

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# ПІДГОТОВКА ТА ПРОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

## Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра  
технічних спеціальностей

Електронне мережеве навчальне видання

Київ  
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО  
2023

УДК 510  
М61

Укладачі: *Білий Олександр Григорович, ст. викладач*  
*Іваненко Тетяна Вікторівна, канд. техн. наук, доц.*  
*Крошко Наталія Віталіївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*  
*Білий Валерій Олександрович, канд. фіз.-мат. наук.*

Рецензент *Беркман Л.Н. доктор техн. наук, професор, Державний університет телекомунікацій*

Відповідальний редактор *Клесов О.І., доктор ф.-м. наук, проф.*

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
(протокол № 3 від 07.12.2023 р.)  
за поданням вченої ради фізико-математичного факультету  
(протокол № 11 від 22.11.2023 р.)*

**Білий О.Г., Іваненко Т.В., Крошко Н.В., Білий В.О.**

М61 Підготовка та проведення математичних олімпіад [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра технічних спеціальностей / О. Г. Білий, Т. В. Іваненко, Н. В. Крошко, В. О. Білий ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 247 с.

Навчальний посібник містить методичні розробки для підготовки студентів до олімпіад з математики та роботи математичних гуртків. Наведено приклади багатьох задач підвищеної складності та їх розв'язання, які були запропоновані студентам інституту спеціального зв'язку і захисту інформації та деяких факультетів на олімпіадах у різні роки.

Для здобувачів ступеня бакалавр за інженерно-технічними спеціальностями та викладачів вищої математики – керівників математичних гуртків.

УДК 510

Реєстр. № НП 23/24-202. Обсяг 11,2 авт. арк.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056  
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів  
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© О. Г. Білий, Т. В. Іваненко, Н. В. Крошко, В. О. Білий, 2023  
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

## Зміст

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП.....                                                                                                              | 5  |
| РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ РОЗРОБКИ ДЕЯКИХ ТЕМ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ .....                                          | 10 |
| 1.1 Визначники вищих порядків. Теорема Лапласа та її застосування .....                                                 | 12 |
| 1.1.1 Підстановка $n$ -го порядку.....                                                                                  | 12 |
| 1.1.2 Теорема Лапласа.....                                                                                              | 13 |
| 1.1.3 Приклади, що ілюструють наведені методи .....                                                                     | 14 |
| 1.2 Основна теорема алгебри (Гаусса). Формули Кардано та Феррарі.....                                                   | 22 |
| 1.3 Побудова графіків деяких нестандартних функцій .....                                                                | 35 |
| 1.4 Послідовності Фібоначчі як приклад поворотної послідовності.....                                                    | 46 |
| 1.4.1 Знаходження $f_n$ - як суми двох геометричних прогресій .....                                                     | 47 |
| 1.4.2 Комбінаторний метод .....                                                                                         | 48 |
| 1.4.3 Метод характеристик.....                                                                                          | 49 |
| 1.4.4 Метод твірної функції .....                                                                                       | 49 |
| 1.4.4 Матричний метод.....                                                                                              | 50 |
| 1.4.5 Формула континуант .....                                                                                          | 50 |
| 1.5 Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей.<br>Відшукування сум рядів.....      | 55 |
| 1.5.1 Застосування формули Муавра, формули Ейлера та бінома Ньютона .....                                               | 55 |
| 1.5.2 Застосування визначеного інтеграла, зведення до обчислення границь відповідних<br>інтегральних сум.....           | 58 |
| 1.5.3 Використання функціональних рядів з дійсними та комплексними членами, їх<br>інтегрування та диференціювання ..... | 59 |
| 1.5.4 Застосування розвинення в ряд Фур'є.....                                                                          | 62 |
| 1.5.5 Методи операційного числення. Застосування інтегрального перетворення Лапласа<br>.....                            | 65 |
| 1.5.6 Застосування інтегральної форми $\delta$ – функції Дірака та її розкладу в ряд Фур'є.....                         | 72 |
| 1.6 Диференціальні рівняння .....                                                                                       | 74 |
| 1.7 Методи обчислень деяких відомих інтегралів .....                                                                    | 79 |
| 1.7.1 Інтеграл Ейлера .....                                                                                             | 80 |
| 1.7.2 Інтеграл Ейлера – Пуассона.....                                                                                   | 81 |
| 1.7.3 Інтеграли Френеля .....                                                                                           | 81 |
| 1.7.4 Інтеграл Діріхле .....                                                                                            | 83 |
| 1.7.5 Інтеграли Лапласа.....                                                                                            | 85 |
| 1.7.6 Розривний множник Діріхле.....                                                                                    | 87 |

|                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.7.7. Інтеграл Фруллані .....                                                                    | 88  |
| 1.8 Приклад застосування формули Стокса та деякі узагальнення .....                               | 88  |
| 1.9 Формула Валліса. Асимптотична поведінка функції $n!$ Формула Стірлінга .....                  | 93  |
| 1.10 $\delta$ – функція Дірака, основні властивості. Застосування, приклади .....                 | 99  |
| 1.10.1 Основні поняття .....                                                                      | 99  |
| 1.10.2 Основні властивості .....                                                                  | 100 |
| 1.10.3 $\delta$ - функція як сингулярний розподіл .....                                           | 102 |
| 1.10.4 Відновлення неперервного сигналу за його дискретними значеннями. Теорема WKS .....         | 108 |
| 1.11 Деякі питання теорії ймовірностей та математичної статистики .....                           | 110 |
| 1.11.1 Простір подій, класична ймовірність .....                                                  | 110 |
| 1.11.2 Класичні теореми теорії ймовірностей .....                                                 | 115 |
| 1.11.3 Випадкові події, класична ймовірність .....                                                | 119 |
| 1.11.4 Випадкові величини, їх основні характеристики .....                                        | 124 |
| РОЗДІЛ 2. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД КПІ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАПРОПОНОВАНИХ ЗАДАЧ ..... | 137 |
| 2.1 Зразки білетів олімпіад першого рівня в ІСЗЗІ, розв'язання задач .....                        | 137 |
| 2.2 Приклади білетів другого рівня, огляд деяких задач .....                                      | 183 |
| 2.3 Олімпіадні білети деяких інших факультетів для порівняння .....                               | 205 |
| 2.4 Статистика кількості учасників та переможців у деякі роки .....                               | 209 |
| РОЗДІЛ 3. ТЕМАТИКА ЗАСІДАНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ ТА ПРИКЛАДИ ДОПОВІДЕЙ СТУДЕНТІВ .....            | 210 |
| 3.1 Перелік деяких запропонованих тем засідань математичних гуртків .....                         | 210 |
| 3.2 Приклади доповідей студентів на засіданнях .....                                              | 212 |
| 3.2.1 Графіки деяких елементарних та неелементарних функцій .....                                 | 212 |
| 3.2.2 Розвиток поняття числа. Кватерніони та деякі їх застосування .....                          | 217 |
| 3.2.3 Обчислення визначників типу Вандермонда .....                                               | 223 |
| 3.2.4 Диференціювання інтеграла по параметру. Формула Лейбніца, приклади застосування .....       | 228 |
| 3.2.5 Диференціювання невластних інтегралів по параметру, приклади застосування .....             | 230 |
| 3.2.6 Застосування перетворення Лапласа до знаходження сум деяких рядів .....                     | 231 |
| 3.2.7 Сингулярний $\delta$ - розподіл Дірака та його застосування .....                           | 234 |
| 3.2.8 Елементи комбінаторики .....                                                                | 237 |
| Література .....                                                                                  | 244 |



## ВСТУП

Олімпіадний рух в КПІ має глибоке коріння та славу історію. З самого заснування КПІ керівництво та професорсько-викладацький склад віддавали належне високому рівню інженерно-технічної підготовки студентів, що неможливо без досконалих знань математики та інших точних наук. Працювали лабораторії, функціонували фізико-математичні товариства, технічні та математичні гуртки для студентів. Проводились вечори, вікторини, змагання та олімпіади як всередині КПІ, так і між навчальними закладами. Змагались також українські студенти з іноземними, проводились обміни студентами та стажування молодих викладачів у закордонних навчальних закладах та лабораторіях. І в наш час всім цим формам підтримання високого рівня і якості отриманих знань керівництво КПІ, а тепер НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», приділяє велику увагу й надає потужну підтримку. Для того, щоб впевнитись у цьому, достатньо зайти на сайт нашого університету і відкрити тему «Олімпіади в КПІ» (<https://kpi.ua/student-olympiad>). Перш за все дивує їх величезна кількість, різноманітність тематичних олімпіад з математики, фізики, хімії, інформатики, технічних дисциплін, стартапів, гуманітарних наук тощо, форми проведення, розмаїття рівнів: факультетські, Всеукраїнські, міжнародні. І що дуже приємно, це перш за все дві речі: по-перше, повна підтримка та всебічна допомога адміністрації, і по-друге, результати таких змагань. Студенти КПІ скрізь виборюють гідні місця або престижні премії. Також на сайті можна багато чого дізнатись про КПІ, про участь у міжнародних проектах, систему обміну студентами, роботу різного роду технічних і гуманітарних гуртків, про насичене різноманітними спортивними та громадськими заходами студентське життя, про рівень й місце науки та наукових досліджень в КПІ, про професіоналізм професорсько-викладацького складу тощо. Недаремно в останні роки абітурієнти в своїх мотиваційних листах обирають для навчання саме КПІ, отримавши на сайті та з інших джерел інформацію про наш університет.

Математична олімпіада – це змагання не тільки обдарованих індивідуальностей, а й всієї системи математичної підготовки як у державі, так і в конкретному закладі вищої освіти (далі ЗВО). Самій олімпіаді передують велика комплексна робота з підготовки до неї, що має багато складових. На думку авторів, перш за все грає велику роль наявність і професійність великої кількості викладачів – зірок, асів педагогічної майстерності, які заряджають знаннями і любов'ю до предмету та спеціальності. Таких в КПІ дуже багато. Згадуються змістовні, витончені, доведені до філігранності тематичні оглядові лекції для студентів, аспірантів та молодих викладачів професорів колишньої кафедри математичної фізики, а пізніше вищої математики №1 та математичного аналізу та теорії ймовірностей (далі МА та ТЙ), О.С. Смогоржевського, Ш.Г. Горделадзе, В.А. Зморовича, Ю.Л. Далецького, Л.О. Дундученка, Ф.П. Яремчука, В.В. Булдигіна, О.І. Клесова. Глибокою повагою та шаную користувались у студентів доценти Лозовик В.Г., Кухарчук М.М., Стремський В.В., Мартиненко В.С., Ординська З.П., Барановська Г.Г., Шкабара О.С., Ясінський В.В., Диховичний О.О., ст. викладачі Антонюк В.А., Костецький Е.О., Шмакова Л.М., Жук В.А., та багато інших, хто брав участь у підборі олімпіадних задач та формуванні білетів.

Після організації фізико-математичного факультету (далі ФМФ), одним із фундаторів якого був проф. В.В. Булдигін, завідувач кафедри МА та ТЙ, організацію та проведення математичних олімпіад було піднято на новий рівень. Залучена ціла плеяда талановитої молоді (Ізвеков І.Г., Великоіваненко О.І., Солнцев С.О., Орловський І.В., Ільєнко А.Б., Гайдей В.О., Сиротенко А.В., Павленков В.В.), впроваджено диференційований підхід щодо рівня складності задач для студентів різних факультетів та студентів першого і старших курсів. З 2006 року всі рівні математичних олімпіад в КПІ проводила кафедра МА та ТЙ для факультетів та інститутів, які вона обслуговувала, під керівництвом та безпосередньою участю проф. В.В. Булдигіна та проф. О. І. Клесова за підтримки адміністрації КПІ. Визначились три рівні. Перший – це факультетські

олімпіади, що проводили в один день та час на всіх факультетах. Білети формували таким чином: чотири задачі із шести пропонували викладачі математичних дисциплін, що працювали на цьому факультеті (це задачі олімпіадної складності, але все ж таки простіші), та дві задачі підвищеної складності, які пропонувало журі, до складу якого входили Булдигін В.В., Клесов О.І., Орловський І.В., Ільєнко А.Б., Ординська З.П., Стремський В.В., Гайдей В.О., Жук В.А. та інші. У формуванні цих задач підвищеної складності також брали участь викладачі кафедри. Другий рівень – це Всеукраїнська олімпіада, на яку запрошували всіх бажаючих з КПП та інших ЗВО України. До її проведення залучали всю кафедру, організаційний комітет очолював Перший проректор Якименко Ю.І. Білети включали 8 – 10 задач, які складало журі за участі як викладачів кафедри, так й інших фахівців. За результатами цього туру із кращих студентів формували команди КПП для участі в наступному – міжнародному рівні. Підготовку їх до олімпіади і супровід на самій олімпіаді проводили Булдигін В.В., Клесов О.І., Орловський І.В., Ільєнко А.Б., Павленков В.В. Виступи команди КПП на міжнародних олімпіадах завжди були доволі успішними, переможними, вони традиційно виборювали призові місця.

Друга важлива складова підготовки до олімпіади – це робота математичних гуртків, яка в КПП була традиційно добре поставлена. Наприклад, на радіотехнічному факультеті (далі РТФ) математичний гурток вели проф. Зморевич В.А., доц. Стремський В.В., ст. викладачі Шмакова Л.М., Білий О.Г. та інші. Починаючи з 2009 року математичний гурток в ІСЗЗІ і військовому інституті телекомунікацій та інформатизації (далі ВІТІ) регулярно працював під керівництвом доцентів Рудоміно-Дусятської І.А., Сікорського Ю.Г., Крошко Н.В. та ст. викл. Білого О.Г. Робота математичного гуртка націлена не лише на підготовку слухачів до олімпіад, але й на підвищення їх загального математичного рівня, поглиблене засвоєння ними важливих програмних тем з курсу вищої математики, ознайомлення з темами, що прямо не входять до програми курсу,

допомогу при підготовці курсантами та ад'юнктами наукових робіт за спеціальностями.

Факультетські тури олімпіади в ІСЗЗІ стали регулярно проводитись з 2010 року. Основну організаційну роботу здійснювали доц. Іваненко Т.В., Крошко Н.В. та ст. викл. Білий О.Г. Вони ж формували 4 задачі білетів для першого та старших курсів, а також перевіряли роботи. Також у підготовці студентів, методичних розробках та складанні олімпіадних завдань брав активну участь к.ф.-м.н. Білий В.О., який протягом багатьох років проводив заняття з математики із групами слухачів довузівської підготовки в ІСЗЗІ та читав лекції і вів практичні заняття з вищої математики для курсантів ІСЗЗІ з Республіки Казахстан. Підготовку студентів та курсантів до першого та другого рівнів олімпіади проводили у різних формах – безпосередньо на лекціях та практичних заняттях, на штатних та додаткових консультаціях та у формі роботи математичних гуртків. Був гурток спочатку для ВІТІ та ІСЗЗІ, функціонував спільний гурток для РТФ та ІСЗЗІ під керівництвом ст. викл. Білого О.Г. та Шмакової Л.М. Відмітимо, що протягом багатьох останніх років при кафедрі МА та ТІФ функціонують ще два математичних гуртка, а саме: «Нестандартні та олімпіадні задачі аналізу та теорії ймовірностей» і «Додаткові розділи математичного аналізу», які також відвідували студенти ІСЗЗІ. Статус ІСЗЗІ накладав певні обмеження на студентів та курсантів, бо в них є дуже багато інших регламентованих військовою специфікою інституту обов'язків та позааудиторних занять, але керівництво інституту завжди йшло назустріч та задовольняло прохання математиків про дозвіл на участь студентів у роботі гуртків та олімпіад, треба було лише вчасно написати рапорт. Скажемо одразу, основним нашим досягненням була доволі висока кількість учасників на факультетських та Всеукраїнських рівнях олімпіад студентів та курсантів ІСЗЗІ. Як правило, переможцями Всеукраїнської олімпіади ставали студенти факультетів з більш високим рівнем математичної підготовки.

Нарешті третя складова, яка суттєво впливає на рівень математичної освіти - це система довузівської підготовки – вона в КПП традиційно дуже добре поставлена. Були роки, коли більше ніж 80% студентів 1-го курсу проходили навчання на факультеті довузівської підготовки, який був організований в КПП під керівництвом досвідченого у цій галузі доц. Ясинського В.В. Пізніше він був реорганізований в інститут моніторингу якості освіти КПП ім. Ігоря Сікорського під керівництвом Перестюк М.М. Цей центр інноваційного моніторингу якості освіти виконує дуже багато функцій, що спряють підвищенню якості в тому числі й математичної освіти. Виділимо організацію і проведення адаптаційних та корегувальних курсів для студентів КПП. Відмітимо також, що в свій час в КПП були добротні вступні іспити та знамениті екзаменаційні задачі з математики з параметрами, що було якісним фільтром для кращих абітурієнтів. Зауважимо також, що очолювали предметну вступну комісію з математики протягом багатьох останніх років саме викладачі нашої кафедри Горделадзе Ш.Г., Стрижак Т.Г., Булдигін В.В. та Кухарчук М.М.

Олімпіади – це іспит всієї системи математичної підготовки ЗВО. І успіх наших студентів на міжнародному рівні показує, що цей іспит складено на відмінно. У посібнику наведено деякі методичні розробки щодо розв'язання нестандартних задач, задач підвищеної складності, які допомагають студенту підготуватись до олімпіади, представлено зразки білетів факультетського та Всеукраїнського рівнів різних років, а також наведено деяку статистику.

## РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ РОЗРОБКИ ДЕЯКИХ ТЕМ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

Розглянемо приклади методичних розробок деяких тем, що стосуються теоретичного та практичного підґрунтя для розв'язання задач і прикладів, які зазвичай пропонують на олімпіадах першого та другого рівнів. Ці розробки було частково впроваджено на лекціях, практичних заняттях, на планових та на спеціальних консультаціях з підготовки студентів до конкретної олімпіади та для аналізу і розв'язання задач олімпіади, що відбулась, а в основному - на засіданнях математичних гуртків. Деякі із цих розробок були опубліковані викладачами у вигляді науково - методичних статей в журналі "Математика в сучасному технічному університеті" і запропоновані для самостійної роботи з підготовки до олімпіад та підготовки доповідей на засіданнях математичного гуртка. У цих тематичних розробках розглянуто теоретичні питання і задачі підвищеної складності, нестандартні й оригінальні задачі, для розв'язання яких використовують різноманітні методи. Нижче наведено тематику та безпосередньо декілька прикладів цих розробок.

### Теми розробок:

1. Визначники вищих порядків. Теорема Лапласа та її застосування.
2. Деякі задачі аналітичної геометрії в  $R^2$  та  $R^3$  підвищеної складності.
3. Методи обчислення визначників типу Вандермонда. Класична задача відновлення многочлена  $n$ -го порядку за його значенням у різних  $n+1$  точках.
4. Лінійні оператори. Оператор диференціювання та інтегрування в  $\mathcal{P}_{n-1}(x(t))$  – лінійному векторному просторі многочленів степені менше або дорівнює  $n - 1$ .
5. Основна теорема алгебри (Гаусса). Формули Кардано та Феррарі. Приклади.
6. Елементи математичної логіки. Вступ до теорії абстрактних множин.

7. Основні числові множини, поняття потужності числових множин, шкала, ланцюжок включень.
8. Гіперкомплексні числа. Кватерніони, дії над ними, застосування.
9. Формула Муавра та її застосування до обчислення тригонометричних сум.
10. Графіки елементарних та неелементарних функцій, деякі нестандартні методи їх побудови.
11. Послідовність Ейлера  $\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\}$ , доведення її збіжності, зв'язок з іншими відомими послідовностями, застосування.
12. Послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності.
13. Знаходження сум та добутків елементів деяких числових послідовностей, обчислення їх границь. Застосування методів елементарної математики.
14. Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Відшукування сум рядів. Застосування методів вищої математики.
15. Диференціальні рівняння. Приклади розв'язання задач підвищеної складності.
16. Диференціювання інтегралу по параметру. Формула Лейбніца, застосування.
17. Інтегрування по параметру. Приклади.
18. Обчислення деяких інтегралів, що залежать від параметра. Інтеграли Пуассона, Діріхле, Френеля та Лапласа.
19. Приклад застосування формули Стокса, деякі узагальнення.
20. Застосування перетворення Лапласа до знаходження сум деяких рядів.
21. Знаходження сум тригонометричних функціональних рядів операційним методом.

22. Формула Валліса. Асимптотична поведінка функції  $n!$  Формула Стірлінга. Розклад  $\sin x$  та  $\cos x$  в нескінченний добуток.
23.  $\delta$ -функція Дірака, основні властивості та застосування.
24. Вибрані питання теорії ймовірностей.

Наведемо приклади деяких методичних розробок для підготовки до олімпіад.

## 1.1 Визначники вищих порядків. Теорема Лапласа та її застосування

**1.1.1 Підстановка  $n$ -го порядку** – це взаємно однозначне відображення

$p$  множини  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  самої в себе, тобто  $p = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$ ,

$i_n, \alpha_{i_n}, n \in N, \alpha_{i_k} = p(i_k), k = 1, 2, \dots, n$ . Тут  $\alpha_{i_k}$  – це **образ** елемента  $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  при відображенні  $p$ . Якщо в верхньому рядку елементи розта-

шовані в порядку зростання, то підстановка  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$  – **канонічна**.

Пара елементів  $(i, j)$  для  $p = \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots \end{pmatrix}$  утворюють **інверсію** в під-

становці  $p$ , якщо  $i < j$ , але  $\alpha_i > \alpha_j$ . Число  $S(p)$  всіх інверсних пар визначає парність або непарність підстановки  $p$ . Якщо  $S(p)$  парне число, то  $p$  – парна, і навпаки.

Наприклад, розглянемо  $p = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ . Перейдемо до канонічної форми

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ , тоді інверсії це  $(2, 5), (3, 5), (4, 5)$ ,  $S(p) = 3$  – підстановка

непарна.



Нехай задана квадратна матриця  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , де  $a_{ij}$  - елемент

цієї матриці,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ . Тоді визначник цієї матриці буде

$$\det A = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_p (-1)^{s(p)} a_{1p(1)} \dots a_{np(n)}. \quad (1)$$

Тут сума береться по всім підстановкам  $p$   $n$ -го порядку. Іншими словами, визначник дорівнює сумі  $n!$  доданків, кожен із яких є добутком  $n$  елементів визначника, взятих по одному із кожного стовпчика, і кожного рядка, причому зі знаком "+", якщо відповідна підстановка індексів добутку парна, та зі знаком "-", якщо вона непарна.

### 1.1.2 Теорема Лапласа

Розглянемо мінори матриці  $A$  двох типів. Нехай  $k < n$ , а індекси  $i_1, i_2, \dots, i_k$  та  $j_1, j_2, \dots, j_k$  такі, що задовольняють умовам  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ,  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ . Тоді **мінори першого типу**  $L_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  – це визначники  $k$ -го порядку, утворені з елементів матриці  $A$  таких, що розташовані на перетині  $k$  рядків із номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  та  $k$  стовпчиків із номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ . **Мінори другого типу**  $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$  (доповнювальні до мінорів першого типу) – це визначники порядку  $n - k$ , отримані шляхом викреслювання  $k$  рядків з номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  та  $k$  стовпчиків з номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ .

Тепер ми готові сформулювати **теорему Лапласа**.

При довільному номері  $k < n$  та при фіксованих номерах рядків  $i_1, i_2, \dots, i_k$  таких, що  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , для визначника  $n$ -го порядку справедлива формула:

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k} LM, \quad (2)$$

де  $L = L_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ ,  $M = M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ , причому підсумовування виконується по всім можливим значенням індексів  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , що задовольняють умові  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ .

Наслідок (індуктивне визначення визначника).

$$\det A = \sum_{\substack{i=1 \\ (j - \text{фіксоване})}}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ (i - \text{фіксоване})}}^n a_{ij} A_{ij}, \quad (3)$$

де  $a_{ij}$  - елемент матриці,  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  - алгебраїчне доповнення елемента  $a_{ij}$ ,  $M_{ij}$  - його мінор другого типу.

Ця формула впливає з теореми Лапласа як розклад за елементами  $i$ -го рядка або  $j$ -го стовпчика.

Коментарі. Зрозуміло, що користуватися визначенням (1) для обчислення визначників вищих порядків ( $n > 3$ ) не зовсім зручно. Формули (2) та (3) дають можливість обчислення визначників більш високих порядків звести до обчислень визначників менших порядків. Існують також певні інші методи обчислень визначників високих порядків, використовуючи їх властивості та їх конкретний вид.

### ***1.1.3 Приклади, що ілюструють наведені методи***

#### **Приклад 1. Обчислити визначник**

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Розв'язання.** 1 спосіб (т. Лапласа).

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \vee & & & \\ & \vee & & \\ & & \vee & \\ & & & \vee \end{matrix} \begin{bmatrix} i_1 = 2 \\ i_2 = 4 \\ j_1 = 2 \\ j_2 = 3 \end{bmatrix} = (-1)^{2+4+2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-10)(-3) = -30.$$

2 спосіб (т. Лапласа, інші  $i$  та  $j$ ).

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \vee & & & \\ \vee & & & \\ & \text{Наборів } j & & \\ & \text{буде 4 ненульових} & & \end{matrix} \begin{bmatrix} i_1 = 1 \\ i_2 = 2 \end{bmatrix} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^7 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^9 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{10} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = (-5)(-3) - 5 \cdot (-7) + 0 + 0 - 4 \cdot 6 + (-4) \cdot 14 = -30.$$

**Відповідь:**  $-30$ .

**Приклад 2.** Обчислити визначник

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Розв'язання.** 1 спосіб (т. Лапласа,  $i_1 = 2, i_2 = 4$ ). Маємо: ненульовий набір  $j$  це  $j_1 = 1, j_2 = 5$ .

$$\Delta_5 = (-1)^{2+4+1+5} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

2 спосіб. Зведемо до трикутного виду:

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & -2 & 3 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & -2 & 3 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 3 & 6 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -2. \end{aligned}$$

3 спосіб (розклад за елементами 2-го рядка).

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 7 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} (7-5) = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 2(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

**Відповідь:** - 2.

**Приклад 3.** Обчислити визначник

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Маємо за т. Лапласа  $\begin{pmatrix} i_1 = 1 & i_2 = 2 \\ j_1 = 4 & j_2 = 5 \end{pmatrix}$  – ненульовий набір):

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= (-1)^{1+2+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ .

**Приклад 4.** Обчислити  $\Delta_5$ , попередньо перетворивши його до зручного для обчислення виду (за т. Лапласа)

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.*

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (\text{від 3-го рядка віднімемо 5-ий}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{від 2-го рядка віднімемо 1-ий}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 = 2 & j_1 = 1 \\ i_2 = 3 & j_2 = 5 \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3+1+5} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

**Відповідь:**  $-2$ .

Наведемо тепер приклади на обчислення визначників вищих порядків деякими спеціальними методами.

**Приклад 5.** Знайти визначник, використовуючи метод рекурентних співвідношень та метод математичної індукції

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Представимо визначник у вигляді суми  $\Delta_n = \Delta_n^1 + \Delta_n^2$ , де

$$\Delta_n^1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}, \quad \Delta_n^2 = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

Обчислимо перший з них:

$$\Delta_n^1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha \Delta_{n-1}^1 \quad \text{Далі методом математичної індукції}$$

цієї впевнюємось, що  $\Delta_n^1 = \alpha \Delta_{n-1}^1 = \alpha^2 \Delta_{n-2}^1 = \dots = \alpha^{n-1} \Delta_1^1 = \alpha^n$ .

Аналогічно  $\Delta_n^2 = \beta^n$ . Таким чином  $\Delta_n = \Delta_n^1 + \Delta_n^2 = \alpha^n + \beta^n$ .

**Відповідь:**  $\alpha^n + \beta^n$ .

**Приклад 6.** Обчислити визначник  $n$ -го порядку, використовуючи наслідок теореми Лапласа та встановивши відповідне рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Розкладемо визначник за першим стовпцем

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}. \quad \text{Отри-$$

мали рекурентне співвідношення  $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ .

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \dots \text{ Припустимо, що } \Delta_{n-2} = n-1,$$

$$\Delta_{n-1} = n, \text{ маємо } \Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.$$

**Відповідь:**  $\Delta_n = n+1$ .

**Приклад 7.** Обчислити визначник, використовуючи властивості визначників

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \dots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & a & 1 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Від першого стовпчика віднімемо третій, винесемо спільний множник, маємо:

$$\Delta_n = (1 - a^2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ -1 & a & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a^{n-3} & a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1 - a^2) \Delta_{n-1},$$

$$\text{де } \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \text{ бо розкладаючи визначник за елементами пер-$$

шого стовпчика, маємо всі нулі, за винятком  $A_{11}$ , оскільки для всіх інших  $A_{1j}$ ,  $j \neq 1$ ,  $j \neq 2$  два перших рядки – лінійно залежні.

Далі, використовуючи рекурентне співвідношення  $\Delta_n = (1 - a^2) \Delta_{n-1}$ , маємо, по індукції

$$\Delta_n = (1 - a^2) \Delta_{n-1} = (1 - a^2)^2 \Delta_{n-2} = \dots = (1 - a^2)^{n-1} \Delta_1 = (1 - a^2)^{n-1}.$$

**Відповідь:**  $\Delta_n = (1 - a^2)^{n-1}$ .

**Приклад 8.** Обчислити визначник, звівши його до відомого визначника Вандермонда та використавши метод його обчислення



$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Винесемо із кожного стовпчика, починаючи з другого, відпо-

відно  $2, 3, \dots, n$ , тоді маємо:  $\Delta_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2n-2} & 3^{2n-2} & \dots & n^{2n-2} \end{vmatrix}$ , але це і є

відомий визначник Вандермонда:  $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

з  $a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, a_3 = 3^2, \dots, a_n = n^2$ , тобто

$$\begin{aligned} \Delta_n &= n! V_n(1^2, 2^2, \dots, n^2) = n! \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = n! \prod_{1 \leq m < k \leq n} (k^2 - m^2) = n! \prod_{1 \leq m < k \leq n} (k - m)(k + m) = \\ &= n! (2-1)(2+1)(3-1)(3+1) \dots ((n-1) - (n-2))((n-1) + (n-2)) \cdot \\ &\cdot (n - (n-2))(n + (n-2))(n - (n-1))(n + (n-1)) = 1! 3! 5! \dots (2n-1)!. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\Delta_n = n! \prod_{1 \leq m < k \leq n} (k^2 - m^2) = 1! 3! 5! \dots (2n-1)!.$

**Приклад 9.** Обчислити визначник використовуючи метод Гаусса, елементарними перетвореннями зводячи його до трикутного виду

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* До першого рядка додамо всі наступні:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2+3(n-1) & 2+3(n-1) & 2+3(n-1) & \dots & 2+3(n-1) & 2+3(n-1) \\ 3 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 2 \end{vmatrix} = (3n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3n-1)(-1)^{n-1}.$$

**Відповідь:**  $(-1)^{n-1}(3n-1)$ .

## 1.2 Основна теорема алгебри (Гаусса). Формули Кардано та Феррарі

Розглянемо алгебраїчне рівняння  $n$ -го степеня з комплексними коефіцієнтами в множині  $\mathbb{C}$ :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

$$\text{де } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{C}, a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n.$$

Основна теорема алгебри (Гаусса) та теорема Безу доводять, що довільне таке рівняння в множині комплексних чисел має рівно  $n$  коренів. Це теорема існування, і вона не дає практичних методів знаходження коренів. Покажемо, що для деяких значень  $n$  існують відповідні формули для їх знаходження саме в множині  $\mathbb{C}$ :

1)  $n = 1$  - лінійне рівняння.

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, \quad a \neq 0;$$

2)  $n = 2$  - квадратне рівняння.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + px + q = 0, \quad \text{де } p = \frac{b}{a},$$

$$q = \frac{c}{a}. \text{ Перепишемо це рівняння так: } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = 0, \text{ тоді}$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ або } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$x^2 + (3 - 2i)x + 2 - 4i = 0.$$

Розв'язання.

$$x_{1,2} = -\frac{3-2i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-2i}{2}\right)^2 - (2-4i)} = -\frac{3-2i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3+4i}.$$

Знайдемо  $\sqrt{a+ib} = u+iv$ , тоді

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a \\ 2uv = b \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = a \\ u^2 + v^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}. \quad (4)$$

$$\text{Маємо } \begin{cases} u^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ v^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) \end{cases}, \text{ у та } v - 4 \text{ набори значень, з яких (4) задо-}$$

вольняє лише 2.

$$\text{У нас } \begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ 2uv = 4 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u = \pm 1 \\ v = \pm 2 \end{cases},$$

$$\text{тобто } \begin{cases} u_1 = 1, v_1 = 2 \\ u_2 = -1, v_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-3+4i} = \pm(1+2i).$$

Таким чином

$$x_1 = -\frac{3-2i}{2} + \frac{1}{2}(1+2i) = -1+2i, \quad x_2 = -\frac{3-2i}{2} - \frac{1}{2}(1+2i) = -2.$$

**Відповідь:**  $x_1 = -1+2i$ ,  $x_2 = -2$ .

**3а)**  $n = 3$  - кубічне рівняння з комплексними коефіцієнтами.

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

Виконаємо заміну  $y = x - \frac{a}{3}$ , тоді отримаємо неповне кубічне рівняння

$$x^3 + px + q = 0. \quad (5)$$

За основною теоремою воно має три комплексних кореня.

Нехай  $x_0$  - один із них. Розглянемо далі нову змінну  $u$  та функцію

$$f(u) = u^2 - x_0 u - \frac{p}{3}, \text{ корені якої } \alpha \text{ та } \beta \text{ за теоремою Вієта задовольняють}$$

співвідношення

$$\alpha + \beta = x_0, \quad (6)$$

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}, \quad (7)$$

звідки  $3\alpha\beta + p = 0$ .

Підставляючи (6) в (5), маємо  $(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$ , або

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q. \quad (8)$$

Із (7)  $\Rightarrow$

$$\alpha^3 \beta^3 = -\frac{p^3}{27}. \quad (9)$$

Рівності (8) та (9), знов таки за теоремою Вієта, показують, що числа  $\alpha^3$  та  $\beta^3$  являються коренями квадратного рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0, \quad (10)$$

тобто  $z_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ , звідки

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (11)$$

Нарешті

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (12)$$

Це і є формула Кардано, яка виражає корені рівняння (5) через його коефіцієнти за допомогою квадратних та кубічних коренів (радикалів). Так як кубічний корінь в  $\mathbb{C}$  має три значення, то маємо дев'ять наборів значень  $\alpha + \beta$ , серед яких треба вибрати лише ті три, що задовольняють умові (7)  $3\alpha\beta = -p$ .

Нехай  $\sqrt[3]{1} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_1^3\}$ . Якщо виберемо якесь  $\alpha_1$  із трьох зна-

чень, а йому відповідає за (7)  $\beta_1$ , то 
$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_2 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2, \text{ де } \sqrt[3]{1} = \varepsilon \\ x_3 = \alpha_3 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon \end{cases}$$

(одне з трьох).

### Приклад на застосування формули Кардано.

Розв'язати рівняння

$$y^3 + (2 - 2i)y^2 - (1 + 2i)y - 2 + 4i = 0.$$

Розв'язання. Заміна  $y = x - \frac{a}{3} = x - \frac{2 - 2i}{3} = x - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right)$ . Виконаємо пере-

творення:

$$\begin{aligned} & \left(x - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right)\right)^3 + (2 - 2i)\left(x - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right)\right)^2 - (1 + 2i)\left(x - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i\right)\right) - 2 + 4i = \\ & = x^3 + \left(-1 + \frac{2}{3}i\right)x - \frac{32}{27} + \frac{94}{27}i = 0. \end{aligned}$$

Для розв'язання обчислимо  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ , де  $q = -\frac{32}{27} + \frac{94}{27}i$ ,  $p = -1 + \frac{2}{3}i$ . Маємо

$$\begin{aligned}\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} &= \left(-\frac{16}{27} + \frac{47}{27}i\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{-3+2i}{3}\right)^3 = \frac{1}{27^2} \left[(-16+47i)^2 + (-3+2i)^3\right] = \\ &= \frac{1}{27^2}(-1944-1458i) = \frac{2}{3}(-4+3i) = -\frac{8}{3} + 2i, \text{ тоді } \sqrt{-\frac{8}{3} + 2i} = u + iv,\end{aligned}$$

$$a = -\frac{8}{3}, b = 2, 2uv = b > 0.$$

$$\text{Маємо систему } \begin{cases} u^2 - v^2 = -\frac{8}{3} \\ u^2 + v^2 = \sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \frac{10}{3} \end{cases}. \text{ Тому } u = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, v = \pm \sqrt{3} \text{ або}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, v_1 = \sqrt{3} \\ u_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, v_2 = -\sqrt{3} \end{cases}, \text{ звідки } \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{8}{3} + 2i} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}i \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}i \end{cases}.$$

Далі

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{27} + \frac{1}{\sqrt{3}} + i\left(\sqrt{3} - \frac{47}{27}\right)}, \\ \beta &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{27} - \frac{1}{\sqrt{3}} + i\left(-\sqrt{3} - \frac{47}{27}\right)}.\end{aligned}$$

Після громіздких обчислень отримаємо

$$x_1 = (\alpha + \beta)_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}i, \quad x_2 = (\alpha + \beta)_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i, \quad x_3 = (\alpha + \beta)_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i.$$

безпосередня перевірка показує, що це дійсно корені допоміжного рівняння.

Нарешті, повертаючись до умови, маємо за формулою  $y = x - \frac{a}{3} = x - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$

$$: y_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}i - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = 1, y_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = -2, y_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}i - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = -1 + 2i.$$

**Відповідь:**  $y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = -1 + 2i$ .

**3б)**  $n = 3$  - кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

Виконаємо заміну  $y = x - \frac{a}{3}$ , тоді отримаємо неповне кубічне рівняння

$$x^3 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}.$$

Вираз  $D = -(4p^3 + 27q^2) = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$  називається дискримінантом кубі-

чного рівняння. Зрозуміло, що значення  $D$  визначає якими будуть корені цього неповного рівняння.

1.  $D < 0$ , тобто  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ , і під знаком кубічних коренів для  $\alpha$  та  $\beta$  стоять дійсні числа, тобто  $\alpha$  та  $\beta$  мають одне дійсне значення та два комплексно-спряжених. Зрозуміло, що  $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$  дійсне, тоді

$$x_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 = \alpha_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \beta_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}, x_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}.$$

комплексно-спряжені.

Тобто, при  $D < 0$  неповне кубічне рівняння має *один дійсний та два комплексно-спряжені корені*.

2.  $D = 0$ , тоді  $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \beta$ ,  $\alpha_1 = \beta_1$  і  $x_1 = 2\alpha_1$ ,  $x_2 = \alpha_1(\varepsilon + \varepsilon^2) = -\alpha_1$ ,

$x_3 = -\alpha_1$  - всі корені дійсні, два із них рівні.

3.  $D > 0$ , тоді всі три корені дійсні і різні.

**Приклади розв'язання кубічного рівняння з дійсними коефіцієнтами:**

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$y^3 + 9y^2 + 18y + 28 = 0.$$

*Розв'язання.* Виконаємо заміну  $y = x - \frac{a}{3} = x - 3$ , тоді  $y^3 + 9y^2 + 18y + 28 =$

$$= (x - 3)^3 + 9(x - 3)^2 + 18(x - 3) + 28 = x^3 - 9x + 28 = 0, \quad p = -9, \quad q = 28. \text{ Ма-}$$

$$\text{ємо } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{4 \cdot 14^2}{4} + \frac{-27 \cdot 27}{27} = 196 - 27 = 169 \quad (D < 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Тобто } \alpha_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-14 + 13} = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad \beta_1 = \sqrt[3]{-14 - 13} = \\ &= \sqrt[3]{-27} = -3, \text{ тоді} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 = -1 - 3 = -4 \\ x_2 &= \alpha_1 \varepsilon + \beta_1 \varepsilon^2 = -\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i\sqrt{3} \\ x_3 &= \alpha_1 \varepsilon^2 + \beta_1 \varepsilon = -\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - i\sqrt{3} \end{aligned} \right.$$

Тепер, повертаючись до заданого рівняння, маємо  $y = x - 3$  і

$$y_1 = -4 - 3 = -7, \quad y_2 = 2 + i\sqrt{3} - 3 = -1 + i\sqrt{3} \quad y_3 = 2 - i\sqrt{3} - 3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

**Відповідь.**  $y_1 = -7$ ,  $y_2 = -1 + i\sqrt{3}$   $y_3 = -1 - i\sqrt{3}$ .

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$x^3 - 6x + 4 = 0.$$



Розв'язання. Знайдемо  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 - 8 = -4$  ( $D > 0$ ).

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-2 + 2i}, \quad \beta = \sqrt[3]{-2 - 2i}, \quad \alpha\beta = 2.$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-2 + 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-2 + 2i} \Big|_{k=0} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i.$$

$$\beta = \sqrt[3]{-2 - 2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\beta_3 = \sqrt[3]{-2 - 2i} \Big|_{k=2} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i,$$

бо  $\alpha_1\beta_3 = 2$ .

Таким чином  $x_1 = \alpha_1 + \beta_3 = 1 + i + 1 - i = 2$ ,

$$x_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_3\varepsilon^2 = (1+i) \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (1-i) \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - \sqrt{3},$$

$$x_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_3\varepsilon = (1+i) \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (1-i) \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + \sqrt{3}.$$

**Відповідь.**  $x_1 = 2$ ,  $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$  - три дійсні різні корені.

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння

$$x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0.$$

Розв'язання  $p = -6$ ,  $q = 4\sqrt{2}$ ;  $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 8 - 8 = 0$  ( $D = 0$ )).

Тоді  $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} = \beta$ .

Звідки  $x_1 = \alpha + \beta = -2\sqrt{2}$ ,  $x_2 = x_3 = -\alpha = \sqrt{2}$ .

**Відповідь.**  $x_1 = -2\sqrt{2}$ ,  $x_2 = x_3 = \sqrt{2}$  - корені дійсні, два з яких рівні.

4)  $n = 4$  – загальне рівняння четвертого степеня з довільними комплексними коефіцієнтами та метод Феррарі його розв'язання.

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

Спочатку проведемо заміну  $y = x - \frac{a}{4}$ , отримаємо:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (13)$$

Далі виконаємо перетворення, ввівши допоміжний параметр  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + qx + r &= \left(x^2 + \frac{p}{2} + \lambda\right)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \lambda^2 - 2\lambda x^2 - p\lambda = \\ &= \left(x^2 + \frac{p}{2} + \lambda\right)^2 - \left[2\lambda x^2 - qx + \left(\lambda^2 + p\lambda - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

Тепер підберемо  $\lambda$  так, щоб вираз у квадратних дужках став повним квадратом, тобто потрібно виконання умови  $q^2 - 8\lambda\left(\lambda^2 + p\lambda - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0$ , або

$$\lambda^3 + p\lambda^2 - \left(r - \frac{p^2}{4}\right)\lambda - \frac{q^2}{8} = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) – кубічне рівняння з комплексними коефіцієнтами відносно параметра  $\lambda$ . Нехай  $\lambda_0$  - один із коренів цього рівняння, знайдений за вже відомою формулою (12) Кардано. При цьому многочлен у квадратних дужках має

двократний корінь  $x = \frac{q}{4\lambda_0}$  (за теоремою Вієта при  $x_1 = x_2$ ), тому рівняння набуде вигляду

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \lambda_0\right)^2 - 2\lambda_0\left(x - \frac{q}{4\lambda_0}\right)^2 = 0. \quad (15)$$

Воно розпадається на два квадратних рівняння

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{2\lambda_0}x + \frac{p}{2} + \lambda_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\lambda_0}} = 0; \\ x^2 + \sqrt{2\lambda_0}x + \frac{p}{2} + \lambda_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\lambda_0}} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язавши ці два квадратних рівняння, ми знайдемо всі чотири корені рівняння (13), а значить і загального рівняння четвертого степеня через радикали від коефіцієнтів  $p, q, r$ , які в свою чергу обчислюються через коефіцієнти  $a, b, c$  та  $d$ .

### Приклади розв'язання рівнянь 4-го порядку методом Феррарі:

**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$y^4 - 6y^3 + 10y^2 - 2y - 3 = 0.$$

*Розв'язання.* Заміна  $y = x - \frac{a}{4} = x + \frac{3}{2}$ , тоді

$$\begin{aligned} y^4 - 6y^3 + 10y^2 - 2y - 3 &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^4 - 6\left(x + \frac{3}{2}\right)^3 + 10\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(x + \frac{3}{2}\right) - 3 = \\ &= x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x + \frac{21}{16} = 0, \quad p = -\frac{7}{2}, \quad q = 1, \quad r = \frac{21}{16}. \end{aligned}$$

Умова (14) в цьому випадку виглядає так:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 - \left(r - \frac{p^2}{4}\right)\lambda - \frac{q^2}{8} = \lambda^3 - \frac{7}{2}\lambda^2 + \frac{7}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0, \quad a = -\frac{7}{2}, \quad b = \frac{7}{4},$$

$$c = -\frac{1}{8}.$$

Виконаємо ще одну заміну  $\lambda = t - \frac{a}{3} = t + \frac{7}{6}$ . Тоді

$$\left(t + \frac{7}{6}\right)^3 - \frac{7}{2}\left(t + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(t + \frac{7}{6}\right) - \frac{1}{8} = t^3 - \frac{7}{3}t - \frac{34}{27} = 0. \text{ Тепер}$$

$t^3 + pt + q = 0$ , де  $p = -\frac{7}{3}$ ,  $q = -\frac{34}{27}$ . Застосувавши формули Кардано, ма-

$$\text{ємо } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{34 \cdot 34}{4 \cdot 27 \cdot 27} - \frac{343}{27 \cdot 27} = \frac{34^2 - 4 \cdot 343}{2^2 \cdot 27^2} = \frac{1156 - 1372}{2^2 \cdot 27^2} = -\frac{2}{27}.$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} \alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{17}{27} + \sqrt{-\frac{2}{27}}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-17 + 3\sqrt{6}i}, \\ \beta = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-17 - 3\sqrt{6}i}. \end{cases}$$

Знову після громіздких перетворень отримаємо

$$t_0 = -\frac{2}{3}$$

$$(\text{перевірка } \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{14}{9} - \frac{34}{27} = -\frac{8}{27} + \frac{42}{27} - \frac{34}{27} = 0). \text{ Тому } \lambda_0 = -\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{1}{2}.$$

Далі маємо два рівняння:

$$\begin{cases} x^2 - x - \frac{3}{4} = 0, x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ x^2 + x - \frac{7}{4} = 0, x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Тоді остаточно за формулою  $y = x + \frac{3}{2}$  маємо:

$$y_1 = x_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1, y_2 = x_2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

$$y_3 = x_3 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{3}{2} = 1 + \sqrt{2}, \quad y_4 = x_4 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{3}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

**Відповідь.**  $y_1 = 1, y_2 = 3, y_3 = 1 + \sqrt{2}, y_4 = 1 - \sqrt{2}.$

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$y^4 - 4y^3 + 3y^2 + 2y - 1 = 0.$$

*Розв'язання.* Заміна  $y = x - \frac{a}{4} = x + 1$ , тоді

$(x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 2(x+1) - 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = 0$  - бікватратне рівняння, і можна знайти його корені інакше, а саме заміною  $x^2 = t$ . Тоді

$$t^2 - 3t + 1 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$1) \quad t_1 = x^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2, \quad x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

$$2) \quad t_2 = x^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2, \quad x_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Далі за формулою  $y = x + 1$  маємо:

$$y_{1,2} = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \end{cases} \quad y_{3,4} = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ 1 + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

**Відповідь.**  $y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, y_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, y_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, y_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$

Загальний підхід до розв'язання цього рівняння теж спрощується, дійсно, рівняння для  $\lambda$  має вигляд  $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{5}{4}\lambda = 0$  ( $q = 0$ ), або

$$\lambda \left( \lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4} \right) = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{1} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}. \text{ Нехай } \lambda_0 = \frac{1}{2}, \text{ тоді}$$

$$\begin{cases} x^2 - x + \left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = 0, x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \\ x^2 + x - 1 = 0, x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Далі те ж саме, що і вище.

**5)**  $n = 5$  - рівняння п'ятого порядку з дійсними коефіцієнтами, яке допускає розклад на множники.

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3 = 0.$$

*Розв'язання.* Розкладемо на множники:

$$\begin{aligned} x^4(x-1) + 2x^2(x-1) - 3(x-1) &= (x-1)(x^4 + 2x^2 - 3) = (x-1)(x^4 - x^2 + 3x^2 - 3) = \\ &= (x-1)(x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0. \end{aligned}$$

Тоді корені будуть:  $x_1 = 1, x_{2,3} = \pm 1, x_{4,5} = \pm i\sqrt{3}$ .

**Відповідь.**  $x_{1,2} = 1, x_3 = -1, x_{4,5} = \pm i\sqrt{3}$ .

Коментар. Квадратне рівняння вміли розв'язувати ще древні греки, але рівняння третього та четвертого порядків вдалось розв'язати в загальному вигляді лише в XVI столітті. Подальші спроби розв'язати в загальному вигляді рівняння з  $n \geq 5$  не увінчались успіхом, аж поки норвезький математик Нільс Генрік Абель строго довів в 1824 році припущення Руфіні, що рівняння з  $n \geq 5$  нерозв'язні в радикалах, тобто не існує формул для розв'язання через його

коефіцієнти загальних рівнянь п'ятого та вищих порядків. Але теорема Гаусса гарантує існування всіх  $n$  коренів такого рівняння. Останній приклад показує, що ми знайшли всі корені конкретного рівняння п'ятого порядку. Остаточну крапку в цьому питанні поставив геніальний французький математик-самородок Еварист Галуа, який в 1830 році визначив необхідні та достатні умови нерозв'язності в радикалах рівнянь з  $n \geq 5$ . Із них випливає, що можна вказати рівняння навіть з цілими коефіцієнтами ( $n \geq 5$ ), які нерозв'язні в радикалах, наприклад  $x^5 - 4x - 2 = 0$ . Для знаходження розв'язків таких рівнянь існує ціла низка наближених методів, які забезпечують будь-яку точність.

### 1.3 Побудова графіків деяких нестандартних функцій

Функції, їхні властивості та графіки можуть використовуватись для розв'язання інших задач, на перший погляд не пов'язаних з функціями. Можна сказати, що у таких випадках функції виступають математичними моделями або інструментами для вирішення інших завдань.

**Приклад 1.** Яке з чисел більше:  $\frac{2}{201}$  чи  $\ln \frac{101}{100}$ ?

*Розв'язання.* Для того, щоб відповісти на це питання, представимо задані числа у вигляді значень функцій  $y_1 = \frac{2x}{x+2}$  та  $y_2 = \ln(1+x)$  при  $x = 0,01$ . Розглянемо різницю цих функцій:  $y = y_2 - y_1$  та дослідимо її на монотонність.  $y = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ .  $D(y): x > -1$ .  $y' = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}$ . Критичними точками є  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$  та  $x_3 = -2$ , причому дві останні точки не входять до області визначення функції.  $y' \geq 0 \forall x \in D(y) \Rightarrow$  функція не спадає на всій області визначення, зокрема при  $x > 0$  функція зростає. Оскільки при  $x = 0$   $y = 0$ , а при  $x > 0$  функція зростає, значить  $y > 0$  для додатних значень аргументу, зокрема й для  $x = 0,01$ . Таким чином  $\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2} > 0$  в точці  $x = 0,01$ .

