів для студента вибрати 5 книжок з 8 назв? (Зрозуміло, що порядок, в якому книжки будуть видані студенту, жодного значення не має).*

Відповідь (задача 5). $C_8^5 = \frac{8!}{3!5!} = 56$.

Розв'язання задачі 5. Для розв'язання цієї задачі розглянемо спочатку загальний підхід. Нехай $r \leq n$. Загалом існує A_n^r розміщень. Серед них існують такі, які відрізняються тільки порядком запису елементів. Розіб'ємо всі розміщення на групи наступним чином. Спочатку оберемо довільне розміщення і до першої групи включимо всі ті, які відрізняються від нього тільки порядком елементів. З решти розміщень оберемо тепер довільне розміщення і до другої групи включимо всі ті, які відрізняються від нього тільки порядком елементів. Така процедура має скінченну кількість кроків.

Задача 6. *В кожній групі знаходиться $r!$ розміщень.*

Тому існує $A_n^r/r!$ різних груп розміщень.

Означення 4. *Комбінацією* називається будь-яка з побудованих груп розміщень. Кількість комбінацій з n по r позначається C_n^r. Маємо $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Це означає, що загалом існує C_n^r різних комбінацій r елементів з n (різних означає, що склад елементів однієї комбінації відрізняється від складу елементів іншої комбінації).

4. Кількість підмножин заданої множини

Викладений у розділі 3 матеріал можна подати у наступному вигляді.

Теорема 1. *Нехай множина A складається з n елементів, $r \leq n$. Існує C_n^r підмножин A, які складаються з r елементів.*

А скільки ж загалом існує підмножин у A?

Теорема 2. *Нехай множина A складається з n елементів. Тоді у A існує 2^n різних підмножин.* (*Серед таких підмножин враховані $\varnothing$ та сама A*).

Доведення. Позначимо через q_i кількість підмножин множини, що складається з i елементів. Всі підмножини розділимо на дві групи: до першої групи входять такі підмножини, які містять a_1, а до другої — такі, що не містять a_1. Наприклад сама множина A належить першій групі, а $\varnothing$ — другій. Зауважимо, що друга група складається з усіх можливих підмножин множини $\{a_1, \dots, a_n\}$, тому кількість таких підмножин є q_{n-1}. Такою ж є кількість підмножин у першій групі, оскільки між цими групами існує бієкція. А саме, будь-яка підмножина з першої складається або тільки з a_1, або містить a_1 та деякі елементи з $\{a_2, \dots, a_n\}$, тобто для довільної підмножина B з першої групи підмножина $B \setminus \{a_1\}$ належить другій групі. Тому бієкцію f між двома групами можна означити так: $f\colon B \to B \setminus \{a_1\}$.

Задача 7. *Довести, що f дійсно є бієкцією.*

За правилом бієкції 5.1 дві зазначені групи мають однакову кількість елементів і тому $q_n = 2q_{n-1}$. Звідси і випливає твердження теореми.

Задача 8. *Довести за індукцією, що* $q_n = 2^n$.

□

Наслідок 1. $C_1^0 + C_1^1 = 2$. *Нехай* $n \geq 2$. *Тоді*

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

5. Біноміальні коефіцієнти

Числа $C_n^0, \ldots, C_n^n$ називаються *біноміальними коефіцієнтами степеня* n. Ця назва пояснюється тим, що вони є коефіцієнтами *бінома Ньютона* $(1+x)^n$.

Теорема 3. *Нехай* $n \geq 1$. *Тоді* C_n^r *є коефіцієнтом при* x^r *у розкладі* $(1+x)^n$ *за степенями* x.

