Лекція 11

ОПЕРАЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Одним з найважливіших застосувань бульових змінних та функцій є *алгебра логіки.* Логіка вивчає *висловлювання* та способи утворення одних висловлювань з інших. Відповідно до одного із найрозповсюджених означень, логіка є аналізом методів міркувань.

Висловлювання — це майже невизначені поняття, відносно кожного з яких відомо, що воно є або істинним, або хибним. Саме ця обставина поєднує логіку та бульові змінні.

Найвідоміший в історії логіки приклад містить два висловлювання і один висновок:

(1) *Усі люди смертні. Сократ — людина.*
Отже, Сократ смертний.

Чи можна робити `такий` висновок на основі `таких` висловлювань? У логіці зустрічаються численні приклади неочікуваних результатів, що основані на цілком бездоганних правилах виводу.

Приклад 1. Критський філософ Епіменід сказав:

(2) "*Всі критяни брехуни*".

Якщо те, що він сказав, є вірним, то (оскільки він сам критянин) він збрехав. Отже, існує критянин, який говорить

[0]Printed from the file `[discretka_L=10.tex]` on 15.8.2013

правду. Якщо ж він збрехав, то все одно існує критянин, який говорить правду. Це означає, що такий критянин існує в будь-якому випадку, що протирічить висловлюванню (2). (“Послання до Тита св. апостола Павла”, 1, 12)

Приклад 2. (Парадокс брехуна) Дехто говорить: “Я брешу”. Якщо те, що він говорить, правда, то він збрехав. Якщо ж він збрехав, то, те, що він сказав, правда.

Ми не ставимо перед собою задачу аналізувати ці чи інші парадокси. Нашим завданням є ознайомлення з основами теорії правил логічного виводу з використанням бульових функцій.

1. Функції алгебри логіки

Нехай $x_1, \ldots, x_n$ — бульові змінні. Будь-яка бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ задається таблицею значень, яку ще називають *таблицею* .

Теорема 1. *Існують 2^{2^n} різних бульових функцій.*

Доведення. Таблиця істинності бульової функції складається з $m = 2^n$ рядків. Для кожного рядка клітинка у стовпці значень може містити або 0, або 1. Згідно з правилом множення (див. розділ 5.3) існують $2^m = 2^{2^n}$ способів заповнити цей стовпчик. Кожне заповнення цього стовпця — це бульова функція. Отже, існують 2^{2^n} різних бульових функцій n бульових аргументів. □

1.1. Фіктивні змінні. Функції g_1, визначена за формулою (10.1), та f_6, визначена за формулою (10.3), пов’язані з однією й тою ж операцією з множинами (доповненням). Однак перша з них залежить від однієї змінної, а інша —

від двох. Легко бачити з таблиць цих функцій, що $g_1(x_1) = f_6(x_1, x_2)$, тобто f_6 від x_2 фактично не залежить.

Означення 1. Нехай f — бульова функція. Змінна x_i називається *фіктивною* для функції f, якщо

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

для всіх значень змінних $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Змінна, яка не являється фіктивною, називається *істотною*.

Алгоритм виключення фіктивної змінної. Якщо відомо, що x_i є фіктивною змінною функції f, то для виключення цієї змінної з таблиці істинності необхідно

1) викреслити всі рядки, в яких $x_i = 1$;
2) викреслити стовпчик для змінної x_i.

Задача 1. *Видалити фіктивну змінну з f_6 і отримати g_1.*

Означення 2. Функції f та h називаються *рівними*, якщо h можна отримати з f додаванням та вилученням фіктивних змінних.