**Відповідь:**  $\ln \frac{101}{100} > \frac{2}{201}$ .

**Приклад 2.** Знайдіть усі розв'язки системи на множині дійсних чисел:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

*Розв'язання.* Спочатку віднімемо від першого рівняння друге:

$y^2 - x^2 = x^3 - 3x^2 + 2x - y^3 + 3y^2 - 2y$ . Після елементарних перетворень отримаємо:  
 $y^3 - 2y^2 + 2y = x^3 - 2x^2 + 2x$ . Можна сказати, що  $f(y) = f(x)$ , причому функція  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$  визначена  $\forall x \in R$  та монотонно зростає на всій області визначення, оскільки її похідна  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 > 0 \quad \forall x \in R$  (парабола вітками вгору,  $D < 0$ ). Таким чином  $f(x)$  є оборотною, оберненою до неї буде  $f(y)$ , їхні графіки симетричні відносно прямої  $y = x$ , а точки перетину графіків цих функцій, координати яких і є розв'язками системи, лежать на прямій  $y = x$ . Враховуючи ці міркування, розв'язання початкової системи зводиться до розв'язання набагато простішої системи:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ y = x \end{cases}$$

Підставимо друге рівняння у перше та після перетворень отримаємо:

$x^3 - 4x^2 + 2x = 0$  або  $x(x^2 - 4x + 2) = 0$ . Звідси маємо три корені:  $x_1 = 0$ ,  
 $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2}$ .

**Відповідь:**  $(0; 0)$ ,  $(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ ,  $(2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$ .

Цікавим нестандартним прикладом є складена функція, зовнішня та внутрішня функції якої є взаємно оберненими.

**Приклад 3.** Побудуйте графік функції  $y = \arcsin(\sin x)$ .

*Розв'язання.* Відомо, що функція  $y = \arcsin x$  обернена до  $y = \sin x$  на відрізку монотонності синуса  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Складена функція  $y = \arcsin(\sin x)$  визначена на всій числовій осі:  $x \in R$ , а її областю значень є відрізок  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Окрім того, ця функція є періодичною, оскільки залежить від періодичної функції, тому  $T = 2\pi$ . Розглянемо задану функцію на відрізку довжиною  $2\pi$ , а саме  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ . Тоді



$y = \arcsin(\sin x) = x$ , якщо  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , а на  $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$  функцію представимо за формулою зведення наступним чином:  $y = \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$ , тому що  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi - \frac{3\pi}{2} \leq \pi - x \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$ . Тепер можна записати аналітичний вираз заданої функції:

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{якщо } x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \end{cases} \text{ та побудувати її графік (рис. 1):}$$

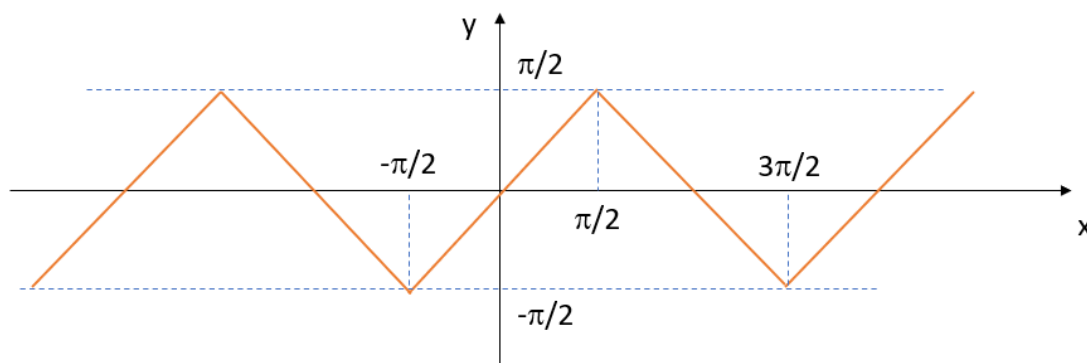


Рис.1

Ще одним нестандартним випадком є функція з криволінійною асимптотою. Розглянемо деяку функцію  $y = f(x)$ . Якщо існує така функція  $y = g(x)$ , що  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ , то графік функції  $g(x)$  є асимптотою графіка  $f(x)$ .

**Приклад 4.** Побудуйте схематичний графік функції

$$y = \begin{cases} e^{1/x}(1 + x^2), & \text{якщо } x \neq 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}.$$

*Розв'язання.* Знайдемо похідну  $y(x)$  для  $x \neq 0$ :  $y' = \frac{e^{1/x}}{x^2} (2x^3 - x^2 - 1)$ . Знак похідної залежить лише від знаку виразу в дужках.

Позначимо  $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 - 1$  та знайдемо її похідну:  $\varphi'(x) = 2x(3x - 1) = 0$ .  $\varphi'(x) > 0$  на  $(-\infty; 0) \cup (1/3; +\infty)$  та  $\varphi'(x) < 0$  на  $(0; 1/3)$ , причому  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$ ;  $\varphi(0) = -1$ ;  $\varphi(1/3) = -28/27$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ . Оскільки функція

$\varphi(x)$  неперервна і на інтервалі  $(\frac{1}{3}; +\infty)$  монотонна та змінює знак, значить на цьому інтервалі існує єдина точка, в якій  $\varphi(x) = 0$ . Цією точкою є  $x = 1$  і вона є точкою мінімуму функції  $y(x)$ :  $y_{\min}(1) = 2e$ .

Також  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$ , а для знаходження  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  розкладемо функцію в ряд Маклорена:

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad -\infty < x < \infty, \text{ тоді}$$

$$\begin{aligned} e^{1/x}(1+x^2) &= e^{1/x} + x^2 e^{1/x} = \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= x^2 + x + \frac{3}{2} + \frac{7}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{1/x}(1+x^2) - \left( x^2 + x + \frac{3}{2} + \frac{7}{6x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{6x} = 0$$

Висновок: парабола  $y = x^2 + x + \frac{3}{2}$  є асимптотою досліджуваного графіка на  $+\infty$ . Графік  $y(x)$  зображено на рис. 2.

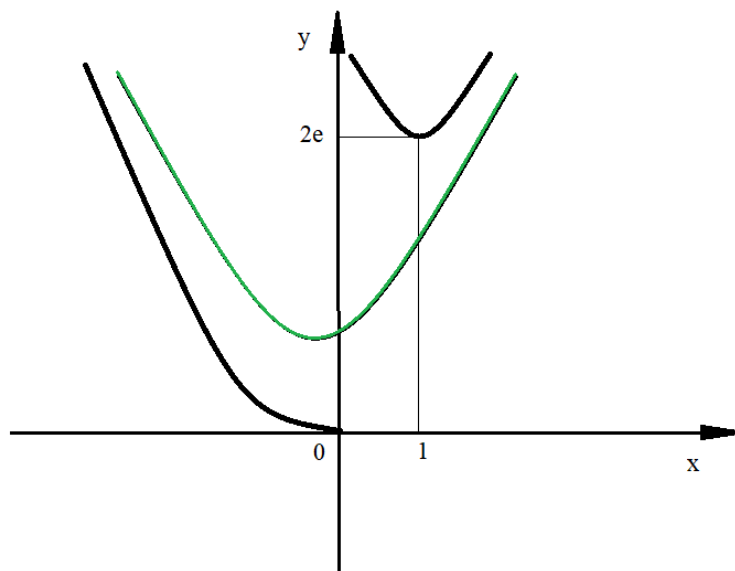


Рис.2

Для аналітичного задання функцій на площині використовують різні способи та системи координат (СК): явно, неявно та параметрично задані

функції, у прямокутній декартовій (ПДСК) або полярній (ПСК) системах координат. Вибір способу задання або системи координат у першу чергу пов'язаний з тим, що аналітичний запис функції має бути найпростішим з усіх можливих варіантів, що спрощує подальший аналіз та використання функціональної залежності. Також у деяких випадках зміна способу задання функції неможлива, наприклад, не будь-яку неявно задану функцію можна представити в явному вигляді. Розглянемо деякі особливості дослідження функцій та побудови їх графіка, заданих нестандартно.

Нехай аналітично функцію задано у ПДСК рівнянням у неявному вигляді:  $F(x; y) = 0$ . Для знаходження екстремумів такої функції слід знайти точки, у яких дотична до кривої паралельна осі  $OX$  або  $OY$ . Кутовий коефіцієнт дотичної  $k = -\frac{F'_x}{F'_y}$ , тому необхідною умовою точок екстремуму, у яких дотична паралельна осі  $OX$ , є такі точки, координати яких є розв'язками системи:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F'_x(x, y) = 0 \end{cases}. \text{ Нехай точка } (x_1, y_1) \text{ є таким розв'язком, причому } F'_y(x_1, y_1) \neq 0.$$

Достатніми умовами екстремуму є наступні:

якщо  $F''_{xx}(x_1, y_1) \cdot F'_y(x_1, y_1) > 0$ , то  $(x_1, y_1)$  – точка максимуму;

якщо  $F''_{xx}(x_1, y_1) \cdot F'_y(x_1, y_1) < 0$ , то  $(x_1, y_1)$  – точка мінімуму.

Аналогічно, необхідною умовою точок екстремуму, у яких дотична паралельна осі  $OY$ , є точки, координати яких є розв'язками системи:  $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ , причому  $F'_x(x_1, y_1) \neq 0$ . Достатні умови екстремуму:

якщо  $F''_{yy}(x_1, y_1) \cdot F'_x(x_1, y_1) > 0$ , то  $(x_1, y_1)$  – точка максимуму;

якщо  $F''_{yy}(x_1, y_1) \cdot F'_x(x_1, y_1) < 0$ , то  $(x_1, y_1)$  – точка мінімуму.

Окрім екстремальних точок графік неявно заданої функції може мати особливі точки: вузлову, ізольовану, точки повернення 1-го або 2-го роду та точки само-дотику. **Особливою** називають точку, координати якої  $(x_2, y_2)$  є розв'язком

системи: 
$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F'_x(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$
 Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в особливій точці невизначений. Нехай в особливій точці  $(x_2, y_2)$  усі частинні похідні 2-го порядку функції  $F$  не рівні одночасно нулеві. Складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}, \text{ тоді якщо}$$

$\Delta(x_2, y_2) < 0$ , то особлива точка є вузловою (подвійною, у ній можуть бути проведені дві дотичні) (рис. 3.1)

$\Delta(x_2, y_2) > 0$ , то особлива точка є ізольованою (рис. 3.2)

$\Delta(x_2, y_2) = 0$ , то особлива точка може бути точкою повернення 1-го (рис. 3.3) або 2-го роду (рис. 3.4), або ізольованою, або точкою самодотику (рис. 3.5)

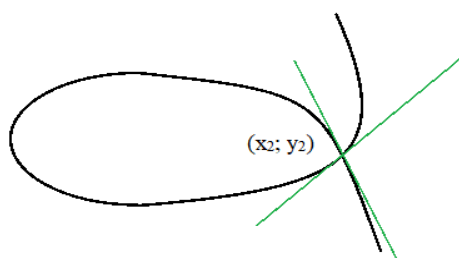


Рис. 3.1

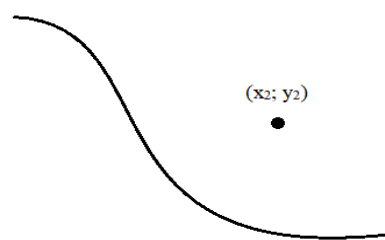


Рис. 3.2

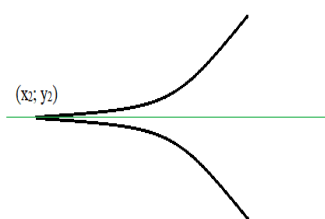


Рис. 3.3

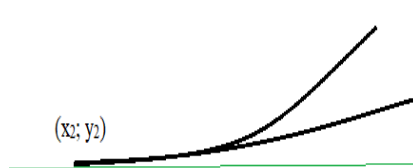


Рис. 3.4

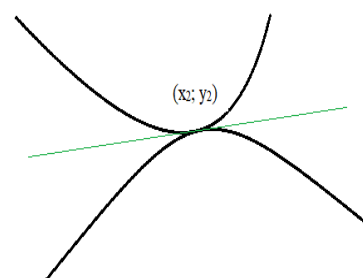


Рис. 3.5

Наявність подвійної точки у початку координат алгебраїчної кривої може бути встановлено, якщо у рівнянні відсутні вільний член та члени з першим степенем  $x$  та  $y$ . Тоді для знаходження рівнянь дотичних до кривої в особливій точці

прирівнюють до нуля ту частину рівняння кривої, яка містить доданки у найнижчих степенях.

**Приклад 4.** Дослідити функцію  $x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0$  та побудувати її графік.

*Розв'язання.*

**Області визначення та значень.** Функція задана неявно, проте її можна представити в явному вигляді. Скористаємось цим для знаходження області визначення, а решту аналізу проведемо з неявною формою  $F(x; y) = 0$ . Спочатку виділимо повний квадрат відносно  $y$ :  $(y^2 - 1)^2 = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow$

$|y^2 - 1| = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \Rightarrow$  підкореневий вираз  $x^4 - x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \forall x \in R$ , розкриємо модуль у лівій частині та виразимо  $y^2$ , а потім ще

раз добудемо квадратний корінь з лівих та правих частин рівностей  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} |y| = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, & |y| \geq 1, \quad \forall x \\ |y| = \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, & |y| < 1, \quad |x| \leq 1 \end{cases}, \quad \text{остаточно отримаємо:}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, & y \geq 1, \quad \forall x \\ y = -\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, & y \leq -1, \quad \forall x \\ y = \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, & 0 \leq y < 1, -1 \leq x \leq 1 \\ y = -\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}, & -1 < y < 0, -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Таким чином, графік складається з трьох частин: дві гілки, задані першим і другим рівняннями, верхня гілка для  $y \geq 1$ , нижня для  $y \leq -1$ ,  $x$  може набувати будь-яких значень. Між ними розташована центральна частина, задана третім та четвертим рівняннями:  $-1 < y < 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

**Симетрія графіка.** Якщо рівняння кривої не зміниться при заміні  $x$  на  $-x$ , крива симетрична відносно осі  $OY$ . Якщо рівняння кривої не зміниться при заміні  $y$  на  $-y$ , крива симетрична відносно осі  $OX$ . Досліджувана функція  $F(x; y) = x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0$  містить усі змінні в парних степенях, тому  $F(x; y) = F(-x; -y)$ , тому її графік симетричний відносно початку координат.

**Точки перетину з осями координат.** Точками перетину з віссю  $OX$  є розв'язки

системи:  $\begin{cases} F(x; 0) = 0 \\ F(x; y) = 0 \end{cases}$ , а з віссю  $OY$  -  $\begin{cases} F(0; y) = 0 \\ F(x; y) = 0 \end{cases}$ .

Для нашої функції:  $\begin{cases} x^4 - x^2 = 0 \\ x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \end{cases}$  та  $\begin{cases} 2y^2 - y^4 = 0 \\ x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \end{cases}$  обидві системи мають єдиний розв'язок  $(0; 0)$ .

**Асимптоти.** Для знаходження горизонтальних асимптот прирівнюють до нуля коефіцієнт при найвищому степені  $x$ , що входить у рівняння  $F(x; y) = 0$ . Якщо цей коефіцієнт сталий, як у нашому випадку, то горизонтальних асимптот немає. Аналогічно для вертикальних асимптот: коефіцієнт при найвищому степені  $y$  сталий, тож вертикальних асимптот також немає. Для знаходження похилих асимптот у рівнянні  $y$  заміняють на  $kx + b$ , прирівнюють до нуля коефіцієнти при двох найвищих степенях  $x$  й отриману систему розв'язують відносно  $k$  і  $b$ .  $x^4 + 2(kx + b)^2 - x^2 - (kx + b)^4 = 0$ . Найвищими степенями є  $x^4$  та  $x^3$ :  $x^4 + 2k^2x^2 + 4kxb + 2b^2 - x^2 - k^4x^4 - 4k^3x^3b - 6k^2x^2b^2 - 4kxb^3 - b^4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 - k^4 = 0 \\ 4k^3b = 0 \end{cases}$ , розв'язками системи є  $k = \pm 1, b = 0$ , тож маємо дві асимптоти  $y = x$  та  $y = -x$ .

**Екстремуми та особливі точки.** Знайдемо критичні точки, для цього обчислимо частинні похідні:  $F'_x = 4x^3 - 2x$ ;  $F'_y = -4y^3 + 4y$ . Координати точок, у яких дотичні до графіка паралельні осі абсцис, знайдемо з системи  $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F'_x(x, y) = 0 \end{cases}$ , а

осі ординат - з  $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ . Перша система виглядатиме так:

$$\begin{cases} x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{cases}, \text{ її розв'язками є координати точок: } (0; 0), (0; \pm\sqrt{2});$$

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right).$$

Загалом маємо сім критичних точок.  $F'_y(0, 0) = 0$ , тому ця точка особлива, її дослідимо згодом. Перевіримо достатні умови екстремуму:

знак добутку  $F''_{xx} \cdot F'_y = (12x^2 - 2) \cdot (-4y^3 + 4y)$  у решті критичних точок, але користуючись симетрією графіка проаналізуємо лише частину з них.

У точці  $(0; \sqrt{2})$   $F''_{xx} \cdot F'_y > 0$ , тому маємо  $y_{max}$ , у симетричній точці  $(0; -\sqrt{2})$  буде

$y_{min}$ . Точку  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$  позначимо  $M$ , в ній  $F''_{xx} \cdot F'_y < 0$ , тому маємо  $y_{min}$ , точка

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$  симетрична  $M$  відносно початку координат, значить у ній буде

$max$ . Точка  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$  симетрична  $M$  відносно осі  $OY$ , значить у ній також

буде  $min$ , а точка  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$  симетрична  $M$  відносно  $OX$ , тож у ній буде

$max$ . Тепер запишемо другу систему:  $\begin{cases} x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \\ -4y^3 + 4y = 0 \end{cases}$ , вона має лише

три розв'язки:  $(0; 0)$  та  $(\pm 1; 0)$ .  $F'_x(0, 0) = 0$ , як ми вже знаємо, ця точка особ-

лива. Визначимо знаки добутку  $F''_{yy} \cdot F'_x = (-12y^2 + 4) \cdot (4x^3 - 2x)$  в точках  $(\pm 1; 0)$ .

$F''_{yy} \cdot F'_x > 0$  в  $(1; 0)$ , тому маємо  $x_{max}$ , а  $(-1; 0)$  симетрична попередній відносно

осі  $OY$ , тому в ній  $x_{min}$ . Тепер повернемося до точки  $(0; 0)$ . Переконаємось, що

вона є розв'язком системи  $\begin{cases} x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0 \\ 4x^3 - 2x = 0 \\ 4y - 4y^3 = 0 \end{cases}$ , при цьому  $\Delta =$

$\begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{vmatrix}$ ;  $\Delta(0; 0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 < 0$ , тому в початку координат

графік має вузлову точку. Знайдемо рівняння дотичних у цій точці:  $2y^2 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2} y$ .

Враховуючи результати проведеного аналізу побудуємо графік функції (рис.

4). Тепер розглянемо особливості дослідження параметрично заданих функ-

цій:  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Точка  $(x_0, y_0)$  є особливою точкою кривої, якщо при

$t = t_0$   $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ , та  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ .

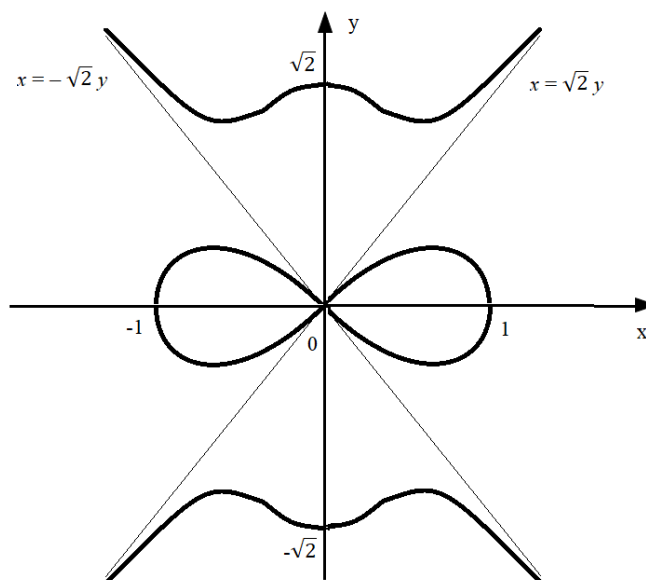


Рис. 4

Точки, у яких дотична паралельна осі абсцис, знаходимо з умови:  $y'_t = 0$ , а  $x'_t \neq 0$ . Аналогічно, точки, у яких дотична паралельна осі ординат:  $x'_t = 0$ , при  $y'_t \neq 0$ . Подвійні точки кривої – точки, у яких перетинаються дві вітки кривої, що мають різні дотичні. Нехай  $(x_1, y_1)$  – подвійна точка, тоді існують два значення параметра  $t_1 \neq t_2$  такі, що  $\begin{cases} x_1 = x(t_1) = x(t_2) \\ y_1 = y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$ . Розв'язуємо цю систему та складаємо рівняння дотичної:  $y - y_0 = \frac{y'(t)}{x'(t)}(x - x_0)$ . Якщо кутовий коефіцієнт  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$  при значеннях параметра  $t = t_1$  та  $t = t_2$  набуде різних значень, то крива має подвійну точку. Для знаходження точок повернення перевіряємо виконання таких умов:  $\begin{cases} x'_t = 0 \\ y'_t = 0 \end{cases}$ , причому  $x_t''' y_t'' - y_t''' x_t'' \neq 0$ , тобто у точці повернення кутовий коефіцієнт кривої невизначений.

**Приклад 5.** Дослідити функцію  $\begin{cases} x = \frac{2}{\cos^3 t} \\ y = 2tg^3 t \end{cases}$  та побудувати її графік.

*Розв'язання.*



**Області визначення та значень.** Для знаходження області визначення дослідимо функцію  $x = \frac{2}{\cos^3 t}$  та побудуємо її графік для  $-\pi \leq t \leq \pi$  (рис. 5):

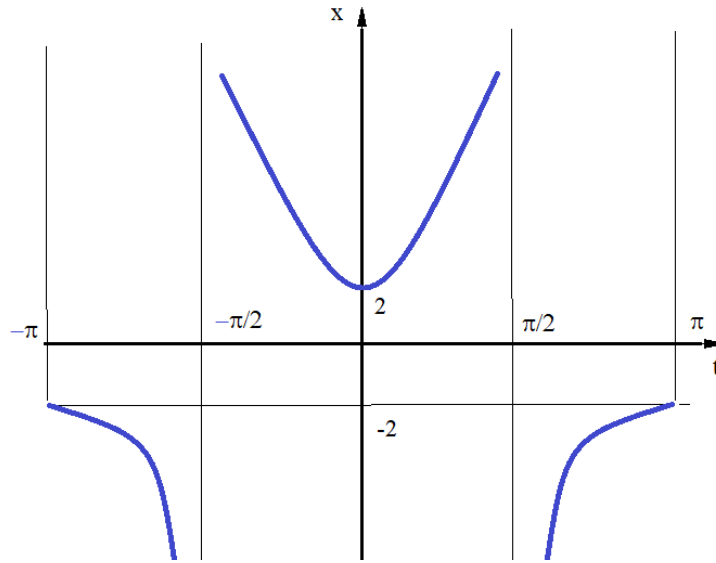


Рис. 5

Бачимо, що  $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ . Область значень, виходячи з того, що  $y = 2tg^3 t$ ,  $y \in (-\infty; +\infty)$ .

**Симетрія графіка.** Функція  $x(t)$  періодична з періодом  $T_1 = 2\pi$ , а  $y(t) - T_2 = \pi$ , тому  $y(x)$  має період  $T = 2\pi$ , її значення розглянемо для  $-\pi \leq t \leq \pi$ . Але за рахунок симетрії графіка його побудову можна спростити: спочатку накреслимо частину графіка для  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ , у другій чверті ( $\frac{\pi}{2} < t \leq \pi$ )  $\cos t$  та  $tg t$  від'ємні, тому графік  $y(x)$  симетричний першій частині відносно початку координат. Оскільки функція  $x(t)$  парна, а  $y(t)$  – непарна, то графік  $y(x)$  симетричний відносно осі  $OX$ . Віддзеркалюємо перші дві частини відносно  $OX$ , отримаємо частину графіка для значень параметра  $-\pi \leq t \leq 0$ .

**Точки перетину з осями координат.** Для знаходження точок перетину графіка з віссю абсцис розв'яжемо рівняння  $y(t) = 0$ :  $tg t = 0$  при  $-\pi \leq t \leq \pi \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \pi, t_3 = -\pi$ , та підставимо ці значення параметра в  $x(t)$ :  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = -2$  відповідно, тобто маємо дві точки:  $(2; 0)$  та  $(-2; 0)$ . Аналогічно знаходять точки перетину графіка з віссю ординат:  $x(t) = 0$ , проте наш графік таких точок не має.

**Екстремуми та особливі точки.**  $Y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \sin t > 0$  при  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ , функція зростає, причому при  $t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$   $x \rightarrow +\infty$  та  $y \rightarrow +\infty$ . Екстремумів немає, вертикальних та горизонтальних асимптот немає.

$Y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\cos^5 t}{6 \sin t} > 0$  при  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ , графік функції вгнутий.

Особливі точки знаходимо з системи  $\begin{cases} x'_t = 0 \\ y'_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6 \sin t}{\cos^4 t} = 0 \\ \frac{6 t g^2 t}{\cos^2 t} = 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = \pi \Rightarrow$

отримаємо дві точки:  $(2; 0)$  та  $(-2; 0)$ , причому  $x'''_t y''_t - y'''_t x''_t \neq 0$  у цих точках, тому це дві точки повороту.

Враховуючи результати дослідження побудуємо графік функції (рис. 6)

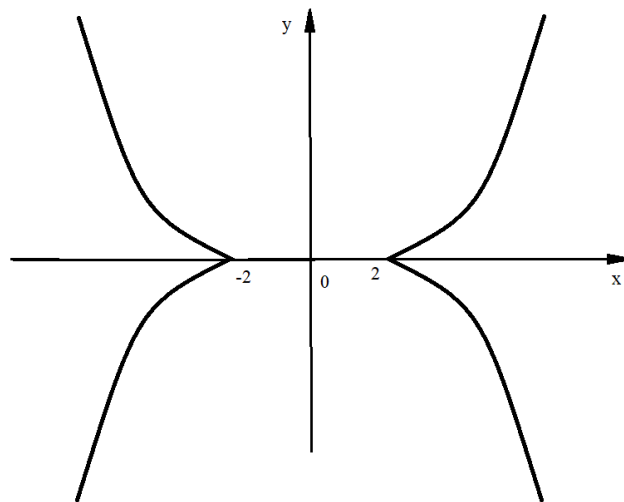


Рис. 6

#### 1.4 Послідовності Фібоначчі як приклад поворотної послідовності

Італійський математик середньовіччя Леонардо Пізанський (XII століття, пізніше широко відомий як Фібоначчі), мабуть, і гадки не мав, що його доволі проста задача про розмноження пар кроликів за певних умов, призведе до низки досліджень та обговорень, які не вщухають і до наших днів. Причина такої популярності полягає в тому, що числова послідовність, за допомогою якої розв'язується задача про кроликів, дуже тісно пов'язана з

фундаментальним числом в математиці, і не тільки в ній, а саме з числом  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ , яке називають золотим перерізом. Подальші дослідження, серйозні і спекулятивні, показали зв'язок та різного роду інтерпретації послідовності чисел Фібоначчі: в геометрії – золотий переріз, прямокутники Фібоначчі, спіраль Архімеда, множини відповідних кіл; в живій та неживій природі – формування крони дерев, форма пелюстків деяких квітів, розташування зерен в соняшнику, геометрія деяких органів тіла людини, молюсків, візерунки на зрізах каміння; в архітектурі, мистецтві, фінансовій сфері; в фізиці та астрономії – розподіл планет нашої Сонячної системи, формування рукавів спіральних галактик і тому подібне. Як бачимо, спектр спроб застосування дуже широкий. Це показує що ряд процесів в природі відбувається по спорідненим законам із законами побудови числової послідовності Фібоначчі.

За визначенням:  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  - послідовність Фібоначчі, якщо  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = f_1 + f_0, \dots, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , рекурентне співвідношення, яке показує, що ця послідовність є поворотною послідовністю другого порядку. Маємо:  $\{f_n\} = \{0, 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$ . Ясно, що ця послідовність не являється арифметичною або геометричною прогресією. Перше питання при дослідженні цієї послідовності – як знайти її загальний член  $f_n$ ? Нагадаємо коротко лише кілька основних широко відомих методів його обчислення.

**1.4.1 Знаходження  $f_n$  - як суми двох геометричних прогресій** – один із найпростіших, можна сказати, шкільний метод.

Нехай  $f_n = u_1 q^n + v_1 p^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , де  $q, p$  - знаменники прогресії. Тоді, із рекурентного співвідношення, маємо:

$$u_1 q^{n+1} + v_1 p^{n+1} = u_1 q^n + v_1 p^n + u_1 q^{n-1} + v_1 p^{n-1}, \text{ або}$$

$$\begin{cases} u_1 q^{n-1}(q^2 - q - 1) + v_1 p^{n-1}(p^2 - p - 1) = 0 \\ u_1 + v_1 = 0, u_1 q + v_1 p = 1 - \text{початкові умови.} \end{cases}$$

Неважко показати, що необхідні та достатні умови виконання цієї системи є наступні:

$$(1) \ p \text{ та } q - \text{це різні корені рівняння } x^2 - x - 1 = 0, \quad (2) \begin{cases} u_1 + v_1 = 0 \\ u_1 q + v_1 p = 1. \end{cases}$$

$$\text{Тобто: } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ p = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \end{cases}; \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ v_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}, \text{ де } \varphi - \text{золотий переріз.}$$

Таким чином, ми отримали формулу Жака Біне:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( (\varphi)^n - \left( -\frac{1}{\varphi} \right)^n \right), \text{ де } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

#### 1.4.2 Комбінаторний метод

Розглянемо трикутних Паскаля в зображеній на рис. 7 системі координат.

Тут точки у вузлах прямокутної сітки зображають  $C_x^y$ .

$$C_x^y = C_n^k, \text{ де } \begin{cases} x = n \\ y = k, \end{cases} n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Зауважимо, що

$$f_0 = 0,$$

$$f_1 = 1,$$

$$f_2 = C_1^0 = 1,$$

$$f_3 = C_2^0 + C_1^1 = 2,$$

$$f_4 = C_3^0 + C_2^1 = 3,$$

$$f_5 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 = 5,$$

....

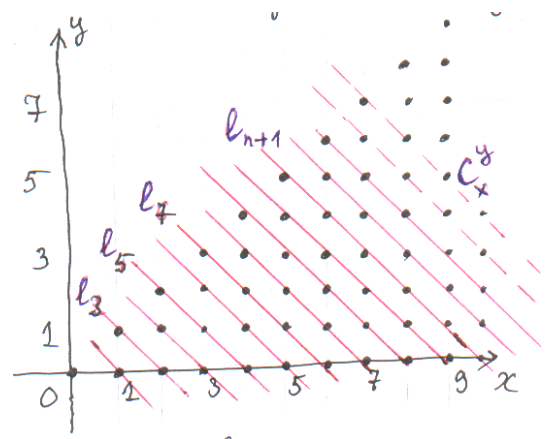


Рис. 7

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_{n-k}^k, \text{ де } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \text{ціла частина (за індукцією).}$$

Тут лінія  $l_{n+1}$  - лінія підсумовування для  $f_{n+1}$  з відповідними значеннями

$$C_x^y, \text{ а саме: } f_{n+1} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_{n-k}^k - \text{формула загального}$$

члена через біноміальні коефіцієнти.

### 1.4.3 Метод характеристик

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  - поворотна послідовність другого порядку,  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$  - її рекурентне співвідношення, тому  $\lambda^2 = \lambda + 1$ , тобто  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  - характеристичне рівняння. Корені його:  $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , де  $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , тоді

$$\begin{cases} f_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n \\ f_0 = 0; \quad f_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Ясно, що  $f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  - золотий переріз. Крім того, формула

Біне має аналітичне продовження  $f_z = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^z - \frac{\cos \pi z}{\varphi^z} \right)$ ,  $f_{z+1} = f_z + f_{z-1}$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

### 1.4.4 Метод твірної функції

Можна показати, що функція

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(x_1-x)(x-x_2)} = \left| \begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \\ x_1 x_2 = -1 \end{array} \right| = \frac{x}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x_1(1-\frac{x}{x_1})} - \frac{1}{x_2(1-\frac{x}{x_2})} \right) = \\ &= \frac{x}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x_1} \left( 1 + \frac{x}{x_1} + \left( \frac{x}{x_1} \right)^2 + \dots \right) - \frac{1}{x_2} \left( 1 + \frac{x}{x_2} + \left( \frac{x}{x_2} \right)^2 + \dots \right) \right) = \frac{x}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) x + \left( \frac{1}{x_1^3} - \frac{1}{x_2^3} \right) x^2 + \dots \right) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \end{aligned}$$

де  $\{f_n\}$  - послідовність Фібоначчі,  $\begin{cases} \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1 \\ \left| \frac{x}{x_2} \right| < 1 \end{cases}$ , тобто  $|x| < |x_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $g(x)$ -твірна

функція. Коефіцієнти її розкладу в ряд Маклорена і є шукані числа Фібоначчі.

#### 1.4.4 Матричний метод

Розглянемо матрицю  $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , ясно, що  $F_1 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix}$ . Використовуючи

тотожності для чисел Фібоначчі:  $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$ ,  $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$ , отри-

$$\text{маємо } F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Дійсно: } F_2 = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2^2 + f_1^2 & f_2 f_1 + f_1 f_0 \\ f_1 f_2 + f_0 f_1 & f_1^2 + f_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Аналогічно: } F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\text{Маємо наслідок: } \det F_n = (-1)^n = f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2.$$

#### 1.4.5 Формула континуант

Справедлива також формула континуант:

$$f_{n+1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = \det \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \dots & 0 \\ i & 1 & i & \dots & 0 \\ 0 & i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n},$$

де  $i^2 = -1$ ,  $i$  - уявна одиниця,  $n \geq 2$ .

Розглянемо тепер декілька прикладів.

**Приклад 1.**  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} : x_0 = 1, x_1 = 3, x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, n = 1, 2, \dots$

*Розв'язання.* Маємо послідовність  $\{x_n\} = \{1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots\}$ . Як і раніше:

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$ .  $C_1$  та  $C_2$  знайдемо з си-

стеми  $\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 = 1 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = x_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, C_2 = 1 - C_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Тобто

маємо  $x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$

**Відповідь:**  $x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \varphi^{n+1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}$ .

**Приклад 2.** Нехай  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  - поворотна послідовність другого порядку.

Тоді рекурентна формула в загальному випадку має вид:  $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$ .

Нехай  $\alpha = -\frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{3}, x_0 = 0, x_1 = 2$ , тоді  $x_{n+1} = -\frac{1}{6} x_n + \frac{1}{3} x_{n-1}$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння:  $6\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{2}{3}$ . Тоді

$$\begin{cases} x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \\ C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 \cdot \frac{1}{2} + C_2 \left(-\frac{2}{3}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -C_2 = \frac{12}{7}.$$

**Відповідь:**  $x_n = \frac{12}{7} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right)$ .

**Приклад 3.**  $\alpha = 4, \beta = -4, x_0 = 1, x_1 = 4$ ,  $x_{n+1} = 4x_n - 4x_{n-1}$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння:  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$

- корені рівні (кратні), тому  $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$ ,

$$\text{де } \begin{cases} C_1 + 0 \cdot C_2 = 1, \\ 2C_1 + 2C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1$$

**Відповідь:**  $x_n = 2^n + n 2^n = (1+n)2^n$ .

**Приклад 4.**  $\alpha = 2, \beta = -2, x_0 = 1, x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння:  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$ ,

$i^2 = -1$ ,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1(1+i) + C_2(1-i) = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

**Відповідь:**  $x_n = \frac{1}{2}((1+i)^n + (1-i)^n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4}.$

**Приклад 5.** Розглянемо числа типу трибоначчі, тобто поворотні послідовності третього порядку, а саме:  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ :  $x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + \beta x_n + \gamma x_{n-1}$  - рекурентне співвідношення. Якщо  $\alpha = \beta = \gamma = 1, x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1$ , то  $\{x_n\}$  - називається послідовністю чисел трибоначчі.

*Розв'язання.* Для отримання формули чисел  $x_n$  типу формули Біне чисел Фібоначчі, треба розв'язати кубічне характеристичне рівняння  $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ , відповідні викладки достатньо громіздкі, приведемо тут остаточний результат:

$$x_n = \left[ 3c \frac{\left(\frac{1}{3}(a+b+1)\right)^n}{c^2 - 2c + 4} \right], \text{ де } \begin{cases} a = \left(19 + 3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ b = \left(19 - 3\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ c = \left(586 + 102\sqrt{33}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $\{x_n\} = \{0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, \dots\}.$

**Приклад 6.**  $\alpha = 2, \beta = 5, x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1$ , тобто  $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 5x_n - 6x_{n-1}.$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння:  $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$ . Тому  $x_n = C_1 + C_2(-2)^n + C_3 3^n, x_0 = x_1 = 0, x_2 = 1,$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{6}, C_2 = \frac{1}{15}, C_3 = \frac{1}{10}, x_n = -\frac{1}{6} + \frac{1}{15}(-2)^n + \frac{1}{10}3^n,$$

**Відповідь:**  $\{x_n\} = \{0, 0, 1, 2, 9, 22, \dots\}.$



**Приклад 7.** Розглянемо послідовність  $x_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ .  $\{x_n\} = \{0, 1, 5, 14, 30, 55, \dots\}$ .

*Розв'язання.* Знайдемо  $x_n$  як загальний член поворотної послідовності четвертого порядку. Визначимо рекурентне співвідношення для  $x_{n+4}$ . Маємо:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1)^2 = x_n + n^2 + 2n + 1, \\ x_{n+2} = x_{n+1} + (n+2)^2 = x_n + n^2 + 4n + 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2n + 3, \\ x_{n+3} = 2x_{n+2} - x_{n+1} + 2n + 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n + 2, \\ x_{n+4} = 3x_{n+3} - 3x_{n+2} + x_{n+1} + 2. \end{cases}$$

Відніmemo кожне друге рівняння від першого, маємо:

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n.$$

Характеристичне рівняння:  $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4 = 0$ . Воно має

один кратний корінь  $\lambda_{1,2,3,4} = 1$ , тому:  $x_n = C_1 + C_2n + C_3n^2 + C_4n^3$ , де

$$\begin{cases} C_1 = x_0 = 0, \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1, \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 5, \\ C_1 + 3C_2 + 9C_3 + 27C_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \frac{1}{6}, \\ C_3 = \frac{1}{2}, \\ C_4 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $x_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Знайдемо тепер частинні суми та границі частинних сум деяких розглянутих нами послідовностей.

**Приклад 8.** Знайти  $\sigma_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$ , де  $\{f_n\}$  - послідовність Фібоначчі.

*Розв'язання.*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (q^n - p^n), \text{ тобто } \sigma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n p^k \right) =$$

$$= \left| S_n = \frac{b_1(1-q^{n+1})}{1-q}, \quad \begin{matrix} q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, & pq = -1 \\ p = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}, & 1-q = p \\ & 1-p = q \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-q^{n+1}}{p} - \frac{1-p^{n+1}}{q} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(q^{n+2} - p^{n+2} - (q - p)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(q^{n+2} - p^{n+2} - \sqrt{5}).$$

**Відповідь:**

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^{n+2} - \left( -\frac{1}{\varphi} \right)^{n+2} \right) - 1.$$

**Приклад 9.** Нехай  $x_n = \frac{12}{7} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n - \left( -\frac{2}{3} \right)^n \right)$ ,  $\{x_n\} = \{0, 2, -\frac{1}{3}, \frac{13}{18}, \dots\}$ .

Знайти  $\sigma_n$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{12}{17} \left( \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2} \right)^k - \sum_{k=0}^n \left( -\frac{2}{3} \right)^k \right) = \frac{12}{17} \left( \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - \left( -\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 + \frac{2}{3}} \right) = \\ &= \frac{12}{17} \left( 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{5} \left( 3 - 3 \left( -\frac{2}{3} \right) \right)^{n+1} \right) = \frac{12}{17} \left( \frac{7}{5} - \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{5} \left( -\frac{2}{3} \right)^n \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{12}{17} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{5} - \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{5} \left( -\frac{2}{3} \right)^n \right) = \frac{12}{17} \cdot \frac{7}{5} = \frac{84}{85}.$$

**Відповідь:**  $\frac{84}{85}$ .

**Приклад 10.**  $x_n = (n+1)2^n$ ,  $\{x_n\} = \{1, 4, 12, 32, \dots\}$ .

*Розв'язання.*

$$\begin{cases} \sigma_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^n, \\ 2\sigma_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \dots + (n+1) \cdot 2^{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Віднімемо, одержимо: } -\sigma_n &= 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - (n+1) \cdot 2^{n+1} = \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - (n+1) \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\sigma_n = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = n2^{n+1} + 1$ .

**Приклад 11.**  $\{x_n\} = \{1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, \dots\}$ ,  $x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}$ ,

$$x_n = \frac{1}{2} \left( (1+i)^n + (1-i)^n \right) = \left( \sqrt{2} \right)^n \cos \frac{n\pi}{4}.$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left( (1+i)^k + (1-i)^k \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1-(1+i)^{n+1}}{1-(1+i)} + \frac{1-(1-i)^{n+1}}{1-(1-i)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1-(1+i)^{n+1}}{-i} + \frac{1-(1-i)^{n+1}}{i} \right) = \\ &= \frac{(1+i)^{n+1} - (1-i)^{n+1}}{2i} = (\sqrt{2})^{n+1} \left( \frac{e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}}{2i} \right) = (\sqrt{2})^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}.\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\sigma_n = (\sqrt{2})^{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi}{4}$

На закінчення, розглянемо послідовність, пов'язану з послідовністю Фібоначчі, а саме:  $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = ab, x_3 = ab^2, \dots, x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2}, n \geq 2$ . Ця послідовність не являється поворотною, маємо:  $\{x_n\} = \{a, b, ab, ab^2, a^2b^3, a^3b^5, a^5b^8, \dots\} = \{a, b, ab, a^{f_2}b^{f_3}, a^{f_3}b^{f_4}, a^{f_4}b^{f_5}, a^{f_5}b^{f_6}, \dots\}$ , де  $f_n$  - послідовність Фібоначчі.

$$\begin{aligned}\text{Тоді } x_n &= a^{f_{n-1}} b^{f_n} = a^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^{n-1} - \left( -\frac{1}{\varphi} \right)^{n-1} \right)} b^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi^n - \left( -\frac{1}{\varphi} \right)^n \right)} = \left| \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \\ &= a^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right)} b^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)}\end{aligned}$$

## 1.5 Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Відшукування сум рядів

### 1.5.1 Застосування формули Муавра, формули Ейлера та бінома Ньютона

Метод полягає в застосуванні відомих формул

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi = e^{in\varphi},$$

а також формули суми геометричної прогресії та бінома Ньютона.

**Приклад 1.** Знайти

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos k\varphi, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

*Розв'язання.* Маємо

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 2\varphi + \dots + \frac{1}{2^n} \cos n\varphi.$$

Позначимо

$$Q_n = \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \dots + \frac{1}{2^n} \sin n\varphi.$$

Тоді

$$\begin{aligned} S_n + iQ_n &= 1 + \frac{1}{2}(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{1}{4}(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^n}(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = \\ &= 1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2\left(1 - \frac{z^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}{2 - z} = \\ &= \frac{(2^{n+1} - z^{n+1})\left(2 - \frac{1}{z}\right)}{2^n(2 - z)\left(2 - \frac{1}{z}\right)} = \\ &= \frac{2^{n+2} - 2^{n+1}(\cos \varphi - i \sin \varphi) - 2(\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi) + \cos n\varphi + i \sin n\varphi}{2^n(4 - 4 \cos \varphi + 1)}, \end{aligned}$$

де  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ;  $\frac{1}{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ , тоді

$$\begin{aligned} S_n = \operatorname{Re}(S_n + iQ_n) &= \frac{2^{n+2} + \cos n\varphi - 2 \cos(n+1)\varphi - 2^{n+1} \cos \varphi}{2^n(5 - 4 \cos \varphi)} = \\ &= \frac{1}{5 - 4 \cos \varphi} \left( 4 - 2 \cos \varphi - \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n+1)\varphi + \frac{1}{2^n} \cos n\varphi \right), \end{aligned}$$

далі

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2(2 - \cos \varphi)}{5 - 4 \cos \varphi}.$$

Аналогічно знаходимо  $Q_n = \operatorname{Im}(S_n + iQ_n)$ .

**Відповідь:**  $S = \frac{2(2 - \cos \varphi)}{5 - 4 \cos \varphi}$ .

**Приклад 2.** Знайти

$$S_n = C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \dots$$

*Розв'язання.* Розглянемо  $1 + i\frac{1}{\sqrt{3}} = z = \begin{vmatrix} x = 1 & \rho = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} & \varphi = \frac{\pi}{6} \end{vmatrix} =$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ , тоді  $\left(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n$ . По формулі бінома:

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n &= 1^n + C_n^1 \frac{i}{\sqrt{3}} + C_n^2 \frac{i^2}{3} + C_n^3 \frac{i^3}{3\sqrt{3}} + C_n^4 \frac{i^4}{9} + C_n^5 \frac{i^5}{9\sqrt{3}} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} C_n^1 i - \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{3} C_n^3 \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9} C_n^4 + \frac{1}{9} C_n^5 \frac{i}{\sqrt{3}} - \dots \equiv \\ &\equiv \frac{2^n}{\sqrt{3}^n} \left( \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left( C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^3 + \frac{1}{9} C_n^5 - \frac{1}{27} C_n^7 + \dots \right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} S_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}^n} \sin \frac{n\pi}{6} \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S_n = \frac{2^n \sin \frac{n\pi}{6}}{3^{\frac{n-1}{2}}}$ .

**Приклад 3.** Обчислити  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = Q(q, x)$ , при  $|q| < 1$ .

*Розв'язання.* Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{ix})^n = \frac{qe^{ix}}{1 - qe^{ix}} = T,$$

бо за умовою  $|qe^{ix}| = |q||e^{ix}| = |q| \cdot 1 < 1$ , далі:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx + i \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = S(q, x) + iQ(q, x) = \\ &= \frac{q(\cos x + i \sin x)}{(1 - q \cos x) - i q \sin x} = \frac{q(\cos x + i \sin x)(1 - q \cos x + i q \sin x)}{(1 - q \cos x)^2 + (q \sin x)^2} = \\ &= \frac{q \cos x - q^2 + i q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x} = \frac{q \cos x - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos x} + i \frac{q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = Q(q, x) = \frac{q \sin x}{1 + q^2 - 2q \cos x}$ .

### 1.5.2 Застосування визначеного інтеграла, зведення до обчислення границь відповідних інтегральних сум

Розглянемо послідовність  $\sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ . Використовуючи послідовність Ейлера  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ , можна показати, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

Отримаємо цей результат інакше. Розглянемо функцію  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \in [1; 2]$ .

Розіб'ємо  $[1; 2]$  на  $n$  рівних частин  $\{x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}, x_2 = 1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n}, \dots, x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2\}$ ,  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ .

Тоді

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2.$$

#### Приклад 1.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}, \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

*Розв'язання.* Розглядаючи функцію  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  і точки поділу  $[0; 1]$   $\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\}$ , маємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S = \ln(1 + \sqrt{2})$

### 1.5.3 Використання функціональних рядів з дійсними та комплексними членами, їх інтегрування та диференціювання

**Приклад 1.** Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n n!} x^n = S(x).$$

*Розв'язання.* Ряд збігається рівномірно і абсолютно на  $\mathbb{R}$ . Використаємо розклад  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Маємо:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} + e^{\frac{x}{2}} = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m + \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k + e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$

**Приклад 2.** Знайти

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

*Розв'язання.* Використаємо розклад

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cos x = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

**Приклад 3.** Диференціюючи ряд знайти його суму:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

*Розв'язання.* Ясно, що при  $x \in [-1 + \omega, 1 - \omega]$ ,  $\omega > 0$  можна цей ряд двічі диференціювати, маємо:  $|x| < 1$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2n x^{2n-1}}{n(2n-1)}; \quad S''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-1) x^{2n-2}}{2n-1} = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = 2(1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots) = \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Тоді

$$S'(x) = \int_0^x \frac{2dx}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = 2 \operatorname{arctg} x, \quad |x| < 1, \quad \text{далі}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \int_0^x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u \\ dx = dv \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{array} \right| = \\ &= 2x \operatorname{arctg} x \Big|_0^x - 2 \int_0^x \frac{x dx}{1+x^2} = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2), \end{aligned}$$

$|x| < 1$ , при  $x = \pm 1$  ряд теж збіжний (застосовуючи граничний перехід).

**Відповідь:**  $S(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$ ,  $|x| \leq 1$ .

**Приклад 4.** Знайти суми рядів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}.$$

*Розв'язання.* Для цього знайдемо суму ряду  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = S(x)$ .

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!} = e^{e^{ix}} = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} e^{i \sin x} = \\ &= e^{\cos x} (\cos(\sin x) + i e^{i \cos x} (\sin(\sin x))) = \operatorname{Re}(S(x)) + i \operatorname{Im}(S(x)). \end{aligned}$$

Але



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!},$$

$$(x \in \mathbb{R})$$

**Відповідь:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} (\cos(\sin x)); \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x} (\sin(\sin x)).$$

**Приклад 5.** Обчислити суми рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n}.$$

*Розв'язання.* Розглянемо в  $\mathbb{C}$  розклад

$$\ln(1 - z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{при } |z| < 1.$$

Підставимо  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , маємо:  $|\rho| < 1$ ,

$$\begin{aligned} \ln(1 - \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)) &= \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n\varphi}{n} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \sin n\varphi}{n}, \end{aligned}$$

або

$$\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2) - i \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1 - \rho \cos \varphi} = -\mathcal{P} - i\mathcal{Q}.$$

Тобто

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos n\varphi}{n} &= -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \sin n\varphi}{n} &= \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{1 - \rho \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Якщо  $0 < \varphi \leq \pi$ , то при  $\rho = 1$  обидва ряди збіжні, а значить за теоремою Абеля можна перейти до границі при  $\rho \rightarrow 1 - 0$  (справа), тоді маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

**Відповідь:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi - \varphi}{2}$

#### 1.5.4 Застосування розвинення в ряд Фур'є

Розглянемо  $2l$  періодичну функцію  $f(x)$ , що на  $x \in [-l; l]$  задовольняє всім умовам теореми Діріхле. Тоді  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f^*(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Використовуючи цей розклад при певних значеннях невідомого  $x$ , отримуємо суми деяких числових рядів.