Доведення. Розглянемо добуток

$$(1+x)(1+x)\ldots(1+x) \qquad (\text{загалом } n \text{ множників } 1+x).$$

Розкриваючи дужки, ми отримуємо багато разів доданок x^r. Кількість таких доданків дорівнює кількості способів, якими можна обрати r співмножників x і $n-r$ співмножників 1. Ця кількість і є C_n^r. □

Твердження теореми 3 можна записати таким чином:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r.$$

Задача 9. *Довести, що* $(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r C_n^r x^r$, $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r a^r b^{n-r}$.

Найбільш важливі властивості біноміальних коефіцієнтів включено в наступний результат.

Теорема 4.

(i) $C_n^r = C_n^{n-r}$, $n \geq 0$, $0 \leq r \leq n$;
(ii) $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^r$, $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$.

Доведення. (i) Кожна комбінація з n по r визначає не тільки r обраних елементів, але і інші $n-r$ елементів. Тому кількість комбінацій з n по r є такою ж, як кількість комбінацій з n по $n-r$.

(ii) У кожній комбінації з n по r елемент a_1 або присутній, або ні. Кількість комбінацій, де його немає, дорівнює C_{n-1}^r. Кількість же комбінацій, де він є, дорівнює C_{n-1}^{r-1}. Звідси і випливає (ii). $\square$

Задача 10. *Довести теорему 4 з використанням означення 4.*

6. Трикутник Паскаля

Трикутником Паскаля називається нескінченна трикутна матриця, n-ий рядок якої складається з чисел P_{nr}, $0 \leq r \leq n$. Вважаємо, що матриця починається з рядка, який має номер 0. Числа P_{nr}, $n \geq 0$, $0 \leq r \leq n$ визначаються наступним чином:

$$P_{00} = 1 \tag{5}$$

$$P_{n0} = P_{nn} = 1, \qquad n \geq 1, \tag{6}$$

$$P_{nr} = P_{n-1,r-1} + P_{n-1,r}, \qquad 0 < r < n-1,\ n \geq 2. \tag{7}$$

Нижче зображено перші рядки трикутника Паскаля з використанням символів P_{nr} для його елементів:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & P_{00} & & & & \\
 & & & P_{10} & & P_{11} & & & \\
 & & P_{20} & & P_{21} & & P_{22} & & \\
 & P_{30} & & P_{31} & & P_{32} & & P_{33} & \\
P_{40} & & P_{41} & & P_{42} & & P_{43} & & P_{44}
\end{array}
$$

Зважаючи на рівності (5)–(6), замінемо крайні елементи трикутника Паскаля на одиниці:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & P_{21} & & 1 & & \\
 & 1 & & P_{31} & & P_{32} & & 1 & \\
1 & & P_{41} & & P_{42} & & P_{43} & & 1
\end{array}
$$

Згідно до правила (7), кожне число P_{nr}, що залишилось у трикутнику Паскаля невизначеним у рядку n, дорівнює сумі двох чисел у попередньому рядку, між якими розташовано P_{nr}. Тому трикутник Паскаля починається так:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Теорема 5. *$P_{nr} = C_n^r$ для всіх $0 \le r \le n$ та $n \ge 0$.*

Доведення. Безпосередньо з означення випливає, що

$$P_{00} = C_0^0.$$

Таким чином твердження теореми виконано для нульового рядка трикутника Паскаля. Скористаємось тепер методом математичної індукції. Припустимо, що $P_{nr} = C_n^r$ для n-ого рядка, тобто для всіх $0 \le r \le n$. Доведемо, що $P_{n+1,r} = C_{n+1}^r$ для всіх $0 \le r \le n+1$. Оскільки за означенням $P_{n0} = P_{nn} = 1$ та $C_n^0 = C_n^n = 1$, то

$$P_{n0} = C_n^0, \qquad P_{nn} = C_n^n,$$

тобто необхідна рівність виконується для крайніх членів $(n+1)$-го рядка. Доведемо її і для $0 < r < n+1$. На підставі припущення індукції та властивості (ii) теореми 4 маємо

$$P_{n+1,r} = P_{n,r-1} + P_{nr} = C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r.$$

□