Задача 2. *Довести, що якщо h можна отримати з f додаванням та вилученням фіктивних змінних, то і f можна отримати з h додаванням та вилученням фіктивних змінних.*

2. Елементарні функції алгебри логіки

Ще раз розглянемо бінарні бульові функції. Обидві змінні є фіктивними для тотожних функцій $f_8(x_1, x_2) \equiv 0$ и

$f_9(x_1, x_2) \equiv 1$. У математичній логіці найбільш часто застосовуються такі функції:

(3)

x_1	x_2	$(\overline{x}_1)$	$(x_1 \& x_2)$	$(x_1 \vee x_2)$	$(x_1 \to x_2)$	$(x_1 + x_2)$	$(x_1 \vert x_2)$
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1

У математичній логіці прийнято заключати у дужки функції та їхні змінні; саме так і записані функції в таблиці (3).

Порівнюючи таблицю істинності (3) з таблицями (10.3) та (10.4), з'ясовуємо, що

$$
\begin{aligned}
(\overline{x}_1) &= g_1(x_1) = f_6(x_1, x_2) \quad \big(\textit{логічне заперечення}\big),\\
(x_1 \& x_2) &= f_2(x_1, x_2) \quad \big(\textit{кон'юнкція}\text{ або }\textit{логічний добуток}\big),\\
(x_1 \vee x_2) &= f_1(x_1, x_2) \quad \big(\textit{диз'юнкція}\text{ або }\textit{логічне додавання}\big),\\
(x_1 \to x_2) &= f_{15}(x_1, x_2) \quad \big(\textit{імплікація}\text{ або }\textit{логічне слідування}\big),\\
(x_1 + x_2) &= f_3(x_1, x_2) \quad \big(\textit{додавання} \mod 2\big).
\end{aligned}
$$

Вираз для логічного заперечення $(\overline{x}_1)$ читається як “не x_1”.

Для кон'юнкції використовуються й інші позначення:

$$(x_1 \& x_2) = (x_1 \wedge x_2) = (x_1 \cdot x_2) = (x_1 x_2).$$

Вираз для кон'юнкції $(x_1 \& x_2)$ читається як “x_1 та x_2”; вираз для диз'юнкції $(x_1 \vee x_2)$ читається як “x_1 або x_2”; вираз для імплікації $(x_1 \to x_2)$ читається як “з x_1 випливає x_2”; операція $(x_1 + x_2)$ це дійсно додавання за модулем 2, а операція $x_1 | x_2$ — це штрих Шеффера.

Задача 3. *Довести, що*

$$(x_1 \wedge x_2) = \min\{x_1, x_2\}, \qquad (x_1 \vee x_2) = \max\{x_1, x_2\}.$$

3. Властивості заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції

3.1. Властивість логічного заперечення.

1) $\overline{(\overline{x})} = x$.

Доведення цієї і всіх інших властивостей проводиться побудовою та порівнянням таблиць істинності для лівої та правої частин:

$$\begin{vmatrix} x & (\overline{x}) & \overline{(\overline{x})} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3.2. Властивості кон'юнкції.

1) $(x \wedge 0) = 0$;
2) $(x \wedge 1) = x$;
3) $(x \wedge (\overline{x})) = 0$;
4) $(x \wedge y) = (y \wedge x)$;
5) $((x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge (y \wedge z))$.

3.3. Властивості диз'юнкції.

6) $(x \vee 0) = x$;
7) $(x \vee 1) = 1$;
8) $(x \vee (\overline{x})) = 1$;
9) $(x \vee y) = (y \vee x)$;
10) $((x \vee y) \vee z) = (x \vee (y \vee z))$.

3.4. Властивості дистрибутивності.

11) $(x \wedge (y \vee z)) = ((x \wedge y) \vee (x \wedge z))$;
12) $(x \vee (y \wedge z)) = ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$.

3.5. Правила де Моргана.

13) $\overline{(x \wedge y)} = ((\overline{x}) \vee (\overline{y}))$;
14) $\overline{(x \vee y)} = ((\overline{x}) \wedge (\overline{y}))$.

3.6. Закони поглинання.

15) $((x) \vee (x \wedge y)) = x$;
16) $(x \wedge (x \vee y)) = x$.