**Приклад 1.** Функцію  $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  на  $x \in (-\pi; \pi)$ , розкласти

в ряд Фур'є. Знайти суму ряду Лейбніца

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

*Розв'язання.*  $f(x)$  – непарна. Ряд Фур'є має вигляд

$$f^*(x) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

тоді  $x = \frac{\pi}{2}$  точка неперервності  $f(x)$ , тому, маємо

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \Rightarrow S = \frac{\pi}{4}.$$

**Відповідь:**  $S = \frac{\pi}{4}$ .

**Приклад 2.** Функцію  $f(x) = x^2$  на  $x \in (-\pi; \pi)$  розкласти в ряд Фур'є. Знайти суми

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

*Розв'язання.*  $f(x)$  – парна, її ряд Фур'є:

$$f^*(x) \cong \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

1)  $x = \pi$  – точка неперервності, тому маємо рівність

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n\pi}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\pi^2}{6}.$$

2)  $x = 0$  – точка неперервності, тоді

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} - 4S_2, \quad \text{звідки } S_2 = \frac{\pi^2}{12}.$$

3) Із рівності

$$S_1 + S_2 = 2S_3 \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Відповідь:**  $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $S_2 = \frac{\pi^2}{12}$ ,  $S_3 = \frac{\pi^2}{8}$ .

**Приклад 3.** Розкласти  $f(x) = x(\pi - x)$  в ряд синусів на  $x \in (0; \pi)$ . Знайти суму

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

*Розв'язання.* Розклад має вид:

$$f^*(x) \cong \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

При  $x = \frac{\pi}{2}$ , маємо

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^3} = \frac{8}{\pi} S,$$

звідки

$$S = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{32}.$$

**Відповідь:**  $S = \frac{\pi^3}{32}$ .

**Приклад 4.** Виходячи з рівності Ляпунова, знайти

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \text{ та } S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}, \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

*Розв'язання.* Для всякої інтегрованої на  $[-l; l]$  разом із своїм квадратом функції  $f(x)$  формально побудований тригонометричний ряд Фур'є задовольняє умові повноти (рівність Ляпунова).

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

Розглянемо функцію (парна,  $b_n = 0$ )  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| < \alpha \\ 0, & \text{при } \alpha < |x| < \pi \end{cases}$ .

Застосуємо до неї рівність Ляпунова. Маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} 1 \cdot dx = \frac{2\alpha}{\pi}; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi n} \sin n\alpha.$$

Тоді

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{4\alpha^2}{2\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin^2 n\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} 1 \cdot dx = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Тобто

$$\frac{4}{\pi^2} S_1 = \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2}, \quad \text{або } S_1 = \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2}.$$

Але

$$S_1 + S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

тому

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6} - S_1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + \alpha^2}{6}.$$

Відповідь:  $S_1 = \frac{\pi\alpha - \alpha^2}{2}$ ,  $S_2 = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + \alpha^2}{6}$ .

### 1.5.5 Методи операційного числення. Застосування інтегрального перетворення Лапласа

**а)** Для числових рядів, нехай  $f(t)$  — функція-оригінал, а  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$  — її зображення по Лапласу, маємо:  $f(t) \doteq F(p)$ .

Нехай  $S = \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p = s + i\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p = n$ .

Тоді

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{\infty} f(t)e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt} dt = \\ &= (\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(t)e^{-mt}}{1 \mp e^{-t}} dt, \end{aligned} \quad (17)$$

$S$  — сума нашого збіжного ряду.

**Приклад 1.** Знайти

$$S = \sum_{n=m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}.$$

*Розв'язання.* Знайдемо

$$f(t) \doteq F(n) = \frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+2} + \frac{D}{2n+3}.$$

Методом зручних значень:  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$ ,  $D = -\frac{1}{3}$ .

Тоді

$$F(n) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \doteq \\ \doteq \frac{1}{6} \eta(t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-\frac{3t}{2}}.$$

За формулою (17), маємо:

$$S = \int_0^{\infty} \frac{1 - 3e^{-\frac{t}{2}} + 3e^{-t} - e^{-\frac{3t}{2}}}{6(1 + e^{-t})} e^{-t} dt = \\ = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ e^{-\frac{t}{2}} = x \\ dt = -\frac{2dx}{x} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x}{1 + x^2} dx = \\ = \frac{1}{3} \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x - \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \\ = \frac{1}{18} (3\pi - 6 \ln 2 - 5) = S.$$

**Відповідь:**  $S = \frac{1}{18} (3\pi - 6 \ln 2 - 5)$ .

**Приклад 2.** Знайти

$$S = \sum_{n=m=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n^2 + n + 3}.$$

*Розв'язання.* 1 метод (операційний). Використаємо формулу:

$$\operatorname{arctg} \frac{k(b-a)}{n^2 + (a+b)n + ab + k^2} = \operatorname{arctg} \frac{k}{n+a} - \operatorname{arctg} \frac{k}{n+b},$$

що в нашому випадку буде:  $k = \sqrt{3}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ , тобто

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n^2 + n + 3} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1}.$$

За таблицею зображень та використовуючи властивості інтегрального перетворення Лапласа, маємо:

$$\sin mt \doteq \frac{m}{m^2 + p^2},$$

далі

$$\frac{\sin mt}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{mdp}{m^2+p^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{m} = \operatorname{arctg} \frac{m}{p},$$

і

$$e^{-at} \frac{\sin mt}{t} \doteq \operatorname{arctg} \frac{m}{p+a},$$

звідки маємо ( $p = n$ ):

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \doteq \frac{\sin \sqrt{3} t}{t} - \frac{e^{-t} \sin \sqrt{3} t}{t} = f(t).$$

Тепер за формулою (1), маємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = \int_0^\infty \frac{\sin \sqrt{3} t (1-e^{-t}) e^{-t}}{t(1-e^{-t})} dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin \sqrt{3} t}{t} dt = \left| \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin mx}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{m}{a} \right| = \\ &= \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = S. \end{aligned}$$

2 метод (телескопічний).

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty a_k = \left| a_k = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{k} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{k+1} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right) + \dots + \\ &+ \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S = \frac{\pi}{3}$ .

**б)** Тепер розглянемо методи операційного числення для знаходження суми деяких тригонометричних рядів. Нехай знову 1)  $f(t) \doteq F(p)$ , 2)  $\Phi(t, x)$  – твірна нескінченної функціональної послідовності  $\{\varphi_n(x)\}$ , тобто  $\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n$ , 3) ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \varphi_n(x) = S(x)$  – збігається на  $x \in (a; b)$ , тоді

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{\infty} f(t) e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \varphi_n(x) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \Phi(e^{-t}, x) dt = S(x), \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\left[ \begin{array}{l} \text{а) якщо } \varphi_n(x) = (\pm 1)^{n+1} \sin(nk + m)x, \text{ то} \\ \Phi_{(k,m)}(t, x) \Big|_{\sin} = \frac{t \sin(k+m)x \mp t^2 \sin mx}{1 \mp 2t \cos kx + t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n+1} \sin(nk + m)x \cdot t^n; \\ \text{б) якщо } \varphi_n(x) = (\pm 1)^{n+1} \cos(nk + m)x, \text{ то} \\ \Phi_{(k,m)}(t, x) \Big|_{\cos} = \frac{t \cos(k+m)x \mp t^2 \cos mx}{1 \mp 2t \cos kx + t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \cos(nk + m)x \cdot t^n. \end{array} \right. \quad (19)$$

### Приклад 3. Знайти

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Розв'язання.* 1 метод (операційний). Маємо

$$\begin{aligned} F(n) &= \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right). \\ F(n) &\doteq \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \text{sht} = f(t). \end{aligned}$$

Далі  $\Phi(t, x) = \Phi_{(1,0)}(t, x) - t \sin x$ , бо  $k = 1, m = 0, n = 2, 3, \dots$  (тому треба відняти  $t \sin x$  при  $n = 1$ , при  $n = 0, \sin(0x) = 0$ ). Тобто, за (19):

$$\Phi(t, x) = \frac{t \sin x - 0}{1 - 2t \cos x + t^2} - t \sin x = \frac{2t^2 \sin x \cos x - t^3 \sin x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

Тепер, за формулою (18), обчислимо



$$\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^{\infty} \operatorname{sh} t \frac{2e^{-2t} \sin x \cos x - e^{-3t} \sin x}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} dt = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ e^{-t} = y \\ dt = -\frac{dy}{y} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-y^2)(\sin 2x - y \sin x)}{y^2 - 2y \cos x + 1} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( y \sin x - \frac{2 \sin x (y - \cos x)}{y^2 - 2y \cos x + 1} \right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \sin x \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \sin x \int_0^1 \frac{(2y - 2 \cos x) dy}{y^2 - 2y \cos x + 1} = \\
&= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \ln(y^2 - 2y \cos x + 1) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \ln(2(1 - \cos x)) = \sin x \left( \frac{1}{4} - \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right).
\end{aligned}$$

2 метод (за допомогою рядів аналітичних функцій комплексної змінної).

Розглянемо ряди виду (A):  $\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx$ , (B):  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$ , де  $q_n > 0$ ,  $q_n \rightarrow 0$ ,  $q_n \downarrow$  монотонно. Тоді на довільному замкнутому проміжку, що не містить точок  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , обидва ряди збігаються рівномірно. Позначимо суму ряду (A) через  $f(x)$ , а ряду (B) через  $g(x)$ . Так як  $f(x)$  – парна, а  $g(x)$  – непарна, то можна розглядати лише  $x \in [0, \pi]$  (обидві функції періодичні з  $T_0 = 2\pi$ ). Таким чином, можна пов'язати функції  $f(x)$  і  $g(x)$  з їх розкладом у ряд Фур'є. Дійсно, якщо  $f(x)$  та  $g(x)$  – *абсолютно інтегровні*, то ряди (A) і (B) являють собою розвинення цих функцій в ряд Фур'є. Одна із достатніх умов: якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n}$  – збіжний, то ряди (A) та (B) – ряди Фур'є функцій  $f(x)$  та  $g(x)$ . Природньо виникає питання, а як знаючи ряди (A) і (B) знайти їх суми  $f(x)$  та  $g(x)$ , тобто виразити їх через елементарні функції, якщо це можливо. Ейлер запропонував застосувати аналітичні функції комплексної змінної таким чином. Нехай при деякому наборі  $\{q_n\}$  ряди (A) та (B) збігаються до  $f(x)$  та, відповідно,  $g(x)$  в проміжку  $[0, 2\pi]$ , за виключенням лише, можливо, окремих точок. Розглянемо тепер в  $\mathbb{C}$  степеневий ряд

$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n$ . На  $|z| = 1$ , тобто при  $z = e^{ix}$ , цей ряд збігається, за виключенням окремих точок. Тому

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx} = \frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n (\cos nx + i \sin nx) = f(x) + ig(x).$$

Ясно, що при  $|z| < 1$  таким чином визначена певна функція  $\varphi(z)$ . Використовуючи відомі розклади елементарних функцій комплексної змінної в степеневий ряд, часто вдається звести до них і функцію  $\varphi(z)$ , тоді, якщо  $z = re^{ix}$  ( $r < 1$ ), маємо

$$\frac{1}{2} q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n r^n e^{inx} = \varphi(re^{ix}).$$

За теоремою Абеля, як тільки ряд з  $r = 1$  — збігається, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) = f(x) + ig(x),$$

тобто суми рядів (A) та (B) знайдені одночасно як дійсна та уявна частини.

Повернімося тепер до нашого ряду

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1} = S(x) = g(x).$$

Тут

$$q_n = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Знайдемо функцію  $\varphi(z)$ , маємо:  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{1} + \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} + \dots + \frac{z^n}{n-1} + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \frac{z^4}{5} + \dots + \frac{z^n}{n+1} + \dots \right) = \\ &= \left| \ln(1-z) = - \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right), |z| < 1 \right| = \\ &\quad \text{(відомий розклад)} \\ &= \frac{z}{2} \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2z} \left( \left( z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots \right) - z - \frac{z^2}{2} \right) = \\
& = -\frac{z}{2} \ln(1-z) + \frac{1}{2z} \left( \ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} - \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2} \right) \ln(1-z).
\end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned}
\varphi(re^{ix}) &= \frac{1}{2} + \frac{re^{ix}}{4} - r \left( \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \right) \ln(1 - re^{ix}) = \\
&= \left| \begin{aligned} 1 - re^{ix} &= 1 - r(\cos x + i \sin x) = (1 - r \cos x) - ir \sin x \\ \ln z &= \ln|z| + i\varphi = \ln|z| + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad z = x + iy \end{aligned} \right| = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{r}{4} (\cos x + i \sin x) - ri \sin x \cdot \ln(1 - r \cos x - ir \sin x). \\
f(x) + ig(x) &= \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{ix}) = \varphi(e^{ix}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) - \\
&- i \sin x \cdot \ln \left( 2 \sin^2 \frac{x}{2} - i 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\cos x + i \sin x) - \\
&- i \sin x \left( \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| - i \operatorname{arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x + \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin x + \\
&+ i \left( \frac{1}{4} \sin x - \sin x \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right) = f(x) + ig(x), \quad x \in (0; 2\pi).
\end{aligned}$$

**Відповідь:**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x + \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin x, \\
S(x) = g(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1} = \sin x \left( \frac{1}{4} - \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right| \right).
\end{aligned}$$

**Приклад 4.** Знайти

$$S(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}.$$

*Розв'язання.* Відповідний степеневий ряд в  $\mathbb{C}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$ , але це є розкладом  $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$ ,  $|z| \leq 1$ , крім  $z = \pm i$ .

Покладемо  $z = e^{ix}$ ,  $x \in [0; \pi]$ , але  $x \neq \frac{\pi}{2}$ , тоді

$$\begin{aligned} \frac{1+iz}{1-iz} &= |z = e^{ix}| = \frac{1+i(\cos x + i\sin x)}{1-i(\cos x + i\sin x)} = \\ &= \frac{2i \cos x}{2(1 + \sin x)} = i \frac{\cos x}{1 + \sin x} = itg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| = \left| tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|,$$

$$\operatorname{arg} \frac{1+iz}{1-iz} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}; & x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}; & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}; \quad \ln \frac{1+iz}{1-iz} = \ln \left| tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| \pm i \frac{\pi}{2}.$$

Тобто

$$\operatorname{arctg}(e^{ix}) = \pm \frac{\pi}{4} + i \frac{1}{4} \ln \left( tg^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right),$$

**Відповідь:**

$$f(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}; & x \in [0; \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\pi}{4}; & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases},$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{1}{4} \ln \left( tg^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right), \quad x \in [0; \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

### 1.5.6 Застосування інтегральної форми $\delta$ – функції Дірака та її розкладу в ряд Фур'є

**Приклад.** Знайти

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \text{ а також } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

*Розв'язання.* Якщо  $\delta(x)$  задана на  $x \in (0; \pi)$ , то справедливі формули:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2} \delta(x); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} (\delta(x) - \delta(2x));$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx = \frac{\pi}{2} (2\delta(2x) - \delta(x)); \quad \delta(x) \doteq 1.$$

Розв'яжемо задачу знаходження  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  операційним методом.

Складемо рівняння для знаходження  $S(x)$ , маємо:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}; \quad S''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$S'''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = - \left( \frac{\pi}{2} \delta(x) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(x).$$

Маємо:

$$S'''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(x), \quad S(0) = S''(0) = 0, \quad S'(0) - \text{поки невідомо.}$$

Далі:

$$S'''(x) \doteq p^3 S(p) - p^2 S(0) - p S'(0) - S''(0) = p^3 S(p) - p S'(0).$$

$$\frac{1}{2} \doteq \frac{1}{2p}; \quad \delta(x) \doteq 1,$$

рівняння в просторі зображень:

$$p^3 S(p) - p S'(0) = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2} \cdot 1,$$

звідки

$$S(p) = \frac{1}{2p^4} - \frac{\pi}{2p^3} + \frac{S'(0)}{p^2}.$$

Або

$$S(p) \doteq \frac{1}{2} \frac{x^3}{3!} - \frac{\pi}{2} \frac{x^2}{2!} + S'(0)x = S(x),$$

при  $x = \pi$ , маємо

$$S(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n^3} = 0 = \frac{1}{12} \pi^3 - \frac{\pi}{4} \pi^2 + S'(0)\pi \Rightarrow S'(0) = \frac{\pi^2}{6},$$

**Відповідь:**

$$S(x) = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

Звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12} \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - 3\pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\pi^2 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^3}{32}.$$

## 1.6 Диференціальні рівняння

Будемо вважати, що стандартні методи розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) 1-го та вищих порядків відомі. Розглянемо тут кілька прикладів та задач, для розв'язання яких використовуються спеціальні методи та прийоми.

**Приклад 1.** Знайти загальний розв'язок рівняння  $x = 2y' + \ln(y')$ .

*Розв'язання.* Уведемо заміну:  $y' = t(x) = t$ ,  $dy = tdx$ , тоді із  $x = 2t + \ln t \Rightarrow$

$$dx = \left(2 + \frac{1}{t}\right)dt \Rightarrow dy = (2t + 1)dt, \quad y = \int (2t + 1)dt = t^2 + t + C.$$

**Відповідь** у параметричній формі:  $\begin{cases} x = 2t + \ln t \\ y = t^2 + t + C \end{cases}.$

**Приклад 2.** Розв'язати ДР, знайти його частковий розв'язок при  $y(1) = 1$ :  
 $((y - x)\sin y + 1)y' = 3x^2 y - 3x^3 + 1.$

*Розв'язання.* а) При  $x - y = 0$ , тобто при  $y = x$  – безпосередньою перевіркою впевнюємось, що це один із розв'язків рівняння.

б) Нехай тепер  $x - y \neq 0$ , тоді  $\left(3x^2 + \frac{1}{y-x}\right)dx + \left(\frac{1}{x-y} - \sin y\right)dy = 0$ . Оскільки

$\frac{\partial}{\partial y} \left(3x^2 + \frac{1}{y-x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x-y} - \sin y\right)$ , то це ДР в повних диференціалах. Інтег-

руючи його, отримаємо  $d(x^3 - \ln|x-y| + \cos y) = 0$  або

$x^3 - \ln|x-y| + \cos y = -\ln|C|$ , тобто  $x-y = Ce^{x^3+\cos y}$ ,  $C \neq 0$ . Але із а)  $\Rightarrow y = x$  і умову  $C \neq 0$  відкидаємо. Тоді із  $x-y = Ce^{x^3+\cos y}$ ,  $y(1) = 1 \Rightarrow x-y = 0$ , тобто при  $C = 0$ .

**Відповідь:** загальний розв'язок (загальний інтеграл)  $x-y = Ce^{x^3+\cos y}$ , частковий розв'язок за умови  $y(1) = 1$ :  $y = x$ .

**Приклад 3.** Розв'язати ДР  $y' + 2yy'' = (y')^2 + xy''$ .

*Розв'язання.* Маємо  $y''(2y-x) = (y')^2 + y'$ ,  $y'' \neq 0$ ,  $2y-x \neq 0$ . Продиференціюємо обидві частини ДР по  $x$ , отримаємо  $y'''(2y-x) + y''(2y'-1) = 2y'y'' - y'' \Rightarrow y''' = 0$  бо  $2y-x \neq 0$ . Далі  $y'' = C_1$ ,  $y' = C_1x + C_2$ . Підставимо  $y''$  та  $y'$  у рівняння,

маємо  $C_1(2y-x) = (C_1x + C_2)^2 - (C_1x + C_2)$  або  $2y-x = C_1\left(x + \frac{C_2}{C_1}\right)^2 - \left(x + \frac{C_2}{C_1}\right)$

При  $\frac{C_2}{C_1} = \bar{C}_2$  маємо  $2y-x = C_1(x + \bar{C}_2)^2 - (x + \bar{C}_2)$  або  $y = \frac{C_1}{2}(x + \bar{C}_2)^2 - \frac{\bar{C}_2}{2}$ .

При  $\frac{C_1}{2} = \bar{C}_1$ ,  $-\frac{\bar{C}_2}{2} = \bar{\bar{C}}_2$  остаточно отримаємо  $y = \bar{C}_1(x - 2\bar{\bar{C}}_2)^2 + \bar{\bar{C}}_2$ .

**Відповідь:**  $y = C_1(x - 2C_2)^2 + C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 4.** При яких  $a$  система ДР  $\begin{cases} ay'' + y' + y = 0 \\ y'' + y' + ay = 0 \end{cases}$  має ненульовий розв'язок?

*Розв'язання.* Друге рівняння домножимо на  $a$  і віднімемо від першого:

$$\begin{cases} ay'' + y' + y = 0 \\ ay'' + ay' + a^2y = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad (1-a)(y' + (1+a)y) = 0$$

$$y'(1-a) + y(1-a^2) = 0$$

1) Якщо  $1-a=0$ ,  $a=1$ , то  $\begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y'' + y' + y = 0 \end{cases}$ . Система має ненульовий розв'язок,

а саме  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . За методом Ейлера  $y_1 = e^{\frac{-x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x$ ,

$$y_2 = e^{\frac{-x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

$$2) \quad y' + (1+a)y = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -(1+a) \int dx \quad \text{тобто} \quad \ln|y| = -(1+a)x + \ln C \quad \text{або}$$

$y = Ce^{-(1+a)x}$ ,  $C \neq 0$ . Перевіримо, при яких  $a$  цей розв'язок задовольняє систему.

$$y' = -C(1+a)e^{-(1+a)x}, \quad y'' = C(1+a)^2 e^{-(1+a)x}, \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} Ce^{-(1+a)x} (a(1+a)^2 - a) = 0 \\ Ce^{-(1+a)x} ((1+a)^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} a((1+a)^2 - 1) = 0 \\ (1+a)^2 - 1 = 0 \end{cases}. \quad \text{Розв'яжемо рівняння} \quad (1+a)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}.$$

**Відповідь:** система має ненульові розв'язки при  $a \in \{-2; 0; 1\}$ :

при  $a = -2$   $y = Ce^x$ ,  $C \neq 0$ ; при  $a = 0$   $y = Ce^{-x}$ ,  $C \neq 0$ ;

при  $a = 1$   $y = e^{\frac{-x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$ ,  $C_1, C_2 \neq 0$  одночасно.

**Приклад 5.** Знайти лінію, для якої відстань від початку координат до дотичної дорівнює відстані від початку координат до нормалі в тій же довільній точці кривої.

*Розв'язання.* Нехай  $L$  – шукана лінія:  $y = f(x)$ .

1)  $K$  – дотична:  $Y - y = y'(x)(X - x)$ .  $(X, Y)$  – точка на  $K$ ,  $(x, y)$  – на  $L$  (див. рис. 8).

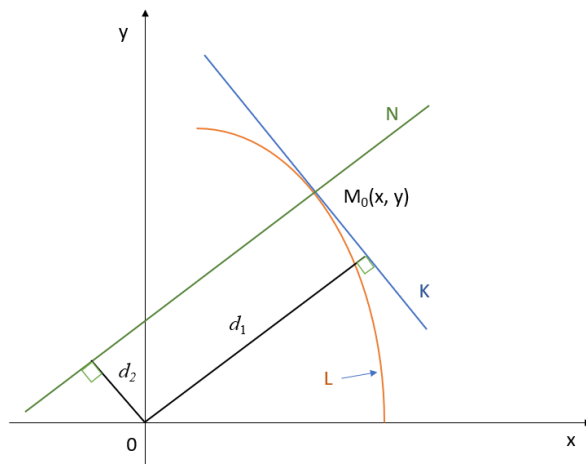


Рис. 8



Запишемо рівняння  $K$  як  $Ax + By + C = 0$ , тобто  $y'X - Y + y - xy' = 0$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{|y - xy'|}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

$$2) \quad N \quad - \quad \text{нормаль:} \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad \text{або} \quad \frac{1}{y'}X + Y - \frac{x}{y'} - y = 0 \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{\left|y + \frac{x}{y'}\right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{(y')^2}}} = \frac{|yy' + x|}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \text{ Маємо рівняння } d_1 = d_2, \text{ тобто } |y - xy'| = |yy' + x|,$$

$$\text{або} \quad \begin{cases} y - xy' = yy' + x \\ -y + xy' = yy' + x \end{cases}. \text{ Детальніше перше рівняння: } y'(x + y) = y - x \Rightarrow$$

$$y' = \frac{y - x}{x + y} - \text{однорідне ДР. Заміна } y = t(x) \cdot x = t \cdot x \Rightarrow y' = t'x + t, \quad t'x + t = \frac{t - 1}{t + 1} \text{ або}$$

$$t'x = \frac{-(t^2 + 1)}{t + 1}, \quad \int \frac{t + 1}{t^2 + 1} dt = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \arctg t = -\ln|x| + \ln C. \text{ Після}$$

$$\text{перетворень отримаємо } \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\arctg \frac{y}{x}}.$$

$$\text{Аналогічно розв'язуємо друге рівняння: } y' = \frac{y + x}{x - y}, \quad y = tx, \quad y' = t'x + t,$$

$$t'x + t = \frac{t + 1}{1 - t}, \quad t'x = \frac{t^2 + 1}{1 - t}, \quad \int \frac{1 - t}{t^2 + 1} dt = \int \frac{dx}{x} \text{ або } \arctg t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) = \ln|x| + \ln C,$$

$$\text{тобто } \sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctg \frac{y}{x}}.$$

**Відповідь:**  $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\pm \arctg \frac{y}{x}}$ , або в полярній системі  $\rho = Ce^{\pm \varphi}$  - логарифмічні спіралі.

**Приклад 6.** Розв'язати задачу Коші:  $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = -1$ .

*Розв'язання:* ДР не містить  $x$  в явному вигляді, тому заміна:  $y' = z(y) = z$ . Тоді

$$y'' = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z, \quad \text{або} \quad y z'_y z = z^2 - z^3; \quad y z'_y = z - z^2; \quad \int \frac{dz}{z(1 - z)} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\int \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) dz = \ln \left| \frac{z}{z-1} \right| = \ln |C_1 y|; \quad 1 + \frac{1}{z-1} = C_1 y; \quad z-1 = \frac{1}{C_1 y-1}; \quad y'-1 = \frac{1}{C_1 y-1}$$

$$\text{або } y' = \frac{C_1 y}{C_1 y-1}; \quad \int \frac{C_1 y-1}{C_1 y} dy = \int dx \Rightarrow y - \frac{1}{C_1} \ln|y| = x + C_2; \quad y - x = \frac{1}{C_1} \ln|y| + C_2.$$

Знайдемо  $C_1$  та  $C_2$ .  $y(1) = 1$ , тому  $C_2 = 0$ ;  $y'(1) = -1$ , звідки  $C_1 = \frac{1}{2}$ .

**Відповідь:**  $y - x = 2 \ln|y|$ .

**Приклад 7.** Розв'язати ДР:  $y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x-1$ .

*Розв'язання.* Задане ДР – це лінійне неоднорідне ДР 2-го порядку зі змінними коефіцієнтами.

1) Розглянемо спочатку відповідне однорідне ДР:  $y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = 0$ . Не-

важно бачити, що  $y_1 = x$  – один із його розв'язків. Тоді для знаходження  $y_2$  – лінійно-незалежного з  $y_1$  розв'язку, застосуємо теорему Остроградського-

$$\text{Ліувілля: } \begin{cases} y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \\ y_2 = y_1 \int e^{-\int P(x)dx} \frac{dx}{y_1^2} \end{cases} . \quad \text{У нашому рівнянні } P(x) = -\frac{x}{x-1},$$

$$Q(x) = \frac{1}{x-1}. \quad \text{Тоді } y_2 = x \int e^{\int \frac{x}{x-1} dx} \frac{dx}{x^2} = x \int e^{\int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx} \frac{dx}{x^2} = x \int e^x (x-1) \frac{dx}{x^2} =$$

$$x \int \frac{e^x x - e^x}{x^2} dx = x \int d\left(\frac{e^x}{x}\right) = e^x. \quad \text{Тобто загальний розв'язок однорідного ДР:}$$

$$y_{з.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + C_2 e^x.$$

2) Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного ДР  $y_{ч.н.}$  методом Лагранжа:

$y_{ч.н.} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ . Складемо систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = x-1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1' x + C_2' e^x = 0 \\ C_1' \cdot 1 + C_2' e^x = x-1 \end{cases} \Rightarrow C_1' = -1; C_2' = x e^{-x} \Rightarrow$$

$$C_1 = -x; C_2 = -x e^{-x} - e^{-x} \Rightarrow y_{ч.н.} = -x^2 - x - 1.$$

$$y_{3.н.} = y_{3.о.} + y_{ч.н.} = C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1 \text{ або } y_{3.н.} = \bar{C}_1 x + C_2 e^x - x^2 - 1.$$

**Відповідь:**  $y_{3.н.} = \bar{C}_1 x + C_2 e^x - x^2 - 1.$

**Приклад 8.** Знайти загальний розв'язок ДР:  $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}.$

Розв'язання.  $x \neq 0$ . Помножимо рівняння на  $x^2$ :  $\begin{cases} x^2 y'' - xy' + y = 2x \\ x \neq 0 \end{cases}$  - це рівняння

Ейлера. Виконаємо заміну:  $x = e^t, t = \ln|x|, y(x) = \bar{y}(t)$ . Тоді  $y'_x = \bar{y}'_t \cdot t'_x = \bar{y}'_t \cdot \frac{1}{x}$ ;

$$y''_{xx} = \left( \bar{y}'_t \cdot \frac{1}{x} \right)'_x = \bar{y}''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} - \bar{y}'_t \cdot \frac{1}{x^2}.$$
 Підставляємо у ДР:

$$x^2 \left( \bar{y}''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} - \bar{y}'_t \cdot \frac{1}{x^2} \right) - x \left( \bar{y}'_t \cdot \frac{1}{x} \right) + \bar{y} = 2e^t \Rightarrow \bar{y}''_{tt} - 2\bar{y}'_t + \bar{y} = 2e^t - \text{ЛНДР 2-го}$$

порядку зі сталими коефіцієнтами.

1)  $\bar{y}''_{tt} - 2\bar{y}'_t + \bar{y} = 0$ . За Ейлером:  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  - характеристичне рівняння.

$$\lambda_{1,2} = 1, \bar{y}_1 = e^t, \bar{y}_2 = te^t, \bar{y}_{3.о.} = C_1 e^t + C_2 te^t;$$

2)  $\bar{y}''_{tt} - 2\bar{y}'_t + \bar{y} = 2e^t$ , шукаємо частинний розв'язок НЛДР у вигляді:

$\bar{y}_{ч.н.} = At^2 e^t$  (подвійний резонанс). Підставимо цю функцію у рівняння:

$$\left( \bar{y}_{ч.н.} \right)' = Ae^t(t^2 + 2t), \left( \bar{y}_{ч.н.} \right)'' = Ae^t(t^2 + 4t + 2), \text{ тоді}$$

$$Ae^t(t^2 + 4t + 2) - 2Ae^t(t^2 + 2t) + At^2 e^t = 2e^t \text{ звідки } A = 1, \bar{y}_{ч.н.} = t^2 e^t$$

$$\bar{y}_{3.н.} = C_1 e^t + C_2 te^t + t^2 e^t \text{ або } y_{3.н.} = C_1 x + C_2 x \ln|x| + x \ln^2|x|.$$

**Відповідь:**  $y_{3.н.} = C_1 x + C_2 x \ln|x| + x \ln^2|x|.$

## 1.7 Методи обчислень деяких відомих інтегралів

**1.7.1 Інтеграл Ейлера**  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$  - збіжний за ознакою Коші. Для осо-

бливої точки  $x = 0$  при  $\lambda \in (0;1)$  маємо  $\frac{\ln \sin x}{\left(\frac{1}{x}\right)^\lambda} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^\lambda (\sin x)^\lambda \ln \sin x \rightarrow 0$  при

$x \rightarrow 0$ .

I спосіб.  $I = \left| \begin{matrix} \text{заміна} \\ x = 2t \end{matrix} \right| = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt .$

В останньому інтегралі зробимо ще одну заміну:  $t = \frac{\pi}{2} - y$ , тоді  $I = \frac{\pi}{2} \ln 2 +$

$$+ 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I, \text{ звідки } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

II спосіб. Так як підінтегральна функція монотонна, то інтеграл можна обчислити за допомогою знаходження границі відповідних інтегральних сум. У на-

шому випадку маємо  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln \sin \frac{k\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \ln \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ . Для обчис-

лення  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$  скористаємось відомим розкладом, враховуючи значення  $\sqrt[n]{1}$ :

$$z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1} \left( z - \cos \frac{k\pi}{n} - i \sin \frac{k\pi}{n} \right), \text{ або в іншій формі}$$

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left( 1 - 2z \cos \frac{k\pi}{n} + z^2 \right), \text{ звідки}$$

$$\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( \left( z - \cos \frac{k\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right).$$

При  $z \rightarrow 1$  маємо  $n = \prod_{k=1}^{n-1} \left( \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) = 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$ , тобто

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \ln n - (n-1) \ln 2}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

**Відповідь:**  $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

**1.7.2 Інтеграл Ейлера – Пуассона**  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

І спосіб. Розглянемо спочатку  $\int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} dy = \left| \begin{matrix} xy = t \\ x dy = dt \end{matrix} \right| = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ , тоді

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} x e^{-x^2 y^2} dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} x e^{-x^2(y^2+1)} dx = \left| x \sqrt{y^2+1} = t \right| = \\ &= \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{t}{\sqrt{y^2+1}} e^{-t^2} \frac{dt}{\sqrt{y^2+1}} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t^2} d(t^2) = \frac{1}{2} \arctg y \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Звідки  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

ІІ спосіб. Розглядаючи в  $\mathbb{R}^2$  першу чверть, маємо  $I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy =$

$$\iint_{D \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left| \begin{matrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ |J| = \rho \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Відповідь:**  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**1.7.3 Інтеграли Френеля**  $I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ ,  $I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$

І спосіб. При обчисленнях скористаємось рівністю:  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du =$

$$= \left| \begin{matrix} \sqrt{t} u = z \\ \sqrt{t} du = dz \end{matrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{t}}. \text{ Маємо } I_1 = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos t \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} du \right) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \cos t dt = \\
&= \left| \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-tu^2}}{1+u^4} (-u^2 \cos t + \sin t) \right) \Big|_0^{\infty} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du. \text{ Але } \int_0^{\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du = \\
&\left| \begin{array}{l} v = \frac{1}{u} \\ dv = -\frac{du}{u^2} \end{array} \right| = -\int_{\infty}^0 \frac{dv}{1+v^4} = \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+v^4}, \text{ тому } I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4} du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1+\frac{1}{u^2}}{u^2+\frac{1}{u^2}} du = \\
&= \left| \begin{array}{l} u - \frac{1}{u} = z \\ \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du = dz \end{array} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{2+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно  $I_2 = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ , тоді  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

ІІ спосіб. Обґрунтування правильності застосування в розглянутих інтегралах зміни порядку інтегрування викликає певні труднощі, яких можна уникнути, застосувавши *метод множника збіжності*. Так, при обчисленні  $I_1$  та  $I_2$ , покажемо як за допомогою цього методу обчислюємо інтеграл

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-at} dt. \text{ Маємо } \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-at} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos t dt \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} du = \\
&\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-(a+u^2)t} \cos t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{a+u^2}{1+(a+u^2)^2} du, \text{ тоді } \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^2}{1+u^4} du = \\
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{u^2+1}{1+u^4} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \text{ звідки знову } I_2 = I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.
\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $I_2 = I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$

**1.7.4 Інтеграл Діріхле**  $I(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx, \beta \in \mathbb{R}.$

I спосіб. Розглянемо  $I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx, \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$  Знайдемо

$$\frac{dI}{d\beta} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{x \cos \beta x}{x} dx = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (-\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) \Big|_0^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

тоді  $I(\alpha, \beta) = \int \frac{\alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \arctg \frac{\beta}{\alpha} + C,$  при  $\beta = 0, C = 0.$  Таким чином

$$I(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \arctg \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \beta > 0 \\ 0, \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \beta < 0 \end{cases}, \text{ або } I(\beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta.$$

II спосіб. Використаємо рівність  $\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy,$  тоді  $I(\beta) = \int_0^{\infty} \sin \beta x \left( \int_0^{\infty} e^{-xy} dy \right) dx =$

$$= \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin \beta x dx = \left| \begin{matrix} \beta \in \mathbb{R} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \right| = \left| \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C \right| =$$

$$= \int_0^{\infty} dy \left( \frac{e^{-xy}}{\beta^2 + y^2} (-y \sin \beta x - \beta \cos \beta x) \Big|_0^{\infty} \right) = \arctg \frac{y}{\beta} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta, \text{ причому в обох}$$

випадках потрібно обґрунтування правильності диференціювання та зміни порядку інтегрування.

III спосіб. Застосуємо властивості та інтегральне представлення  $\delta$ -функції Ді-

рака, а саме  $\gamma(x)$  – функція стрибка.  $\gamma(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x = \int_0^x \delta(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -\frac{1}{2}, x < 0 \end{cases};$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega. \quad \text{Тоді} \quad \gamma(x) = \int_0^x \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_0^x \cos \omega x dx \right) d\omega =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega. \quad \text{Тепер при } x = \beta > 0 \text{ маємо } \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \beta}{\omega} d\omega, \text{ звідки}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \beta}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}, \text{ при } \beta < 0 \quad I(\beta) = -\frac{\pi}{2}; \text{ при } \beta = 0 \quad I(\beta) = 0, \text{ тобто знову}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta.$$

**Відповідь:**  $I(\beta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta.$

Зауваження 1. В радіотехніці, і не тільки в ній, часто застосовується функція

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt - \text{інтегральний синус (рис. 9). Вона непарна, при } x > 0 \quad y_{\min} =$$

$$y(2k\pi), y_{\max} = y((2k-1)\pi), k \in N. \text{ Асимптоти: } y = \pm \frac{\pi}{2} \text{ при } x \rightarrow \pm\infty. \text{ Для порів-}$$

$$\text{няння наведемо графік функції } \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases} \text{ (рис.10).}$$

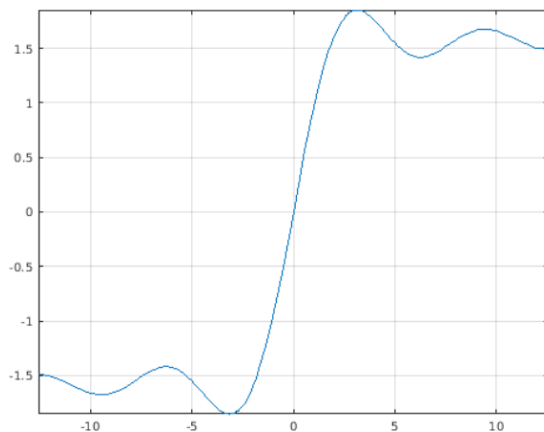


Рис.9 Інтегральний синус

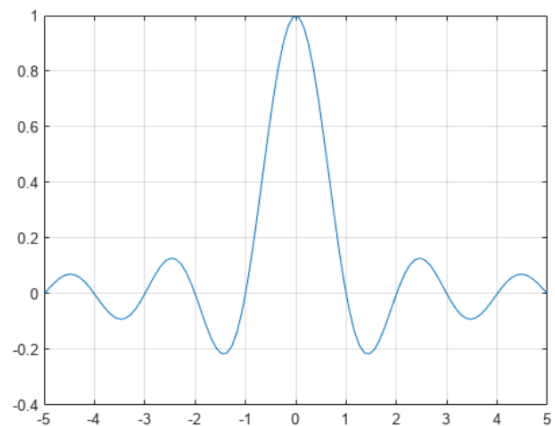


Рис. 10 Кардинальний синус



Зауваження 2. Побудувавши відповідні інтегральні суми типу ріманових сум,

можна показати, що  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , крім того

$$\int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx, \text{ якщо } f(x + \pi) = f(x - \pi) = f(x).$$

**1.7.5 Інтеграли Лапласа**  $A = \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ ,  $B = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ ,

$$\alpha, \beta > 0.$$

**а)** Попередньо доведемо, що  $\int_0^{\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(y^2) dy$ . Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y^2) dy = \left| \begin{array}{l} y = ax - \frac{b}{x} \\ dy = \left(a + \frac{b}{x^2}\right) dx \end{array} \right| = \left( \int_0^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2 \right) \left(a + \frac{b}{x^2}\right) dx =$$

$$a \int_0^{\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx + b \int_0^{\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) \frac{dx}{x^2} = \left| \begin{array}{l} \text{в другому інтегралі заміна} \\ x = -\frac{b}{at}, dx = \frac{b}{at^2} dt \end{array} \right| =$$

$$a \left( \int_0^{\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2 dx \right) + a \int_{-\infty}^0 f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right) dt = a \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx, \text{ але}$$

$$f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) = f(y^2) \text{ парна, тому рівність доведена.}$$

**б)** Розглянемо також обчислення  $\int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos bx dx = I, (t > 0)$

І спосіб.  $I = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos bx dx$ , тоді  $\frac{dI}{db} = - \int_0^{\infty} x e^{-tx^2} \sin bx dx =$

$$\left| \begin{array}{l} \sin bx = u, du = b \cos bx \\ xe^{-tx^2} dx = dv, v = -\frac{1}{2t} e^{-tx^2} \end{array} \right| = -\frac{b}{2t} \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos bx dx = -\frac{b}{2t} I. \text{ Маємо диференціальне}$$

рівняння з відокремленими змінними  $\int \frac{dI}{I} = -\int \frac{b}{2t} db, \ln|I| = -\frac{b^2}{4t} + \ln C$  або

$$I = Ce^{-\frac{b^2}{4t}}, \text{ при } b=0 \quad C = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, \text{ тобто } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{b^2}{4t}}.$$

II спосіб. Розкладемо  $\cos bx$  в ряд Маклорена, тоді  $I = \int_0^\infty e^{-tx^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (bx)^{2n}}{(2n)!} dx =$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx. \text{ Неважко бачити, що } I_n = \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{2n-1}{2t} I_{n-1} - \text{реку-}$$

рентна формула. Тому  $I = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{t^n \sqrt{t}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n} \frac{\sqrt{\pi}}{2} =$

$$\left| (2n)! = 2^n n! (2n-1)!! \right| = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(-\frac{b^2}{4t}\right)^n}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{b^2}{4t}} - \text{той самий результат.}$$

Тепер можемо обчислювати інтеграли  $A$  та  $B$ .

$$\text{I спосіб. } A = \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \int_0^\infty \cos \beta x \left( \int_0^\infty e^{-t(\alpha^2 + x^2)} dt \right) dx = \int_0^\infty e^{-t\alpha^2} dt \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos \beta x dx =$$

$$\left| \text{застосуємо обчислення б)} \right| = \int_0^\infty e^{-t\alpha^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{\beta^2}{4t}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-t\alpha^2 - \frac{\beta^2}{4t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{заміна} \\ t = z^2, dt = 2z dz \end{array} \right| = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(\alpha z - \frac{\beta}{2z}\right)^2 - \alpha\beta} dz = \sqrt{\pi} e^{-\alpha\beta} \int_0^\infty e^{-\left(\alpha z - \frac{\beta}{2z}\right)^2} dz =$$

$$\left| \text{застосуємо формулу а)} \right| = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\pi} e^{-\alpha\beta} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\pi} e^{-\alpha\beta} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = A, B = -\frac{dA}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}$$

II спосіб. Обчислимо інтеграли Лапласа  $A$  та  $B$ , складаючи та розв'язуючи відповідні диференціальні рівняння. Очевидно, що  $\frac{dA}{d\beta} + \frac{\pi}{2} = -B + \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx =$

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \beta x}{x} - \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} \right) dx, \text{ звідки } \frac{d^2 A}{d\beta^2} = \alpha^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \alpha^2 A - \text{це лінійне диференціальне}$$

рівняння другого порядку, розв'язок якого за Ейлером шукаємо у вигляді  $A = e^{\lambda \beta}$ , характеристичне рівняння буде  $\lambda^2 - \alpha^2 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm \alpha$ , тобто  $A = C_1 e^{\alpha \beta} + C_2 e^{-\alpha \beta}$ . Ясно, що  $C_1 = 0$ , бо інакше інтеграл буде розбіжним, а він збігається.

$$\text{Для знаходження } C_2 \text{ розглянемо } \beta \rightarrow +0, \text{ тоді } A = A(\alpha, +0) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} =$$

$$\frac{1}{\alpha} \arctg \frac{x}{\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\alpha}, \text{ тобто } \frac{\pi}{2\alpha} = 0 \cdot 1 + C_2 \cdot 1, \text{ звідки } C_2 = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

$$\text{Відповідь: } A = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha \beta}, B = -\frac{dA}{d\beta} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha \beta}.$$

$$\text{1.7.6 Розривний множник Діріхле } D = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx = D(\alpha, \beta).$$

$$\text{I спосіб. } D = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx + \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx \right), \alpha, \beta > 0.$$

$$\text{Відповідь: } D = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \beta < \alpha \\ \frac{\pi}{4}, \beta = \alpha \\ 0, \beta > \alpha \end{cases}, \text{ де } \int_0^{\infty} \frac{\sin \gamma x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \gamma - \text{інтеграл Діріхле.}$$

II спосіб. Подамо інтегралом Фур'є парну розривну функцію  $y = f(x)$

$$y = \begin{cases} 1, |x| < 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases},$$

маємо  $f(x) \sim \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega$ , де  $A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} 1 \cdot \cos \omega x dx =$

$$\frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega x}{\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}. \text{ Тобто } f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x d\omega = D(1, x) =$$

$$= \begin{cases} 1, |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, |x| = 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$$

Графік  $D(1, x)$  зображено на рис. 11:

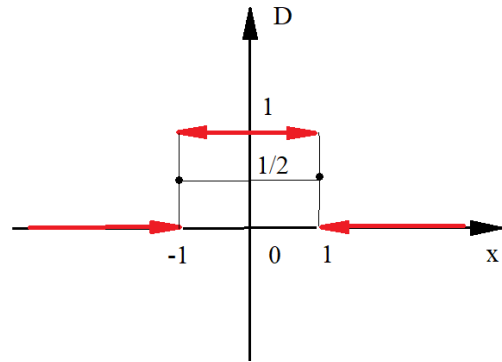


Рис. 11

**Відповідь:**  $D(1, x) = \begin{cases} 1, |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, |x| = 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$

**1.7.7. Інтеграл Фруллані** На закінчення розглянемо існування та обчислення одного важливого виду невластних інтегралів, які зазвичай називають *інтегралами Фруллані*  $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = I(a, b)$ ,  $a, b > 0$ , де 1)  $f(x)$  визначена і неперервна при  $x \geq 0$ ; 2)  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$  - скінченна. Тоді  $I(a, b) = (f(0) -$

$$f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}. \text{ Наприклад, } \int_0^{\infty} \frac{\arctg ax - \arctg bx}{x} dx = (0 - \frac{\pi}{2}) \ln \frac{b}{a} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

## 1.8 Приклад застосування формули Стокса та деякі узагальнення

Особлива цінність прикладу застосування певних теоретичних розробок в методиці викладання математики полягає в можливості отримати відповідь

кількома методами. Порівнюючи результати, ми перш за все впевнюємося в правильності розв'язку. Є і інші позитивні моменти, а саме — розширюємо спектр ідей розв'язання та їх математичне забезпечення, часто при цьому в новому, більш широкому розумінні, застосовуємо раніше пройдений матеріал.

Сформулюємо задачу: обчислити циркуляцію векторного поля  $\vec{F} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$  вздовж замкненої лінії  $L: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1$  в додатному напрямі. Ясно, що  $L$  — лінія перетину сфери та площини — це коло, що лежить в площині  $x + y + z - 1 = 0$ , радіус  $r$  і центр  $C_0$  якого неважко

знайти, а саме:  $r = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, C_0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

І спосіб. Найпростіше розв'язання цієї задачі — це застосування формули Стокса. Дійсно

$$\begin{aligned} C_L(\vec{F}) &= \oint_L z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz = \iint_{\sigma_L} (r \vec{\sigma}_L \vec{F} \cdot \vec{n}^0) d\sigma = 2 \iint_{\sigma_L} y dy dz + z dx dz + x dx dy = \\ &= 2 \iint_{\sigma_L} (y + z + x) dx dy = 2 \iint_{D_{xOy}} dx dy = 2S_{D_{xOy}}, \end{aligned}$$

де  $\sigma_L$  — частина площини  $x + y + z = 1$ , обмежена колом  $L$ ,  $D_{xOy} = \text{Пр}_{xOy} \sigma_L$ ,  $S_{D_{xOy}}$  — відповідно площа області  $D_{xOy}$ , яку неважко знайти за формулою:

$$S_{D_{xOy}} = S_{\sigma_L} \cdot \cos \gamma = \pi r^2 \cos \gamma = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \text{ Таким чином } C_L(\vec{F}) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Так просто і елегантно ми досягли результату перш за все тому, що векторне поле  $\vec{F}$  дуже зручне для наших обчислень. Якби в координатах поля були всього лише неоднакові коефіцієнти, то обчислення значно ускладнюється. Однак, якщо поле змінити так:  $\vec{F}_1 = (Az^2, Bx^2, Cy^2)$ , де  $A, B, C$  — дійсні різні числа, то обчислення можна виконати таким чином:

$$\begin{aligned} C_L(\vec{F}_1) &= \iint_{\sigma_L} (r \vec{\sigma}_L \vec{F}_1 \cdot \vec{n}^0) d\sigma = 2 \iint_{\sigma_L} Cy dy dz + Az dx dz + Bx dx dy = \\ &= 2(A + B + C) \iint_{D_{xOy}} x dx dy, \text{ (із умови симетрії відносно всіх координат).} \end{aligned}$$

Для обчислення  $\iint_{D_{xOy}} x dx dy$ , знайдемо рівняння лінії  $L' = Pr_{xOy} L$ , маємо

$x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 1$  або  $L': x^2 + y^2 + xy - x - y = 0$  — лінія  $II^{\infty}$  порядку. Ви-

конавши стандартні перетворення координат  $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$ , отримуємо:

$\frac{\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1$  — еліпс, з півосями  $a = \frac{\sqrt{2}}{3}; b = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . В полярних коорди-

натах рівняння цього еліпса буде  $\rho = \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi}$ . Оскільки

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \left. \frac{1-y-2x}{2y+x-1} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -1$ , то ясно, що еліпс в початку координат дотичний до пря-

мої  $y = -x$  і розташований вище цієї прямої, тому

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xOy}} x dx dy &= \iint_{D'} \rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi}} \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos \varphi \left( \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin \varphi} \right)^3 d\varphi = \left| \begin{array}{l} \cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \\ 1 + \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} + \sin^2 \left( \varphi + \frac{\pi}{4} \right) \\ \text{Заміна: } \varphi + \frac{\pi}{4} = t \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \frac{2\sqrt{2} \sin^3 t}{\left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right)^3} dt = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \frac{(\cos + \sin t) \sin^3 t}{\left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right)^3} dt = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^4 t dt}{\left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right)^3} = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 t dt}{\left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right)^3} = -\frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(ctgt)}{(3 + ctg^2 t)^3} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32}{3} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(3+\tau^2)^3} = \left| \begin{array}{l} \text{Використаємо рекурентну формулу для } I_n = \int \frac{d\tau}{(a^2 + \tau^2)^n} \\ I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left( \frac{\tau}{(\tau^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right) \end{array} \right| = \\
&= \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6} \left( \frac{\tau}{(3+\tau^2)^2} \Big|_0^\infty + 3 \int_0^\infty \frac{d\tau}{(3+\tau^2)^2} \right) = \frac{8}{9} \cdot 3 \int_0^\infty \frac{d\tau}{(3+\tau^2)^2} = \\
&= \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{\tau^2 + 3} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2 + 3} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{3}} \Big|_0^\infty = \frac{4}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Тоді  $C_L(\bar{F}_1) = 2(A+B+C) \cdot \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{4\pi(A+B+C)}{9\sqrt{3}}$ , що при  $A=B=C=1$ , дає ту ж

саму відповідь  $C_L(\bar{F}) = \frac{4\pi \cdot 3}{9\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ .

II спосіб. Обчислимо тепер циркуляцію цього ж векторного поля  $\bar{F}$  — безпосередньо, тобто, за формулою:

$$C_L(\bar{F}) = \oint_L z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz.$$

Для цього треба, що в даному випадку доволі непросто технічно, параметризувати рівняння лінії  $L$ . Розглянемо її як лінію перетину еліптичного циліндра  $L'$  та площини  $x+y+z=1$ . Для цього зробимо таке лінійне перетворення координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z = z' \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y'' = y' \\ z'' = z \end{cases}, \text{ або остаточно: } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x'' - y'' + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x'' + y'' + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \\ z = z'' \end{cases}.$$

$$\text{Тоді } L: \begin{cases} \frac{x''^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} - \text{еліптичний циліндр,} \\ z'' = \frac{1}{3} - \sqrt{2}x'' - \text{площина.} \end{cases}$$

Параметричне рівняння лінії  $L$  буде таким (в системі  $X''Y''Z''$ ):

$$L: \begin{cases} x'' = a \cos t = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos t = u, & du = -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin t dt \\ y'' = b \sin t = \frac{\sqrt{2}}{3} \sin t = v, & dv = \frac{\sqrt{2}}{3} \cos t dt; \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z'' = \frac{1}{3} - \sqrt{2}a \cos t = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cos t = z, & dz = \frac{2}{3} \sin t dt \end{cases}$$

Знайдемо тепер координати векторного поля  $\bar{F}$  в новій системі, маємо:

$$z^2 = \left( \frac{1-2\cos t}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} (1 - 4\cos t + \cos^2 t)$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \left( u - v + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{9} \cos^2 t + \frac{2}{3} \sin^2 t \right) + \frac{2}{9} \cos t - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin t - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin t \cos t + \frac{1}{9}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \left( u + v + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{9} \cos^2 t + \frac{2}{3} \sin^2 t \right) + \frac{2}{9} \cos t + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin t + \frac{2}{3\sqrt{3}} \sin t \cos t + \frac{1}{9}$$

Тепер, залишаючи в інтегралі лише ненульові доданки, отримаємо:

$$\begin{aligned} C_L(\bar{F}) &= \oint_L z^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (du - dv) + x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (du + dv) + y^2 dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ z^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin t - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos t \right) + x^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{3} \sin t + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos t \right) + y^2 \frac{2}{3} \sin t \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \left( -\frac{4}{9} \cos t \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \right) + \left( -\frac{2}{3\sqrt{3}} \sin t \right) \left( -\frac{1}{3} \sin t \right) + \frac{2}{9} \cos t \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \sin^2 t \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{4}{9\sqrt{3}} \cos^2 t + \frac{2}{9\sqrt{3}} \sin^2 t + \frac{2}{9\sqrt{3}} \cos^2 t + \frac{4}{9\sqrt{3}} \sin^2 t \right) dt = \frac{6}{9\sqrt{3}} \cdot 2\pi = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Ми впевнились, що всі методи обчислення дають один і той же результат. Причому для другого методу, який складніший лише технічно, можливості



обчислень циркуляції кращі для ширшого кола векторних полів. Можна в рамках другого методу зробити інше ортогональне перетворення координат, а саме: перенести початок координат в центр кола  $L \subset C_0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ,  $XOY$  повернути на  $\frac{\pi}{4}$ , а вісь аплікату вибрати перпендикулярно до площини  $x + y + z = 1$  та впевнитись, що обчислення циркуляції і в цьому випадку дадуть той же результат.

### 1.9 Формула Валліса. Асимптотична поведінка функції $n!$ Формула Стірлінга

Для функції  $y = \sin^n x$  на множині  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , маємо очевидну нерівність  $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ , оскільки  $0 < \sin x < 1$ . При інтегруванні знак нерівності не зміниться:  $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx$ . Використовуючи рекурентну формулу для  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ,  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  (метод інтегрування частинами), маємо:  $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$ , або

$$a_n = \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = b_n.$$

Оскільки  $b_n - a_n = \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} \underbrace{\left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2}_{< \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi}{2}$ , тобто отримаємо знамениту **формулу Валліса**:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \quad (20)$$

Розглянемо далі як поводить себе функція  $n!$  при  $n \rightarrow \infty$ . Запишемо відомий розклад в ряд Тейлора – Маклорена, а саме

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \dots \right), \text{ де } |x| < 1.$$

Покладемо  $x = \frac{1}{2n+1}$ ,  $n, m \in N$ , тоді  $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$ , а значить  $\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \times$   
 $\times \left( 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots \right)$ , або інакше  $1 < \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) <$   
 $< 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right) = \{ \text{вираз в дужках} - \text{сума спадної геометрич-}$   
 $\text{ної прогресії} \} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$ , звідки, потенціюючи, отри-

маємо  $e < \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$  (21). Тепер розглянемо дуже важливу послідо-

вність  $a_n = \frac{n! e^n}{n^{\frac{n+1}{2}}}$ . Для неї  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}}$  (22), тоді із (21) та (22) маємо:

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}, \text{ звідки ясно, що } a_n > a_{n+1}, \text{ та } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

тобто  $\begin{cases} a_n \downarrow, a_n > 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < a_n; \\ a_n e^{-\frac{1}{12n}} \uparrow, e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1 \Rightarrow a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n. \end{cases}$  Це означає, що знайдеться таке

число  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , що  $a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}$ ,  $\theta = \theta(n)$  (23). Або, згадуючи чому дорівнює

$a_n$ , отримаємо  $n! = a \sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}$ ,  $0 < \theta < 1$  (24). Знайдемо тепер  $a$ . Враховуючи,

що  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$  та формулу (24) у вигляді  $(2n)! = a\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta}{24n}}$ ,

отримаємо  $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}} e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}}$ , де  $0 < \theta, \theta' < 1$ . Далі із (20):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \frac{n}{2} e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{2\pi}. \text{ Таким чином, отримано асимптоти-}$$

чну **формулу Стірлінга** ( $0 < \theta < 1$ ):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \text{ звідки } n! = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Формулу Валліса, а також цілу низку інших цікавих застосувань можна отримати із розкладу функції  $y = \sin x$  в нескінченний добуток. Ідея такого представлення належить Ейлеру. Запишемо формулу Муавра:  $(\cos y + i \sin y)^m = \cos my + i \sin my, m \in \mathbb{N}$ . Розклавши ліву частину за біномом Ньютона, прирівняємо уявні частини:

$$\sin my = m(\cos y)^{m-1} \sin y + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} (\cos y)^{m-3} (\sin y)^3 + \dots$$

Якщо  $m$  непарне, тобто  $m = 2n + 1$ , то замінивши  $(\cos y)^{2k} = (\sin^2 y)^k$ , отримаємо рівність:  $\sin(2n+1)y = \sin y \cdot P_n(\sin^2 y), \quad \sin^2 y = u \quad (25).$  Тут

$$P_n(u) = a(u - u_1)(u - u_2) \cdot \dots \cdot (u - u_n) = \quad \{\text{за теоремою Гаусса}\} \\ = A \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \left(1 - \frac{u}{u_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{u}{u_n}\right) \quad (26), \text{ де } u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{C} - \text{корені многочлена. Із}$$

$$(25) \text{ ясно, що при } \begin{cases} \sin(2n+1)y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}, \quad A = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y} = P_n(0) = 2n+1;$$

$$u_1 = \sin^2 \frac{\pi}{2n+1}, u_2 = \sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \dots, u_n = \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1} - \text{корені різні, } \{y_n\} \uparrow,$$

$$y_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), y_n = \frac{n\pi}{2n+1}. \text{ Прийдемо до формули:}$$

$$\sin(2n+1)y = (2n+1)\sin y \left(1 - \frac{\sin^2 y}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 y}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right) \quad (27)$$

Покладемо тут  $y = \frac{x}{2n+1}$ , тоді отримаємо

$$\sin x = (2n+1)\sin \frac{x}{2n+1} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right) \quad (28)$$

Будемо вважати, що  $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ , так що  $\sin x \neq 0$ . Тепер виберемо  $k \in \mathbb{N}$ ,

таке, що  $\begin{cases} n > k \\ |x| < (k+1)\pi \end{cases}$ . Запишемо

$$\begin{aligned} \sin x = u_k^{(n)} \cdot v_k^{(n)} = (2n+1)\sin \frac{x}{2n+1} &\underbrace{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)}_{u_k^{(n)}} \cdot \\ &\cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{(k+1)\pi}{2n+1}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}}\right)}_{v_k^{(n)}} \end{aligned} \quad (29)$$

Тепер, при фіксованому  $k$ , маємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)\sin \frac{x}{2n+1} = x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{l\pi}{2n+1}} = \frac{x^2}{\pi^2 l^2}, \text{ де } l = 1, 2, \dots, k, \text{ тобто}$$

$u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{(n)} = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ . Але тоді  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} v_k^{(n)}$ , причому

$\sin x = u_k \cdot v_k$ . Використовуючи нерівність  $\frac{2}{\pi} \varphi < \sin \varphi < \varphi$ , при  $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , можна

показати, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 1$  та  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \sin x$ , тобто маємо розклад:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) \cdot \dots \quad (30)$$

Звідси, при  $x = \frac{\pi}{2}$ , отримаємо  $\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n}\right)$  - формула

Валліса. Аналогічно можна отримати наступні розклади:

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right), \quad \operatorname{sh} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right).$$

Розглянемо приклади застосування всіх цих формул:

**Приклад 1.** Обчислити  $P = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ .

*Розв'язання.* Запишемо розклад для  $\cos x$  у вигляді:

$$\frac{\cos x}{1 - \frac{4x^2}{\pi^2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right). \text{ Тоді } P = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \frac{4x^2}{\pi^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\frac{8x}{\pi^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

**Відповідь:**  $\frac{\pi}{4}$

**Приклад 2.** Обчислити  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = A$ .

*Розв'язання.*  $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sim$  {за формулою Стірлінга}

$$\sim \frac{1}{2^n} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2^n n^n}{e^n}. \quad A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2} \cdot 2^n n^n}{e^n}}} = \frac{n \cdot e}{\underbrace{(\sqrt{2})^{1/n}}_{\rightarrow 1} 2n} = \frac{e}{2}.$$

**Відповідь:**  $\frac{e}{2}$

**Приклад 3.** Дослідити ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$  на збіжність.

*Розв'язання.*  $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ . Порівняємо наш ряд з рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , де  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ .

Маємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!! \sqrt{n\pi}}{(2n)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)! \sqrt{n\pi}}{4^n (n!)^2} = \{ \text{за формулою Стірлінга} \}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n\pi} \left( \frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{n\pi}}{4^n \left( \frac{n}{e} \right)^{2n} 2n\pi} = 1. \text{ Але ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ розбіжний,}$$

тому за граничною теоремою порівняння досліджуваний ряд теж розбіжний.

**Відповідь:** ряд розбіжний.

**Приклад 4.** Знайти  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left( n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$ .

*Розв'язання.* Знайдемо  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , якщо ця границя існує. Маємо

$$a_n = n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1, \text{ тоді}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \ln \left( 3 \cdot \left( \frac{5}{3} \right)^2 \cdot \left( \frac{7}{5} \right)^3 \cdot \left( \frac{9}{7} \right)^4 \cdot \dots \cdot \left( \frac{2n-1}{2n-3} \right)^{n-1} \cdot \left( \frac{2n+1}{2n-1} \right)^n \right) - n =$$

$$= \ln \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2n-3} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot (2n+1)^n \right) - n = \ln \left( \frac{(2n+1)^n}{(2n-1)!!} \right) - n =$$

$$= \ln \left( \frac{(2n+1)^n 2^n n!}{(2n)!} \right) - n = \{ \text{за формулою Стірлінга} \} = \ln \frac{(2n+1)^n e^n}{\sqrt{2} \cdot 2^n n^n} - n =$$

$$= n \ln \left( \frac{n + \frac{1}{2}}{n} \right) + n - n - \frac{1}{2} \ln 2 = n \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \ln 2. \text{ Тоді}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{1}{2} (1 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}.$$

Отже, ряд збіжний, його сума  $S = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$ .

**Відповідь:**  $S = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2}$

## 1.10 $\delta$ – функція Дірака, основні властивості. Застосування, приклади

### 1.10.1 Основні поняття

Відомий англійський фізик-теоретик Поль Дірак запропонував в 1929 році застосовувати в теоретичних дослідженнях незвичайну, але дуже зручну функцію для не менш дивної на той час квантової фізики. Формально ця функція виглядала так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 & (a) \\ \infty, & t = 0 & (b) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 & (c) \end{cases}$$

Як бачимо  $\delta(t)$  визначена зовсім не класичним способом і дуже не схожа на звичайні функції.

Для означення  $\delta(t)$  функції можна, використовуючи граничний перехід, розглянути такі варіанти:

$$\begin{aligned} 1) \delta_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 0, & |t| > \varepsilon > 0 \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & |t| < \varepsilon \end{cases}, & 2) \delta_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 0, & t < 0, t > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon \end{cases}, \\ 3) \delta_\varepsilon(t) &= \begin{cases} 0, & t > \varepsilon \\ \frac{t}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}, & t \in (-\varepsilon; 0), \\ -\frac{t}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}, & t \in (0; \varepsilon) \end{cases}, & \text{тоді } \delta(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Хоча ця функція визначена незвично і зовсім нестрого з точки зору класичної математики, але її обережне (з пересторогами) застосування дає деякі переваги і зрозумілі пояснення природи тих явищ та процесів, які за

допомогою класичної математики приводили до непорозуміння. Пізніше математики строго визначили цю функцію як представника цілого класу так званих узагальнених функцій-розподілів. Властивості  $\delta$  – функцій були строго обґрунтовані і вона посіла чільне, хоча і особливе, місце в арсеналі методів дослідження природи. Зручність її полягає в тому, що вона сама будучи, «дуже розривною», допомагає навести лад саме в дослідженнях розривних функцій.

### 1.10.2 Основні властивості

Розглянемо (без строгого обґрунтування) деякі властивості  $\delta$  – функції.

1. Наступні рівності, наряду з 1), 2) та 3) можуть бути еквівалентними означеннями  $\delta$  – функції:

$$\text{а) } \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}, \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - \text{інтеграл Пуассона} \right);$$

$$\text{б) } \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \right);$$

$$\text{в) } \delta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}, \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi - \text{інтеграл Діріхле} \right).$$

2.  $\delta(x) = \delta(-x)$  – функція парна.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1: \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

4.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$  – основна, дуже важлива властивість  $\delta$  – функції для неперервної  $f(x)$ .

$$5. \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x), \quad \delta(\varphi(x)) = \frac{1}{|\varphi'(0)|} \delta(x), \quad \text{якщо } \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) \neq 0. \end{cases}$$

6. Для одиничної функції Хевісайда  $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ , маємо

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx.$$

7. Для функції



$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (\operatorname{sgn} x = 2\eta(x) - 1), \quad \operatorname{sgn} x = 2 \int_{-\infty}^x \delta(x) dx - 1.$$

$$8. \text{ Для функції стрибка } \gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{1}{2}, & x < 0 \end{cases}; \quad \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d(\operatorname{sgn} x)}{dx} = \delta(x).$$

$$9. F_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega x} \Big|_{x=0} = 1 \quad - \text{ спектральна функція.}$$

$$10. F_{\delta}(\omega) = 1, \text{ тому } \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{i\omega x} d\omega = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega x + i \sin \omega x) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega.$$

$$11. \gamma(x) = \int_0^x \delta(t) dt = \int_0^x \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t d\omega \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega$$

$$\text{При } x=1, \text{ маємо } \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \text{ (інт. Дирихле).}$$

12. Якщо  $x \in (0; \pi)$ , то справедливі рівності (розклад  $\delta$  – функції в ряд Фур'є):

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2} \delta(x);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} (\delta(x) - \delta(2x));$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx = \frac{\pi}{2} (2\delta(2x) - \delta(x)).$$

$$13. \text{ Зображення по Лапласу } \delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) e^{-pt} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-pt} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} = 1.$$

Формально за формулою Рімана-Мелліна, маємо

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} dp, \quad \text{де } p = s + i\sigma.$$

14. Справедлива рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)\delta(x-c)dx = \delta(y-c).$$

$$15. \text{ В } \mathbb{R}^2 \text{ можна визначити } \delta(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\} \\ \infty, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x, y) dx dy = 1,$$

тоді  $\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$ .

Або в  $\mathbb{R}^n$ :  $\delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \delta(x_i)$ .

16. Розглянемо тепер похідну від  $\delta(x)$ . Для того щоб наглядно з'ясувати характер поведінки  $\delta'(x)$ , виберемо еквівалентне формальне визначення 3), тобто

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}, & x \in (-\varepsilon; 0) \\ -\frac{x}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}, & x \in (0; \varepsilon) \end{cases}; \quad \text{тоді} \quad \delta'_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2}, & x \in (-\varepsilon; 0) \\ -\frac{1}{\varepsilon^2}, & x \in (0; \varepsilon) \end{cases}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x), \quad \delta'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta'_\varepsilon(x).$$

Ясно, що  $\delta'(x)$  - непарна функція і має ще «більшу» особливість різних знаків в точці  $x = 0$ , ніж  $\delta(x)$ , а саме в т.  $x = 0$  розриви функції  $\delta'(x)$  це  $\pm \frac{1}{\varepsilon^2}$ , в той час, як для  $\delta(x)$  ці розриви становлять  $\frac{1}{\varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 1.10.3 $\delta$ -функція як сингулярний розподіл

Зусиллями багатьох математиків, в першу чергу Л. Шварца та С. Соболева знайдено математично коректне визначення узагальнених функцій - розподілів та їх похідних як лінійних неперервних функціоналів над деяким простором основних функцій, що дозволило значно розширити область застосування класичного математичного аналізу.

Розглянемо множину  $\{\varphi\}$  всіх числових нескінченно диференційованих фінітних функцій  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, m \geq 1$ , яку назовемо простором  $\mathcal{D}$  основних функцій, тобто  $(\varphi \in \mathcal{D}) \Leftrightarrow (\varphi \in C^\infty, \exists K \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1: \varphi(x \notin K) \equiv 0)$ , де  $K$ -компакт, тобто обмежена замкнена підмножина  $\mathbb{R}^m$ . Наприклад, при  $m=1$  функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  належить  $\mathcal{D}$ , якщо  $\varphi(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ , константа  $C$  вибрана

так, щоб  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = 1$ . Таку функцію  $\varphi$  називають «шапочкою», а функцію  $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , де  $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$  називають " $\varepsilon$ -шапочкою".

Тоді всякий лінійний функціонал  $L$ , неперервний на просторі  $\mathcal{D}$  основних функцій називається розподілом. Наприклад, якщо  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  локально інтегрована на довільному компактi  $K \subset \mathbb{R}^m$ , то вона визначає лінійний неперервний функціонал  $L_f$  за формулою  $(L_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x) dx$  — скалярний добуток, де  $m \geq 1, \varphi \in \mathcal{D}$ . Тоді  $L_f$  - називається **регулярним розподілом**, і позначається  $(L_f, \varphi) = (f, \varphi)$ . Якщо ж лінійний неперервний функціонал  $L$  ставить у відповідність кожній функції  $\varphi \in \mathcal{D}$  її значення в т.  $x = 0$ , то він називається **сингулярним  $\delta$  – розподілом Дірака**, а його значення отримаємо за формулою:

$$(L, \varphi) = (\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \text{ або при } m = 1:$$

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{K(0 \in K)} \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

оскільки носієм  $\delta(x)$  (тобто найменшою замкненою множиною, поза межами якої  $L = \delta=0$ ) являється єдина точка  $x = 0$ . Це означає, що  $\varphi(x) \delta(x) = \varphi(0) -$  **фільтруюча властивість  $\delta$ -функції** ( $\delta$ -розподілу).

Рівність  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$  - є основною (визначальною), для одновимірної  $\delta$  – функції Дірака, звідси випливають всі три умови формального визначення  $\delta$  - функції, а саме:

$$(a) \delta(x) = 0, \text{ при } x \neq 0 \quad (\text{бо } x = 0 - \text{ носій})$$

$$(b) \delta(0) = \infty$$

(с) При  $\varphi(x) \equiv 1$  маємо  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 1 dx = 1$

Також можна показати, що значення регулярного функціонала  $(f, \varphi)$  на основних функціях однозначно, з точністю до значень на множині міри 0, визначають відповідну функцію  $f$ . Тобто всю сукупність звичайних локально інтегрованих функцій можна розглядати як деяку частину сукупності всіх розподілів, наприклад, розподіл 1 буде  $(1, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dx, \quad m \geq 1$ .

Розглянемо тепер похідну функцій розподілу.

Нехай  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неперервно диференційована функція, тоді  $f'$  – це функціонал  $(f', \varphi)$ , де  $\varphi \in D$ . Далі маємо:

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = f(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx = (f, -\varphi'),$$

(за формулою інтегрування частинами).

Таким чином маємо  $(L', \varphi) = -(L, \varphi') = (L, -\varphi')$  – ця рівність і визначає похідну розподілу  $L$ , яка також є лінійним неперервним функціоналом. Аналогічно можна визначити похідні розподілів вищих порядків, які існують і теж являються розподілами.

Можна показати, якщо  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g \in C^\infty$ , а  $L$  – деякий розподіл, то  $(g \cdot L)$  визначається за формулою  $(gL, \varphi) = (L, g\varphi)$  і  $(g \cdot L)'$  обчислюється за правилом  $(g \cdot L)' = g'L + gL'$ .

Розглянемо деякі приклади:

1) Нехай  $\eta(x)$  – одинична функція Хевісайда, тоді

$$\eta(\varphi) = (L, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) dx, \text{ а значить } \eta'(\varphi) = (L', \varphi) = -(L, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \text{ тобто } \eta'(x) = \delta(x).$$

Ясно, що  $\eta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ .

2) Знайдемо  $\delta'(x)$ , маємо  $(\delta', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \varphi(x) dx =$

$$= \delta(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi'(x) dx = -(\delta, \varphi') = (\delta, -\varphi') = -\varphi'(0).$$

Далі аналогічно:  $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (\delta, \varphi^{(n)}) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$ .

Інакше, із фільтруючої властивості  $\delta(x)$ :  $x\delta(x) = 0$ , випливає  $\delta(x) + x\delta'(x) = 0 \Rightarrow \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$ , далі:

$$2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0 \Rightarrow \delta''(x) = -\frac{2\delta'(x)}{x} = \frac{2\delta(x)}{x^2}, \dots$$

$$\dots, \delta^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n! \delta(x)}{x^n}.$$

3) Знайдемо похідну від розривної функції:  $f(x) = \begin{cases} g(x), & x < x_0 \\ h(x), & x > x_0 \end{cases}$

Маємо:  $f(x) = g(x) + (h(x) - g(x))\eta(x - x_0)$ . Тоді

$$f'(x) = g'(x) + (h'(x) - g'(x))\eta(x - x_0) + (h(x) - g(x))\delta(x - x_0) =$$

$$= g'(x) + (h'(x) - g'(x))\eta(x - x_0) + (h(x_0) - g(x_0))\delta(x - x_0).$$

Наприклад, якщо  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x^3, & x > 2 \end{cases}$ , то маємо:

$$f'(x) = 2x + (3x^2 - 2x)\eta(x - 2) + 4\delta(x - 2).$$

4) Розглянемо перетворення аргумента  $\delta$ -функції. Нехай  $g(x)$  – неперервно диференційована функція, така, що  $g(x_0) = 0$ , а  $g'(x_0) \neq 0$ . Тоді її ряд Тейлора:

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}g''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\text{Тому } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))\varphi(x)dx = \left| \frac{g(x)=y}{g'(x)dx=dy} \right| = \int_{g(-\infty)}^{g(+\infty)} \frac{\varphi(x)}{g'(x)}\delta(y)dy =$$

$$= \frac{\varphi(x_0)}{g'(x_0)} \int_{g(-\infty)}^{g(+\infty)} \delta(y)dy = \frac{\varphi(x_0)}{|g'(x_0)|} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(g'(x_0)(x - x_0))dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x_0)}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0)dx,$$

$$\text{тобто } \delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0).$$

Узагальнюючи для точок  $x = x_i, i = \overline{1, n}$ , маємо при  $g(x_i) = 0$ , а  $g'(x_i) \neq 0$ :

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i).$$

Наприклад, для  $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x + 2)(x - 1)(x - 2)$ ,

$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ , тобто, обчислюючи  $g'(x) = 3x^2 - 2x - 4$ ,  
 $g'(-2) = 12$ ,  $g'(1) = -3$ ,  $g'(2) = 4$ , отримаємо  $\delta(g(x)) = \delta(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{12} \delta(x + 2) + \frac{1}{3} \delta(x - 1) + \frac{1}{4} \delta(x - 2)$ .

5) Знайдемо зображення по Лапласу  $\delta(t)$  та  $\delta'(t)$ . Маємо:

$$\delta(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = e^{-pt}|_{t=0} = 1, \delta(t - t_0) \doteq e^{-t_0 p},$$

$$\delta'(t) \doteq \int_0^{\infty} \delta'(t) e^{-pt} dt = -(e^{-pt})'|_{t=0} = p e^{-pt}|_{t=0} = p,$$

аналогічно  $\delta^{(n)}(t) \doteq p^n$ .

6) Тепер, нехай  $f(t)$  – кусково неперервно диференційована функція, що має розриви в точках  $t_k$  – скінченні розриви 1-го розряду із стрибками

$$h_k = f(t_k + 0) - f(t_k - 0), k = \overline{1, n}, \text{ тоді } f'(t) = f'_1(t) + \sum_{k=1}^n h_k \delta(t - t_k),$$

де

$f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n h_k \eta(t - t_k)$ . Тобто, похідна розривної функції  $f'(t)$  складається із її звичайної похідної  $f'_1(t)$  (де вона неперервно диференційована) та суми  $\delta$ -функцій в точці розриву з коефіцієнтами  $h_k$ . Розглянемо конкретний приклад.

Нехай  $f(t) = \eta(t) - 2\eta(t - 1) + \eta(t - 2)$ . Тоді

$$f'(t) = 0 + \delta(t) - 2\delta(t - 1) + \delta(t - 2). \text{ Згадаємо, що } \eta'(t) = \delta(t),$$

$$\delta(t - t_0) \doteq e^{-t_0 p}, \delta(t) \doteq 1. \text{ Тоді } f'(t) \doteq 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}.$$

$$\text{Тобто } f(t) \doteq \frac{1}{p} - \frac{2e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} \Rightarrow f(t) = \eta(t) - 2\eta(t - 1) + \eta(t - 2).$$

Якщо не враховувати  $\delta$ -функцію, то похідна від  $f(t)$  як від константи дорівнює 0 скрізь, крім точок  $t = 0$ ,  $t = 1$  та  $t = 2$ , де вона не існує. Але тоді і інтеграл Лапласа для  $f'(t)$  дорівнює нулю, звідки і зображення  $f(t)$  теж дорівнює нулю, що явно невірно.

7) Застосуємо тепер розклад  $\delta$ -функції в ряд Фур'є для знаходження суми тригонометричного ряду  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$  та числового ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ .

Маємо:  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2} \delta(x)$ ,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ ,  $S''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ,  
 $S'''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(x)$ .

Тобто маємо рівняння  $S'''(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \delta(x)$ , при  $S(0) = S''(0) = 0$ .

Розв'яжемо його операційним методом, маємо:

$$\delta(x) \doteq 1, S'''(x) \doteq p^3 S(p) - p^2 S(0) - p S'(0) - S''(0) \text{ або}$$

$$p^3 S(p) - p S'(0) = \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}, \text{ де } S'(0) - \text{поки невідома.}$$

$$\text{Далі } p^3 S(p) = p S'(0) + \frac{1}{2p} - \frac{\pi}{2}; \quad S(p) = \frac{1}{2p^4} - \frac{\pi}{2p^3} + \frac{S'(0)}{p^2}, \text{ звідки}$$

$$S(p) \doteq \frac{1}{2 \cdot 3!} x^3 - \frac{\pi}{2 \cdot 2!} x^2 + S'(0)x = S(x).$$

При  $x = \pi$ , маємо, що  $\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi}{4} \pi^2 + S'(0)\pi = 0 \Rightarrow S'(0) = \frac{\pi^2}{6}$ , тому

$$S(x) = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}. \quad \text{Далі, при } x = \frac{\pi}{2}, \text{ маємо:}$$

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{1}{12} \left( \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi^3}{4} + \pi^3 \right) = \frac{\pi^3}{32}.$$

8) Якщо на  $\mathbb{R}^1$  неперервно-дискретно розподілена маса з густиною

$$\mu(x) = \rho(x)(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + \sum_{k=3}^n m_k \delta(x - x_k),$$

де  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , тоді вся маса

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx + \sum_{k=3}^n m_k \int_{x_3-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} \delta(x - x_k) dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx + \sum_{k=3}^n m_k, \text{ де } \varepsilon > 0. \text{ Якщо } x_c - \text{центр ваги, то}$$

$$x_c = \frac{1}{m} \left( \int_{x_1}^{x_2} x \rho(x) dx + \sum_{k=3}^n m_k \int_{x_3-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon} x \delta(x - x_k) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \left( \int_{x_1}^{x_2} x \rho(x) dx + \sum_{k=3}^n m_k x_k \right).$$

Аналогічно, використовуючи поняття  $\delta$ -функції в  $\mathbb{R}^2$  та  $\mathbb{R}^3$ , можна розв'язати задачу знаходження маси (або заряду) та інших характеристик, якщо густина неперервно-дискретно розподілена на площині або в просторі.

9) Нехай  $\xi$  — неперервно-дискретна випадкова величина із щільністю

розподілу  $p_\xi(x) = C_1 \gamma(x)(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + C_2 \sum_{i=3}^n p_i \delta(x - x_i)$ , де  $C_1$  та  $C_2$  підібрані таким чином, щоб виконувалась умова нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) dx = 1, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n. \text{ Тоді можна знайти всі характеристики } \xi: F_\xi(x), m_\xi, D_\xi, \dots \text{ Наприклад, } p_\xi(x) = C_1 \sqrt{x}(\eta(x) - \eta(x - 1)) + C_2 \left( \frac{1}{3} \eta(x - 2) + \frac{1}{4} \eta(x - 3) \right).$$

Виберемо  $C_2 = 1$ , тоді  $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) dx = C_1 \int_0^1 \sqrt{x} dx + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} C_1 + \frac{7}{12} = 1$ , звідси  $C_1 = \frac{5}{8}$ . Знайдемо  $m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx = \frac{5}{8} \int_0^1 \sqrt{x^3} dx + \frac{1}{3} \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} x \delta(x - 2) dx + \frac{1}{4} \int_{3-\varepsilon}^{3+\varepsilon} x \delta(x - 3) dx = \frac{5}{3}$ .

#### 1.10.4 Відновлення неперервного сигналу за його дискретними значеннями. Теорема WKS

Починаючи з 1928 року в роботах Уїттакера, Найквіста, Котельникова, Хартлі та Шеннона була поставлена та розв'язана задача відновлення аналогового сигналу (зображення) по його дискретним відлікам (цифровим значенням). В 1977 році було запропоновано назвати (по пріоритетам) відповідну теорему відліків теоремою WKS (Whittaker-Kotelnikov-Shannon). В чому суть цієї теореми і яка тут роль  $\delta$  – функції Дірака? Розглянемо неперіодичний сигнал  $f(t)$  з обмеженим спектром, тобто такий, спектральна функція якого

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \text{ де } \omega_c - \text{максимальна частота спектра.}$$

Тоді  $f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\pi}{\omega_c} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$  – функція відліку.

Її максимальне значення дорівнює одиниці при  $t = 0$ , а в точках  $t_k = \frac{\pi k}{\omega_c}$ ,

$k = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  дорівнює нулю. При зміщенні  $f_0(t)$  вздовж осі  $t$  полоса частот не змінюється, причому функції  $f_k(t) = f_0\left(t - \frac{\pi k}{\omega_c}\right) = \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$  на  $[-\omega_c, \omega_c]$  – ортогональні між собою при  $k \in \mathbb{Z}$ . Це означає, що  $f(t)$  можна розкласти в ряд



по системі  $\{f_k(t)\}$ , тобто  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$ , де при  $t = \frac{\pi n}{\omega_c}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , випливає рівність  $f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(n-k)\pi}{(n-k)\pi} = a_k$ , при  $n = k$ , тому маємо

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi} - \text{ряд Котельникова.}$$

Нехай період найбільшої частоти спектра  $\omega_c$  буде  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ , тоді

$a_n = f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = f\left(n \frac{T_c}{2}\right)$  – це значення функції  $f(t)$  при  $t = n \frac{T_c}{2}$ , тобто  $a_0 = f(0)$ ,  $a_1 = f\left(\frac{T_c}{2}\right), \dots, a_n = f\left(n \frac{T_c}{2}\right), \dots$  Звідси маємо, що функція з обмеженим спектром повністю визначається своїми значеннями в дискретні моменти часу, тобто для передачі аналогового неперіодичного сигналу (зображення) з обмеженим спектром достатньо передати лише його окремі значення через  $\frac{1}{2}T_c$ . Це можна виконати, передаючи короткі імпульси, амплітуди яких пропорційні  $a_k = f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right)$ . Такими імпульсами якраз і можуть бути відповідні  $\delta$  – функції, а саме, замість  $f(t)$  можна передати сигнал

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(t - k \frac{T_c}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right),$$

причому для відновлення  $f(t)$  треба  $\varphi(t)$  пропустити через фільтр нижніх частот з полосою пропускання  $\omega_c$ , тоді на виході фільтра отримаємо сигнал

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega \frac{k\pi}{\omega_c}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi},$$

який пропорційний  $f(t)$ . Зауважимо, що вибір  $k$  в дійсності обмежений і визначається параметрами  $T$  – тривалість сигналу та  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  – ширина полоси частот, а саме  $N = \frac{2T}{T_c} = 2T \cdot f_c$ .

Ясно, що  $f_c$  визначається тривалістю найменшої частки сигналу  $t_{min}$ . Можна вважати, що  $f_c = \frac{1}{t_{min}} = \frac{1}{T_c}$ . Звідки випливає, що інтервал відліку складає половину тривалості найбільш короткочасної характерної частини сигналу.

Технічно для такої передачі одновимірного та двовимірного сигналів і зображень використовуються одновимірні та двовимірні дифракційні решітки, діафрагми (як фільтри) та системи лінз відповідних конфігурацій.

## 1.11 Деякі питання теорії ймовірностей та математичної статистики

### 1.11.1 Простір подій, класична ймовірність

Нехай  $A$  – випадкова подія,  $P(A)$  – її ймовірність. Основні поняття класичному визначенню не підлягають. Розуміють їх інтуїтивно, або за допомогою системи аксіом, через властивості операцій над ними.  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – ймовірнісна трійка:

$$1) \Omega = \underbrace{\{A, B, \dots, C, \dots\}}_{\substack{\text{скінченна} \\ \text{злічена множина,} \\ \text{еквівалентна } N}} - \text{ймовірнісний простір } (N - \text{множина натуральних чисел}).$$

$$2) \mathcal{A} = \{A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \bar{A} = \Omega \setminus A, \dots\} - \text{алгебра подій.}$$

$$3) P(A), P(B), \dots - \text{ймовірності подій.}$$

Засновниками ТЙ є Блез Паскаль, Якоб Бернуллі, П'єр Ферма, П'єр Сімон Лаплас, Абрахам Муавр, Сімеон Дені Пуассон та багато інших. Подальший бурхливий розвиток ТЙ та математичної статистики, а також теорії випадкових процесів пов'язаний з іменами П.Л. Чебишова, А.А. Маркова, О.М. Ляпунова, А.М. Колмогорова, Б.В. Гнеденка, О.С. Вентцель, В.В. Булдигіна та інших.

Становлення та розвиток ТЙ тісно пов'язані з теорією ігор. Розглянемо деякі приклади.

$$1) \text{ Монета – 2 сторони (герб, цифра або 0, 1).}$$

$$2) \text{ Гральний кубик (1, 2, 3, 4, 5, 6) на гранях.}$$

$$3) \text{ Доміно – по два поля на 1 кості, можна пов'язати з цифрами 0, 1, 2, 3, 4,}$$

$$5, 6 \text{ (всього 7) з повтореннями. Всього кісток } \overline{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28.$$

4) Гральні карти: а) повна колода, карти 2-х кольорів (чорний та червоний), 4-ох мастей (треф, піка, бубна, чирва), в кожній масті 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т – 13 одиниць; б) преферанс: 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т. Всього  $8 \cdot 4 = 32$ ; в) гра в дурня (з погонами): 6, 7, 8, 9, 10, В, Д, К, Т. Разом  $9 \cdot 4 = 36$ .

Наприклад, гральний кубик підкинули 1 раз. Побудуємо  $\Omega$  так:

$A$  – випало парне число 2, 4 або 6;

$B$  – випало непарне число 1, 3 або 5;

$C$  – випали числа 1, 2 або 3;

$D$  – випали 4, 5 або 6.

Тоді  $\Omega = \{A, B, C, D\}$  – простір випадкових подій, множина подій утворює **повну групу**, події **рівноможливі, сумісні**.

Проілюструємо побудову простору елементарних подій. Монету підкидаємо 3 рази. Будуємо  $\Omega$  так: всього можливих варіантів  $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$ .

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} - 8 \text{ випадкових подій, } 1 \text{ означає, що}$$

випав герб, 0 – цифра.

$$\text{Якщо } \Omega = \left\{ \underbrace{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}_{\omega_i, i=\overline{1, n}} \right\}, \text{ де}$$

1)  $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset \ (i \neq j)$  - попарно несумісні;

2)  $P(\omega_i) = P(\omega_j)$  - рівноможливі;

3)  $\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$  - повна група,

то таким чином побудована  $\Omega$  утворює **простір елементарних подій**.

Якщо  $A \in \mathcal{A}$  із  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  така, що  $\omega_k \in A$ , то  $\omega_k$  - елементарна подія із  $\Omega$ , що сприятлива для  $A$ . Нехай  $A_\omega = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_m}\}$  - множина  $\omega_i \in \Omega$ , що складається з  $m$  елементарних подій, сприятливих для події  $A$ , тоді за класичним

означенням ймовірності:  $P(A) = \frac{m}{n}$ ,  $m$  – сприятливих,  $n$  – загальна кількість можливих подій.

Ясно, що при такому визначенні,  $0 \leq P(A) \leq 1$ , оскільки  $0 \leq m \leq n$ . При цьому

$$\text{для } \begin{cases} A = \emptyset, m = 0, - \text{неможлива подія} \\ A = \Omega, m = n, - \text{достовірна подія} \end{cases}.$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \bar{A} - \text{подія, протилежна до } A.$$

Нехай тепер подія  $A$  – випадає 3 герба,  $B$  – випадає 2 цифри,  $C$  – випадає хоча б 1 герб. Знайдемо  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ . Маємо:

$$1) \text{ для } A \ m = 1, n = 8, \text{ тому } P(A) = \frac{1}{8};$$

$$2) \text{ для } B \ m = 3, n = 8, \text{ тобто } P(B) = \frac{3}{8};$$

$$3) \text{ для } C \ m = 7, n = 8, P(C) = \frac{7}{8}.$$

Якщо гральний кубик кидають двічі, то розглянемо події: 1)  $A$  – сума цифр дорівнює 6; 2)  $B$  – ця сума менше 6; 3)  $C$  – вона більше 6. Знайти  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ .

Будуємо  $\Omega$ :

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

$n = \bar{A}_6^2 = 6^2 = 36$ . Безпосереднім підрахунком відповідних клітинок таблиці маємо:

$$1) \ A: m = 5, n = 36, P(A) = \frac{5}{36};$$

$$2) \ B: m = 10, n = 36, P(B) = \frac{10}{36};$$

$$3) \ C: m = 21, n = 36, P(C) = \frac{21}{36}.$$

**Приклад 1.** 5 кульок випадково розподіляють по 5 лункам. Події: 1)  $A$  – в кожній лунці одна кулька; 2)  $B$  – всі в одну лунку; 3)  $C$  – 2 в якусь одну, а 3 в якусь іншу. Знайти ймовірності цих подій.

Розв'язання. 1)  $A$ :  $n = \bar{A}_5^5 = 5^5$ ,  $m = P_5 = 5!$ ,  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625}$ ;

2)  $B$ :  $n = 5^5$ ,  $m = C_5^1 = 5$ ,  $P(B) = \frac{5}{5^5} = \frac{1}{625}$ ;

3)  $C$ :  $n = 5^5$ ,  $m = P_5(2, 3, 0, 0, 0) = \frac{5!}{2!3!}$ ,  $P(C) = \frac{5!}{2!3!5^5} = \frac{2}{625}$ .

**Відповідь:**  $P(A) = \frac{24}{625}$ ,  $P(B) = \frac{1}{625}$ ,  $P(C) = \frac{2}{625}$

**Приклад 2.** У три вагони потягу входять 9 пасажирів. Кожен пасажир вибирає вагон навмання. Подія  $A$  – в першому вагоні буде 3 пасажирів,  $B$  – в кожному вагоні буде по 3 пасажирів. Знайти ймовірності цих подій.

Розв'язання. 1)  $A$ : кожний пасажир вибирає будь-який із трьох вагонів, тому  $n = 3^9$ , з 9 пасажирів можна вибрати трьох  $C_9^3$  способами, а інші 6 вибирають 2 вагони навмання, тому  $m = C_9^3 \cdot 2^6$ , тобто  $P(A) = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2^6}{3! \cdot 3^9}$ .

2)  $B$ :  $n = 3^9$ ,  $m = P_9(3, 3, 3) = \frac{9!}{(3!)^3} = \frac{9!}{6^3}$ ,  $P(B) = \frac{9!}{6^3 \cdot 3^9} = \frac{560}{6561}$ .

**Відповідь:**  $P(A) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2^6}{3! \cdot 3^9}$ ,  $P(B) = \frac{560}{6561}$ .

**Приклад 3.** Розглянемо випадок, коли простір  $\Omega$  – незліченна множина (нагадаємо, що  $R^1, R^2, \dots, R^n$  має незліченну множину точок, але при цьому такі геометричні характеристики як  $l$  – довжина відрізка  $\in R^1$ ,  $s$  – площа області  $D \subset R^2$ ,  $v$  – об'єм тіла  $V \in R^3$  – скінченні, якщо відповідні геометричні об'єкти обмежені). Нехай в  $R^n$  задані два геометричні об'єкти  $g$  та  $G$ , такі, що  $g \subset G \subset R^n$ ,  $g$  та  $G$  – обмежені, тобто міра  $g$  та міра  $G$  – скінченні. Тоді ймовірність того, що точка  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка випадково може потрапити в будь-яку точку множини  $G$ , попаде саме в область  $g \subset G$ , згідно класичної ймовірності буде

$$P(A) = \frac{\text{міра } g}{\text{міра } G} = \frac{\text{mes}(g)}{\text{mes}(G)} = \begin{cases} \frac{l}{L} \text{ для } R^1 \\ \frac{s}{S} \text{ для } R^2, l - \text{довжина, } s - \text{площа, } v - \text{об'єм.} \\ \frac{v}{V} \text{ для } R^3 \end{cases}$$

Наприклад, в  $R^2$  (рис. 12):

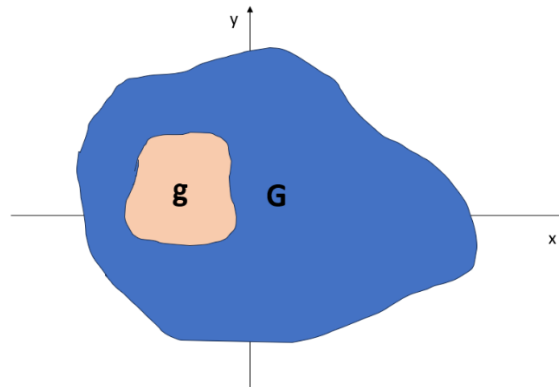
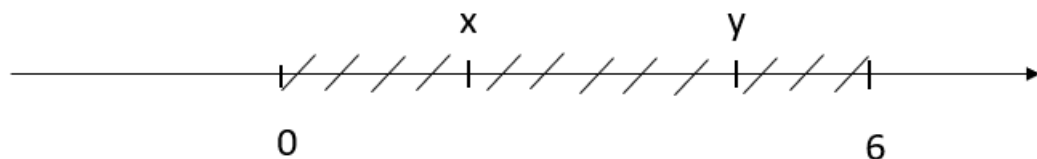


Рис. 12

- 1) Нехай на відрізку  $[0; 6]$  вибрано дві точки випадково, їх координати відповідно  $x$  та  $y$ , де  $0 \leq x, y \leq 6$ . Знайти ймовірність того, що  $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x \cdot y \geq 5 \end{cases}$  (подія  $A$ ).

- 2) Точка випадково потрапляє в куб зі стороною  $a$ . Чому дорівнює ймовірність того, що вона потрапить у кулю, вписану в цей куб (подія  $B$ )?

*Розв'язання.* 1) Розглянемо подію  $A$ . Побудуємо  $g$  та  $G$  в цьому випадку.



Ясно, що  $G$  - це квадрат зі стороною 6 (див. рис. 13), бо  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases}$ ,

$x + y = 6$  - пряма,  $xy = 5$  - гіпербола.  $g$ :  $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ x \cdot y \geq 5 \end{cases}$  - заштрихована на крес-

ленні область.  $M_1(1; 5)$ ,  $M_2(5; 1)$  - точки перетину гіперболи та прямої.

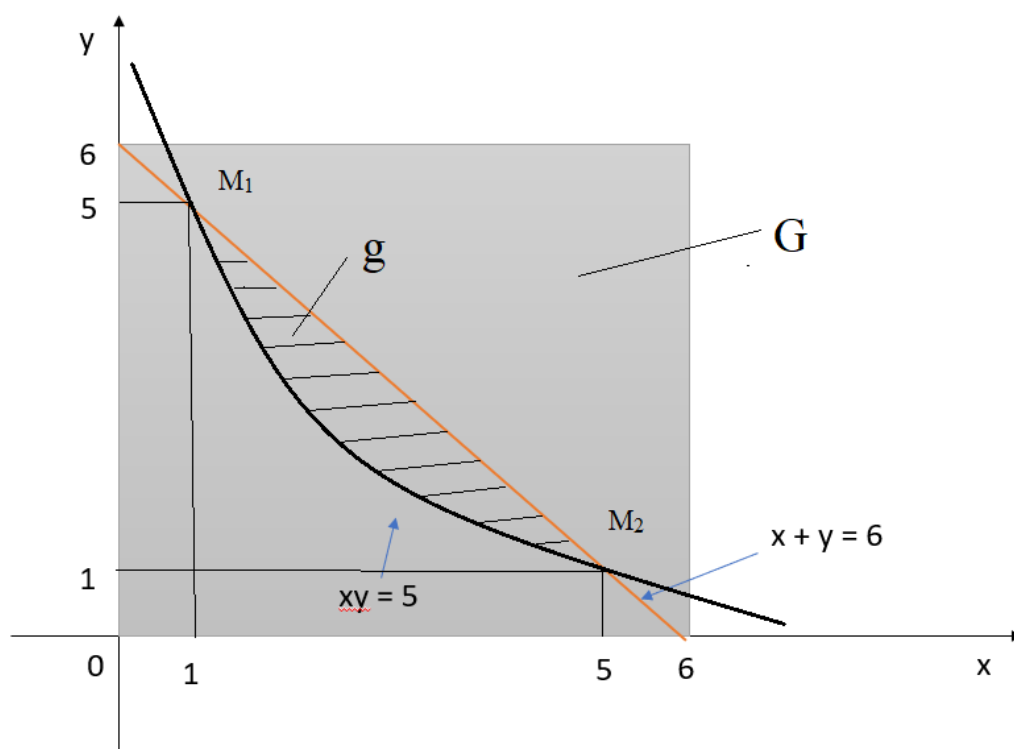


Рис. 13

Знайдемо  $mes(g) = S_g = \int_1^5 (6 - x - \frac{5}{x}) dx = \left( 6x - \frac{x^2}{2} - 5 \ln|x| \right) \Big|_1^5 = 12 - 5 \ln 5,$

$mes(G) = S_G = 6^2 = 36$ , тому  $P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)} = \frac{12 - 5 \ln 5}{36} \approx 0,11$ .

2) Якщо куб зі стороною  $a$ , то радіус вписаної в нього кулі дорівнює  $a/2$ ,

тому  $mes(g) = \frac{4}{3} \pi \left( \frac{a}{2} \right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$ ;  $mes(G) = a^3$ , тому

$P(B) = \frac{mes(g)}{mes(G)} = \frac{\pi a^3}{6a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$

**Відповідь:** 1)  $P(A) = \frac{12 - 5 \ln 5}{36} \approx 0,11$ ; 2)  $P(B) = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$

### 1.11.2 Класичні теореми теорії ймовірностей

1) **Теореми додавання. Сумісні та несумісні події.**

а)  $P(A \cup B) = P(A + B) = \underset{P_1}{P(A)} + \underset{P_2}{P(B)}$  - для **несумісних подій** (рис. 14 а);

б)  $P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  – для **сумісних подій** (рис. 14 б);

в)  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ , якщо події попарно не-сумісні.

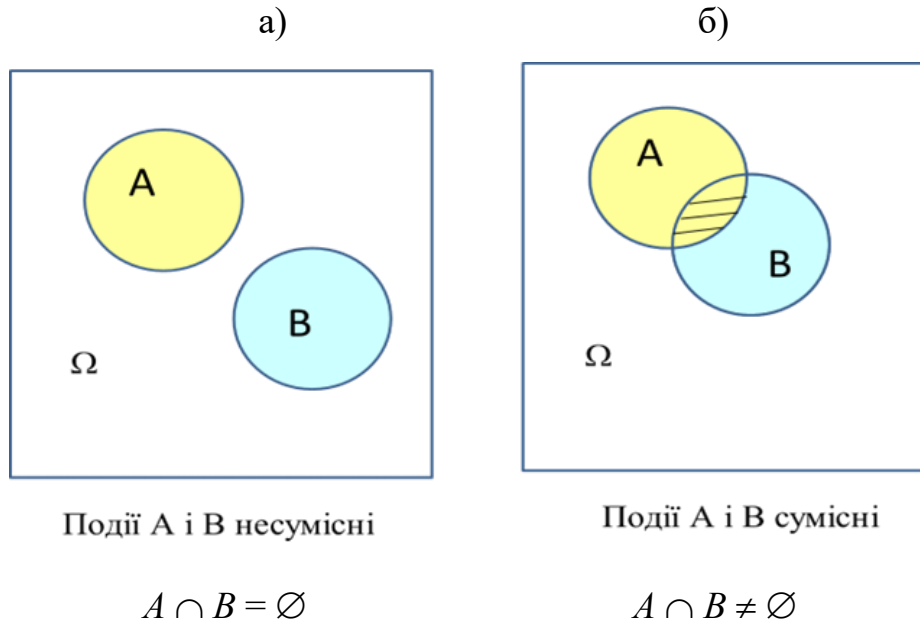


Рис. 14

### Приклад 1.

У схемі паралельного з'єднання (рис. 15) надійність відповідних елементів буде  $p_1, p_2$  та  $p_3$ . Знайти надійність (ймовірність безвідмовної роботи за певний проміжок часу) схеми.