Доведення законів поглинання полягає у побудові та порівнянні відповідних таблиць істинності:

x	y	$(x \wedge y)$	$(x \vee (x \wedge y))$	$(x \vee y)$	$(x \wedge (x \vee y))$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Порівнюючи перший та четвертий стовпці, доводимо властивість 15), а перший та шостий — властивість 16). □

4. Властивості імплікації

Таблиця істинності для імплікації містить такі відомі результати:

a) з істини можна отримати істину: $(1 \to 1) = 1$;
b) з істини не можна отримати хибне твердження $(1 \to 0) = 0$;
c) з хибного твердження може випливати як істинне $(0 \to 1) = 1$, так і хибне твердження $(0 \to 0) = 1$.

Мають місце такі властивості імплікації:

1) $(x \to x) = 1$;
2) $(x \to 1) = 1$;
3) $(0 \to x) = 1$;
4) $(x \to (\overline{x})) = \overline{x}$;
5) $(x \to 0) = \overline{x}$;

6) $(1 \to (\overline{x})) = x$;
7) $(x \to y) = ((\overline{y}) \to (\overline{x}))$.

Властивість 7) можна вважати аналогом комутативності. Властивість асоціативності для імплікації не виконується.

Задача 4. *Порівняти таблиці істинності для $(x \to (y \to z))$ та $((x \to y) \to z)$*

Доведення властивості 7). Будуємо і порівнюємо таблиці істинності:

x	y	$(x \to y)$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$((\overline{y}) \to (\overline{x}))$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1

Порівнюючи третій та шостий стовпчики, закінчуємо доведення. $\square$

5. Властивості функції Шеффера

Штрих Шеффера можна виразити через інші функції: $x|y = \overline{(x \wedge y)}$. Крім того,

1) $(x|x) = \overline{x}$;
2) $(x|(\overline{x})) = 1$;
3) $(x|0) = 1$;
4) $(x|1) = \overline{x}$;
5) $((\overline{x})|0) = 1$;
6) $((\overline{x})|1) = x$;
7) $(x|y) = (y|x)$.

Властивість 7) означає комутативність операції Шеффера. Однак властивість асоціативності для неї не виконується.

Задача 5. *Порівняти таблиці істинності для операцій* $(x|(y|z))$ *та* $((x|y)|z)$.

Приклад 3. Використовуючи властивості функції Шеффера, доведемо, що $(x \vee y) = ((x|x)|(y|y))$:

$$\left|\begin{array}{cccccc} x & y & (x|x) & (y|y) & ((x|x)|(y|y)) & (x \vee y) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Порівнюючи п’ятий та шостий стовпчики, закінчуємо доведення.

Порівнюючи другий та третій стовпчики в іншій таблиці істинності

$$\left|\begin{array}{ccc} (x|y) & ((x|y)|(x|y)) & (x \wedge y) \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right|,$$

доводимо властивість $(x \wedge y) = ((x|y)|(x|y))$.

6. Формули

У таблицях істинності ми використовували вирази $(x|x)$, $(y|y)$, $((x|x)|(y|y))$, $(x \vee y)$, $(x|y)$, $((x|y)|(x|y))$, $(x \wedge y)$ в якості назв стовпців. Це приклади формул.

Означення 3. *Формулою* називається правильна послідовність дужок, бульових змінних та позначень елементарних бульових функцій.

Ми не визначаємо поняття правильна послідовність. Замість цього наведемо приклади неправильних послідовностей:

$(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \wedge x_4$	–	незакрита дужка
$\wedge (x_1 \wedge x_2)$	–	відсутній аргумент
$x_1 \to x_2 \wedge x_3 \to x_4$	–	функції треба взяти у дужки

Приклад правильної послідовності:

$$\overline{(x_1 \vee ((x_2 \to x_3) \wedge (x_4 \to x_5)))}.$$

Твердження (1) записується так: $((x_1 \& x_2) \to x_3)$. Як правило, формули дозволяють більш економно (у порівнянні з таблицями істинності) записувати бульові функції. Наприклад, запис

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$$

означає, що f_1 — це бульова функція, таблиця істинності якої задаєтся таблицею (10.2).