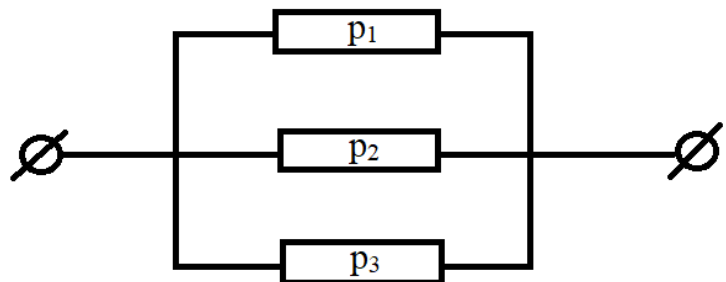


Рис. 15

**Розв'язання.** Нехай  $A$  – подія «схема працює». Така схема працюватиме, якщо працює хоча б один елемент. Тому доцільніше розв'язати цю задачу через протилежну подію, використовуючи теорему множення незалежних подій, а саме:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - p_i), \quad \text{тут}$$



$\prod_{i=1}^3 a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$  - знак добутку,  $\bar{A}$  - не працює жоден елемент (незалежно від інших).

**Відповідь:**  $P(A) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - p_i)$

**Приклад 2.** Два стрільці стріляють в одну мішень. Ймовірність влучити в ціль у них  $p_1 = 0,8$  та  $p_2 = 0,7$  відповідно. Знайти ймовірність влучання при одному пострілі.

*Розв'язання.* Влучання буде, якщо влучить або тільки перший, або тільки другий, або обидва, тому за теоремою додавання сумісних подій маємо:  $P(A) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ . Інакше:  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ .

**Відповідь:**  $P(A) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

## 2) Теореми множення. Залежні та незалежні події.

**а)**  $P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$ , де  $B/A$  - подія  $B$ , за умови, що  $A$  відбулась, аналогічно  $A/B$ .

Якщо  $(P(A/B) = P(A)) \Leftrightarrow (P(B/A) = P(B))$ , то події  $A$  і  $B$  **незалежні**, якщо ж  $P(A/B) \neq P(A)$ , то вони **залежні**. Тоді  $P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$  - **формула умовної ймовірності**.

**б)** Якщо всі  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) незалежні, то  $P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$ , наприклад  $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ .

## 3) Формула повної ймовірності. Формула Байєса.

Нехай подія  $A$  відбувається одночасно з деякими іншими подіями (гіпотезами), які утворюють повну групу. Тобто спочатку ми можемо побудувати повну

систему гіпотез  $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  таких, що  $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$ , причому  $A$  може відбутись з певною ймовірністю  $P(A/H_i)$  з кожною із цих гіпотез. Тоді, за теоремами додавання та множення, маємо:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) \text{ або } P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) -$$

**формула повної ймовірності.**

**Приклад 3.** Маємо 3 урни з різним складом білих та чорних кульок: у першій урні міститься 3 білих та 7 чорних кульок, у другій – 5 білих та 5 чорних та у третій – 7 білих та 3 чорних. Дехто підходить навмання до однієї з урн і дістає 2 кульки. Подія  $A$  – обидві кульки чорні. Знайти  $P(A)$ .

*Розв'язання.* Будуємо три можливі гіпотези:  $\{H_1, H_2, H_3\}$ , де  $H_1$  – дехто вибрав І-шу урну, аналогічно  $H_2$  – другу,  $H_3$  – третю. Тоді  $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Далі } P(A/H_1) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^0}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}, \quad P(A/H_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_5^0}{C_{10}^2} = \frac{2}{9}, \quad P(A/H_3) = \frac{C_3^2 \cdot C_7^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{15}.$$

$$\text{Відповідь: } P(A) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{15} + \frac{2}{9} + \frac{7}{15} \right) = \frac{34}{135}.$$

**Приклад 4.** Нехай подія  $A$  відбулась, тобто витягнуто 2 чорні кульки. Знайдемо тепер за **формулою Байєса**  $P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$  апостеріорну (після досліджу) ймовірність події, що цей дехто підійшов саме до І-ой урни:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{15}}{\frac{34}{135}} = \frac{21}{34}. \quad \text{Аналогічно} \quad P(H_2/A) = \frac{10}{34},$$

$$P(H_3/A) = \frac{3}{34}.$$

$$\text{Відповідь: } P(H_1/A) = \frac{21}{34}, \quad P(H_2/A) = \frac{10}{34}, \quad P(H_3/A) = \frac{3}{34}$$

### **1.11.3 Випадкові події, класична ймовірність**

**а) Загальні рекомендації щодо розв'язання задач на основі комбінаторних конфігурацій.**

1. Із умови задачі вибираємо модель конфігурації.
2. Визначаємо основну множину та число елементів її та відповідної вибірки.
3. З'ясовуємо, які вибірки нам потрібні (впорядковані, неупорядковані, з повторенням чи без).
4. Використовуємо відповідні формули для  $P_n$ ,  $A_n^m$ ,  $C_n^m$ ,  $\bar{A}_n^m$ ,  $\bar{C}_n^m$ ,  $P_m(k_1, k_2, \dots, k_n)$ .

При цьому зауважимо, що:

1) перестановки (з повторенням чи без повторення) мають один і той же склад елементів, які відрізняються лише порядком елементів;

2) розміщення (всі) відрізняються як елементами, так і їх порядком;

3) комбінації (всі) відрізняються лише елементами;

4) на елементи специфікації  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i=1}^n k_i = m$  жодних обмежень немає.

5. Застосовуючи модель комірок (урн, ящиків, луз) та куль (предметів, об'єктів), визначаємо, що елементи основної множини – це комірки, а елементи кортежів (вибірки) – це кулі.

6. Тлумачення числа конфігурацій з повтореннями мовою «комірки – кулі» виглядає так:

1)  $\bar{A}_n^m$  - число способів розкласти  $m$  різних предметів по  $n$  комірках.

2)  $\bar{C}_n^m$  - число способів розкласти  $m$  однакових куль по  $n$  комірках.

3)  $P_m(k_1, k_2, \dots, k_n)$  - число способів розкласти  $m$  різних із специфікацією  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  куль по  $n$  комірках так, щоб до  $i$ -ої комірки потрапило рівно  $k_i$  куль,

$$i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n k_i = m.$$

**б) Таблиці комбінаторних конфігурацій.**

1)

| Вибірки         | З повторенням (поверненням) | Без повторень (повернень)                         |
|-----------------|-----------------------------|---------------------------------------------------|
| Упорядковані    | $\bar{A}_n^k = n^k$         | $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ |
| Не упорядковані | $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ | $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ |

2)

| Число способів заповнення $n$ різних ящиків      | Без обмежень на число куль в кожному ящику | У кожному ящику не більше однієї кулі                                           |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $k$ різними кулями                               | $\bar{A}_n^k = n^k$                        | $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$                                                     |
| $k$ однаковими кулями                            | $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$                | $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$                                                   |
| із специфікацією $m$ різних куль по $n$ комірках | $P_m(k_1, k_2, \dots, k_n)$                | $P_m(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$ |

**Приклад 1.** Студенту необхідно скласти 4 екзамени протягом 8 днів, причому за день можна скласти тільки один іспит. Скількома способами можна це зробити?

*Розв'язання.* Мовою «комірки – кулі» екзамени – це «кулі», дні – це «комірки».

Шукане число позначимо  $N$ . Якщо екзамени з однієї дисципліни («кулі» однакові), то  $N = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$ . Якщо екзамени з різних предметів, («кулі» різні),

то  $N = A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 1680$ . Якщо обмеження «1 день – 1 іспит» немає (вибірка з повтореннями) та екзамени з різних предметів, то  $N = \bar{A}_8^4 = 8^4 = 4096$ .

**Відповідь:**  $N = 4096$

**Приклад 2.** У компанії є три вакансії. Скількома способами їх можна заповнити, маючи 6 претендентів?

*Розв'язання.* Оскільки один претендент не може обійняти більше як одну вакансію, то обмеження є (вибірка без повторень). Тоді є лише два варіанти: вакантні посади однакові (наприклад, три водія), тоді  $N = C_6^3 = 20$  або посади різні (менеджер, бухгалтер, адміністратор), тоді  $N = A_6^3 = 120$ .

**Відповідь:**  $N = 120$

**Приклад 3.** На конференції мають виступати студенти під номерами 1, 2, 3, 4, причому студент під номером 2 не може виступати перед студентом з номером 1. Скількома способами можна організувати виступи?

*Розв'язання.* Розглянемо всі можливі кортежі із 4-ох різних елементів. Їх число  $P_4 = 4!$  Але, за умовою задачі, не всі вони підходять, а саме потрібні лише ті, в яких на будь-яких місцях 1 стоїть перед 2. Оскільки таких наборів рівно половина (бо  $P_2 = 2!$ ), то  $N = \frac{P_4}{P_2} = 12$ .

**Відповідь:**  $N = 12$

**Приклад 4.** Скількома способами можна розмістити 12 монет у 5 гаманців, щоб не було порожніх?

*Розв'язання.* Щоб не було порожніх гаманців, покладемо спочатку у кожний з них по 1 монеті. Залишиться 7 монет, які тепер уже довільним способом можна розмістити по 5-ти гаманцях без обмежень на кількість монет у кожному гаманці. Щоб знайти  $N$  складемо кортеж із 7 однакових елементів (монети вважаємо однаковими,  $k_1 = 7$ ) та  $k_2 = 5 - 1 = 4$ , оскільки маємо 5 гаманців,  $k_2 = 4$  – це інша специфікація. Якщо нашу задачу змодельовати через «комірки – кулі», то «кулі» - це монети, а 4 – кількість «перегородок між комірками». Отже, отримали кортеж з  $7 + 4 = 11$  елементів з двома специфікаціями. Наприклад, якщо монети – це  $x$ , а «перегородки» -  $y$ , то можемо скласти кортеж:

$$\begin{pmatrix} xx & ux & uux & uxxx \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{а число таких кортежів } N = P_{11}(7, 4) =$$

$$= C_{11}^7 = C_{11}^4 = \bar{C}_5^7 = \frac{11!}{7!4!} = 330.$$

Якщо обмеження про відсутність порожніх гаманців немає, то треба довільним чином 12 монет розкласти по 5 гаманцях, тобто  $N = P_{16}(12, 4)$

$$= C_{16}^{12} = C_{16}^4 = \bar{C}_5^{12} = \frac{16!}{12!4!} = 1820.$$

Якщо монети різні, то потрібна інформація скільки їх кожної вартості і яким чином вони за умовою розподілені по гаманцях. Якщо всі 12 монет різні, то  $N = \bar{A}_5^{12} = 5^{12}$ .

**Відповідь:**  $N = 330$ .

**Приклад 5.** У кошику  $a$  білих та  $b$  чорних куль. З нього виймають одну кулю так, що не бачать її кольору. Далі з кошика беруть ще одну кулю, яка виявилась білою.  $A$  – подія, що перша куля теж біла. Знайти  $P(A)$ .

*Розв'язання.* Це задача на формулу Байєса. Побудуємо гіпотези:  $H_1$  – перша куля біла,  $H_2$  – вона чорна. Тоді  $P(H_1) = \frac{a}{a+b}$ ,  $P(H_2) = \frac{b}{a+b}$ . Перевірка:  $P(H_1) + P(H_2) = 1$ .

Нехай  $B$  – подія, що друга куля біла, звідки  $P(B/H_1) = \frac{a-1}{a+b-1}$ ,

$P(B/H_2) = \frac{a}{a+b-1}$ . За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(B) = P(H_1) \cdot P(B/H_1) + P(H_2) \cdot P(B/H_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} =$$

$$= \frac{a}{a+b}.$$

Цей результат відомий і зрозумілий, якщо ми не фіксуємо, якого ко-

льору ми вийняли кулю, то для наступної кулі ймовірність не змінюється. Нарешті за формулою Байєса:

$$P(A) = P(H_1/B) = \frac{P(H_1)P(B/H_1)}{P(B)} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a+b}{a} = \frac{a-1}{a+b-1}.$$

**Відповідь:**  $P(A) = \frac{a-1}{a+b-1}$

**Приклад 6.** В кошику  $N = l \times M$  нових тенісних м'ячів. Для гри навмання беруть  $M$  м'ячів і після гри повертають їх до кошика.  $A$  – подія, що після  $l$  ігор в кошику не залишиться нових м'ячів. Знайти  $P(A)$ .

*Розв'язання.* Ця задача на теорему множення ймовірностей та на класичну ком-

бінаторну ймовірність. Маємо  $P(A) = 1 \cdot \frac{C_{N-M}^M}{C_N^M} \cdot \frac{C_{N-2M}^M}{C_N^M} \cdot \dots \cdot \frac{C_{N-(l-1)M}^M}{C_N^M} =$

$$= \prod_{i=1}^l \frac{C_{N-(i-1)M}^M}{C_N^M} = \frac{[(N-M)!]^l}{(N!)^{l-1}}.$$

**Відповідь:**  $P(A) = \frac{[(N-M)!]^l}{(N!)^{l-1}}$

**Приклад 7.** У автобусі  $n$  пасажирів. На наступній зупинці кожний може вийти з ймовірністю  $p$ , і до автобуса не зайде ніхто з ймовірністю  $p_0$ . Знайти ймовірність того, що після зупинки число пасажирів не зміниться (зауважимо, що з ймовірністю  $(1-p_0)$  після зупинки може зайти тільки 1 пасажир).

*Розв'язання.* Побудуємо гіпотези:  $H_0$  – після зупинки ніхто не зайшов,  $H_1$  – зайшов один пасажир. Тоді  $P(H_0) = p_0$ ,  $P(H_1) = 1 - p_0$ , перевірка:  $P(H_0) + P(H_1) = p_0 + 1 - p_0 = 1$ . Якщо  $A$  – подія, що після зупинки число пасажирів не змінилось, то  $P(A/H_0) = (1-p)^n = q^n$ ,  $P(A/H_1) = C_n^1 p^1 q^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$ . Далі, за формулою повної ймовірності, маємо:  $P(A) = p_0(1-p)^n + (1-p_0)np(1-p)^{n-1}$ .

**Відповідь:**  $P(A) = p_0(1-p)^n + (1-p_0)np(1-p)^{n-1}$

**Приклад 8.** Ймовірність відмови приладу  $p = 0,2$ . Скільки таких приладів треба випробувати, щоб з  $\mathbb{P} \geq 0,9$  отримати не менше 3-ох відмов?

*Розв'язання.*  $p = 0,2$ ;  $q = 1 - 0,2 = 0,8$ .

1 спосіб. Безпосередньо, за схемою Бернуллі (біноміальний розподіл).

$$\mathbb{P} = P_n^{m \geq 3} = 1 - P_n^0 - P_n^1 - P_n^2 = 1 - q^n - npq^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!} p^2 q^{n-2} \geq 0,9 \text{ або}$$

$$(0,8)^n + n \cdot (0,2) \cdot (0,8)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^{n-2} \leq 0,1, \text{ тобто треба знайти}$$

найменше  $n$ , що задовольняє нерівність  $(0,8)^n (n^2 + 7n + 32) \leq 3,2$ . Це трансцендентна нерівність, яку розв'язуємо методом підбору. Одержуємо, що  $n \geq 26$ .

2 спосіб. За інтегральною формулою Муавра-Лапласа та відповідними таблицями маємо:

$$\mathbb{P}_n(a \leq m \leq b) \approx \Phi_0\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ де } \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{У нас } a = 3, b \rightarrow \infty, p = 0,2, q = 0,8, \text{ тому } \mathbb{P} &\approx \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{3-0,2n}{0,4\sqrt{n}}\right) = \\ &= 0,5 - \Phi_0\left(\frac{3-0,2n}{0,4\sqrt{n}}\right). \text{ Позначимо } \frac{3-0,2n}{0,4\sqrt{n}} = \beta, \text{ тоді } \Phi_0(\beta) \geq 0,4 \Rightarrow \beta \geq 1,3. \end{aligned}$$

$$\text{Розв'язуємо нерівність } \frac{3-0,2n}{0,4\sqrt{n}} \geq 1,3 \Rightarrow 5n - 13\sqrt{n} - 75 \geq 0 \Rightarrow n \geq 29 - \text{оцінка}$$

грубіша, ніж у 1-му способі.

**Відповідь:**  $n \geq 26$

#### 1.11.4 Випадкові величини, їх основні характеристики

##### Приклад 1. (дискретний розподіл, основні характеристики)

Два баскетболісти по черзі кидають м'яч в корзину до першого попадання. Розглянемо випадкову величину  $\xi(x)$  – число кидків до першого попадання. Знайти: 1) ряд розподілу, 2)  $M_\xi$ , 3)  $D_\xi$ , 4)  $\mathbb{P}_1$  та  $\mathbb{P}_2$  – ймовірності виграшу першим та, відповідно, другим баскетболістом.

*Розв'язання.* 1) Ясно, що  $\xi = \xi(x_k)$ , де реалізації випадкової величини  $\xi$  будуть  $x_k = (1, 2, \dots, 2k-1, 2k, \dots)$ . Знайдемо відповідні  $p_k$ , якщо ймовірність попадання при одному киданні першого баскетболіста  $p_1$ , а другого –  $p_2$  ( $q_1 = 1 - p_1$ ,  $q_2 = 1 - p_2$ ). Маємо:



|          |       |       |           |             |               |     |                   |                       |     |
|----------|-------|-------|-----------|-------------|---------------|-----|-------------------|-----------------------|-----|
| $x_k$    | 1     | 2     | 3         | 4           | 5             | ... | $2k-1$            | $2k$                  | ... |
| $p(x_k)$ | $p_1$ | $q_1$ | $q_1 q_2$ | $q_1^2 q_2$ | $q_1^2 q_2^2$ | ... | $(q_1 q_2)^{k-1}$ | $q_1 (q_1 q_2)^{k-1}$ | ... |
|          |       | $p_2$ | $p_1$     | $p_2$       | $p_1$         |     | $p_1$             | $p_2$                 |     |

Перевіримо, чи це дійсно ряд розподілу, тобто чи виконується **умова нормування**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(x_k) = 1. \text{ Маємо } \sum_{k=1}^{\infty} P(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} p_1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_1 (q_1 q_2)^{k-1} p_2 =$$

$$= |q_1 q_2 < 1| = (p_1 + q_1 p_2) \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} = (p_1 + q_1 p_2) \frac{1}{1 - q_1 q_2} = \frac{1 - q_1 + q_1(1 - q_2)}{1 - q_1 q_2} = 1$$

за формулою суми спадної геометричної прогресії.

2) Знайдемо тепер математичне сподівання  $M_\xi$ . В умовах цієї задачі

$$M_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)(q_1 q_2)^{k-1} p_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2k(q_1 q_2)^{k-1} q_1 p_2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \right| =$$

$$= 2(p_1 + q_1 p_2) \sum_{k=1}^{\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} - p_1 \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} = \frac{2(p_1 + q_1 p_2)}{(1 - q_1 q_2)^2} - \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{2(1 - q_1 q_2)}{(1 - q_1 q_2)^2} -$$

$$- \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{2 - p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{1 + q_1}{1 - q_1 q_2}. \quad (p_1 + q_1 p_2 = 1 - q_1 q_2)$$

3) Дисперсія  $D_\xi = M_{\xi^2} - (M_\xi)^2$ , де

$$M_{\xi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 (q_1 q_2)^{k-1} p_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2 (q_1 q_2)^{k-1} q_1 p_2 =$$

$$= 4(p_1 + q_1 p_2) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (q_1 q_2)^{k-1} - 4p_1 \sum_{k=1}^{\infty} k(q_1 q_2)^{k-1} + p_1 \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, |x| < 1 \right| = 4(p_1 + q_1 p_2) \frac{1 + q_1 q_2}{(1 - q_1 q_2)^3} - \frac{4p_1}{(1 - q_1 q_2)^2} + \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} =$$

$$= \frac{4(1 + q_1 q_2) - 4p_1 + p_1(1 - q_1 q_2)}{(1 - q_1 q_2)^2} = \frac{1 + 3q_1 + 3q_1 q_2 + q_1^2 q_2}{(1 - q_1 q_2)^2}. \text{ Тобто}$$

$$D_\xi = \frac{1 + 3q_1 + 3q_1 q_2 + q_1^2 q_2 - (1 + q_1)^2}{(1 - q_1 q_2)^2} = \frac{q_1(1 + q_1 q_2 - q_1 + 3q_2)}{(1 - q_1 q_2)^2}.$$

$$4) \mathbb{P}_1 = p_1 \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2}; \quad \mathbb{P}_2 = q_1 p_2 \sum_{k=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{k-1} = \frac{q_1 p_2}{1 - q_1 q_2}. \text{ Виконується}$$

$$\text{умова } \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = \frac{p_1 + q_1 p_2}{1 - q_1 q_2} = 1. \mathbb{P}_1 \text{ та } \mathbb{P}_2 \text{ можна також знайти із системи } \begin{cases} \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = 1 \\ \frac{\mathbb{P}_1}{\mathbb{P}_2} = \frac{p_1}{q_1 p_2} \end{cases}$$

Коментар до прикладу 1. Розглянемо, наприклад:

$$\text{а) } p_1 = 0,5, p_2 = 0,9 \text{ (} q_1 = 0,5, q_2 = 0,1 \text{), тоді } \mathbb{P}_1 = \frac{0,5}{1 - 0,05} = \frac{10}{19}, \mathbb{P}_2 = \frac{0,5 \cdot 0,9}{1 - 0,05} = \frac{9}{19}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1 > \mathbb{P}_2, \text{ незважаючи, що } p_1 < p_2. M_{\xi} = \frac{1 + 0,5}{1 - 0,05} = \frac{30}{19},$$

$$D_{\xi} = \frac{0,5(1 - 0,5 + 0,3 + 0,05)}{(0,95)^2} = \frac{170}{361};$$

$$\text{б) } p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0,5, \text{ тоді } \mathbb{P}_1 = \frac{0,5}{1 - 0,25} = \frac{2}{3}, \mathbb{P}_2 = \frac{0,5 \cdot 0,5}{1 - 0,25} = \frac{1}{3}. \text{ Знову } \mathbb{P}_1 \text{ удвічі}$$

$$\text{більше, ніж } \mathbb{P}_2, \text{ хоча } p_1 = p_2. M_{\xi} = \frac{1 + 0,5}{1 - 0,25} = 2,$$

$$D_{\xi} = \frac{0,5(1 - 0,5 + 1,5 + 0,25)}{(0,75)^2} = 2. \text{ З цих прикладів зрозуміло, яку важливу роль}$$

грає те, хто першим починає гру. Навіть значно слабший партнер, якщо починає першим, має більше шансів на виграш.

## **Приклад 2. (неперервний розподіл, його характеристики)**

Задана щільність розподілу випадкової величини

$$P_{\xi}(x) = \begin{cases} A(2 + x - x^2), & x \in [-1, 2] \\ 0, & x \notin [-1, 2] \end{cases}, \quad \eta = \Psi(\xi) = |2\xi - 1|. \text{ Знайти: 1) } A; \text{ 2) } F_{\xi}(x)$$

3)  $M_{\xi}$ ; 4)  $D_{\xi}$ ; 5)  $P_{\eta}(y)$ ; 6) побудувати графіки  $F_{\xi}(x)$ ,  $P_{\xi}(x)$ ,  $P_{\eta}(y)$ .

*Розв'язання.*

1) Число  $A$  знайдемо з умови нормування:  $\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx = 1 \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx = A \int_{-1}^2 (2+x-x^2) dx = A \left( 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} A = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{9}.$$

2)  $F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x P_{\xi}(x) dx$ . Ясно, що

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{2}{9} \int_{-1}^x (2+x-x^2) dx = \frac{2}{9} \left( 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{7}{6} \right), & x \in (-1; 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$3) M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x P_{\xi}(x) dx = \frac{2}{9} \int_{-1}^2 (2x + x^2 - x^3) dx = \frac{2}{9} \left( x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{2};$$

$$4) D_{\xi} = M_{\xi^2} - (M_{\xi})^2 =$$

$$= \frac{2}{9} \int_{-1}^2 (2x^2 + x^3 - x^4) dx - \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{2}{9} \left( \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^2 - \frac{1}{4} = \frac{29}{10};$$

5) Випадкова величина  $\eta = \Psi(\xi) = |2\xi - 1|$ , тобто по реалізаціях

$$y = |2x - 1| = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in \left[ -1; \frac{1}{2} \right) \\ 2x - 1, & x \in \left[ \frac{1}{2}; 2 \right] \end{cases}.$$

Побудуємо графік  $y = \Psi(x)$ : функція немонотонна, має два інтервали монотонності, де  $x_i = x_i(y)$  (рис. 16). Далі за формулою

$$\begin{aligned} P_{\eta}(y) &= \sum_{i=1}^2 P_{\eta}(x_i(y)) |x'_i(y)| = P_{\eta}(x_1(y)) \left| -\frac{1}{2} \right| + P_{\eta}(x_2(y)) \left| \frac{1}{2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \left( 2 + \frac{1-y}{2} - \left( \frac{1-y}{2} \right)^2 + 2 + \frac{1+y}{2} - \left( \frac{1+y}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{18} \text{ при } y \in [0; 3]. \end{aligned}$$

$$I. \begin{cases} x_1 = \frac{1-y}{2}; x'_1 = -\frac{1}{2} \\ x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right), y \in [0; 3] \end{cases}$$

$$II. \begin{cases} x_2 = \frac{1+y}{2}; x'_2 = \frac{1}{2} \\ x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right], y \in [0; 3] \end{cases}$$

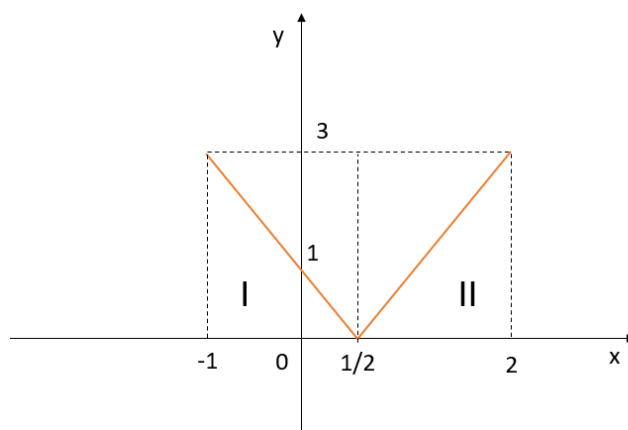


Рис.16

Таким чином,  $P_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{y^2}{18}, y \in [0; 3] \\ 0, y \notin [0; 3] \end{cases}$ . Виконаємо перевірку, чи дійсно це

щільність розподілу:  $\int_{-\infty}^{\infty} P_\eta(y) dy = \int_0^3 \left( \frac{1}{2} - \frac{y^2}{18} \right) dy = \left( \frac{y}{2} - \frac{y^3}{54} \right) \Big|_0^3 = 1;$

6) Побудуємо графіки  $F_\xi(x)$ ,  $P_\xi(x)$ ,  $P_\eta(y)$  (рис. 17).

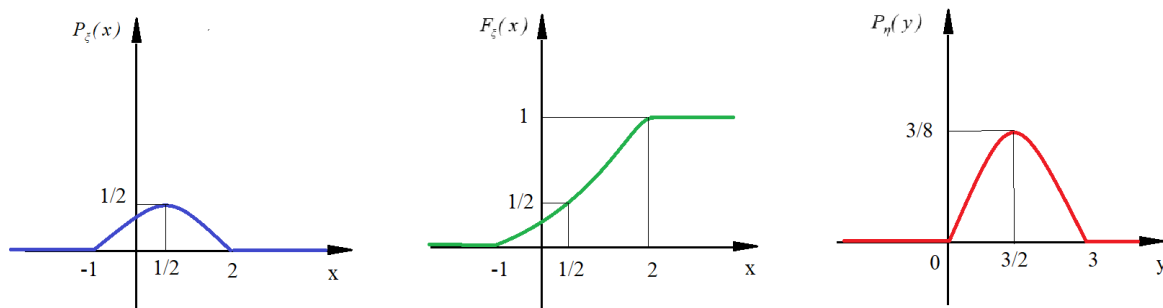


Рис. 17

**Приклад 3.** Дано:  $\xi$  та  $\eta$  - незалежні нормально розподілені випадкові величини такі, що  $\xi, \eta \in N(0, 1)$ . Знайти  $\mathbb{P} = P((\xi^2 + \eta^2) < R^2)$ .

**Розв'язання.** За умовою  $\xi$  та  $\eta$  - незалежні, тому  $P_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$

$$P_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (x, y) \in R^2. \quad \text{Сумісна щільність: } P_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$= P_{\xi}(x) \cdot P_{\eta}(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}. \text{ Тоді шукана } \mathbb{P} = P((\xi^2 + \eta^2) < R^2) = P((x, y) \in D), \text{ де}$$

$D$  – область, обмежена колом з центром в початку координат і радіусом  $R$ .

$$\mathbb{P} = \iint_D P_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \iint_D e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{полярна система} \\ x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ |J| = \rho \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = \frac{1}{2\pi} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \left( -e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right) \Big|_0^R = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}.$$

**Приклад 4.** Сумісну щільність випадкової величини  $\xi$  та  $\eta$  задано:  $P_{\xi, \eta}(x, y) =$

$$= \begin{cases} x + y, & (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K \end{cases}, \quad K = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}. \text{ Знайти 1) } P_{\xi}(x), P_{\eta}(y); 2) P_{\xi/\eta}(x),$$

$P_{\eta/\xi}(y); 3) M_{\xi}, M_{\eta}; 4) D_{\xi}, D_{\eta}; 5) \text{cov}(\xi, \eta), r(\xi, \eta); 6) P_{\theta}(z), \text{ де } \theta = \xi + \eta.$

*Розв'язання.*  $K$  – квадрат зі стороною 1, вершини:  $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ .

$$1) \quad x \in [0, 1], \quad P_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi, \eta}(x, y) dy = \int_0^1 (x + y) dy = \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}. \text{ Тобто}$$

$$P_{\xi}(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}, \text{ аналогічно } P_{\eta}(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in [0, 1] \\ 0, & y \notin [0, 1] \end{cases}. \text{ Умови норму-}$$

$$\text{вання, наприклад } \int_0^1 P_{\eta}(y) dy = \int_0^1 \left( y + \frac{1}{2} \right) dy = \left( \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right) \Big|_0^1 = 1.$$

$$2) \quad P_{\xi}(x) \cdot P_{\eta}(y) = \begin{cases} \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( y + \frac{1}{2} \right), & (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K \end{cases}, \quad P_{\xi}(x) \cdot P_{\eta}(y) \neq P_{\xi, \eta}(x, y),$$

$$\text{тому } \xi \text{ та } \eta \text{ залежні, тоді } P_{\xi/\eta}(x) = \frac{P_{\xi, \eta}(x, y)}{P_{\eta}(y)} = \begin{cases} \frac{x + y}{y + \frac{1}{2}}, & (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K \end{cases},$$

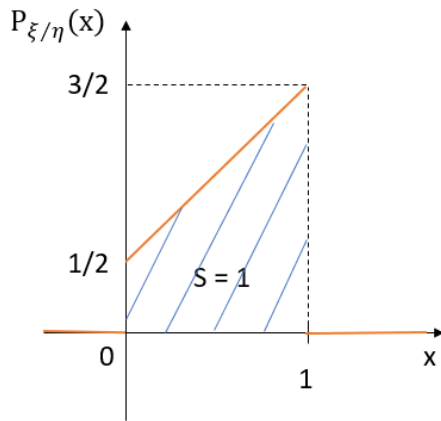


Рис. 18

$P_{\eta/\xi}(y)$  аналогічно.

Наприклад, при  $y + \frac{1}{2} \in K$ ,

$$P_{\xi/\eta}(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases} \quad (\text{рис. 18}).$$

$$3) \quad M_{\xi} = \iint_{D=K} x P_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 (x + y) dy = \int_0^1 x \left( x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{7}{12}. \quad \text{Інакше і прос-}$$

$$\text{тіше: } M_{\xi} = \int_0^1 x P_{\xi}(x) dx = \int_0^1 x \left( x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{7}{12} = M_{\eta}.$$

$$4) \quad D_{\xi} = M_{\xi^2} - (M_{\xi})^2, \text{ де } M_{\xi^2} = \int_0^1 x^2 \left( x + \frac{1}{2} \right) dx = \left( \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{12} = M_{\eta^2}, \text{ тоді}$$

$$D_{\xi} = D_{\eta} = \frac{5}{12} - \left( \frac{7}{12} \right)^2 = \frac{11}{144}. \quad \sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = \frac{\sqrt{11}}{12}.$$

$$5) \quad \text{cov}(\xi, \eta) = M_{\xi\eta} - M_{\xi}M_{\eta}, \text{ де}$$

$$M_{\xi,\eta} = \iint_{D=K} xy P_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = \int_0^1 x dx \int_0^1 y(x + y) dy = \int_0^1 x dx \left( \frac{y^2}{2} x + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \frac{1}{3}. \quad \text{Тоді } \text{cov}(\xi, \eta) = \frac{1}{3} - \left( \frac{7}{12} \right)^2 = -\frac{1}{144}. \quad \text{Тобто } r(\xi, \eta) =$$

$$= \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_{\xi}\sigma_{\eta}} = \frac{144}{11} \cdot \left( -\frac{1}{144} \right) = -\frac{1}{11} \neq 0;$$

6) Тепер знайдемо **композицію**  $\xi$  та  $\eta$ , тобто  $\theta = \xi + \eta$ . Маємо  $\theta = \theta(z)$ , тобто

$z = x + y$ . Знайдемо  $P_{\theta}(z)$ .  $P_{\theta}(z) = \frac{dF_{\theta}(z)}{dz}$ , де  $P_{\theta}(z)$  – щільність випадкової

величини  $\theta(z)$ , а  $F_\theta(z) = P(\theta < z) = P(\underbrace{x + y < z}_{D_z}) = \iint_{D_z} P_{\xi, \eta}(x, y) dx dy$ , тут  $F_\theta(z)$  - функція розподілу випадкової величини,  $D_z$  - область, де  $x + y < z$ . Розглянемо різні випадки для  $D_z$ :  $x + y < z$  (на рис. 19 пунктиром відмічені крайні значення):

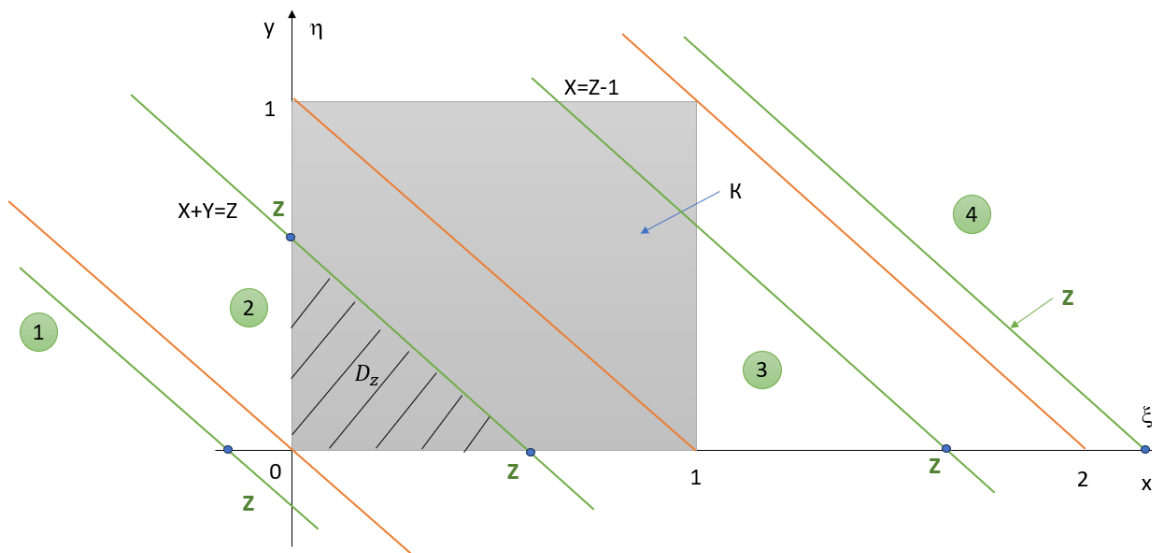


Рис. 19

1. Якщо  $z \leq 0$  (на рисунку позначено ①), то  $D_z: x + y < z$  потрапляє в область,

$$\text{де } P_{\xi,\eta}(x,y)=0 \Rightarrow F_{\theta}(z)=\iint_{D_z} 0 dx dy=0.$$

2. Якщо  $0 < z \leq 1$  (на рисунку позначено ②), то  $P_{\xi, \eta}(x, y) = x + y$ , бо  $D_z \subset K$ ,

TOMY

$$\vdots$$

$$F_{\theta}(z)=$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_z} (x+y) dx dy &= \int_0^z dx \int_0^{z-x} (x+y) dy = \int_0^z dx \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \bigg|_0^{z-x} = \int_0^z \left( x(z-x) + \frac{(z-x)^2}{2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z (z^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left( z^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^z = \frac{z^3}{3}\end{aligned}$$

3. Якщо  $1 < z \leq 2$  (на рисунку позначено ③), то  $F_{\theta}(z) =$

$$\begin{aligned} & \int_0^{z-1} dx \int_0^1 (x+y) dy + \int_{z-1}^1 dx \int_0^{z-x} (x+y) dy = \{\text{інакше, через протилежну подію}\} = \\ & = 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (x+y) dy = 1 - \int_{z-1}^1 dx \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{z-x}^1 = \\ & = 1 - \int_{z-1}^1 \left( x + \frac{1}{2} - x(z-x) - \frac{(z-x)^2}{2} \right) dx = 1 - \int_{z-1}^1 \left( x + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} \right) dx = \\ & = 1 - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{z^2}{2} x \right) \Big|_{z-1}^1 = -\frac{z^3}{3} + z^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. При  $z > 2$  (на рисунку позначено ④),  $F_{\theta}(z) = \iint_{D_z} (x+y) dx dy = 1$ .

Таким чином:

$$F_{\theta}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{z^3}{3}, & 0 < z \leq 1 \\ -\frac{z^3}{3} + z^2 - \frac{1}{3}, & 1 < z \leq 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases} \Rightarrow P_{\theta}(z) = \frac{dF_{\theta}(z)}{dz} = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \text{ або } z \geq 2 \\ z^2, & 0 < z \leq 1 \\ 2z - z^2, & 1 < z \leq 2 \end{cases}.$$

Виконаємо перевірку:  $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\theta}(z) dz = \int_0^1 z^2 dz + \int_1^2 (2z - z^2) dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^1 + \left( z^2 - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_1^2 = 1$

(див. рис. 20)

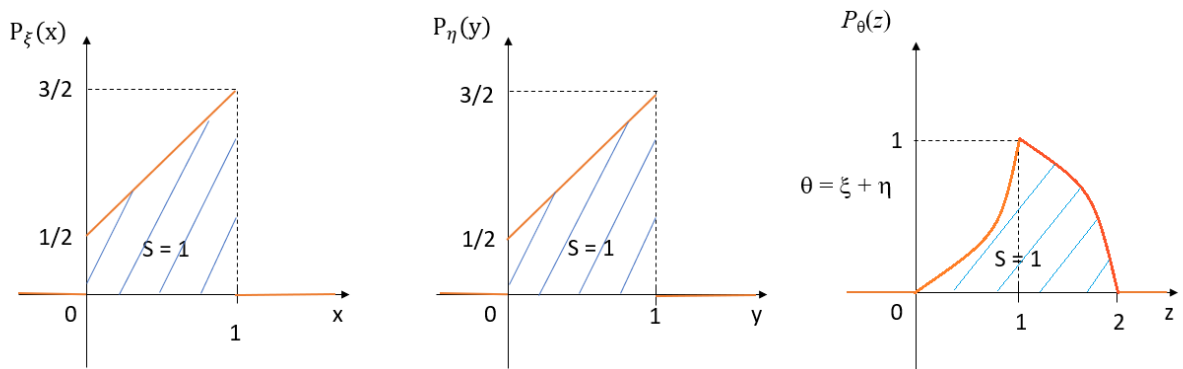


Рис. 20



**Приклад 5.** Дано: випадкові величини  $\xi$  та  $\eta$  незалежні та розподілені за законом Коші. Випадкова величина  $\theta = \xi \cdot \eta$ , знайти  $P_\theta(z)$ .

*Розв'язання.*  $\xi$  та  $\eta$  незалежні, тому  $P_{\xi,\eta}(x,y) = P_\xi(x) \cdot P_\eta(y)$ . Маємо

$$P_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad P_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad P_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} \quad (\text{рис. 21}).$$

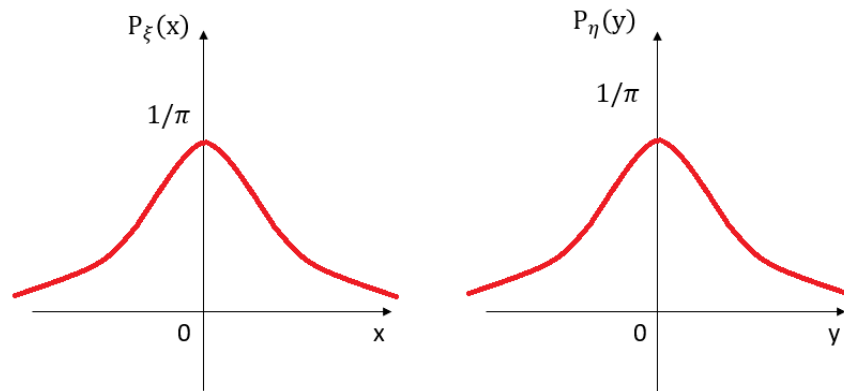


Рис. 21

Якщо  $\theta = \xi \cdot \eta$ , то по реалізаціях:  $z = xy$  – гіпербола при різних реалізаціях  $z$ .

Як і в попередній задачі, шукаємо  $P_\theta(z)$ .  $P_\theta(z) = \frac{dF_\theta(z)}{dz}$ , де

$$F_\theta(z) = P(\theta < z) = P(\underbrace{x \cdot y}_{D_z} < z) = \iint_{D_z} P_{\xi,\eta}(x,y) dx dy, \quad \text{для } D_z: x \cdot y < z. \quad \text{Розглянемо випадки (рис. 22):}$$

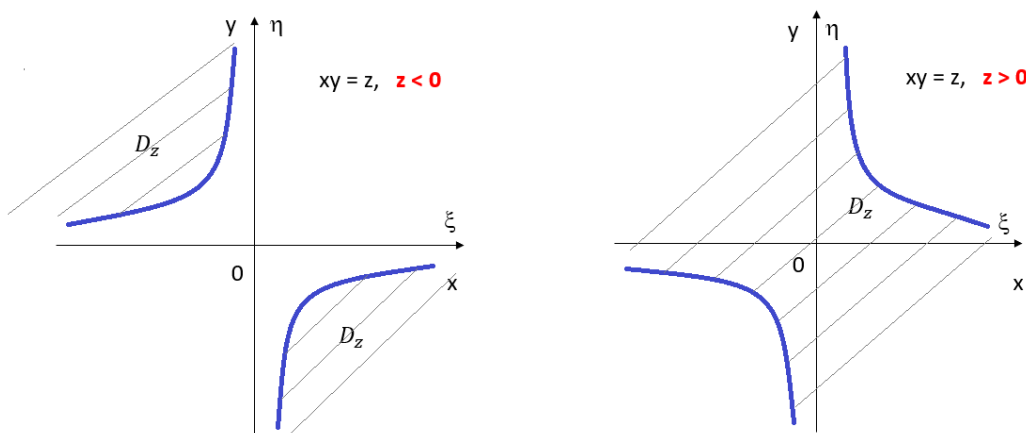


Рис. 22

Виходячи із умови симетрії, маємо:

$$F_{\theta}(z) = \iint_{D_z} P_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} \frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} & \text{при } z \leq 0 \\ 2 \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z/x} \frac{dy}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} & \text{при } z > 0 \end{cases}, \quad \text{тобто при}$$

всіх  $z \in R$

$$F_{\theta}(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^{z/x} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \arctg y \Big|_{-\infty}^{z/x} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left( \arctg \frac{z}{x} + \frac{\pi}{2} \right) \frac{dx}{1+x^2} - \text{ва-}$$

ажкий інтеграл. Спробуємо інакше, диференціюємо раніше, тобто

$$P_{\theta}(z) = \frac{dF_{\theta}(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \int_{-\infty}^{z/x} \frac{dy}{1+y^2} \right) = \{ \text{за формулою Ньютона-Лейбніца та}$$

$$\text{теоремою Барроу} \} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \left( \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z/x} \frac{dy}{1+y^2} \right) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \times$$

$$\times \left( \frac{d}{d(z/x)} \int_{-\infty}^{z/x} \frac{dy}{1+y^2} \cdot \frac{d(z/x)}{dz} \right) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \left( \frac{1}{1+(z/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)(z^2+x^2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d(x^2)}{(1+x^2)(z^2+x^2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2(z^2-1)} \int_0^{\infty} \frac{((z^2+x^2)-(1+x^2))d(x^2)}{(1+x^2)(z^2+x^2)} = \frac{1}{\pi^2(z^2-1)} \ln \left( \frac{1+x^2}{z^2+x^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{2 \ln |z|}{\pi^2(z^2-1)},$$

$z \in R$ . Маємо розриви 2-го роду в точці  $z = 0$ , в точках  $z = \pm 1$ :  $\lim_{z \rightarrow \pm 1} P_{\theta}(z) = \frac{1}{\pi^2}$

(за правилом Лопіталю). Умова нормування теж виконується.

**Приклад 6.** Випадкові величини  $\xi$  та  $\eta$  незалежні та мають показниковий роз-

поділ з параметром  $\lambda$ . Показати, що  $\theta_1 = \xi + \eta$  та  $\theta_2 = \frac{\xi}{\eta}$  теж незалежні.

Розв'язання. За умовою  $P_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ;  $P_{\eta}(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$  незалежні,

тому  $P_{\xi, \eta}(x, y) = P_{\xi}(x) \cdot P_{\eta}(y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x, y \geq 0 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$ . Далі, нехай  $\theta_1 = \theta_1(u)$ ,

$\theta_2 = \theta_2(v)$ , тоді, по реалізаціях, маємо  $\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{u}{1+v} \\ x = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$  - залежність

$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ . Тоді, згідно теорії, маємо  $D$  – функціональний визначник Якобі

$$(\text{якобіан}) P_{\theta_1, \theta_2}(u, v) = |D| P_{\xi, \eta}(x(u, v), y(u, v)), \text{ де } D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{uv}{(1+v)^3} - \frac{u}{(1+v)^3} = -\frac{u}{(1+v)^2} \neq 0$$

$$\text{Тобто } P_{\theta_1, \theta_2}(u, v) = \begin{cases} \frac{u}{(1+v)^2} \lambda^2 e^{-\lambda u}, & u, v \geq 0 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}. \text{ Але } P_{\theta_1, \theta_2}(u, v) = \frac{1}{\underbrace{(1+v)^2}_{P_{\theta_2}(v)}} \cdot \underbrace{\lambda^2 u e^{-\lambda u}}_{P_{\theta_1}(u)} =$$

$$= P_{\theta_2}(v) \cdot P_{\theta_1}(u) - \text{незалежні, } u, v \geq 0.$$

Покажемо, що це дійсно щільності розподілів.  $\iint_{-\infty}^{+\infty} P_{\theta_1, \theta_2}(u, v) du dv =$

$$= \left( \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1+v)^2} \right) \left( \lambda^2 \int_0^{\infty} u e^{-\lambda u} du \right) = \left( -\frac{1}{1+v} \Big|_0^{\infty} \right) \left( \underbrace{-\lambda u e^{-\lambda u}}_{\substack{=0 \text{ за правилом} \\ \text{Лопітала}}} \Big|_0^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} du \right) = -e^{-\lambda u} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

тобто всі три функції задовольняють умови нормування, а значить щільність системи випадкових величин дорівнює добутку щільностей складових, тобто вони незалежні.

**Приклад 7.** Випадкові величини  $\xi_1, \xi_2$  та  $\xi_3$  незалежні з відомими щільностями розподілу  $P_{\xi_1}(x_1), P_{\xi_2}(x_2), P_{\xi_3}(x_3)$ . Знайти  $F_\eta(x), P_\eta(x), F_\theta(x), P_\theta(x)$ , де  $\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \theta = \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

*Розв'язання.* 1)  $\eta = \max(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , по реалізаціях  $x = \max(x_1, x_2, x_3)$ . Тоді

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= P(\eta < x) = P(\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) < x) = \underbrace{P(\xi_1 < x, \xi_2 < x, \xi_3 < x)}_{\text{незалежні}} = \\ &= P(\xi_1 < x) \cdot P(\xi_2 < x) \cdot P(\xi_3 < x) = \underbrace{\int_{-\infty}^x P_{\xi_1}(x_1) dx_1}_{F_{\xi_1}(x)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^x P_{\xi_2}(x_2) dx_2}_{F_{\xi_2}(x)} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^x P_{\xi_3}(x_3) dx_3}_{F_{\xi_3}(x)} = \\ &= F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) \cdot F_{\xi_3}(x). \end{aligned}$$

Далі 
$$P_\eta(x) = \frac{d}{dx}(F_\eta(x)) = P_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) \cdot F_{\xi_3}(x) + P_{\xi_2}(x) \cdot F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_3}(x) + P_{\xi_3}(x) \cdot F_{\xi_1}(x) \cdot F_{\xi_2}(x) = \sum_{j=1}^3 \frac{P_{\xi_j}(x)}{F_{\xi_j}(x)} \cdot \prod_{i=1}^3 F_{\xi_i}(x) - \text{у короткій формі.}$$

2)  $\theta = \min(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , або  $x = \min(x_1, x_2, x_3)$ . У цьому випадку перейдемо до доповнення, а саме  $F_\theta(x) = P(\min(\xi_1, \xi_2, \xi_3) < x) =$

$$= 1 - (1 - F_{\xi_1}(x)) \cdot (1 - F_{\xi_2}(x)) \cdot (1 - F_{\xi_3}(x)) = 1 - \prod_{i=1}^3 (1 - F_{\xi_i}(x)). \quad \text{Диференціюючи,}$$

$$\text{маємо } P_\theta(x) = \frac{d}{dx}(F_\theta(x)) = \sum_{j=1}^3 \frac{P_{\xi_j}(x)}{1 - F_{\xi_j}(x)} \cdot \prod_{i=1}^3 (1 - F_{\xi_i}(x)).$$

**Приклад 8.** Знайти ймовірність того, що в 1000 випробувань подія  $A$  з  $p = 0,003$  ( $q = 0,997$ ) відбудеться не більше 4 разів.

*Розв'язання.* Застосуємо граничну теорему Пуассона:  $C_n^m p^m q^{n-m} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ , де

$$\begin{aligned} \lambda &= np = 1000 \cdot 0,003 = 3, \text{ тоді } \mathbb{P} \cong p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \\ &= (1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}) e^{-3} \approx 0,863. \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ 2. ЗРАЗКИ БІЛЕТІВ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД КП. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАПРОПОНОВАНИХ ЗАДАЧ

### 2.1 Зразки білетів олімпіад першого рівня в ІСЗЗІ, розв'язання задач

Наведемо приклади білетів, які було запропоновано в різні роки в ІСЗЗІ для студентів 1-го та старших курсів. Для деяких задач наведено розв'язання. Нумерацію задач здійснено за таким принципом: рік проведення олімпіади, курс та номер задачі. Наприклад, 13.2.4 означає, що олімпіада 2013 року, старші курси, задача в білеті №4.

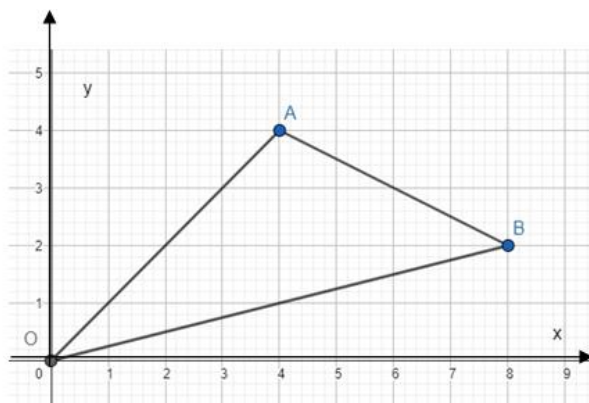
#### *Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики*

*2011 р. ІСЗЗІ Перший курс*

##### *11.1.1 Обчислити визначник $n$ -го порядку*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

##### *11.1.2 Знайти координати центра ваги однорідного дротяного трикутника.*



##### *11.1.3 Знайти найкоротшу відстань від прямої $l: 2x + y = 5$ до еліпса*

$$L: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1. \text{ Виконати малюнок.}$$

**11.1.4** Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \sin bx)^{\frac{1}{x}}$ .

**11.1.5** Числова послідовність  $\{x_n, n \geq 0\}$  задана рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) \text{ і початковою умовою } x_0 = a \in \mathbb{R}.$$

а) В залежності від  $a$  знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

б) В залежності від  $a$  знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ .

**11.1.6** Для будь-якої скінченної числової множини  $A$  позначимо через  $S(A)$  суму її елементів, а через  $P(A)$  - добуток її елементів. Крім того, покладімо  $S(\emptyset) = 0$ ,  $P(\emptyset) = 1$ .

а) Знайти  $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} S(A)$ . б) Знайти  $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} P(A)$ .

В обох пунктах підсумовування ведеться по всіх підмножинах множини  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

### **Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2011 р. ІС33І Старші курси**

**11.2.1** Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_5 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 7 \end{cases}$$

**11.2.2** Розв'язати рівняння  $\int_{\sqrt{2}t\sqrt{t^2-1}}^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$ .

**11.2.3** Через задану точку  $P(1; 4)$  провести пряму так, щоб сума довжин додатних відрізків, які відтинаються нею на координатних осях, була найменшою. Записати рівняння цієї прямої, зробити малюнок.

**11.2.4** Обчислити границю нескінченного добутку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{\frac{2012}{1006k^2 - 503k}}$ .

**11.2.5** Числові послідовності  $\{x_n, n \geq 1\}$  та  $\{y_n, n \geq 1\}$  задані рекурентними спів-

$$\text{відношеннями } x_{n+1} = x_n + \frac{1}{nx_n}, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n^2 y_n}$$

і початковими умовами  $x_1 > 0, y_1 > 0$ .

а) Чи збігається послідовність  $\{x_n, n \geq 1\}$ ?

б) Чи збігається послідовність  $\{y_n, n \geq 1\}$ ?

**11.2.6** Для будь-якої скінченної числової множини  $A$  позначимо через  $S(A)$  суму

її елементів, а через  $P(A)$  - добуток її елементів. Крім того, покладімо

$$S(\emptyset) = 0, \quad P(\emptyset) = 1.$$

а) Знайти  $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} S(A)$ . б) Знайти  $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} P(A)$ .

В обох пунктах підсумовування ведеться по всіх підмножинах множини  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

## Розв'язання та відповіді

### 11.1.1

Розкладемо визначник за першим стовпцем

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \Delta_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Отримали рекурентне співвідношення  $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ .

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \dots \text{ Припустимо, що } \Delta_{n-2} = n-1,$$

$$\Delta_{n-1} = n, \text{ маємо } \Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.$$

**Відповідь:**  $\Delta_n = n+1$ .

### 11.1.2

Маса кожної сторони трикутника пропорційна її довжині, тому

$$OA \cdot m = \sqrt{4^2 + 4^2} m = 4\sqrt{2} m, \quad OB \cdot m = \sqrt{8^2 + 2^2} m = 2\sqrt{17} m, \quad AB \cdot m = \\ = \sqrt{(8-4)^2 + (2-4)^2} m = 2\sqrt{5} m.$$

Знайдемо середини сторін трикутника:

$$\begin{cases} x_{C_1} = \frac{x_O + x_A}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \\ y_{C_1} = \frac{y_O + y_A}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_{C_2} = \frac{x_O + x_B}{2} = \frac{0+8}{2} = 4 \\ y_{C_2} = \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_{C_3} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+8}{2} = 6 \\ y_{C_3} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}.$$

Отже, в точці  $C_1(2; 2)$  зосе-

реджена маса  $m_1 = 4\sqrt{2} m$ , в точці  $C_2(4; 1)$  -  $m_2 = 2\sqrt{17} m$ , а в точці  $C_3(6; 3)$  -  $m_3 = 2\sqrt{5} m$ .

Тоді

$$\begin{cases} x_C = \frac{\sum_{i=1}^3 x_{C_i} m_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2} m + 4 \cdot 2\sqrt{17} m + 6 \cdot 2\sqrt{5} m}{4\sqrt{2} m + 2\sqrt{17} m + 2\sqrt{5} m} = \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{17} + 6\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{5}} \\ y_C = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{C_i} m_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2} m + 1 \cdot 2\sqrt{17} m + 3 \cdot 2\sqrt{5} m}{4\sqrt{2} m + 2\sqrt{17} m + 2\sqrt{5} m} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{17} + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{5}} \end{cases}.$$

**Відповідь:**  $\left( \frac{4\sqrt{2} + 4\sqrt{17} + 6\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{5}}; \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{17} + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{17} + \sqrt{5}} \right)$  або наближено  $(3,87; 1,79)$ .

### 11.1.3

Найкоротшою буде відстань між заданою прямою, та дотичною до еліпса, що їй паралельна. Позначимо координати точки дотику  $M(x_0; y_0)$  (рис. 23).



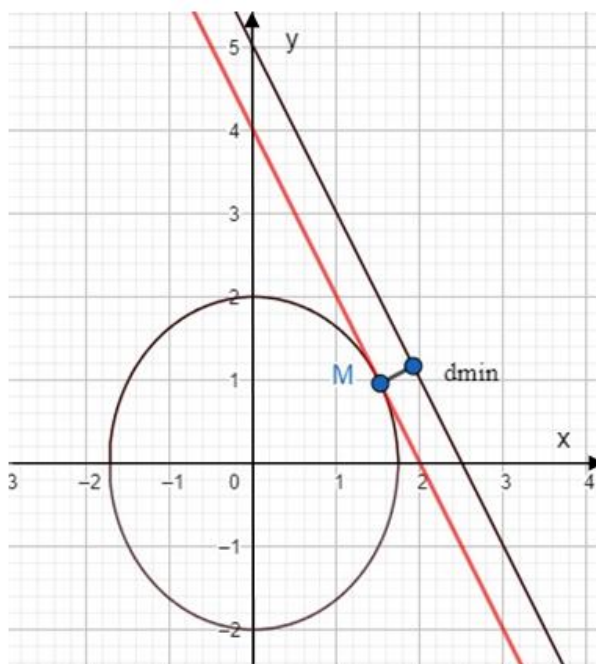


Рис. 23

Кутовий коефіцієнт  $k_{\text{от}} = k_l = -2$ . З іншого боку  $\frac{2x}{3} + \frac{2yy'}{4} = 0$ ,  $y' = -\frac{4x}{3y}$  і

$-\frac{4x_0}{3y_0} = -2$ . Також координати точки  $M(x_0; y_0)$  задовольняють рівняння еліпса.

Отримали систему рівнянь  $\begin{cases} 2x_0 = 3y_0 \\ \frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}y_0 \\ \frac{9y_0^2}{12} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}y_0 \\ \frac{12y_0^2}{12} = 1 \end{cases}$ , маємо

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ y_0 = -1 \end{cases} - \text{не підходить.}$$

$$\text{Отже } M\left(\frac{3}{2}; 1\right) \text{ і тепер } d_{\min} = \frac{\left|2 \cdot \frac{3}{2} + 1 - 5\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

### 11.1.4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \sin bx)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + a \frac{\sin bx}{\cos x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2x}} \cdot \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + a \frac{\sin bx}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{a \sin bx}} \right]^{\frac{a \sin bx}{x \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \right]^{-\frac{\sin^2 x}{2x}} \cdot e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx}{x \cos x}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin^2 x}{2x}} \cdot e^{ab} = e^0 \cdot e^{ab} = e^{ab}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $e^{ab}$ .

### 11.1.5

а) 1. Нехай  $a \in (0; 1)$ .

Тоді  $0 < x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n < 1$ , тобто послідовність  $\{x_n, n \geq 0\}$  монотонна і обмежена, а значить  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ . Отже,  $b = b - b^2$ , або  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

2. Якщо  $a = 0$ , або  $a = 1$ , то  $x_n = \{0; 0; \dots; 0; \dots\}$ , або  $x_n = \{1; 0; \dots; 0; \dots\}$ . Тобто, при  $a \in [0; 1]$ ,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

3. Нехай  $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ .

Тоді  $x_{n+1} < x_n$ ,  $x_{n+1} < 0$  і необмежена, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

б) 1. Нехай  $a \in (0; 1)$ .

Знайдемо  $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{1 - x_n} = 1 + x_n + x_n^2 + o(x_n^2)$ . Звідки  $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = 1 + x_n + o(x_n) \rightarrow 1$ ,

тобто  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)$  виконується нерівність  $1 - \varepsilon < \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} < 1 + \varepsilon$ .

При  $n = N(\varepsilon), N(\varepsilon) + 1, \dots, N(\varepsilon) + k - 1, k \geq 1$ , маємо:

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{x_{N(\varepsilon)+1}} - \frac{1}{x_{N(\varepsilon)}} < 1 + \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < \frac{1}{x_{N(\varepsilon)+2}} - \frac{1}{x_{N(\varepsilon)+1}} < 1 + \varepsilon, \quad \dots,$$

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{x_{N(\varepsilon)+k}} - \frac{1}{x_{N(\varepsilon)+k-1}} < 1 + \varepsilon.$$

$$\text{Підсумуємо: } k(1 - \varepsilon) < \frac{1}{x_{N(\varepsilon)+k}} - \frac{1}{x_{N(\varepsilon)}} < k(1 + \varepsilon).$$

Тут  $N(\varepsilon) + k = n$ , тоді  $k = n - N(\varepsilon)$ , далі маємо:

$$(n - N(\varepsilon))(1 - \varepsilon) < \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{N(\varepsilon)}} < (n - N(\varepsilon))(1 + \varepsilon), \text{ тобто}$$

$$\left(1 - \frac{N(\varepsilon)}{n}\right)(1 - \varepsilon) + \frac{1}{nx_{N(\varepsilon)}} < \frac{1}{nx_n} < \frac{1}{nx_{N(\varepsilon)}} + (1 + \varepsilon)\left(1 - \frac{N(\varepsilon)}{n}\right).$$

Звідки випливає, що при  $n \rightarrow \infty$  виконується нерівність

$$1 - \varepsilon < \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} < 1 + \varepsilon. \text{ Це означає, що } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} = 1, \text{ або ж } \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1.$$

2. Якщо  $a = 0$ , або  $a = 1$ , то  $nx_n = \{0; 0; \dots; 0; \dots\}$ , і  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$ .

3. При  $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = -\infty$ .

$$\text{Відповідь: а) } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, \text{ при } a \in [0; 1]; \\ -\infty, \text{ при } a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \begin{cases} 1, \text{ при } a \in (0; 1); \\ 0, \text{ при } a = 0, a = 1; \\ -\infty, \text{ при } a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

### 11.1.6

Розглянемо  $\aleph = \{1, 2, \dots, n\}$ , тоді  $A \subset \aleph$  - будь-яка її підмножина. Випишемо всі можливі підмножини, які складаються з  $0, 1, \dots, n$  елементів відповідно:

$$\left[ \begin{array}{l} \emptyset; \\ \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}; \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}; \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \dots, \{2, 3, 4\}, \dots, \{n-2, n-1, n\}; \\ \dots; \\ \{1, 2, \dots, n\}. \end{array} \right.$$

а) Нам необхідно знайти суму всіх цих виписаних елементів, для цього обчислимо кількість кожного з елементів  $1, 2, \dots, n$  в кожному рядку:

$$\begin{array}{l} 0 \quad \left[ \emptyset; \right. \\ C_{n-1}^0 \quad \left. \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}; \right. \\ C_{n-1}^1 \quad \left. \{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{2,3\}, \dots, \{n-1,n\}; \right. \\ C_{n-1}^2 \quad \left. \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \dots, \{2,3,4\}, \dots, \{n-2,n-1,n\}; \right. \\ \dots \quad \left. \dots; \right. \\ C_{n-1}^{n-1} \quad \left. \{1, 2, \dots, n\}. \right. \end{array}$$

Отже, кожен з елементів  $1, 2, \dots, n$  зустрічається  $\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k = 2^{n-1}$  разів. Знайдемо загальну суму

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} S(A) &= 1 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (1 + 2 + \dots + n) 2^{n-1} = \\ &= \frac{(n+1)n}{2} \cdot 2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

б) За умовою  $P(\emptyset) = 1$ .

Далі розглянемо  $A = \{1\}$  при  $n = 1$ :  $\sum_A P_1(A) = P(\emptyset) + P_1(\{1\}) = 1 + 1 = 2!$ .

Тепер  $A = \{1, 2\}$  при  $n = 2$ :  $\sum_A P_2(A) = P(\emptyset) + P_2(\{1\}) + P_2(\{2\}) + P_2(\{1, 2\}) =$   
 $= 1 + 1 + 2 + 2 = 6 = 3!$ .

Тепер  $A = \{1, 2, 3\}$  при  $n = 3$ :  $\sum_A P_3(A) = P(\emptyset) + P_3(\{1\}) + P_3(\{2\}) + P_3(\{3\}) +$   
 $+ P_3(\{1, 2\}) + P_3(\{1, 3\}) + P_3(\{2, 3\}) + P_3(\{1, 2, 3\}) = 1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 6 + 6 = 24 = 4!$ .

Припустимо, що  $\sum_A P_{n-1}(A) = n!$ , доведемо, що  $\sum_A P_n(A) = (n+1)!$ . Дійсно:

$$\sum_A P_n(A) = \sum_A P_{n-1}(A) + n \sum_A P_{n-1}(A) = n! + n \cdot n! = (n+1)!.$$

**Відповідь:** а)  $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} S(A) = n(n+1)2^{n-2}$ ; б)  $\sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} P(A) = (n+1)!$ .

### 11.2.1

Застосуємо метод Жордана – Гаусса:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Тобто  $r(A)=r(A|B)=3$ ,  $n=5$ ,  $d=5-3=2$ .

Змінні  $x_1, x_2, x_5$  - базисні,  $x_3 = C_1, x_4 = C_2$  - вільні. Отже

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_2 = 10 + 3x_3 + 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{5}C_1 + \frac{4}{5}C_2 \\ 2 + \frac{3}{5}C_1 + \frac{2}{5}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь:**  $X = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{5}C_1 + \frac{4}{5}C_2 \\ 2 + \frac{3}{5}C_1 + \frac{2}{5}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$

### 11.2.2

$$\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \left. \begin{array}{l} t^2 - 1 = z^2 \\ tdt = zdz \\ t = \sqrt{2} \quad z = 1 \\ t = x \quad z = \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right| = \int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{zdz}{(z^2+1)z} = \int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_1^{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) - \frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm 2$ , але  $-2$  не задовольняє умові.

**Відповідь:**  $x = 2$ .

**11.2.3** Рівняння шуканої прямої запишемо у вигляді  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , точка  $P(1; 4) \in l$ . (рис. 24).

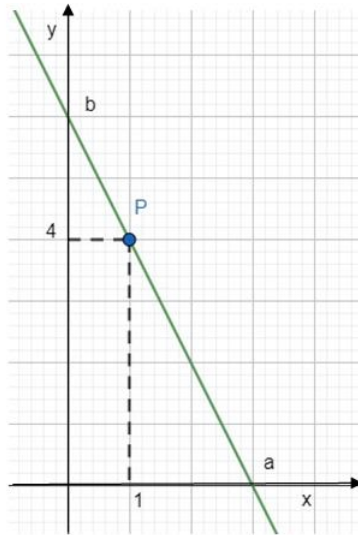


Рис. 24

Позначимо  $z = a + b$ , так як  $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ , то  $b = \frac{4a}{a-1}$ , тоді  $z = a + \frac{4a}{a-1}$ .

Для функції  $z = a + \frac{4a}{a-1}$  знайдемо екстремум:

$$z' = \left(a + \frac{4a}{a-1}\right)' = 1 + \frac{4(a-1) - 4a}{(a-1)^2} = 1 - \frac{4}{(a-1)^2}, \quad 1 - \frac{4}{(a-1)^2} = 0, \quad (a-1)^2 = 4,$$

$a-1 = \pm 2$ ,  $a_1 = 3$ , або  $a_2 = -1$  - не задовольняє умові.

$$z'' = \left(1 - \frac{4}{(a-1)^2}\right)' = -4\left((a-1)^{-2}\right)' = 8(a-1)^{-3}, \quad z''(3) = 8(3-1)^{-3} > 0, \quad \text{отже, в точці}$$

$a = 3$  функція досягає мінімуму.

$$b = \frac{4 \cdot 3}{3-1} = 6, \quad z_{\min} = 3 + 6 = 9.$$

**Відповідь:**  $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ .

#### 11.2.4

Позначимо  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n e^{\frac{2012}{1006k^2 - 503k}}$ , тоді  $\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( e^{\frac{4}{2k^2 - k}} \right) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{2k^2 - k} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{2}{2k-1} - \frac{2}{2k} \right) =$$

$$= 2 \cdot 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = 8 \ln 2, \quad \text{так як сума ряду}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2. \quad \text{Маємо } \ln A = 8 \ln 2 \Rightarrow A = 2^8 = 256.$$

**Відповідь:** 256.

#### 11.2.5

Числові послідовності  $\{x_n, n \geq 0\}$  та  $\{y_n, n \geq 0\}$  задані рекурентними співвідношеннями

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{nx_n}, \quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{n^2 y_n}$$

і початковими умовами  $x_1 > 0, y_1 > 0$ .

а) Чи збігається послідовність  $\{x_n, n \geq 0\}$ ?

б) Чи збігається послідовність  $\{y_n, n \geq 0\}$ ?

а)  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{nx_n}$ ,  $x_1 > 0$ , тому  $x_{n+1} > 0$  і послідовність монотонно зростаюча.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{1}{(n+1)x_{n+1}} = x_n + \frac{1}{nx_n} + \frac{1}{(n+1)x_{n+1}};$$

...

$$x_{n+k+1} = x_n + \frac{1}{nx_n} + \frac{1}{(n+1)x_{n+1}} + \dots + \frac{1}{(n+k)x_{n+k}} < \frac{k}{nx_n};$$

$$\begin{cases} x_{n+k+1} - x_n < \frac{k}{nx_n} \\ x_{n+k+1} - x_n > \frac{k}{(n+k)x_{n+k}} > \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ не існує.}$$

б) Аналогічно:

$$y_{n+k+1} - y_n < \frac{k}{n^2 y_n} = \left| \begin{matrix} k = \alpha n \\ \alpha = \text{const} \\ x_n > 0 \end{matrix} \right| = \frac{\alpha}{nx_n} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ існує.}$$

**Відповідь:** а) Послідовність  $\{x_n, n \geq 1\}$  - розбіжна.

б) Послідовність  $\{y_n, n \geq 1\}$  - збіжна.

**11.2.6** Див. розв'язок задачі 11.1.6.

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2012 р. ІСЗЗІ Перший курс**

**12.1.1** Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

**12.1.2** Запишіть рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}; \quad l_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{\frac{3}{2}} = \frac{z-1}{2}.$$

**12.1.3** Задано рівняння еліпса  $4x^2 + y^2 = 5$ . Знайти рівняння такої параболи, що дотикається еліпса в точках  $M_1(-1; -1)$  та  $M_2(1; -1)$ .



**12.1.4** Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x - \sin x) \left( \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{e^{x^2} - 1} \right)^2$ .

**12.1.5** Чи існує таке  $n \in \mathbb{N}$ , для якого земну кулю може бути розташовано всередині

- а)  $n$ -вимірної кулі радіуса 1 мм;
- б)  $n$ -вимірного кубу з ребром 1 мм?

**12.1.6** Побудувати графік функції  $y = [\cos(2 \arcsin x)]$ , де  $[x]$  - ціла частина  $x$ , тобто  $[x] = n$ , якщо  $x \in [n; n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики  
2012 р. ІС33І Старші курси**

**12.2.1** Знайдіть многочлен мінімального степеня, який в точці  $x=1$  має локальний мінімум, рівний 6, а в точці  $x=3$  має локальний максимум, рівний 10.

**12.2.2** Доведіть справедливість рівності  $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = \Phi(x)$ . Використовуючи теорему Барроу, знайдіть  $\Phi'(x)$ .

**12.2.3** Обчисліть границю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ .

**12.2.4** Розв'яжіть диференціальне рівняння Ейлера:  $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ .

**12.2.5** Чи існує таке  $n \in \mathbb{N}$ , для якого земну кулю може бути розташовано всередині

- а)  $n$ -вимірної кулі радіуса 1 мм;  
 б)  $n$ -вимірного кубу з ребром 1 мм?

**12.2.6** Доведіть, що для будь-якого  $x \geq 0$  виконується рівність:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2 + 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t + x} dt.$$

## Розв'язання та відповіді

### 12.1.1

Від кожного рядка віднімемо попередній (при цьому використаємо формулу  $C_n^k - C_{n-1}^k = C_{n-1}^{k-1}$ ):

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & C_3^1 & C_3^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & C_{n-2}^{n-3} & C_{n-2}^{n-2} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} = \dots = \Delta_1 = 1.$$

**Відповідь:** 1.

### 12.1.2

Точка  $M_1(1; 3; 0) \in l_1$ , точка  $M_2(-2; -1; 1) \in l_2$ , вектор  $\vec{l} = (2; 3; 4)$  паралельний обом прямим. Тоді вектор  $\vec{l} \times \vec{M_1M_2}$  буде перпендикулярним до обох прямих і, відповідно, до шуканої площини.

$$\vec{M_1M_2} = (-3; -4; 1), \quad \vec{l} \times \vec{M_1M_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 19i - 14j + k, \text{ і складемо рівняння площини, що проходить через точку } M_1(1; 3; 0) \in l_1 \text{ перпендикулярно вектору } \vec{l} \times \vec{M_1M_2} = (19; -14; 1):$$

$$19(x-1) - 14(y-3) + z = 0 \Rightarrow 19x - 14y + z + 23 = 0.$$

**Відповідь:**  $19x - 14y + z + 23 = 0$ .

### 12.1.3

Канонічне рівняння еліпса буде  $\frac{x^2}{\frac{5}{4}} + \frac{y^2}{5} = 1$ , точки дотику  $M_1(-1; -1)$

та  $M_2(1; -1)$  розташовані симетрично відносно осі  $O_y$ , тому парабола матиме вісь симетрії  $O_y$  та гілками направлена вгору (рис. 25).

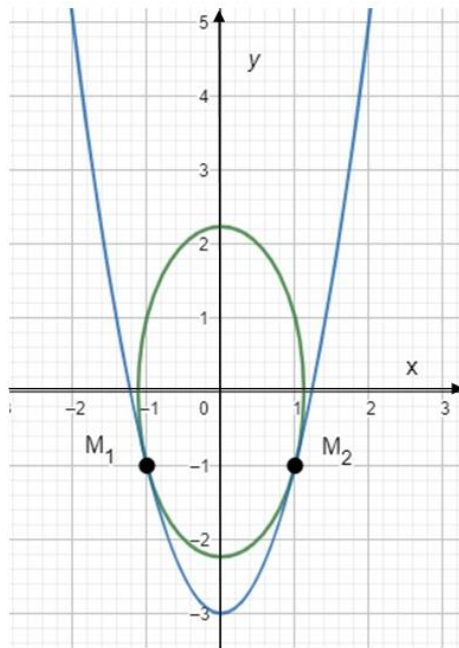


Рис. 25

Шукатимемо рівняння параболи у вигляді  $y = ax^2 + b$ . Точки  $M_1(-1; -1)$  та  $M_2(1; -1)$  належать і еліпсу, і параболі, тому  $-1 = a(\pm 1)^2 + b \Rightarrow a + b = -1$ .

В точках дотику дотичні до еліпса та параболи співпадають, тому рівні значення похідних:

$$y = ax^2 + b \Rightarrow y' = 2ax \Rightarrow y'(1) = 2a; y = \pm\sqrt{5-4x^2} \Rightarrow y' = \mp \frac{4x}{\sqrt{5-4x^2}} \Rightarrow y'(1) = \mp 4.$$

В точці  $M_2$  дотична має додатний кутовий коефіцієнт, отже,  $2a = 4$ ,  $a = 2$  тоді  $b = -1 - 2 = -3$ .

**Відповідь:**  $y = 2x^2 - 3$ .

### 12.1.4

Використаємо еквівалентності:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{x^2}-1} \right)^{\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{x^2}-1}} = \left| \begin{array}{l} \frac{tgx - \sin x}{e^{x^2} - 1} \sim \frac{x^3}{2} \\ \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x^3}{2} \right)^{\frac{\sqrt{x}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{x^3}{2} \right)^{\frac{2}{x^3}} \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

**Відповідь:**  $\sqrt{e}$ .

### 12.1.5

а) Максимальна відстань між двома точками  $n$ -вимірної кулі радіуса 1 мм складає 2 мм. В той же час, відстань між двома точками земної поверхні може бути й більшою.

б) В  $3n$ -вимірному просторі розглянемо правильний тетраедр, вершини якого мають наступні координати:

$$A \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{3n} \right), B \left( \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2n}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n \right),$$

$$C \left( \underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{0, 1, 1, \dots, 1}_n \right), D \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2n} \right).$$

Очевидно, що відстань між довільними двома з них складає  $\sqrt{2n}$ . Для достатньо великого  $n$  земну кулю можна розмістити всередині правильного тетраедра з ребром  $\sqrt{2n}$ , який, в свою чергу, розміщується всередині  $3n$ -вимірного куба з ребром 1.

**Відповідь:** а) ні; б) так.

### 12.1.6

$$y = [\cos(2 \arcsin x)] = \left| \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \right| = [\cos(\pi - 2 \arccos x)] =$$

$$= [-\cos(2 \arccos x)] = |\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1| = [-(2 \cos^2(\arccos x) - 1)] = [1 - 2x^2], \quad \text{при } |x| \leq 1.$$

Розглянемо допоміжний графік параболи  $y = 1 - 2x^2$  (рис. 26):

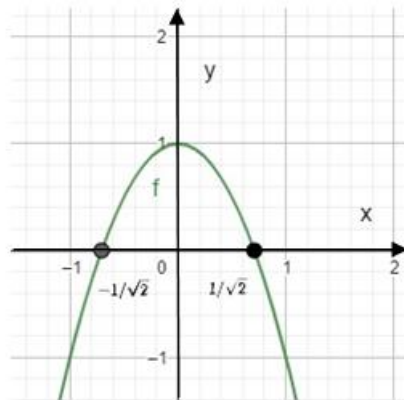


Рис. 26

$$\text{Тоді } y = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]; \\ -1, & x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]. \end{cases}$$

**Відповідь:** рис. 27

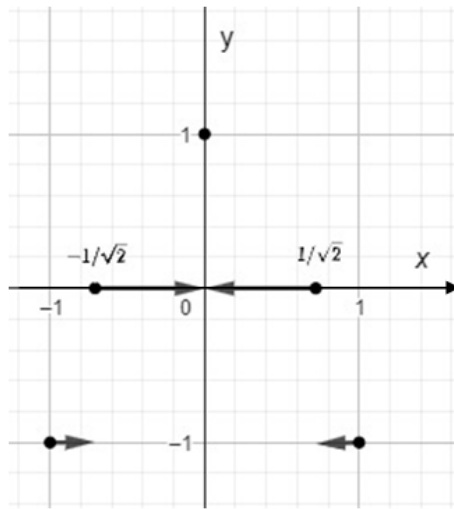


Рис. 27

### 12.2.1

Шукатимемо многочлен у вигляді  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , тоді

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$\begin{cases} f(1) = 6 \\ f(3) = 10 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ a + b + c + d = 6 \\ 27a + 9b + 3c + d = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -9 \\ d = 10 \end{cases}.$$

**Відповідь:**  $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 10$ .

### 12.2.2

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left( - \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \right) = - \frac{1}{1+x^2}.$$

**Відповідь:**  $\Phi'(x) = - \frac{1}{1+x^2}.$

### 12.2.3

Позначимо  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ , тоді  $\ln A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2} \cdot n}{n^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = e^{\frac{1}{2}}.$$

**Відповідь:**  $\sqrt{e}$ .

#### 12.2.4

$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ ;  $x^2 y'' - xy' + y = 2x$ . Введемо заміну:  $x = e^t$ ,  $t = \ln x$ , тоді

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x} = y'_t e^{-t}, \quad y''_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = y''_t e^{-t} + y'_t (-e^{-t}) \frac{1}{x} = (y''_t - y'_t) \frac{1}{x^2}.$$

Тоді  $x^2(y''_t - y'_t) \frac{1}{x^2} - xy'_t \frac{1}{x} + y = 2e^t$ ,  $y''_t - 2y'_t + y = 2e^t$  - лінійне неоднорідне ДР II порядку зі сталими коефіцієнтами, його розв'язок  $y = y_{\text{го}} + y_{\text{чн}}$ .

1)  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = 1$ ,  $y_{\text{го}} = C_1 e^t + C_2 t e^t = C_1 x + C_2 x \ln x$ ;

2)  $y_{\text{чн}} = A t^2 e^t$ ,  $y'_{\text{чн}} = 2A t e^t + A t^2 e^t = A e^t (2t + t^2)$ ,

$$y''_{\text{чн}} = A e^t (2t + t^2) + A e^t (2 + 2t) = A e^t (2 + 4t + t^2).$$

Тоді  $A(t^2 + 4t + 2) - 2A(t^2 + 2t) + A t^2 = 2$ ,  $A(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 - 4t + t^2) = 2$ ,  $2A = 2$ ,  $A = 1$ .

$$y_{\text{чн}} = t^2 e^t = x \ln^2 x, \quad y = y_{\text{го}} + y_{\text{чн}} = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^2 x.$$

**Відповідь:**  $y = x(C_1 + C_2 \ln x + \ln^2 x)$ .

#### 12.2.5 Див. розв'язання задачі 12.1.5.

#### 12.2.6

$$\text{Позначимо } I_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2 + 1} dt, \quad I_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t + x} dt.$$

Так як невластні інтеграли рівномірно збіжні, то ми маємо можливість їх про-  
диференціювати. Безпосередньою перевіркою легко переконатись, що

$$I_1''(x) + I_1(x) = I_2''(x) + I_2(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \text{ Отже,}$$

$$(I_1(x) - I_2(x))'' + (I_1(x) - I_2(x)) = 0 \Rightarrow I_1(x) - I_2(x) = A \cos x + B \sin x.$$

В той же час  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_2(x) = 0$ , і це доводить, що  $A = B = 0$  і  $I_1(x) = I_2(x)$  для довільного  $x \geq 0$ .

### **Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2013 р. ІС33І Перший курс**

#### **13.1.1 Обчислити визначник**

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \cdots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ a^2 & a & 1 & \cdots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & a^{n-2} & a^{n-3} & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}.$$

**13.1.2** Знайти рівняння кола найменшого радіуса, яке дотикається до параболи  $y = x^2 + 2x + 2$  та прямої  $y = 2x - 3$ .

**13.1.3** Яка поверхня є геометричним місцем точок, модуль різниці відстаней від кожної точки якої до точок  $F_1(0; -5; 0)$  та  $F_2(0; 5; 0)$  дорівнює 6? Знайти рівняння такої поверхні.

**13.1.4** Дослідити функцію  $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}$  на неперервність. Побудувати схематичний графік в околі точок розриву.

**13.1.5** Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідні вершини не були білими?

**13.1.6** Числову послідовність  $\{a_n\}$ ,  $n \geq 1$  задано умовами



$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, n \geq 1. \end{cases}$$

Знайти формулу загального члена  $a_n$ .

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2013 р. ІС33І Старші курси**

**13.2.1** Обчислити визначник:  $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$

**13.2.2** Обчислити  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^n}) \right]$  при  $|x| < 1$ .

**13.2.3** Знайти  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}$ , попередньо обчисливши інтеграл Пуассона  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

**13.2.4** Використовуючи ознаки збіжності ряду, довести збіжність такого чи-

слового ряду:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$ .

**13.2.5** Скількома способами можна розфарбувати вершини правильного 13-кутника в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві сусідні вершини не були білими?

**13.2.6** Нехай  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  та  $H(a_1, a_2, \dots, a_n)$  означають відповідно середнє арифметичне та середнє геометричне чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Яких значень

може набувати  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(a_1, a_2, \dots, a_n)}{H(a_1, a_2, \dots, a_n)}$ , якщо числова послідовність  $(a_n, n \in \mathbb{N})$  є арифметичною прогресією?

## Розв'язання та відповіді

### 13.1.1

Від першого стовпчика віднімемо третій, винесемо спільний множник, маємо:

$$\Delta_n = (1 - a^2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ -1 & a & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a^{n-3} & a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1 - a^2) \Delta_{n-1},$$

$$\text{де } \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-2} & a^{n-3} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \text{ бо розкладаючи визначник за елементами пер-$$

шого стовпчика, маємо всі нулі, за винятком  $A_{11}$ , оскільки для всіх інших  $A_{1j}$ ,  $j \neq 1$ ,  $j \neq 2$  два перших рядки – лінійно залежні.

Далі, використовуючи рекурентне співвідношення  $\Delta_n = (1 - a^2) \Delta_{n-1}$ , маємо, по індукції  $\Delta_n = (1 - a^2) \Delta_{n-1} = (1 - a^2)^2 \Delta_{n-2} = \dots = (1 - a^2)^{n-1} \Delta_1 = (1 - a^2)^{n-1}$ .

**Відповідь:**  $\Delta_n = (1 - a^2)^{n-1}$ .

### 13.1.2

$$\begin{cases} L: y = x^2 + 2x + 2 \\ l: y = 2x - 3 \end{cases}$$

1)  $K$  - дотична до  $L$ , яка паралельна  $l$ , тоді  $y'(x_0) = 2x_0 + 2 = 2 = k_l \Rightarrow x_0 = 0; y_0 = 2$ , тобто  $M_0(0; 2)$ .

2) Пряма  $M_0A \perp l$ ,  $k_{M_0A} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{2}$ . Тоді  $M_0A: x + 2y - 4 = 0$ .

3)  $A = l \cap M_0A$ , тобто  $A: \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2; 1)$ .

4)  $C$  - середина  $M_0A$ , центр кола:  $C(1; \frac{3}{2})$ .

5)  $M_0A = 2R = \text{dist}(M_0, l) = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$ , тобто  $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

6) Нарешті, рівняння кола  $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$ , тобто  $(x - 1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$

**Відповідь:**  $(x - 1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$

### 13.1.3

Нехай  $M(x; y; z) \in \Pi$ , де  $\Pi$  - шукана поверхня. Тоді  $|r_1 - r_2| = 6$ , де

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2}.$$

З одного боку:  $|r_1^2 - r_2^2| = 6|r_1 + r_2| = 6(r_1 + r_2)$ , або

$$9r_1r_2 = 41y^2 - 9x^2 - 9z^2 - 225 \quad (1),$$

з іншого боку:  $r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = 36$ , або

$$9r_1r_2 = 9x^2 + 9y^2 + 63 \quad (2).$$

Тепер із (1) та (2) маємо:  $18x^2 - 32y^2 + 18z^2 + 288 = 0$ , або  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$ .

**Відповідь:**  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$ , двопорожнинний гіперболоїд.

**13.1.4** Знайдемо  $D_f: \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ . Функція парна.

Розглянемо  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ .

$$1) \ x = -1; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \frac{1}{-1} \ln \frac{1+(-1+0)}{1-(-1+0)} = +\infty \text{ - односторонній розрив II роду;}$$

$$2) \ x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \ln \left[ \left( 1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1-x}{2x}} \right]^{\frac{2x}{x(1-x)}} = \ln e^2 = 2 \text{ - усувний розрив I роду;}$$

$$3) \ x = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty \text{ - односторонній розрив II роду.}$$

**Відповідь:** рис. 28

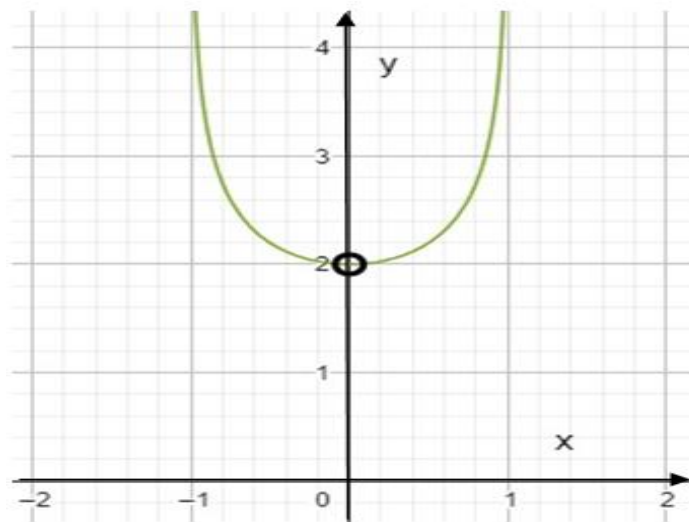


Рис. 28

### 13.2.1

Винесемо із кожного стовпчика, починаючи з другого, відповідно  $2, 3, \dots, n$ , тоді маємо:

$$\Delta_n = n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{2n-2} & 3^{2n-2} & \dots & n^{2n-2} \end{vmatrix},$$

але це відомий визначник Вандермонда з  $a_1 = 1^2$ ,  $a_2 = 2^2$ ,  $a_3 = 3^2$ , ...,  $a_n = n^2$ ,

тобто

$$\Delta_n = n! V_n(1^2, 2^2, \dots, n^2) = n! \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) = n! \prod_{1 \leq m < k \leq n} (k^2 - m^2) = n! \prod_{1 \leq m < k \leq n} (k - m)(k + m) =$$

$$= n!(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)\cdots((n-1)-(n-2))((n-1)+(n-2)) = 1!3!5!\cdots(2n-1)!.$$

$$\text{Відповідь: } \Delta_n = n! \prod_{1 \leq m < k \leq n} (k^2 - m^2) = 1!3!5!\cdots(2n-1)!.$$

### 13.2.2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \right] &= \\ = \frac{1}{1-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \right] &= \\ = \frac{1}{1-x} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x^{4^n}) = \frac{1}{1-x}, \text{ при } |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{1-x}, \text{ при } |x| < 1.$$

### 13.2.3

Двічі інтегруючи частинами, маємо:

$$I = \left( -\frac{e^{-x^2}}{x(2x^2+1)} + \frac{e^{-x^2}}{x} \right) \Bigg|_0^\infty + 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \left| \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right| = \frac{xe^{-x^2}}{x^2 + \frac{1}{2}} \Bigg|_0^\infty + 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0 + \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Відповідь: } I = \sqrt{\pi}.$$

### 13.2.4

$$\text{Маємо: } \sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} = a_1, \quad a_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2(1 - \cos \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{8},$$

$$a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2(1 + \cos \frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{8}} = 2 \sin \frac{\pi}{16}, \quad \dots,$$

$$a_n = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ (метод математичної індукції).}$$

Тоді, за ознакою збіжності числового ряду (ознака Даламбера), отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2} < 1 - \text{ряд збіжний.}$$

**Відповідь:** ряд збіжний.

Розв'язання задач 5 та 6 першого та старших курсів див. [30, ст. 24, 38 - 40].

### **Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2014 р. ІСЗЗІ Перший курс**

**14.1.1** Дослідити на сумісність та розв'язати систему лінійних рівнянь в

$$\text{залежності від параметру } \lambda : \begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 6 \end{cases}.$$

**14.1.2** Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{8+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n+n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k+n^2}}.$

**14.1.3** Відшукати відстань від початку координат до центра еліпса

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

**14.1.4** Дослідити на неперервність та побудувати схематичний графік функції

$$y = \log_{\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}} 2.$$

**14.1.5** Числову послідовність  $(x_n, n \geq 1)$  задано співвідношенням

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n} + 1}{2}. \end{cases} \text{ Довести, що } \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n (1 - x_n) = \pi^2.$$

**14.1.6** В кожний момент часу жук може знаходитися в одній з точок  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Починаючи свою подорож з точки  $A_1$ , він за кожну хвилину переповажає в будь-яку іншу точку. Скільки різних маршрутів тривалістю

*п хвилин може скласти для себе жук, якщо в кінці подорожі він хоче повернутися в точку  $A_1$ ?*

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2014 р. ІС33І Старші курси**

**14.2.1** Дослідити на сумісність та розв'язати систему лінійних рівнянь в

$$\text{залежності від параметру } \lambda : \begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 6 \end{cases}.$$

**14.2.2** Знайти границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ .

**14.2.3** Відшукати відстань від початку координат до центра еліпсоїда

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$$

**14.2.4** Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x) = \begin{cases} 1, \cos x > 0; \\ -1, \cos x < 0 \end{cases}$

. Застосувавши цей розклад, знайти суму числового ряду

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

**14.2.5** Функціональну послідовність  $(f_n(x), n \geq 1)$  задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{f_n(x)} + 1}{2}. \end{cases} \text{ Довести, що } \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left( 1 - \int_0^1 f_n(x) dx \right) = \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

**14.2.6** Двічі диференційована функція ( $f(x), x \in [0,1]$ ) для всіх  $x \in [0,1]$  задовольняє умови  $f(0) = f(1) = 0$  та нерівність  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0$ . Які значення може набувати  $\max_{x \in [0,1]} f(x)$ ?

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2015 р. ІС33І Перший курс**

**15.1.1** У еліпса та гіперболи спільні фокуси. Показати, що дотичні в точках перетину перпендикулярні.

**15.1.2** Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

**15.1.3** Довести нерівність  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ , якщо  $a + b + c = 1$ .

**15.1.4** Довести, що рівняння  $2^{x^2-x} = 3 \sin x$  має корені.

**15.1.5** Нехай  $A$  - множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для  $n \in A$  позначимо через  $d(n)$  кількість різних цифр в запису числа  $n$ . Знайти  $\sum_{n \in A} d(n)$ .

**15.1.6** Знайти всі неперервні функції, які для всіх  $x, y \in \mathbb{R}$  задовольняють співвідношення  $f(x+y) = e^{xy} f(x) f(y)$ .



**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2015 р. ІС33І Старші курси**

**15.2.1** Знайти найкоротшу відстань між точками еліпсоїда  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  та площини  $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1$ , якщо відомо, що точка  $M(1; 1; 1)$  належить еліпсоїду.

**15.2.2** Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

**15.2.3** Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}.$$

**15.2.4** Знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \sqrt{n}.$$

**15.2.5** Нехай  $A$  - множина всіх 12-значних чисел, в запису яких немає нулів. Для  $n \in A$  позначимо через  $d(n)$  кількість різних цифр в запису числа  $n$ . Знайти

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{d(n)}.$$

**15.2.6** Чи існує така зростаюча послідовність натуральних чисел  $\{n_k, k \geq 1\}$ , що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_k)!} = {}^{2015}\sqrt{2015}?$$

**2016 р. ІС33І Перший курс**

**16.1.6** Нехай  $d \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_d, r$  - додатні числа такі, що  $\prod_{i=1}^d a_i = r^d$ . Довести,

що для всіх  $s \geq 0$  виконується нерівність  $\prod_{i=1}^d (a_i + s) \geq (r + s)^d$ .

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики  
2016 р. ІСЗЗІ Старші курси**

**16.2.1** Обчислити визначник матриці  $\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2016}$ , де  $i$  - уявна одиниця.

**16.2.2** Побудувати графік функції  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1}$ . Обчислити площу фігури, обмеженої графіком цієї функції та відрізком  $[0; 2]$  осі  $Ox$ .

**16.2.3** Розклавши в ряд Фур'є на  $x \in (0; \pi)$  функцію  $f(x) = x(\pi - x)$ ,

знайти суму ряду  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ .

**16.2.4** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' + y'(x-1) = x^2 e^{-x}.$$

**16.2.5** Знайти суму ряду  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n}$ , де  $\{x, y\} \subset [0; 1)$  - фіксовані числа.

**16.2.6** Нехай  $d \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_d, r$  - додатні числа такі, що  $\prod_{i=1}^d a_i = r^d$ . Довести,

що для всіх  $s \geq 0$  виконується нерівність  $\prod_{i=1}^d (a_i + s) \geq (r + s)^d$ .

**Факультетська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2017 р. ІС33І Перший курс**

**17.1.1** Скласти рівняння сторін трикутника  $ABC$ , знаючи, що  $A(4; -1)$  - одна з його вершин, а  $x = 1$  та  $x - y = 1$  - рівняння бісектрис.

**17.1.2** Знайти границю добутку  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$ ,

$$\text{де } \prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}} = 2^{\frac{1}{1 \cdot 2}} 2^{\frac{1}{2 \cdot 3}} 2^{\frac{1}{3 \cdot 4}} \dots 2^{\frac{1}{(n-1)n}} 2^{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

**17.1.3** Знайти похідну  $y^{(2017)}$ , де  $y = (x^2 + 1)\cos 2x$ .

**17.1.4** Побудувати графік функції  $y = x^{\frac{1}{x-1}}$ .

**17.1.5** Функцію  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  задано формулою  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0; \\ x, & \text{при } x \in (0; 1); \\ 0, & \text{при } x = 1. \end{cases}$

Чи існує така функція  $g: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , що  $g(g(x)) = f(x)$  для всіх  $x$ ? Якщо так, наведіть приклад такої функції, якщо ні – доведіть це.

**17.1.6** Назвемо набір з нулів та одиниць правильним, якщо в ньому кожна група з послідовних нулів має парну довжину, а кожна група з послідовних одиниць – непарну. Наприклад, набори  $001000011100$  та  $111110010000$  є правильними, а набір  $111001111101$  – неправильним. Скільки існує правильних наборів довжини 17?

17.2.1 Задана матриця  $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{n} & \frac{4}{n} \\ \frac{2}{n} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ .

17.2.2 Розв'язати диференціальне рівняння  $y' \cos y = x - \sin y$ .

17.2.3 Розвинути в ряд Маклорена функцію  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$  в точці  $x_0 = 0$ .

17.2.4 Розклавши в ряд Фур'є функцію  $f(x) = x(\pi - x)$  на  $(0; \pi)$  за синусами,

знайти суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ .

17.2.5 Для яких  $\alpha \in \mathbb{R}$  існує така неперервна функція  $g: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ , що  $g(g(x)) = x^\alpha$  для всіх  $x$ ? Відповідь обґрунтуйте (наведіть приклад такої функції для тих значень  $\alpha$ , для яких це можливо, та доведіть її неіснування у протилежному випадку).

17.2.6 Безсмертна Маша записує на нескінченній дошці цифри з множини  $\{0, 1, \dots, 9\}$ , обираючи кожну наступну цифру навмання незалежно від попередніх. Маша припиняє цей процес в той момент, коли число, утворене з усіх написаних на дошці цифр, стає повним квадратом. (Наприклад, Маша зупиняється, написавши 3837681, оскільки  $3837681 = 1959 \times 1959$ .) Позначимо через  $p$  ймовірність того, що Маша буде писати цифри вічно. Доведіть, що  $p > \frac{1}{2}$ .

**18.1.1** Обчислити визначник Вандермонда

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix},$$

де  $x_1, x_2, x_3, x_4$  - різні дійсні числа.

**18.1.2** Знайти центр та радіус кола, утвореного в перетині сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  та площини  $x + y + z = 1$ . Виконати малюнок.

**18.1.3** Обчислити  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k(k+2)} \right)$ .

**18.1.4** Використавши правило Лопітала-Бернуллі, знайти  $n$ , при якому справджується рівність

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + \arcsin 2x + \dots + \arcsin nx}{\sin x + \sin(2 \cdot 2!x) + \dots + \sin(n \cdot n!x)} = \frac{15}{719}.$$

**18.1.5** Позначимо через  $B_r$  круг з центром в точці  $(r; r)$  та радіусом  $\sqrt{r^2 + 1}$ . Описати множину  $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} B_r$  у якомога простішому вигляді та зобразити її.

**18.1.6** Нехай  $A, B, C \in \mathbb{R}^2$  - точки з цілими координатами. Позначимо  $\alpha = \angle ABC$ . Довести, що  $\sin(2018\alpha)$  та  $\cos(2018\alpha)$  - раціональні числа.

**18.2.1** Провести повне дослідження та побудувати графік функції  $y = x^x$ ,  $x > 0$

**18.2.2** Користуючись розвиненням у степеневий ряд, обчислити  $f^{(16)}(0)$  для функції  $f(x) = \frac{x^7}{x^3 + 2}$ .

**18.2.3** Знайти  $f(x)$  з рівняння  $\int_1^x \frac{dt}{f^3(t)} = f(x) - 1$ ,  $f(1) = 1$ , де  $f(x)$  - неперервна на  $[1; x]$  функція,  $f(x) \neq 0$ , використавши теорему про інтеграл зі змінною верхньою межею.

**18.2.4** Розклавши в ряд Фур'є функцію  $y = x^2$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$ , знайти суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

**18.2.5** Для  $n \in \mathbb{N}$  позначимо через  $\Theta(n)$  сумарну кількість всіх дільників числа  $n$ . Наприклад, число 6 має чотири дільники – 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій – по два, а четвертий – чотири. Тому  $\Theta(n) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$ . Визначити область збіжності ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta(n)}{n^x}$  та знайти його суму при  $x = 2$ .

**18.2.6** Позначимо через  $A$  трикутник з вершинами  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ; через  $B_{x,y}$  - круг одиничного радіуса з центром в точці  $(x; y)$ ; через  $S(\cdot)$  - площу області. Знайти  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(A \cap B_{x,y}) dx dy$ .

**Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики  
КПІ імені Ігоря Сікорського**

**I тур, 28-30 січня 2023 року**

**Задачі для студентів першого курсу, категорія М**

**23.1.1(М)** Знайти суму  $\sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{2022^n + \sqrt{2022^{2023}}}.$

**23.1.2(М)** Знайти всі функції  $f: (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$ , які задовольняють рівняння  $f(f(x)) = 6x - f(x)$ .

**23.1.3(М)** Позначимо через  $\mathbb{R}^3_+$  перший координатний октант у  $\mathbb{R}^3$ . Для кожного фіксованого  $\alpha > 0$  описати геометричне місце точок  $A \in \mathbb{R}^3_+$ , які

задовольняють таку умову: найменший об'єм частини октанту, що відтинається довільною площиною, проведеною через  $A$ , дорівнює  $\alpha$ .

**23.1.4(М)** Нехай  $f$  та  $f_n, n \geq 1$  - функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Відомо, що для будь-якої числової послідовності  $x_n, n \geq 1$ , з  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  випливає  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$ . Довести, що функція  $f$  є неперервною.

**23.1.5(М)** Довести, що для будь-якої дійсної квадратної матриці  $A$  виконується нерівність  $\det(E + A + A^2 + \dots + A^{2022}) \geq 0$ . Чи може в цій нерівності досягатися рівність?

**23.1.6(М)** Означимо операцію  $\oplus$  у такий спосіб:

$$a \oplus b = \frac{a+b}{ab+1}.$$

Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \oplus 3 \oplus \dots \oplus n$ .



**Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики  
КПІ імені Ігоря Сікорського**

**I тур, 28-30 січня 2023 року**

**Задачі для студентів старших курсів, категорія М**

**23.2.1(М)** Знайти суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (10n+1)}$ .

**23.2.2(М)** Знайти всі розв'язки задачі Коші  $\begin{cases} y''(x) = y(x) \cdot \cos x, \\ y(2022) = y(2024) = 0. \end{cases}$

**23.2.3(М)** Позначимо через  $Q$  внутрішню частину квадрата з вершинами  $(0; 0)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(1; 1)$ . Для фіксованого  $\alpha \geq 0$  розглянемо геометричне місце  $\mathcal{R}_\alpha$  всіх точок  $A \in Q$ , які задовольняють таку умову: площа будь-якого багатокутника, що відтинається від  $Q$  довільною прямою, проведеною через  $A$ , не менше  $\alpha$ . Знайти площу самої множини  $\mathcal{R}_\alpha$ .

**23.2.4(М)** Нехай  $f$  та  $f_n, n \geq 1$  - функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Відомо, що для будь-якої числової послідовності  $x_n, n \geq 1$ , з  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  випливає  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$ .

а) Довести, що функція  $f$  є неперервною.

б) Чи обов'язково функції  $f_n$  збігаються до  $f$  рівномірно на  $\mathbb{R}$ ?

**23.2.5(М)** На першій чверті одиничного кола (тобто, на його дузі від точки  $(1; 0)$  до точки  $(0; 1)$ ) навмання вибрано точку  $A$ , на другій -  $B$ , на третій -  $C$  і на четвертій -  $D$ . Для фіксованої точки  $F$  з координатами  $(x; y)$  позначимо через  $p(x; y)$  імовірність того, що  $F$  лежить всередині

чотирикутника  $ABCD$ . Знайти  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x; y) dx dy$ .

**23.2.6(М)** Означимо операцію  $\oplus$  у такий спосіб:

$$a \oplus b = \frac{a+b}{ab+1}.$$

Довести, що для довільної послідовності чисел  $\{a_n, n \geq 1\}$  з проміжку  $(0; 1)$  рівність  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 1$  виконується тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

**Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики  
КПІ імені Ігоря Сікорського**

**I тур, 28-30 січня 2023 року**

**Задачі для студентів першого курсу, категорія С**

**23.1.1(С)** Знайти суму

$$\sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{2022^n + \sqrt{2022^{2023}}}.$$

**23.1.2(С)** Послідовність  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  задано рекурентно:

$$x_1 = a, x_2 = b, a, b \in \mathbb{N},$$

$$x_{2n+1} = x_{2n} x_{2n-1},$$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} + 4, n \in \mathbb{N}.$$

Яка найбільша кількість квадратів є серед чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ ? Тут квадратом називається таке число, яке дорівнює квадрату деякого натурального числа.

**23.1.3(С)** Для деяких дійсних чисел  $a, b, c, d$  та різних  $\Theta_i \in [0; 2\pi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , розглянемо визначник

$$L_i(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + c \cos \Theta_i & b + c \sin \Theta_i & 1 \\ a + d \cos \Theta_i & b + d \sin \Theta_i & 1 \end{vmatrix}.$$

Доведіть, що прямі  $L_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  перетинаються в одній точці та знайдіть координати цієї точки.

**23.1.4(С)** Нехай  $f : (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$  та  $g : (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$  — такі диференційовні на  $(0; \infty)$  функції, що  $f'(x) \neq 0$ ,  $x > 0$ , та для всіх  $x > 0$  виконується рівність

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = 2023 \cdot \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Знайдіть  $g(2)$ , якщо  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $g(1) = 2023$ .

**23.1.5(С)** На прямій  $\operatorname{Re} z = 5$  знайти найбільше значення виразу  $\operatorname{Re}(z^2) - \operatorname{Im}(z^2)$ .

**23.1.6(С)** Елементи матриці  $a_{i-1j}, a_{i+1j}, a_{ij-1}, a_{ij+1}$  (якщо вони існують) будемо називати сусідніми до елементу  $a_{ij}$ , якщо вони стоять на одну позицію вище, нижче, праворуч, ліворуч від нього. Чи існує така матриця  $A$  розміру

$10 \times 10$  з усіма різними елементами, у якій кожен елемент серед своїх сусідніх є або найбільшим або найменшим? Якщо така матриця існує, то наведіть її приклад, якщо такої матриці не існує, то доведіть це.

**Відкрита університетська студентська Олімпіада з математики  
КПІ імені Ігоря Сікорського**

**I тур, 28-30 січня 2023 року**

**Задачі для студентів старших курсів, категорія C**

**23.2.1(C)** Послідовність  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  задано рекурентно:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1$ ,

$$x_{n+2} = 20x_n + 23x_{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Дослідіть на збіжність та у разі збіжності знайдіть суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2023)^n}.$$

**23.2.2(C)** Знайти таку неперервну функцію  $(f(x), x \geq 1)$ , що

$$\int_1^x \frac{dt}{f^{2023}(t)} = f(x) - 1, x \geq 1.$$

**23.2.3(C)** Для деяких дійсних чисел  $a, b, c, d$  та різних  $\Theta_i \in [0; 2\pi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , розглянемо визначник

$$L_i(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + c \cos \Theta_i & b + c \sin \Theta_i & 1 \\ a + d \cos \Theta_i & b + d \sin \Theta_i & 1 \end{vmatrix}.$$

Доведіть, що прями  $L_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  перетинаються в одній точці та знайдіть координати цієї точки.

**23.2.4(C)** Нехай  $f : (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$  та  $g : (0; \infty) \rightarrow (0; \infty)$  — такі диференційовні на  $(0; \infty)$  функції, що  $f'(x) \neq 0$ ,  $x > 0$ , та для всіх  $x > 0$  виконується рівність

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = 2023 \cdot \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Знайдіть  $g(2)$ , якщо  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $g(1) = 2023$ .

23.2.5(C) Обчисліть  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{\tan x}}$ .

23.2.6(C) Елементи матриці  $a_{i-1,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j-1}, a_{i,j+1}$  (якщо вони існують) будемо називати сусідніми до елементу  $a_{i,j}$ , якщо вони стоять на одну позицію вище, нижче, праворуч, ліворуч від нього. Чи існує така матриця  $A$  розміру  $10 \times 10$  з усіма різними елементами, у якій кожен елемент серед своїх сусідніх є або найбільшим або найменшим? Якщо така матриця існує, то наведіть її приклад, якщо такої матриці не існує, то доведіть це.

### Розв'язання та відповіді

#### 23.1.1(C)

Нехай  $a = 2022$ . Позначимо початкову суму через  $S$ :

$$S = \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{a^n + a^{\frac{2023}{2}}}.$$

Зрозуміло, що  $\sum_{n=0}^l b(n) = \sum_{n=0}^l b(l-n)$ . Тоді  $S$  можна переписати наступним

чином:

$$S = \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{a^{2023-n} + a^{\frac{2023}{2}}}.$$

Додаючи ці дві рівності, маємо:

$$2S = \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{a^n + a^{\frac{2023}{2}}} + \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{a^{2023-n} + a^{\frac{2023}{2}}} = \sum_{n=0}^{2023} \left( \frac{1}{a^n + a^{\frac{2023}{2}}} + \frac{1}{a^{2023-n} + a^{\frac{2023}{2}}} \right).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 2S &= \sum_{n=0}^{2023} \left( \frac{1}{a^n + a^{\frac{2023}{2}}} + \frac{1}{a^{2023-n} + a^{\frac{2023}{2}}} \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{2023} \left[ \frac{1}{a_n} \left( \frac{1}{1 + a^{\frac{2023}{2}-n}} \right) + \frac{1}{a^{\frac{2023}{2}}} \left( \frac{1}{a^{\frac{2023}{2}-n} + 1} \right) \right] = \\
 &= \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{1 + a^{\frac{2023}{2}-n}} \left( \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{\frac{2023}{2}}} \right) = \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{1 + a^{\frac{2023}{2}-n}} \left( \frac{a^{\frac{2023}{2}}}{a^n \cdot a^{\frac{2023}{2}}} + \frac{1}{a^{\frac{2023}{2}}} \right) = \\
 &= \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{1 + a^{\frac{2023}{2}-n}} \left( \frac{a^{\frac{2023}{2}-n} + 1}{a^{\frac{2023}{2}}} \right) = \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{a^{\frac{2023}{2}}} .
 \end{aligned}$$

Таким чином,  $2S = \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{\sqrt{a^{2023}}} .$  Звідси

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2023} \frac{1}{\sqrt{a^{2023}}} = \frac{1}{2} \cdot 2024 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^{2023}}} = \frac{1012}{\sqrt{a^{2023}}} .$$

Оскільки  $a = 2022$ , то  $S = \frac{1012}{\sqrt{2022^{2023}}} .$

**Відповідь:**  $\frac{1012}{\sqrt{2022^{2023}}} .$

### 23.1.2(С)

Зауважимо, що при  $n \geq 2$

$$x_{2n+2} = x_{2n+1} + 4 = 4 + x_{2n}x_{2n-1} = 4 + (x_{2n-1} + 4)x_{2n-1} = (x_{2n-1} + 2)^2.$$

Тому числа  $x_6, x_8, x_{10}, \dots, x_{2022}$  - квадрати (їх 1009 шт.). Також помітимо, що при  $n \geq 2$   $x_{2n+2} - x_{2n+1} = 4$ , а різниця між двома квадратами не може дорівнювати 4, отже, числа  $x_5, x_7, x_9, \dots, x_{2023}$  - не квадрати. Відмітимо також, що  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = ab, x_4 = ab + 4$ , а тому серед перших чотирьох членів послідовності щонайбільше три квадрати (якщо  $a$  та  $b$  - квадрати). Отже, найбільша кількість квадратів серед чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$  - 1012.

**Відповідь:** 1012.

### 23.1.3(C)

Спочатку відмітимо, що, якщо  $c = d$ , то визначник  $L_i(x, y)$  матиме однакові другий та третій рядок, а тому буде рівний нулю і рівняння  $L_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , не будуть визначати прямі (в цьому випадку геометричним образом рівнянь буде вся площина  $\mathbb{R}^2$ ).

Тому надалі будемо розглядати випадок  $c \neq d$ . Для довільних  $x$  та  $y$ :

$$\begin{aligned} L_i(x, y) &= \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + c \cos \Theta_i & b + c \sin \Theta_i & 1 \\ a + d \cos \Theta_i & b + d \sin \Theta_i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a - x + c \cos \Theta_i & b - y + c \sin \Theta_i & 0 \\ a - x + d \cos \Theta_i & b - y + d \sin \Theta_i & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a - x + c \cos \Theta_i & b - y + c \sin \Theta_i \\ a - x + d \cos \Theta_i & b - y + d \sin \Theta_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - x + c \cos \Theta_i & b - y + c \sin \Theta_i \\ (d - c) \cos \Theta_i & (d - c) \sin \Theta_i \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{cc} a-x & b-y \\ (d-c)\cos\Theta_i & (d-c)\sin\Theta_i \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} c\cos\Theta_i & c\sin\Theta_i \\ (d-c)\cos\Theta_i & (d-c)\sin\Theta_i \end{array} \right| =$$

$$= (d-c)(a-x)\sin\Theta_i - (d-c)(b-y)\cos\Theta_i.$$

Отже, при  $c \neq d$  рівняння  $L_i(x, y) = 0$  можна записати у вигляді

$$(a-x)\sin\Theta_i = (b-y)\cos\Theta_i.$$

При  $i = 1, 2, 3$  кожне з цих рівнянь буде визначати пряму з нормальним вектором  $\vec{n}_i = (\sin\Theta_i, -\cos\Theta_i)$ , три цих вектори не колінеарні при різних  $\Theta_i \in [0, 2\pi)$ , а отже, прямі перетинаються (є такі трійки різних кутів  $\Theta_i$ , коли дві з трьох прямих збігаються, але третя буде їх обов'язково перетинати). Точка  $M(a, b)$  задовольняє кожне з рівнянь  $L_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а, отже, є точкою перетину.

**Відповідь:**  $M(a, b)$ .

### 23.1.4(C)

З умов задачі випливає, що для всіх  $x > 0$  виконується рівність

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 2023 \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

А тому для всіх  $x > 0$   $\ln((g(x)))' = 2023 \ln((f(x)))'$  та  $g(x) = c(f(x))^{2023}$ .

Підставивши послідовно  $x = 1$  та  $x = 2$  отримаємо, що  $c = 2023$ ,

$$g(2) = 2023 \cdot 2^{2023}.$$

**Відповідь:**  $g(2) = 2023 \cdot 2^{2023}$ .

### 23.1.5(C)

На прямій  $\operatorname{Re} z = 5$  комплексне число  $z = x + iy$  набуде вигляду  $z = 5 + iy$ . Тому  $z^2 = 25 + 10iy - y^2$ , та

$$\operatorname{Re}(z^2) - \operatorname{Im}(z^2) = 25 - 10y - y^2 = 50 - (y + 5)^2.$$

Максимальне значення цього виразу досягається при  $y = -5$  та рівне 50.

**Відповідь:** 50.

### 23.1.6(C)

Розглянемо дві множини чисел  $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$  та

$B = \{51, 52, 53, \dots, 100\}$ . Заповнимо матрицю  $10 \times 10$  наступним чином:

всі елементи  $a_{ij}$ , у яких  $i + j$  - парне число, заповнюємо з множини  $A$  (без повторень), усі інші елементи заповнюємо без повторень з множини  $B$ . Це ще можна уявити, якщо на матрицю поглянути як на шахову дошку, у якої всі білі клітини обираються з множини  $A$ , а чорні – з  $B$ . Така матриця задовольнятиме умову задачі.

**Відповідь:** існує.

### 23.2.1(C)

Послідовність  $\{x_n\}$  монотонно зростає, а тому для всіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується нерівність:

$$x_{n+2} = 20x_n + 23x_{n+1} \leq 20x_{n+1} + 23x_{n+1} = 43x_{n+1}.$$

Отже,  $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \leq 43$ , звідки  $x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1 \leq 43^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



$$\text{Тому } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2023)^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{43}{2023} \right)^n,$$

що доводить збіжність шуканого ряду. Для знаходження його суми зауважимо, що

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(2023)^n} = \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x_n}{(2023)^n} = \\ &= \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{20x_{n-2}}{(2023)^n} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{23x_{n-1}}{(2023)^n} = \\ &= \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20x_n}{(2023)^{n+2}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{23x_n}{(2023)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2023} + \frac{1}{2023^2} + \frac{20}{2023^2} S + \frac{23}{2023} \left( S - \frac{1}{2023} \right), \end{aligned}$$

та остаточно

$$S = \frac{2001}{4045980}.$$

**Відповідь:**  $\frac{2001}{4045980}.$

### 23.2.2(С)

Зауважимо, що при  $x=1$  з рівняння отримаємо  $f(1)-1=0$ , звідки  $f(1)=1$ . З рівності в умові задачі випливає, що функція  $f$  диференційовна (теорема Барроу). Продиференціюємо праву та ліву частини рівності з умови за змінною  $x$ , отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$f'(x) = \frac{1}{f^{2023}(x)},$$

його загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = \sqrt[2024]{2024x + C}.$$

З початкової умови  $f(1) = 1$  випливає, що  $C = -2023$ . Отже,

$$f(x) = \sqrt[2024]{2024x - 2023}, \quad x \geq 1.$$

**Відповідь:**  $f(x) = \sqrt[2024]{2024x - 2023}, \quad x \geq 1.$

**23.2.3(C)** Див. розв'язання задачі **23.1.3(C)**.

**23.2.4(C)** Див. розв'язання задачі **23.1.4(C)**.

**23.2.5(C)**

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{tgx}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{1 + e^{tgx}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{tgx}}.$$

Після заміни  $x \rightarrow -x$  в першому з цих інтегралів, отримаємо:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{-tgx}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + e^{tgx}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(e^{tgx} + 1)dx}{1 + e^{tgx}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

**Відповідь:**  $\frac{\pi}{4}.$

**23.2.6(C)** Див. розв'язання задачі **23.1.6(C)**.

## 2.2 Приклади білетів другого рівня, огляд деяких задач

### Олімпіада НТУУ „КПІ” з математики

2010 р. ІСЗЗІ Перший курс

#### 10.1.1 Довести, що

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \leq S_1 S_2 S_3, \text{ де } S_i = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2}, i = 1, 2, 3;$$

(нерівність Адамара).

Вказівка: застосувати геометричний зміст  $|\Delta_3|$ .

#### 10.1.2 Задані дві лінії в $R^3$

$$L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}, \quad L_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{0}.$$

Впевнитися в тому, що ці прямі мимобіжні. Знайти рівняння їх спільного перпендикуляра та найкоротшу відстань між ними. Зробити малюнок.

#### 10.1.3 Знайти визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

#### 10.1.4 Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+3)!}$ .

**10.1.5** На площині задано коло з центром  $O$  і радіусом  $1$ . Визначити геометричне місце центрів перетину медіан трикутників  $OA_1A_2$ , де

а)  $A_1$  - довільна точка на колі, а  $A_2$  - фіксована точка на колі;

б)  $A_1, A_2$  - довільні точки на колі.

**10.1.6** Знайти функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обчисливши границю

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos^{2m}(\pi x n!).$$

**10.1.7** Суперкоренем додатного числа  $x$  (позначення -  $\angle x$ ) назовемо таке додатне  $t$ , що  $t^t = x$ .

а) Для яких (додатних)  $x$  існує суперкорінь?

б) Для яких (додатних)  $x$  він визначений однозначно?

в) Довести, що при  $x \rightarrow +\infty$  має місце еквівалентність  $\angle x \sim \frac{\ln x}{\ln \ln x}$ .

### Олімпіада НТУУ „КПІ” з математики

2010 р. ІСЗЗІ Старші курси

**10.2.1** Знайти матрицю  $A$ , якщо  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2010 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2009 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2008 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

**10.2.2** Куля зі швидкістю  $v_0 = 200 \text{ м/сек}$  влучає в дошку товщиною  $d = 0,1 \text{ м}$  і, пробиваючи її, виходить зі швидкістю  $v_1 = 80 \text{ м/сек}$ . Вважаючи силу опору кулі в дошці пропорційною квадрату її швидкості, знайти час руху кулі через дошку.

Вказівка: використати II закон Ньютона.

**10.2.3** Довести, що  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

Використавши цю рівність, знайти суму ряду

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ , обчислюючи вказану границю.

**10.2.4** Обчислити об'єм тора, тіла, що утворено обертанням круга радіуса  $R$  навколо зовнішньої осі, що знаходиться на відстані  $d$  від центра круга,  $d > R$ . Виконати малюнок.

**10.2.5** На площині задане коло радіуса  $r$  з фіксованою точкою  $S$  на ньому. З точки  $S$  в одному напрямку по колу зі сталими кутовими швидкостями  $v$  і  $2v$  одночасно „виїжджають” точки  $A$  і  $B$ . При цьому середина відрізка  $AB$  описує деяку замкнену криву  $\mathfrak{S}$ .

а) Записати рівняння кривої  $\mathfrak{S}$  та зобразити її.

б) Знайти площі областей, які обмежує дана крива.

**10.2.6** Нехай  $[t]$  і  $\{t\}$  означають цілу і дробову частини числа  $t$  відповідно. Знайти границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \int_0^x \{t\}^{[t]} dt.$$

**10.2.7** Суперкоренем додатного числа  $x$  (позначення -  $\angle x$ ) назовемо таке додатне  $t$ , що  $t^t = x$ .

а) Для яких (додатних)  $x$  існує суперкорінь?

б) Для яких (додатних)  $x$  він визначений однозначно?

в) Дослідити на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \angle n}$ .

### 10.1.1

Нехай  $\vec{S}_i = (a_{i1}; a_{i2}; a_{i3})$ ,  $i = 1, 2, 3$  - вектори з відповідними координатами, тоді  $S_i = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2}$ ,  $i = 1, 2, 3$  - їх довжини. Модуль визначника

$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих век-

торах, а  $S_1, S_2, S_3$  - сторони цього паралелепіпеда. Але, як відомо, найбільший об'єм із заданими сторонами має прямий прямокутний паралелепіпед, об'єм якого  $V_{\text{паралелепіпеда}} = S_1 S_2 S_3$ , тому  $|\Delta_3| \leq S_1 S_2 S_3$ , де  $S_i = \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### 10.1.2

#### І спосіб

Точки  $M_1(2; 1; 0)$  та  $M_2(0; 1; -3)$  належать відповідно першій та другій прямим. Побудуємо довільний паралелепіпед  $M_1 M_2 O_1 O_2 ABCD$ , ребра якого лежать на заданих прямих (рис. 29).

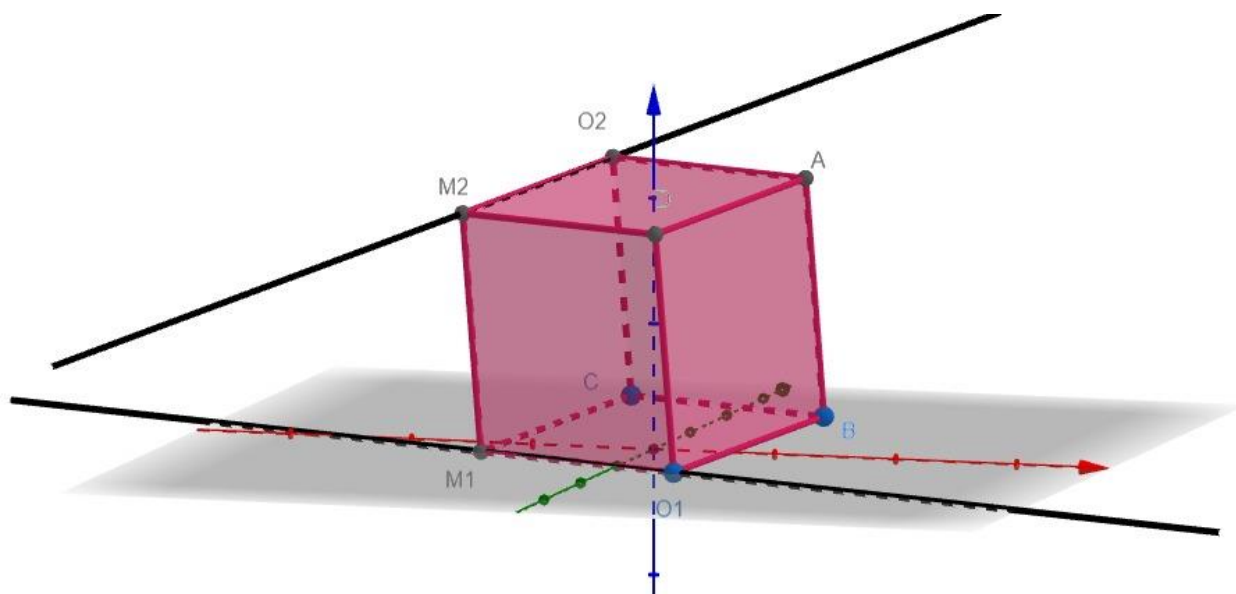


Рис. 29

Розглянемо три вектори  $M_1\vec{O}_1 = \vec{l}_1 = (2; 1; -1)$ ,  $M_2\vec{O}_2 = \vec{l}_2 = (2; 1; 0)$  та

$M_1\vec{M}_2 = \vec{l}_3 = (-2; 0; -3)$ . Мішаний добуток  $\vec{l}_1\vec{l}_2\vec{l}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2$  не рівний нулю,

отже, задані прямі мимобіжні. Модуль цього мішаного добутку дорівнює об'єму побудованого паралелепіпеда, а модуль векторного добутку

$|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |i - 2j| = \sqrt{5}$  дорівнює площі його основи. Так як відстань між

прямими є висота побудованого паралелепіпеда, то  $H = \frac{V}{S_{осн}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Спільний перпендикуляр двох прямих знайдемо як лінію перетину площин, що перпендикулярні до третьої (основної) площини, паралельної заданим прямим. Нормальним вектором цієї основної площини буде  $\vec{n} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = i - 2j = (1; -2; 0)$ . Складемо рівняння першої площини, що проходить через точку  $M_1(2; 1; 0)$  перпендикулярно до вектора

$\vec{n}_1 = \vec{n} \times \vec{l}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2i + j + 5k$ :  $2 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y - 1) + 5 \cdot (z - 0) = 0$ , або  $2x + y + 5z - 5 = 0$ .

Аналогічно рівняння другої площини  $\left( M_2(0; 1; -3), \vec{n}_2 = \vec{n} \times \vec{l}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5k \right)$ :

$0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 1) + 5 \cdot (z + 3) = 0$ , або  $z + 3 = 0$ .

Тепер спільний перпендикуляр має вигляд  $\begin{cases} 2x + y + 5z - 5 = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$  - це одна із форм

відповіді. Перетворимо до канонічного виду. Ясно, що  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i - 2j$  -

напрямний вектор цієї прямої. Знайдемо довільну точку на ній, виберемо  $y = 4$ ,

тоді  $\begin{cases} 2x+5z=1 \\ z=-3 \end{cases}$ , або  $\begin{cases} x=8 \\ y=4 \\ z=-3 \end{cases}$ . Значить, канонічне рівняння спільного перпендикуляра  $\frac{x-8}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{0}$ .

## II спосіб

Розв'язок системи  $\begin{cases} \frac{x_1-2}{2} = \frac{y_1-1}{1} = \frac{z_1}{-1} \\ \frac{x_2}{2} = \frac{y_2-1}{1} = \frac{z_2+3}{0} \\ \vec{F_1F_2} \parallel \vec{l_1} \times \vec{l_2} \end{cases}$ , де  $F_1(x_1; y_1; z_1)$  і  $F_2(x_2; y_2; z_2)$  точки відпо-

відно на першій та другій прямих, що лежать на спільному перпендикулярі, дасть нам координати цих точок:

$$\begin{cases} \frac{x_1-2}{2} = \frac{y_1-1}{1} = \frac{z_1}{-1} \\ \frac{x_2}{2} = \frac{y_2-1}{1} = \frac{z_2+3}{0} \\ \frac{x_2-x_1}{1} = \frac{y_2-y_1}{-2} = \frac{z_2-z_1}{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-2=2(y_1-1) \\ z_1=-(y_1-1) \\ x_2=2(y_2-1) \\ z_2=-3 \\ y_2-y_1=-2(x_2-x_1) \\ z_1=z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=-3 \\ z_2=-3 \\ y_1=-z_1+1=4 \\ x_1=2(y_1-1)+2=8 \\ x_2=2(y_2-1) \\ y_2-4=-2(2y_2-2-8) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_1=-3 \\ z_2=-3 \\ y_1=4 \\ x_1=8 \\ y_2+4y_2=20+4 \\ x_2=2(y_2-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=-3 \\ z_2=-3 \\ y_1=4 \\ x_1=8 \\ y_2=\frac{24}{5} \\ x_2=2\left(\frac{24}{5}-1\right)=\frac{38}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=8 \\ y_1=4 \\ z_1=-3 \\ x_2=\frac{38}{5} \\ y_2=\frac{24}{5} \\ z_2=-3 \end{cases}$$

Отже,  $F_1(8; 4; -3)$ ,  $F_2\left(\frac{38}{5}; \frac{24}{5}; -3\right)$  і рівняння спільного перпендикуляра знайдемо, як рівняння прямої через дві точки:

$$\frac{x-8}{\frac{38}{5}-8} = \frac{y-4}{\frac{24}{5}-4} = \frac{z+3}{-3+3} \Rightarrow \frac{x-8}{-\frac{2}{5}} = \frac{y-4}{\frac{4}{5}} = \frac{z+3}{0} \Rightarrow \frac{x-8}{-2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+3}{0},$$

або  $\frac{x-8}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{0}$ , що співпадає з першим способом розв'язання.

Найкоротшу відстань між прямими знайдемо як довжину відрізка  $F_1F_2$ :



$$F_1 F_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{\left(8 - \frac{38}{5}\right)^2 + \left(4 - \frac{24}{5}\right)^2 + (-3 + 3)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Відповідь:**  $\frac{x-8}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{0}, \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

### 10.1.3

Представимо визначник у вигляді суми  $\Delta_n = \Delta_n^1 + \Delta_n^2$ , де

$$\Delta_n^1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n^2 = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

Обчислимо перший з них:

$$\Delta_n^1 = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha \Delta_{n-1}^1.$$

Далі методом математичної індукції впевнюємось, що

$$\Delta_n^1 = \alpha \Delta_{n-1}^1 = \alpha^2 \Delta_{n-2}^1 = \dots = \alpha^{n-1} \Delta_1^1 = \alpha^n. \quad \text{Аналогічно} \quad \Delta_n^2 = \beta^n. \quad \text{Таким чином}$$

$$\Delta_n = \Delta_n^1 + \Delta_n^2 = \alpha^n + \beta^n.$$

**Відповідь:**  $\alpha^n + \beta^n$ .

#### 10.1.4

Розглянемо

$$a_k = \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+3)!} = \frac{(k^2 + 5k + 6) - 1}{(k+3)!} = \frac{(k+2)(k+3)}{(k+3)!} - \frac{1}{(k+3)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+3)!}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}\right) + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+3)!}\right) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}. \end{aligned}$$

Звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} \right) = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}.$$

**Відповідь:**  $\frac{2}{3}$ .

### 10.1.5

а) Нехай  $A_1(x; y)$ ,  $A_2(x_0; y_0)$  - точки на колі.  $A_1(x; y)$  - довільна точка,  $A_2(x_0; y_0)$  - фіксована (рис. 30).

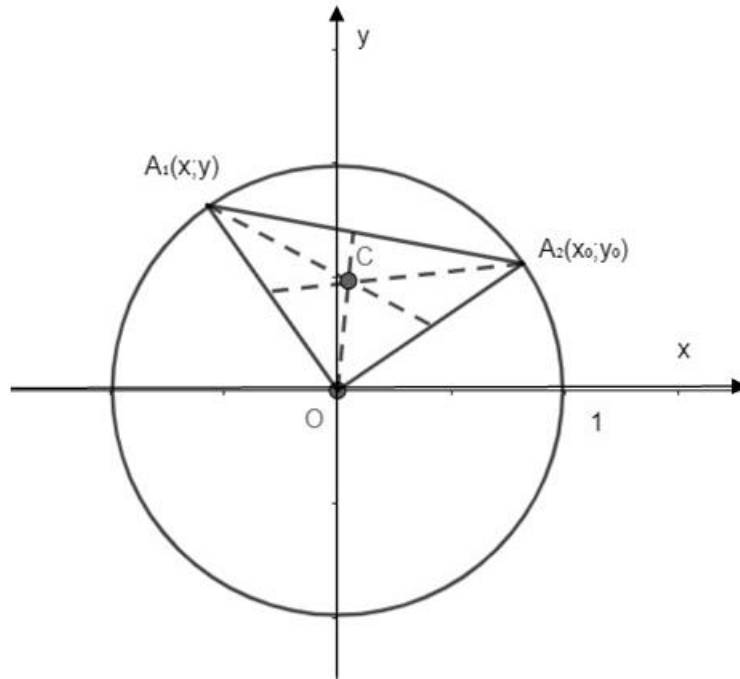


Рис. 30

Тоді  $C\left(\frac{x+x_0+0}{3}; \frac{y+y_0+0}{3}\right)$  - центр перетину медіан.

Так як  $x^2 + y^2 = 1$ , то можна ввести параметричне рівняння

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \text{ тоді рівняння шуканої лінії буде } \begin{cases} x_L = \frac{1}{3}(\cos t + x_0) \\ y_L = \frac{1}{3}(\sin t + y_0) \end{cases}, \text{ або}$$

$$\begin{cases} x_L - \frac{x_0}{3} = \frac{1}{3} \cos t \\ y_L - \frac{y_0}{3} = \frac{1}{3} \sin t \end{cases}. \quad \text{Запишемо рівняння в канонічному вигляді:}$$

$$\left(x - \frac{x_0}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

б) Нехай тепер  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$  - довільні точки на колі (рис. 31)

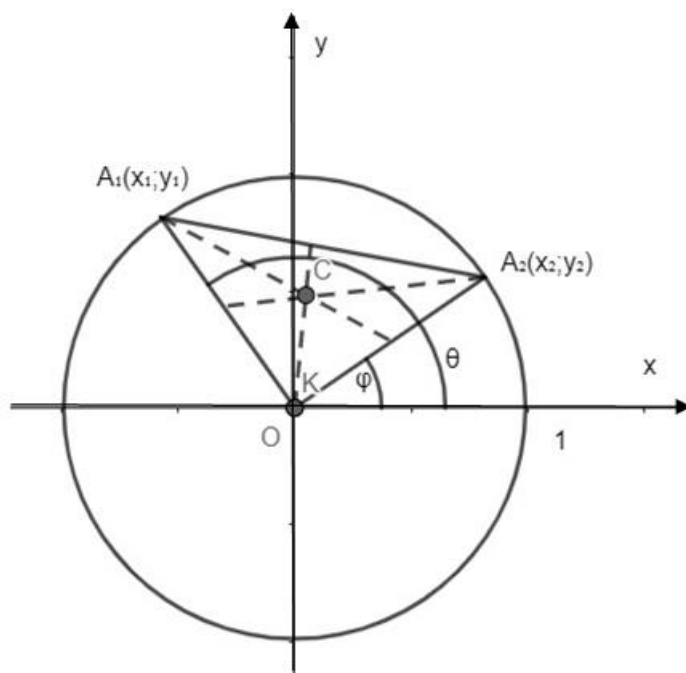


Рис. 31

Точка  $C\left(\frac{x_1 + x_2 + 0}{3}; \frac{y_1 + y_2 + 0}{3}\right)$  - центр перетину медіан. В параметричному

вигляді  $\begin{cases} x_1 = \cos \theta \\ y_1 = \sin \theta \\ x_2 = \cos \varphi \\ y_2 = \sin \varphi \end{cases}$ , тоді  $\begin{cases} x_L = \frac{1}{3}(\cos \theta + \cos \varphi) \\ y_L = \frac{1}{3}(\sin \theta + \sin \varphi) \end{cases}$ , або  $\begin{cases} x_L - \frac{1}{3}\cos \varphi = \frac{1}{3}\cos \theta \\ y_L - \frac{1}{3}\sin \varphi = \frac{1}{3}\sin \theta \end{cases}$ . У ка-

нонічному вигляді  $\left(x - \frac{1}{3}\cos \varphi\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\sin \varphi\right)^2 = \frac{1}{9}$ .

**Відповідь:** а)  $\left(x - \frac{x_0}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ; б)  $\left(x - \frac{1}{3}\cos \varphi\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\sin \varphi\right)^2 = \frac{1}{9}$ .

### 10.1.6

Позначимо  $\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^{2m}(\pi x n!) = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{n,m}(x) = b_n(x)$ . Далі розглянемо два ви-

падки:

а) Число  $x$  - раціональне, тобто  $x = \frac{r}{s}$ ,  $s \in N$ ,  $r \in Z$ . Тоді

$$\pi x n! = \pi \frac{r}{s} n! = 2\pi l, l \in Z \text{ при } n > s, \text{ і } b_{n,m}(x) = \begin{cases} \alpha : |\alpha| \leq 1, \text{ при } n \leq s; \\ 1, \text{ при } n > s \end{cases}. \text{ Отже,}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 1.$$

б) Число  $x$  - ірраціональне, тоді  $|\cos(\pi x n!)| < 1$ , бо  $x$  не можна представити звичайним дробом, і рівність  $\pi x n! = 2\pi l$  неможлива. Маємо  $b_{n,m}(x) < 1$  і  $\lim_{m \rightarrow \infty} b_{n,m}(x) = 0$ . Отже,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(x) = 0$ .

**Відповідь:**  $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in Q \\ 0, \text{ при } x \in R \setminus Q \end{cases}$ .

**Зауваження.** Знайдена функція має назву функція Діріхле, і вона є яскравим прикладом функції, яка розривна в кожній точці своєї області визначення.

### 10.1.7

За визначенням  $\angle x = t$ , де  $t^t = x, t > 0, x > 0$ . Розглянемо функцію  $x = t^t, \ln x = t \ln t, t > 0$  і дослідимо її на екстремум:

$$x'_t = t^t (\ln t + 1), t^t (\ln t + 1) = 0, \ln t = -1, t = \frac{1}{e};$$

$$x'_t \left( \frac{1}{e^2} \right) = \left( \frac{1}{e^2} \right)^{\frac{1}{e^2}} (\ln(e^{-2}) + 1) < 0, x'_t(1) = \ln 1 + 1 > 0;$$

$$\text{отже, } t = \frac{1}{e} - \text{точка мінімуму, } x_{\min} \left( \frac{1}{e} \right) = \left( \frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{e}}.$$

Побудуємо графік функції  $x = t^t$ , попередньо знайшовши границю

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^t = \lim_{t \rightarrow +0} e^{t \ln t} = e^{\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}}} = e^{\lim_{t \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}} = e^{-\lim_{t \rightarrow +0} t} = e^{-\lim_{t \rightarrow +0} t} = e^0 = 1 \text{ (рис. 32).}$$

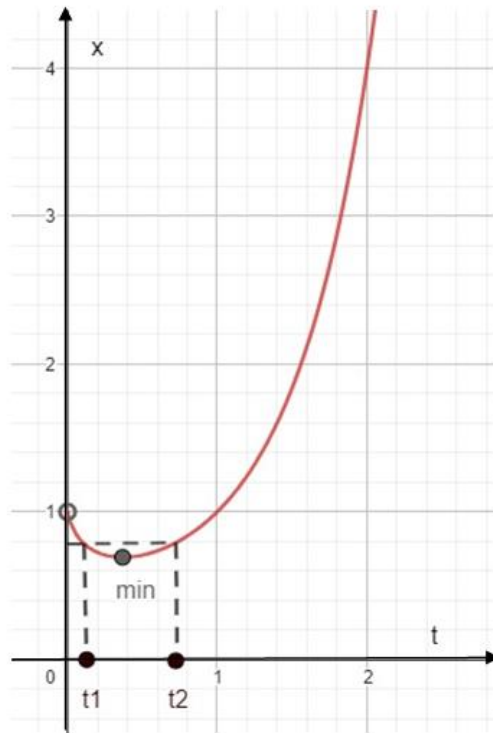


Рис. 32

Аналізуючи графік, маємо:

**Відповідь:**

а) Суперкорінь існує при  $x \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$  ( або  $x \geq 0,69$  ).

б) Він визначений однозначно при  $x \geq 1$ .

в) Покажемо, що при  $x \rightarrow +\infty$  справедлива еквівалентність  $\angle x \sim \frac{\ln x}{\ln \ln x}$ , дій-

$$\begin{aligned} \text{сно} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\angle x}{\frac{\ln x}{\ln \ln x}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^t \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln \ln t^t}{\ln t^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \ln(t \ln t)}{t \ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t + \ln \ln t}{\ln t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\ln \ln t}{\ln t} \right) = 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

### 10.2.1

Припустимо, що

$$A_{2010 \times 2010} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2010 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2009 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2008 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Відповідь:** 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

### 10.2.2

Так як сила опору пропорційна квадрату швидкості, то  $F = -kv^2$ ;

$F = m \frac{dv}{dt}$  - другий закон Ньютона. Прирівняємо праві частини:

$$1) \quad -kv^2 = \frac{mdv}{dt}, \int \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \int dt, \begin{cases} \frac{1}{v} = at + C_1, a = \frac{k}{m} \\ v(0) = v_0 = 200 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{200};$$

$$2) \quad v = \frac{dS}{dt} = \frac{200}{200at + 1}, \int dS = \int \frac{200}{200at + 1} dt,$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{a} \ln(200at + 1) + C_2 \\ S(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0.$$

Тобто  $S(t) = \frac{1}{a} \ln(200at + 1)$ , тоді  $\begin{cases} S(t_1) = \frac{1}{a} \ln(200at_1 + 1) \\ v(t_1) = \frac{200}{200at_1 + 1} \end{cases}$ , причому

$v(t_1) = v_1 = 80 \text{ (м/сек)}, S(t_1) = 0,1 \text{ (м)}$ . Звідки  $\begin{cases} 0,1 = \frac{1}{a} \ln \frac{5}{2} \\ 200at_1 + 1 = \frac{5}{2} \end{cases}$ , тобто  $\begin{cases} a = 10 \ln \frac{5}{2} \\ 200at_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{3}{4000 \ln \frac{5}{2}} \approx 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ (сек)}.$$

**Відповідь:** 0,00082 сек.

### 10.2.3

Розглянемо

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad \text{тоді}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}. \quad \text{З іншого боку}$$

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2n} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Таким чином маємо рівність

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Знайдемо суму ряду.



1 спосіб.  $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) =$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2, \text{ (як границя відповідної інтегральної суми).}$$

2 спосіб. Використовуючи розклад в ряд Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, x \in (-1; 1];$$

маємо при  $x=1$ :  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

**Відповідь:**  $\ln 2$ .

## 10.2.4

Рівняння кола, що обертається (рис. 33), запишемо у вигляді  $(y-d)^2 + x^2 = R^2$

.

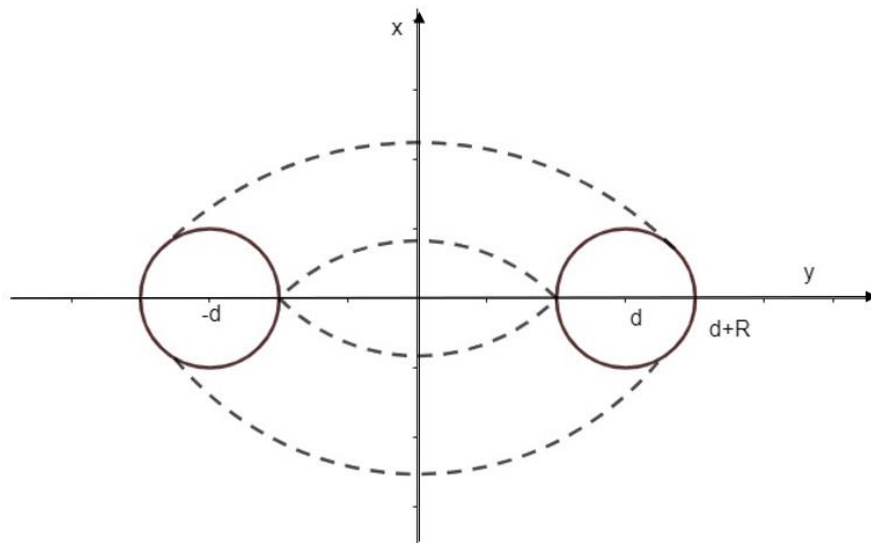


Рис. 33

Тоді

$$y = d \pm \sqrt{R^2 - x^2}, \begin{cases} y_1 = d - \sqrt{R^2 - x^2} \\ y_2 = d + \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-R}^R (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_{-R}^R \left( (d + \sqrt{R^2 - x^2})^2 - (d - \sqrt{R^2 - x^2})^2 \right) dx = \\
&= \pi \int_{-R}^R (d^2 + 2d\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - x^2 - d^2 + 2d\sqrt{R^2 - x^2} - R^2 + x^2) dx = \\
&= 4\pi d \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = R \sin t \\ dx = R \cos t dt \\ x = -R : t = -\frac{\pi}{2} \\ x = R : t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4\pi d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t dt = \\
&= 2\pi d R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi d R^2 \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 d R^2.
\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $2\pi^2 d R^2$  куб.од.

### 10.2.5

а) Із умови  $v$  та  $2v$  відповідні кутові швидкості точок  $A$  і  $B$ , тоді за час  $t$  точка  $A$  переміститься в  $A'$ , а  $B$  відповідно в  $B'$  (рис. 34).

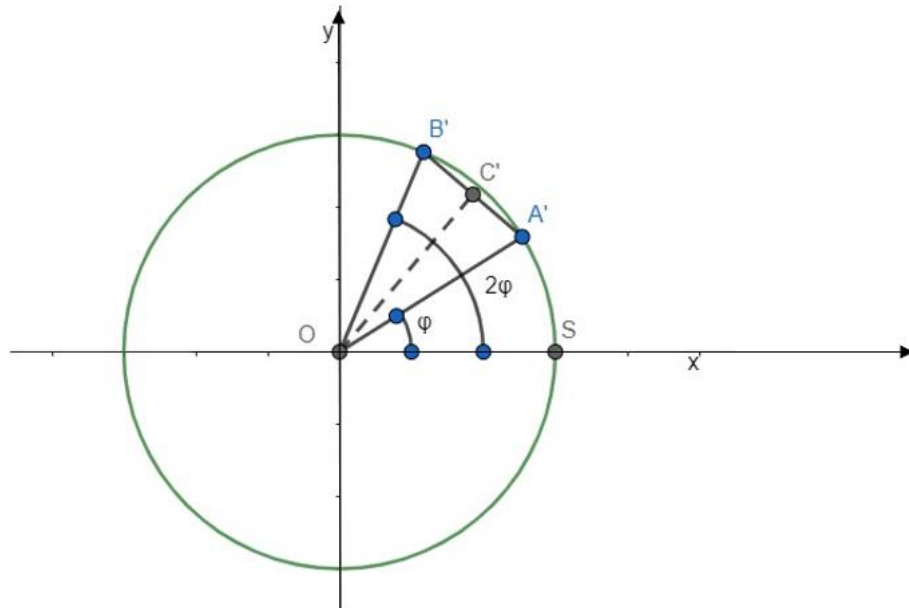


Рис. 34

Точка  $C'$  - середина відрізка  $A'B'$ , має кут  $\frac{3\varphi}{2}$  і  $\begin{cases} x_{C'} = \frac{x_{A'} + x_{B'}}{2} \\ y_{C'} = \frac{y_{A'} + y_{B'}}{2} \end{cases}$ ,

$$\begin{cases} x_{C'} = \frac{r}{2}(\cos \varphi + \cos 2\varphi) \\ y_{C'} = \frac{r}{2}(\sin \varphi + \sin 2\varphi) \end{cases}.$$

Маємо параметричне рівняння кривої  $\mathfrak{Z}$ :

$$\begin{cases} x = \frac{r}{2}(\cos \varphi + \cos 2\varphi) = r \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \\ y = \frac{r}{2}(\sin \varphi + \sin 2\varphi) = r \sin \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{cases}, \varphi \in [0; 2\pi].$$

Для побудови графіка (рис. 35) візьмемо деякі значення  $\varphi$  і знайдемо відповідні значення  $x$  та  $y$  (зручно використати Excel):

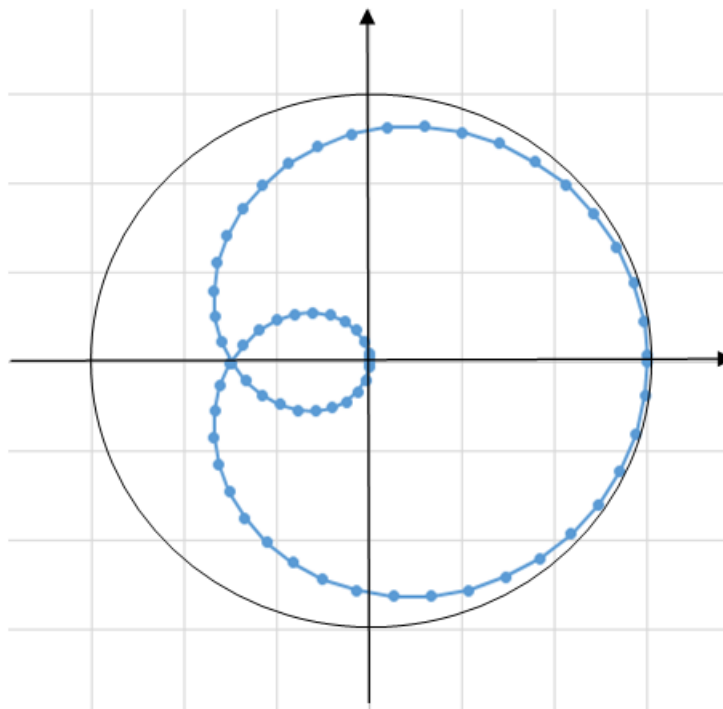


Рис. 35

**б)** Знайдемо  $\varphi$  з рівняння  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} & 1) \sin \varphi = 0, \varphi = 0, \pi, 2\pi; \\ \frac{r}{2}(\sin \varphi + \sin 2\varphi) = 0 & \Rightarrow \sin \varphi(1 + 2\cos \varphi) = 0 \Rightarrow 2) \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \varphi = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Томы

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} |y(\varphi)x'(\varphi)| d\varphi = \frac{r^2}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin \varphi + \sin 2\varphi)(-\sin \varphi - 2\sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{r^2}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\sin^2 \varphi + 3\sin \varphi \sin 2\varphi + 2\sin^2 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{r^2}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left( \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + 6\sin^2 \varphi \cos \varphi + 1 - \cos 4\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{r^2}{4} \left( \frac{3\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{6\sin^3 \varphi}{3} - \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \\ &= \frac{r^2}{4} \left( \pi - \frac{1}{4}\sin \frac{4\pi}{3} + 2\sin^3 \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin \frac{8\pi}{3} \right) = \frac{r^2}{4} \left( \pi + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \\ &= \frac{r^2(4\pi + 3\sqrt{3})}{16}; \\ S_2 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} |y(\varphi)x'(\varphi)| d\varphi = \frac{r^2}{4} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (\sin \varphi + \sin 2\varphi)(-\sin \varphi - 2\sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{r^2}{4} \left( \frac{3\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{6\sin^3 \varphi}{3} - \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right) \Bigg|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \\ &= \frac{r^2}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin \frac{4\pi}{3} + 2\sin^3 \pi - 2\sin^3 \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin 4\pi + \frac{1}{4}\sin \frac{8\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{r^2}{4} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{16}. \end{aligned}$$

Остаточно

$$S = 2S_1 - 2S_2 = \frac{r^2(4\pi + 3\sqrt{3})}{8} - \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{8} = \frac{r^2(2\pi + 6\sqrt{3})}{8} = \frac{r^2(\pi + 3\sqrt{3})}{4}.$$

**Відповідь:** а)  $\begin{cases} x = r \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \\ y = r \sin \frac{3\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{cases}$ ; б)  $\frac{r^2(\pi + 3\sqrt{3})}{4}$ .

### 10.2.6

Розташуємо  $t$  на числовій осі:  $n \leq t \leq n+1, n \in \mathbb{N}$ . Тоді при  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} [t] = n, \\ \{t\} = t - [t]. \end{cases}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} \int_0^x \{t\}^{[t]} dt &= \int_0^1 t^0 dt + \int_1^2 (t-1)^1 dt + \int_2^3 (t-2)^2 dt + \dots + \int_n^{n+1} (t-n)^n dt + \dots = \\ &= t \Big|_0^1 + \frac{(t-1)^2}{2} \Big|_1^2 + \frac{(t-2)^3}{3} \Big|_2^3 + \dots + \frac{(t-n)^{n+1}}{n+1} \Big|_n^{n+1} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots. \end{aligned}$$

Відомо, що послідовність Ейлера  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  збіжна, і її гра-

ниця дорівнює  $\gamma$  (стала Ейлера  $\gamma \approx 0,577$ ). Тобто  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} =$

$$= \gamma + \ln n + \varepsilon_n, \text{ де } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \text{ тому } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} (\gamma + \ln[x] + \varepsilon_x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\gamma + \varepsilon_x}{\ln x} + \frac{\ln[x]}{\ln x} \right) = 0 + 1 = 1.$$

**Відповідь:** 1.

### 10.2.7

Пункти а) і б) розв'язані в задачі 10.1.7.

в) З пункту в) задачі 10.1.7 відомо, що  $\angle n \sim \frac{\ln n}{\ln \ln n}, n \geq 2$ . Запишемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \angle n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \angle n}, \text{ тоді } a_n = \frac{1}{n \angle n} \sim \frac{\ln \ln n}{n \ln n} = b_n, \quad n \geq 2. \text{ Але } b_n > \frac{1}{n \ln n} \text{ і}$$

ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  розбіжний за інтегральною ознакою Коші, тому розбіжні ряди

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n \text{ та } \sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \angle n}.$$

**Відповідь:** в) розбіжний.

### **Відкрита студентська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2013 р. перший курс**

**13.1.1** Які значення може приймати вираз  $ab + cd$  за умови, що  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$  і  $ac + bd = 0$ ?

**13.1.2** Знайти геометричне місце точок на площині, координати  $(x, y)$  яких

задовольняють рівняння 
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos(x+y) \\ \cos x & 1 & \cos y \\ \cos(x+y) & \cos y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**13.1.3** Знайти кількість розв'язків в цілих числах рівняння  $x^3 + y^3 + z^3 = 2012^{2014}$

**13.1.4** Нехай  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$  - гіперболічний тангенс  $x$ . Знайти область визначення

та побудувати графік функції  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{th} nx)^{2^n + n}$ .

**13.1.5** Числову послідовність  $(a_n, n \geq 0)$  задано рівностями

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1}^3 + 3a_{n-1}, n \geq 1 \end{cases}$$

Довести, що для деякого дійсного числа  $\varphi$  число  $a_n$  може бути знайдено за формулою  $a_n = [\varphi^{3^n}]$ , де  $[.]$  позначає цілу частину. Знайти число  $\varphi$ .

**13.1.6** Функцію  $y(x)$ ,  $x \geq 0$  задано неявно рівністю  $x + x^p = y + y^q$ , де  $0 < p < q < 1$

- фіксовані параметри. Знайти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y^q - x^q}{x^{2q-1}}$ .

**13.1.7** Знайти всі неперервні функції  $f(x)$ ,  $x > 0$ , які задовольняють функціональне рівняння  $f(xf(y)) = yf(x)$ .

**13.1.8** Нехай  $\mathfrak{Z}$  - множина всіх інтегровних функцій  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , які для будь-яких  $x, y \in [0, 1]$  задовольняють нерівність  $xf(y) + yf(x) \leq 1$ . Довести, що

$$\max_{f \in \mathfrak{Z}} \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

**Відкрита студентська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики**

**2015 р. старші курси**

**15.2.1** Чи існує неспадна функція  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , що задовольняє такі умови:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(e^n)}{f(n)} = 1$ ? Якщо існує, навести приклад такої функції,

якщо ні – довести це.

**15.2.2** Визначити всі неперервно диференційовні функції на відрізку  $[0, 1]$ , які

задовольняють умови: а)  $f(0) = 0$ ; б)  $2 \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (1 - x^2) (f'(x))^2 dx$ .

**15.2.3** Знайти суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ .

**15.2.4** Обчислити інтеграл  $\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{\max\{x_1, \dots, x_n\} - \min\{x_1, \dots, x_n\}}$ .

**15.2.5** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' + \frac{y}{(1+x^2)^2} = 0.$$

**15.2.6** Тричі диференційовна функція  $f(x)$ ,  $x \in [0, 1]$  задовольняє наступні властивості: а)  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ ; б)  $f'''(x) \leq 1$  для будь-якого  $x \in [0, 1]$ .

Довести, що  $\sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{5}$ .

**15.2.7** Диференційовна функція  $f$  визначена на відрізку  $[0, 1]$  та задовольняє умову  $f(0) = f(1)$ . Довести, що для будь-якого набору невід'ємних чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , таких що  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ , знайдеться набір різних точок  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in (0, 1)$ , для яких  $\alpha_1 f'(\xi_1) + \alpha_2 f'(\xi_2) + \dots + \alpha_n f'(\xi_n) = 0$ .

**15.2.8** Відпочивальниця Тамара приїжджає на курорт з  $n$  сукнями. Кожного ранку вона випадково обирає одну сукню, носить її протягом дня, а ввечері повертає до шафи. В той день, коли Тамара обирає сукню, яку вже носила, вона в засмучених почуттях від'їжджає додому. Нехай  $M_n$  - математичне сподівання кількості днів, які вона провела на курорті. Довести, що

$$M_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$



## 2.3 Олімпіадні білети деяких інших факультетів для порівняння

*Студентська олімпіада НТУУ „КПІ” з математики*

*2011 р. ФІОТ Перший курс*

*11.1.1 Розв'язати матричне рівняння  $X + AX + XA = B$ , якщо  $A^2 = 0$ .*

*11.1.2 Побудувати графік функції  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x} \right)$ ,  $x > 0$ .*

*11.1.3 Знайти найкоротшу відстань від прямої  $l: 2x + y = 5$  до еліпса*

$$L: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

*11.1.4 Знайти найменший член послідовності  $\{x_n, n \geq 1\}$ , де  $x_n = n + \frac{2011}{n^2}$ .*

*11.1.5 Числова послідовність  $\{x_n, n \geq 0\}$  задана рекурентним співвідношенням  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$  і початковою умовою  $x_0 = a \in R$ .*

*а) в залежності від  $a$  знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ; б) в залежності від  $a$  знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$*

*11.1.6 Для будь-якої скінченної числової множини  $A$  позначимо через  $S(A)$  суму її елементів, а через  $P(A)$  - добуток її елементів. Крім того, покладімо*

$$S(\otimes) = 0, \quad P(\otimes) = 1. \quad \text{а) знайти } \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} S(A); \quad \text{б) знайти } \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} P(A).$$

*В обох пунктах підсумовування ведеться по всіх підмножинах множини  $\{1, 2, \dots, n\}$ .*

14.2.1 Нехай  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  - інтегрована функція. Довести, що рівняння

$$\int_0^x f(t)dt = 2x - 1 \text{ має рівно один розв'язок на } [0; 1].$$

14.2.2 Знайти найбільше значення функції  $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - t^2) dt, x \geq 0$ .

14.2.3 Позначимо через  $\theta(n)$  кількість цифр в десятковому записі числа  $n$ .

Визначити область збіжності та знайти суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\theta(n)}$ .

14.2.4 Розв'язати диференціальне рівняння

$$xy' - y \ln y = x^2 y \sin x.$$

14.2.5 Функціональну послідовність  $(f_n(x), n \geq 1)$  задано співвідношенням

$$\begin{cases} f_1(x) = x, \\ f_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{f_n(x)} + 1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Довести, що } \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left( 1 - \int_0^1 f_n(x) dx \right) = \frac{\pi^2 - 4}{2}.$$

14.2.6 Двічі диференційована функція  $(f(x), x \in [0, 1])$  для всіх  $x \in [0, 1]$  задовольняє умови  $f(0) = f(1) = 0$  та нерівність  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) \geq 0$ .

Які значення може набувати  $\max_{x \in [0, 1]} f(x)$ ?

**2016 г. РТФ Первый курс**

***I тур олімпіади КПІ з математики***

***2016 р. РТФ Старші курси***

**16.2.1** Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{2\pi} |\sin x| dx}{\int_0^{\pi} \cos^2 x dx}$ .

**16.2.2** Знайти суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .

**16.2.3** Побудувати графік функції, заданої співвідношенням:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} \sin \frac{\pi x}{2} + x^2}{x^{2n} + 1}, x \in R.$$

Обчислити площу фігури, обмеженої графіком цієї функції і відрізком  $[0; 2]$  осі абсцис.

**16.2.4** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'' + y'(x-1) = x^2 e^{-x}.$$

**16.2.5** Знайти суму ряду  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n}$ , де  $\{x, y\} \subset [0; 1)$  - фіксовані числа.

**16.2.6** Нехай  $d \in N$ ,  $a_1, \dots, a_d, r$  - додатні числа такі, що  $\prod_{i=1}^d a_i = r^d$ . Дове-

сти, що для всіх  $s \geq 0$  виконується нерівність  $\prod_{i=1}^d (a_i + s) \geq (r + s)^d$ .

## 2.4 Статистика кількості учасників та переможців у деякі роки

За результатами факультетського туру олімпіади у 2013/14 н.р., у якому взяли участь 28 студентів 1-го курсу ІСЗЗІ та 6 старшокурсників, переможцями стали Хороводніков В. (11 балів, 1 курс) та Полякова А. (9 балів, 2 курс). Максимальна кількість балів – 30.

У 2015/16 н.р. в ІСЗЗІ взяло участь 69 першокурсників та 6 студентів старших курсів. Серед першокурсників перше місце посів Демченко І., який набрав 18 балів, переможцем серед старшокурсників став Сбоев Р. (8 балів).

У 2016/17 н.р. в олімпіаді взяли участь 13 студентів 1-го курсу і 5 – старших курсів. Найбільше балів (14) отримали одразу три студенти 1-го курсу: Біловицька І., Томляк В. та Жумабек Мірас (Республіка Казахстан). Серед старшокурсників найкращий результат (13 балів) показали два студенти: Чорненко В. та Мостюк Д. Минулого року Мостюк Д. як студент першого курсу, посів друге місце із результатом 11 балів.

У 2020/21 переможцями 1-го туру Відкритої олімпіади з математики (категорія С, 1-й курс) стали такі студенти ІСЗЗІ : перше місце студентка Поліщук В. (гр. С - 04), друге - студент Аксамитний О. (С - 01), третє - студент Кулик І. (С - 05).

### РОЗДІЛ 3. ТЕМАТИКА ЗАСІДАНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ ТА ПРИКЛАДИ ДОПОВІДЕЙ СТУДЕНТІВ

Математичні гуртки в ІСЗЗІ на регулярній основі працюють з 2009 року. Зацікавленим студентам були запропоновані на вибір теми, що поглиблюють стандартний курс вищої математики, і дають можливість успішно розв'язувати олімпіадні задачі підвищеної складності. Студенти готували доповіді на засіданнях математичних гуртків, доповіді обговорювались, доповнювались викладачами, деякі з них були опубліковані в кафедральному журналі «Математика в сучасному технічному університеті». Також доповіді було представлено на методичному семінарі при кафедрі МА та ТЙ та на конференції молодих вчених.

#### 3.1 Перелік деяких запропонованих тем засідань математичних гуртків

Наведемо перелік деяких тем засідань математичних гуртків:

1. Життя та наукова діяльність деяких видатних математиків, огляд їх найважливіших досягнень:

- |                  |                        |
|------------------|------------------------|
| 1) Рене Декарт;  | 6) Еваріст Галуа;      |
| 2) Блез Паскаль; | 7) Нільс Генрік Абель; |
| 3) Георг Кантор; | 8) Карл Фрідріх Гаусс; |
| 4) Стефан Банах; | 9) П'єр Сімон Лаплас;  |
| 5) Огюстен Коші; | 10) Леонард Ейлер.     |

2. Розвиток поняття числа, знамениті числа, їх філософія, застосування.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \dots \subset K \subset \dots$  Потужності числових множин, шкала кардинальних чисел. Знамениті числа  $\pi$ ,  $e$ , співвідношення Ейлера  $e^{2i\pi} = 1$ , золотий переріз  $\phi$ , числа Фібоначчі.

3. Елементи математичної логіки.

4. Елементи теорії графів, основні застосування.

5. Вступ до теорії абстрактних множин.
6. Визначні множини, множина Кантора, килим Серпінського, екзотичні функції Лузіна.
7. Формула Муавра та її застосування.
8. Кватерніони та дії над ними.
9. Тензори та їх застосування.
10. Методи обчислень визначників вищих порядків. Визначник Вандермонда.
11. Основна теорема алгебри (Гаусса) та її застосування.
12. Розв'язання рівнянь вищих степенів ( $n \geq 3$ ). Формули Кардано та Феррарі.
13. Знамениті нерівності та їх застосування.
14. Визначні границі та їх застосування, послідовність Ейлера, послідовність Фібоначчі.
15. Елементарні методи обчислення сум деяких числових послідовностей та рядів.
16. Інтегрування та диференціювання інтегралів по параметру, приклади.
17. Формула Валліса та її застосування.
18. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь. Рівняння Клеро та Лагранжа.
19. Визначники Вронського в теорії ЛОДР. Формула Ліувілля-Остроградського та її застосування.
20. Телескопічні ряди. Приклади обчислення їх сум.
21. Неабсолютно збіжні ряди, їх особливі властивості, приклади.
22. Приклади збіжних тригонометричних рядів, які не є рядами Фур'є.
23. Спектральний аналіз Фур'є, ефект Гіббса та його природа.
24. Знаходження сум деяких рядів за допомогою побудови відповідних сум Рімана.
25. Побудова інтеграла Лебега, зв'язок з інтегралом Рімана.
26.  $\delta$ -функція Дірака та її застосування.
27. Передача сигналу з обмеженим спектром. Теорема відліків (WKS-теорема).

## 28. Геометрія Лобачевського, основні поняття неевклідової геометрії. Викривлення простору.

Нижче наведемо приклади доповідей студентів під час засідань математичного гуртка.

### 3.2 Приклади доповідей студентів на засіданнях

#### 3.2.1 Графіки деяких елементарних та неелементарних функцій

**Приклад 1.** Побудувати графік функції  $y = \sqrt{\log_2(\cos x)}$ .

*Розв'язання.* Приклад цікавий тим, що вся інформація щодо графіка може бути отримана при знаходженні області визначення функції  $D_f$ .

$$D_f: \log_2(\cos x) \geq 0, \text{ звідки } \begin{cases} \cos x \geq 1 \\ |\cos x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \cos x = 1, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином у:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Графік функції наведено на рис. 36:

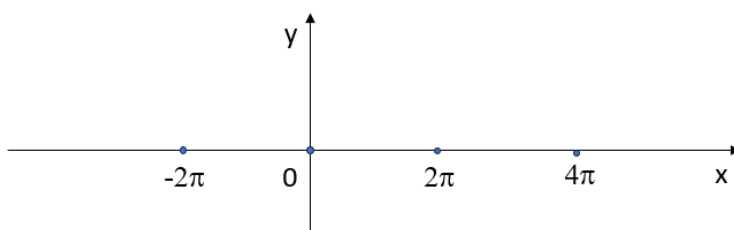


Рис. 36

**Приклад 2.** Побудувати графік функції  $y = |y|\sin x$ .

*Розв'язання.*  $D_f: x \in \mathbb{R}, |y| = \begin{cases} y, y \geq 0 \\ -y, y < 0 \end{cases}$ , тому

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ \sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ \sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \end{array} \right.$$

Графік функції наведено на рис. 37.



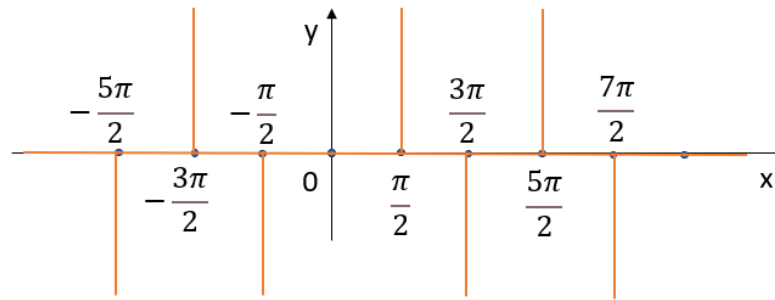


Рис. 37

**Приклад 3.** Побудувати графік функції  $|y| = |x^2 - 4|x| + 3|$ .

*Розв'язання.*  $y_1 = x^2 - 4x + 3$ , перетинає вісь  $OX$  у точках з абсцисами  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , вершина параболі в точці  $(2; -1)$ ,  $y(0) = 3$ .

$y_2 = |x^2 - 4x + 3|$ ,  $|y| = y_2 \Rightarrow y = \begin{cases} y_2, & y_2 \geq 0 \\ -y_2, & y_2 < 0 \end{cases}$ . Графік функції - на рис. 38.

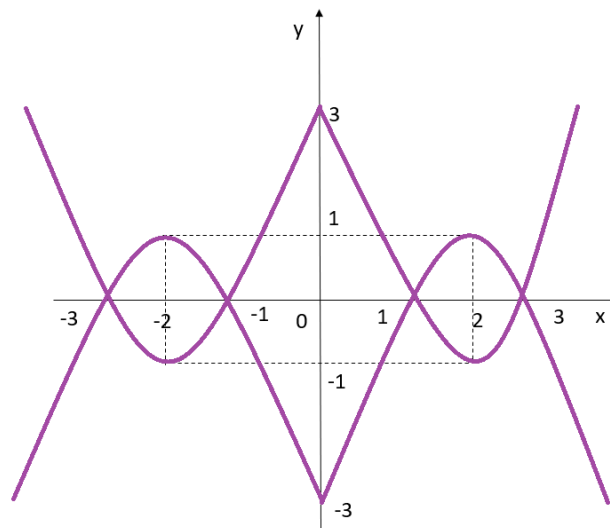


Рис. 38

**Приклад 4.** Побудувати графік функції  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^n + 2^n + \sin^2 x)}{n}$

*Розв'язання.*

- 1) При  $x \leq -2$   $x \notin D_f$ .
- 2) При  $x \in (-2; 2)$   $y = \ln 2$ .
- 3) При  $x > 2$   $y = \ln x$ . Графік – на рис. 39

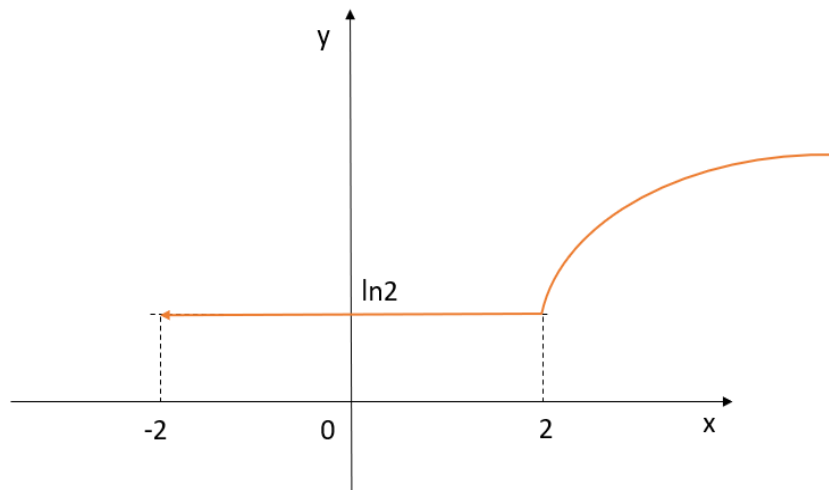


Рис. 39

**Приклад 5.** Побудувати графік функції  $y = \max_{t \in \mathbb{R}} |8x^2 + 2x - 8\cos t + \cos 2t + 1|$ .

*Розв'язання.* Уведемо заміну  $\cos t = z$ , тоді

$$y = f(x) = \max_{t \in \mathbb{R}} |\psi(x, t)| = \max_{z \in [-1, 1]} |\varphi(x, z)|, \text{ де } \varphi(x, z) = 2z^2 - 8xz + 8x^2 + 2x - \text{ пара-}$$

бола,  $x$  – параметр.

$$\begin{cases} z_{\text{верш.}} = -\frac{-8x}{2 \cdot 2} = 2x \\ \varphi(z_{\text{верш.}}) = 8x^2 - 16x^2 + 8x^2 + 2x = 2x \end{cases}$$

Побудуємо параболу для різних значень параметра  $x$  (рис. 40).

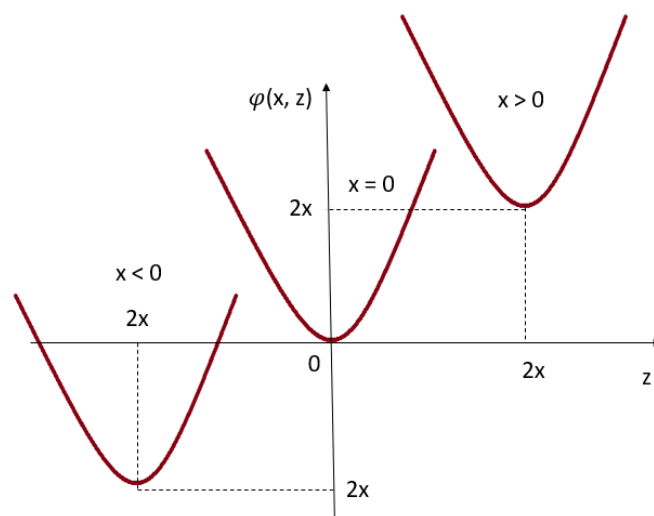


Рис. 40

Дослідимо функцію  $|\varphi(x, z)|$  на максимум при  $-1 \leq z \leq 1$  графічним способом. Маємо а)  $x < 0$  (рис. 41). Ясно, що при  $x < 0$ , незважаючи де буде абсциса вершини  $x_0$ :  $x_0 \in [-1; 0]$ , чи  $x_0 < -1$ ,  $\max_{z \in [-1, 1]} |\varphi(x, z)| = \varphi(x, 1) = 8x^2 - 6x + 2$ .

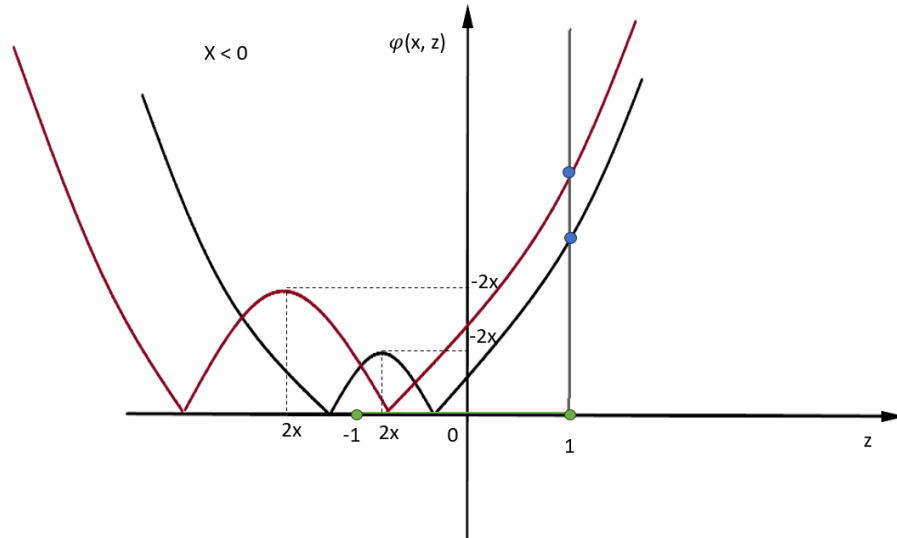


Рис. 41

б) Якщо  $x > 0$  (рис. 42), то  $\max_{z \in [-1, 1]} |\varphi(x, z)| = \varphi(x, -1) = 8x^2 + 10x + 2$

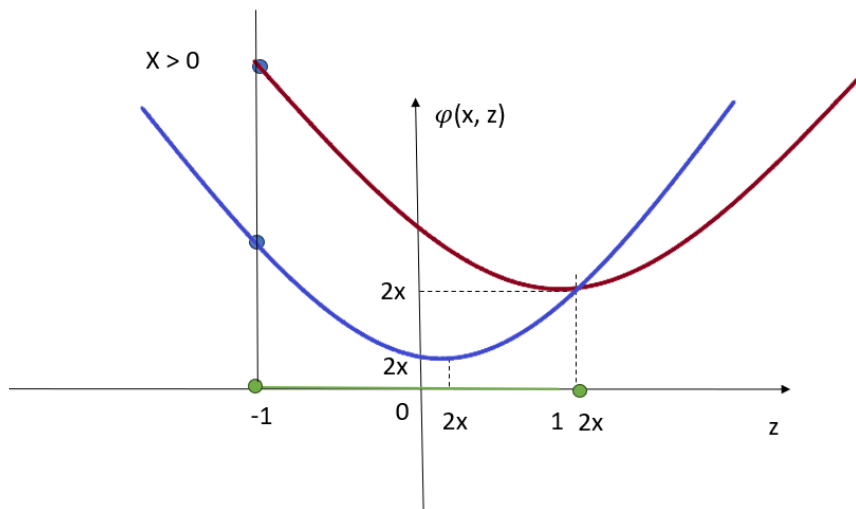


Рис. 42

координати вершини при  $x < 0 \left( \frac{3}{8}; \frac{7}{8} \right)$ , при  $x \geq 0 \left( -\frac{5}{8}; -\frac{9}{8} \right)$ . Графік функції зображено на рис. 43.

При  $x = 0$ ,  $\varphi(0,1)=\varphi(0,-1)=2$ . Тобто маємо відповідь  $f(x) = \max_{t \in R} |\psi(x,t)| =$   

$$= \begin{cases} 8x^2 - 6x + 2, & x < 0 \\ 8x^2 + 10x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

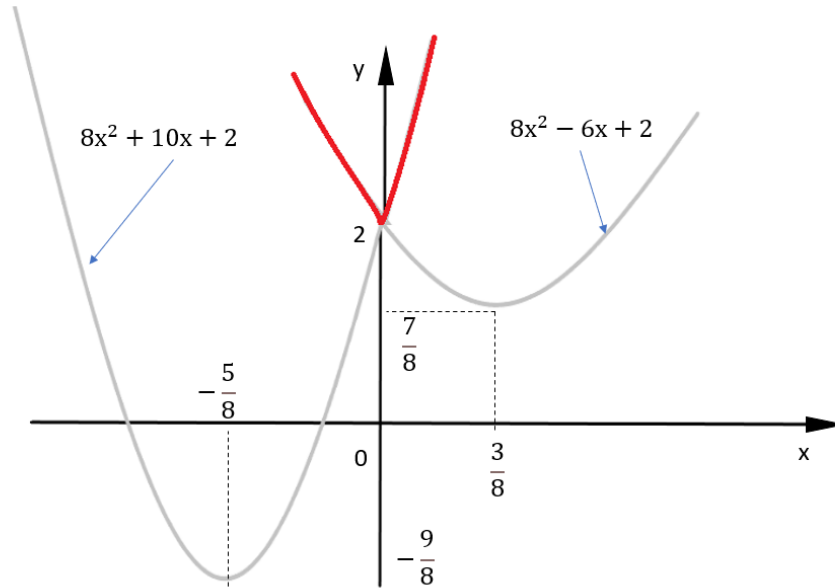


Рис. 43

**Приклад 6.** Зобразити на комплексній площині  $\mathbb{C}$  множину точок, які задовольняють рівняння:  $|z^2 - 1| = 2$ .

*Розв'язання.*  $|(x + iy)^2 - 1| = |x^2 - y^2 - 1 + i2xy| = \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} = 2$ ,  
 тобто  $(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2 = 4$  або  $x^4 + y^4 + 1 - 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 4x^2y^2 = 4$ ,  
 інакше  $(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 3$ . Порівняємо отримане рівняння з рівнянням  
 овала Кассіні:  $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$ ,  $c = 1$ ,  $a = \sqrt{2}$ . Це окремий ви-  
 падок кривої Персея. Якщо  $a = c$ , то це буде лемніската Бернуллі. За визначен-  
 ням овал Кассіні – це крива, координати довільної точки  $M(x; y)$  якої задоволь-  
 няють умову  $r_1 \cdot r_2 = MO_1 \cdot MO_2 = a^2$ , де  $O_1O_2 = 2c$  (рис. 44).

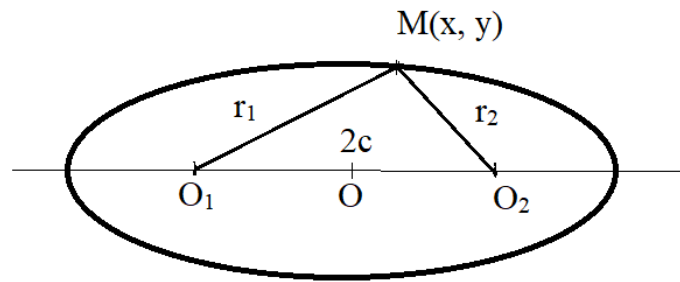


Рис. 44

### 3.2.2 Розвиток поняття числа. Кватерніони та деякі їх застосування

Розглянемо ланцюжок включень числових множин (позначення стандартні):  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \underbrace{\dots \subset K \subset \dots}_{\text{гіперкомплексні числа}}$ . При переході від  $\mathbb{R}$  до  $\mathbb{C}$  можна ви-

значити додавання та множення так, щоб ці операції містили систему дійсних чисел, при цьому втрачається властивість впорядкованості.  $\mathbb{C}$  можна розглядати як множину векторів на площині, додавання яких відповідає додаванню відповідних комплексних чисел. Для тривимірного простору не можна визначити додавання та множення, щоб сукупність точок стала числовою системою, що містить в собі систему дійсних чисел чи комплексних чисел. Але для  $n = 4$  така побудова можлива, правда, вже без властивості комутативності множення. Ці числа  $q \in K$  - кватерніони визначаються так:  $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ , де  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  - координати кватерніона, причому  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Дійсна частина кватерніона  $x_0$  - скаляр, а уявна частина - вектор  $\bar{x} = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ . Історично так й відбулося - вектори з'явились в математиці та фізиці саме як спрощення кватерніонів. Далі використаємо позначення:  $q = (x_0, \bar{x})$ , де  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  - вектор. Визначимо операції над  $q$ -кватерніонами. Нехай  $q = (x_0, \bar{x})$ ,  $q' = (y_0, \bar{y})$ , тоді

$$\begin{cases} q + q' = (x_0 + y_0, \bar{x} + \bar{y}) \\ \alpha q = (\alpha x_0, \alpha \bar{x}) \\ q \cdot q' = (x_0 \cdot y_0 - (\bar{x}, \bar{y}), x_0 \cdot \bar{y} + y_0 \cdot \bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]) \end{cases},$$

при цьому  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} \cdot \bar{y})$  - скалярний добуток,  $[\bar{x}, \bar{y}] = [\bar{x} \times \bar{y}]$  - векторний добуток.

1. При  $x_0 = y_0 = 0$   $q \cdot q' = (-(\bar{x}, \bar{y}), +[\bar{x}, \bar{y}])$ .

2.  $q' \cdot q = (x_0 \cdot y_0 - (\bar{x}, \bar{y}), x_0 \cdot \bar{y} + y_0 \cdot \bar{x} - [\bar{x}, \bar{y}])$ , тобто  $q \cdot q' \neq q' \cdot q$  - множення не комутативне.

3. Можна впевнитись, що добуток трьох кватерніонів асоціативний:  
 $(q \cdot q') \cdot q'' = q \cdot (q' \cdot q'')$ .

Пара кватерніонів  $q = (x_0, \bar{x})$  та  $\bar{q} = (x_0, -\bar{x})$  називаються спряженими, при цьому  $q \cdot \bar{q} = (x_0 \cdot x_0 + (\bar{x}, \bar{x}), -x_0 \cdot \bar{x} + x_0 \cdot \bar{x} - [\bar{x}, \bar{x}]) = (x_0^2 + |\bar{x}|^2, 0) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\bar{q}|^2$ , де  $|\bar{q}| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{\bar{q} \cdot q} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  - модуль (довжина) кватерніона.

Розглянемо деякі властивості операції спряження. Нехай  $q = (x_0, \bar{x})$ ,  $p = (y_0, \bar{y})$ , тоді 1)  $\overline{q + p} = \bar{q} + \bar{p}$ ; 2)  $\overline{q \cdot p} = \bar{p} \cdot \bar{q}$ .

Розглянемо ділення кватерніонів. Нехай  $p$  – деякий кватерніон, знайдемо такий кватерніон  $p^{-1}$ , щоб  $p \cdot p^{-1} = (1, 0) = 1$ . Маємо  $\bar{p} \cdot p \cdot p^{-1} = \bar{p} \cdot (p \cdot p^{-1}) = \bar{p}$  або  $|p|^2 \cdot p^{-1} = \bar{p}$ , тобто  $p^{-1} = \frac{\bar{p}}{|p|^2}$ ,  $p^{-1}$  - обернений до  $p$ . Тобто ділення кватерніонів

можна розглядати як множення на обернений:  $\frac{q}{p} = q \cdot p^{-1}$  або  $p^{-1} \cdot q$  при

$[\bar{x}, \bar{y}] = 0$ . Покажемо, наприклад, що  $|p \cdot q| = |p| \cdot |q| = |q| \cdot |p| = |q \cdot p|$ . Дійсно  
 $|q \cdot p|^2 = q \cdot p \cdot \overline{q \cdot p} = q \cdot p \cdot \bar{p} \cdot \bar{q} = q \cdot \bar{q} \cdot p \cdot \bar{p} = |q|^2 \cdot |p|^2$ .

Тригонометрична форма запису кватерніона. Нехай  $q = x_0 + \bar{x}$ ,

$|q| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , тоді  $\frac{q}{|q|} = \frac{x_0}{|q|} + \frac{\bar{x}}{|q|}$ , маємо  $\frac{\bar{x}}{|q|} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \cdot \frac{|\bar{x}|}{|q|}$ . Позначимо  $\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \bar{e}$

- орт вектора  $\bar{x}$ , тоді  $\frac{q}{|q|} = \frac{x_0}{|q|} + \frac{|\bar{x}|}{|q|} \bar{e} = \left[ \frac{x_0}{|q|} = \cos \alpha; \frac{|\bar{x}|}{|q|} = \sin \alpha \right] = \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \bar{e}$

або  $q = |q|(\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \bar{e})$ .

Ясно, що  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \left( \frac{x_0}{|q|} \right)^2 + \left( \frac{|\bar{x}|}{|q|} \right)^2 = \frac{|q|^2}{|q|^2} = 1$ .

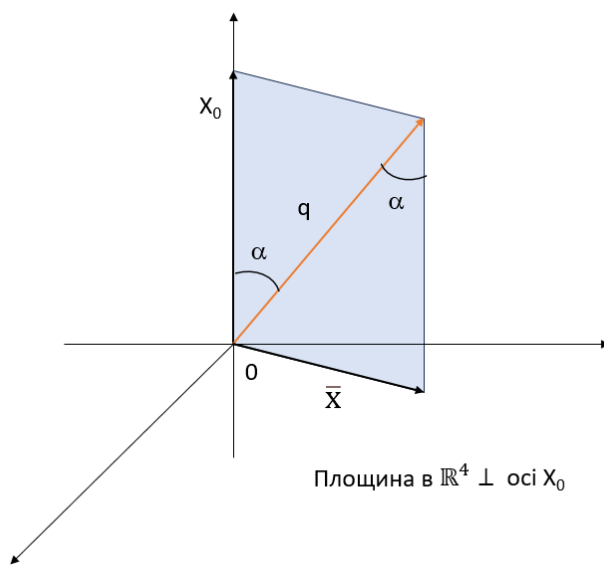


Рис. 45

Тепер розглянемо геометричний зміст кватерніона як об'єкта у чотиривимірному просторі:  $q$  – 4-вимірний об'єкт,  $\bar{x}$  – 3-вимірний вектор. Якщо  $x_0$  – одна із осей, то  $\bar{x}$  лежить у площині, перпендикулярній до осі  $x_0$ , бо  $x_0 = |q| \cos \alpha$   
 $|\bar{x}| = |q| \sin \alpha$  (див. рис. 45)

### Застосування кватерніонів

Орієнтацію в просторі  $\mathbb{R}^3$  ( $Oxyz$ ) літального апарату (літак, космічний корабель) описують за допомогою кутів, які називають рисканням, тангажем та креном (рис. 46). Нехай літак летить в напрямі  $Oy$  і площина  $Oxy$  – горизонтальна, тоді поворот навколо  $Oz$  – це рискання, кут повороту навколо  $Ox$  – тангаж, а навколо  $Oy$  – крен. Усі ці три повороти можна замінити єдиним обертанням навколо деякої осі, що проходить через початок координат.

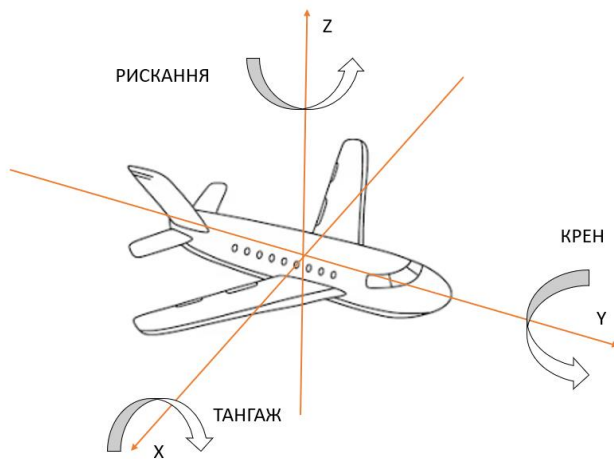


Рис. 46

Саме так, визначаючи вісь і рухаючись навколо неї, космічний корабель набуває правильної просторової орієнтації. Покажемо як застосовують кватерніони для дослідження поворотів в  $\mathbb{R}^3$ . Розглянемо в  $\mathbb{R}^3$  сферу одиничного радіусу.

Кожній точці  $A_1$  на цій одиничній сфері буде відповідати одиничний вектор  $\bar{e}_1$  :  $A_1 \leftrightarrow \bar{e}_1, |\bar{e}_1|=1$ . Поставимо у відповідність цій точці  $A_1$  кватерніон  $q_1 = (0, \bar{e}_1)$  (див. рис. 47). Якщо виконати поворот сфери на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки навколо осі, заданої вектором  $\bar{n}, |\bar{n}|=1$  (див. рис. 48), то цей поворот описується за допомогою кватерніона  $q = (\cos \frac{\alpha}{2}; \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \bar{n})$ . При цьому

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \xrightarrow[\bar{n} \text{ на кут } \alpha]{\text{поворот навколо}} A_2 \leftrightarrow q_2 (A_1 \leftrightarrow q_1) \\ q_2 = q q_1 q^{-1}, q = (\cos \frac{\alpha}{2}; \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \bar{n}) \end{array} \right.$$

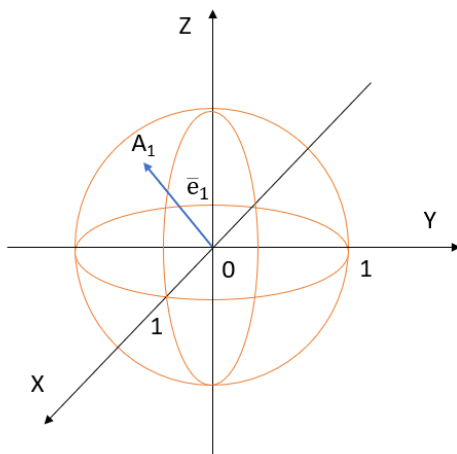


Рис. 47

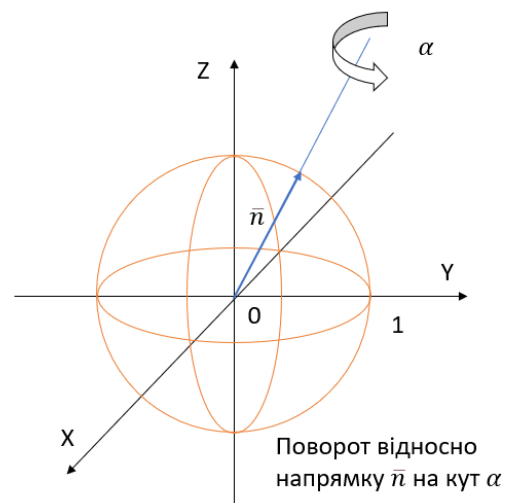


Рис. 48



Розглянемо приклади.

**Приклад 1.** Дано:  $\left\{ A_1 \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right); \bar{n} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right) \right.$ . Знайти  $A_2 \leftrightarrow q_2 = qq_1q^{-1}$   
 $\left. \alpha = 90^\circ \right.$

Розв'язання.  $|\overline{OA_1}| = 1; |\bar{n}| = 1; \alpha = 90^\circ; \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$  (рис. 49).

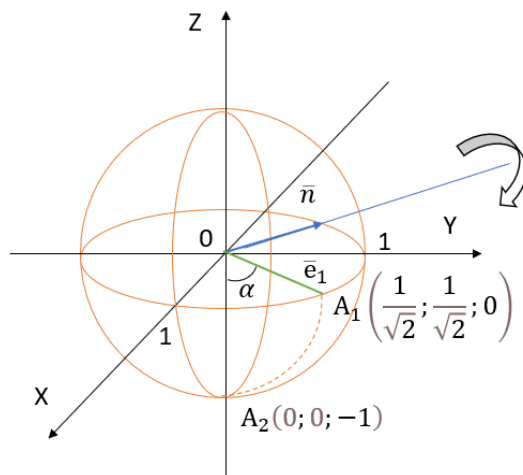


Рис. 49

Знайдемо спочатку

$$q = \left( \cos \frac{\alpha}{2}; \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \bar{n} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right) \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right) \right)$$

$$|q| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0} = 1; \quad q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \left( \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0 \right) \right); \quad q_1 = \left( 0; \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right) \right).$$

Тепер  $q_2 = qq_1q^{-1} = (qq_1)q^{-1}$ . Спочатку обчислимо  $qq_1$ :

$$qq_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \left( -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right) \right) \cdot \left( 0; \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right) \right) = \left( 0 - \left( -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0 \right); \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right) + 0 + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \left(0; \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot q_2 = (qq_1)q^{-1} = \left(0; \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)\right) = \\
& = \left(0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0\right); 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}\right) = \\
& = \left(0; \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right)\right) = (0; (0; 0; -1)) = q_2 \leftrightarrow A_2 = \\
& = (0; 0; -1).
\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $A_2 = (0; 0; -1)$ .

Зауваження 1. Описати обертання твердого тіла, пов'язаного з ПДСК  $OXYZ$ , щоб сумістити її з нерухомою  $Oxyz$ , що має з першою спільний початок, можна за допомогою кутів Ейлера, якщо  $OXY$  та  $Oxy$  перетинаються вздовж вузлової лінії  $ON$ , тоді можна виділити кути:  $\alpha$  - кут прецесії,  $\beta$  - кут нутації,  $\gamma$  - кут власного обертання. Але відповідна система рівнянь для знаходження цих кутів доволі громіздка й непрактична. А за допомогою застосування кватерніонів можна скласти автоматично програмоване управління маневрами літального апарату при високих швидкостях, коли реакція пілота вже неспроможна до таких дій.

**Приклад 2.** Дано:  $q = (1; (1; 2; -1)); p = (-1; (0; 2; -1))$  Знайти: 1)  $q \cdot p$ ; 2)  $p \cdot q$ ; 3)  $q \cdot p^{-1}$

$$\begin{aligned}
& \text{Розв'язання. 1) } q \cdot p = (-1 - (0 + 4 + 1); (0; 2; -1) - (1; 2; -1) + \underbrace{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=(0;1;2)}) = \\
& = (-6; (-1; 1; 2)); \\
& 2) p \cdot q = (-6; (-1; -1; -2)) \neq q \cdot p;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Знайдемо } p^{-1} &= \frac{\bar{p}}{|p|^2} = \frac{(-1; (0; -2; 1))}{(\sqrt{1+4+1})^2} = \frac{1}{6}(-1; (0; -2; 1)). \text{ Тоді } q \cdot p^{-1} = (1; (1; 2; \\ -1)) \cdot \frac{1}{6}(-1; (0; -2; 1)) &= \frac{1}{6}(-1 - (-5); (0; -2; 1) - (1; 2; -1) + (0; -1; -2)) = \\ &= \frac{1}{6}(4; (-1; -5; 0)). \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Дано:  $q = (1; (1; 2; -1)); p = (-1; (-2; -4; 2))$ . Впевнитись, що  $q \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot q$ .

Розв'язання.  $p^{-1} = \frac{1}{24}(-1; (2; 4; -2))$ .  $[\bar{x} \times \bar{y}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , тому

$$\text{a) } q \cdot p^{-1} = (1; (1; 2; -1)) \cdot \frac{1}{24}(-1; (2; 4; -2)) = \frac{1}{24}(-13; (1; 2; -1));$$

$$6) p^{-1} \cdot q = \frac{1}{24}(-1; (2; 4; -2)) \cdot (1; (1; 2; -1)) = \frac{1}{24}(-13; (1; 2; -1)). \text{ Дійсно рівні.}$$

Зауваження 2. Подальше поширення чисел при  $n = 8$  (октави) – числа Келі. Для них порушена асоціативність множення.

### 3.2.3 Обчислення визначників типу Вандермонда

Розглянемо класичну задачу Відновлення многочлена  $P_{n-1}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  по його  $n$  значеннях в різних точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $x_k \neq x_m$  при  $k \neq m$ ,  $P_{n-1}(x_k) = y_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Для розв'язання цієї задачі складемо систему  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , а саме:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Користуючись формулами Крамера, маємо  $a_l = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n y_k A_{kl} = \frac{\Delta_l}{\Delta}$ , де  $\Delta$  — головний визначник системи,  $A_{kl}$  — алгебраїчне доповнення елемента  $k^{\text{го}}$  рядка та  $l+1$  стовпчика визначника  $\Delta$ ,  $\Delta_l$  — визначник, який отримаємо із  $\Delta$  заміною  $l+1$  стовпчика на стовпчик вільних членів  $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . Тут  $k = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{0, n-1}$ ,  $A_{kl} = (-1)^{k+l+1} \Delta_{kl}$ ,  $\Delta_{kl} = M_{kl}$  — відповідний мінор,  $\Delta = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — визначник Вандермонда  $n^{\text{го}}$  порядку.

Якщо з обчисленням визначника Вандермонда немає проблем, бо він обчислюється за відомою формулою:

$$\Delta = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k),$$

то для визначників  $\Delta_{kl}$  справа дещо складніша. Їх обчислення пов'язано з визначниками типу Вандермонда, тобто такими визначниками певного порядку, які утворені із визначника Вандермонда більш високого порядку, шляхом викреслювання одного або більшої кількості стовпчиків та відповідної кількості рядків. Розглянемо, для прикладу, найпростіший із них, а саме:

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \quad \text{— це визначник } n^{\text{го}} \text{ порядку,}$$

утворений із визначника Вандермонда  $(n+1)^{\text{го}}$  порядку, у якого відсутній стовпчик із  $x_k^s$  та відповідний рядок. Нагадаємо класичний метод його обчислення.

Розглянемо

$$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix}, \quad \text{який обчислюємо двома спосо-}$$

бами, а саме:

- 1) як визначник Вандермонда з використанням теореми Вієта;
- 2) за наслідком із теореми Лапласа, розкладаючи його по елементах останнього рядка.

Прирівнюючи коефіцієнти при  $z^s$ , отримуємо шуканий визначник  $D_s = \sigma_{n-s} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)$ , де  $\sigma_{n-s}$  — це сума всіх можливих добутків чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , взятих по  $n - s$ .

Пропонуємо ще один цікавий метод обчислення визначників типу Вандермонда. У випадку визначника  $D_s$ , він ґрунтується на застосуванні формули:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-s)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{при } s \neq k \\ 2\pi, & \text{при } s = k \end{cases}, \quad (i^2 = -1).$$

Детальніше, маємо, використовуючи лінійність інтеграла та властивості визначників:

$$\begin{aligned} (-1)^{n+s} D_s &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^s & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^s & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^s & \dots & x_n^n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-isx} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^s & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^s & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^s & \dots & x_n^n \\ e^0 & e^{ix} & (e^{ix})^2 & \dots & (e^{ix})^s & \dots & (e^{ix})^n \end{vmatrix} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-isx} \prod_{k=1}^n (e^{ix} - x_k) \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \int_0^{2\pi} e^{-isx} (e^{ix} - x_1)(e^{ix} - x_2) \dots (e^{ix} - x_n) dx = \left| \begin{array}{c} \text{за теоремою} \\ \text{Вієта} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \cdot \int_0^{2\pi} e^{-isx} (e^{inx} - \sigma_{n-(n-1)} e^{i(n-1)x} + \sigma_{n-(n-2)} e^{i(n-2)x} + \\ &+ \dots + (-1)^{n+s} \sigma_{n-s} e^{isx} + \dots + (-1)^n \sigma_n e^0) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{n+s}}{2\pi} \sigma_{n-s} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \int_0^{2\pi} e^{-isx} e^{isx} dx = (-1)^{n+s} \sigma_{n-s} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k),$$

звідки і випливає, що  $D_s = \sigma_{n-s} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k)$ .

Повертаючись тепер до системи  $n$  лінійних рівнянь, обчислимо  $\Delta_{kl} = M_{kl}$ ,

$k = \overline{1, n}$ ,  $l = \overline{0, n-1}$  одним із розглянутих методів, маємо:

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{l-1} & y_1 & x_1^{l+1} & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{l-1} & y_2 & x_2^{l+1} & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{l-1} & y_{k-1} & x_{k-1}^{l+1} & \dots & x_{k-1}^{n-1} \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{l-1} & y_k & x_k^{l+1} & \dots & x_k^{n-1} \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^{l-1} & y_{k+1} & x_{k+1}^{l+1} & \dots & x_{k+1}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{l-1} & y_n & x_n^{l+1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{k-1}) (x_n - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot (x_{n-1} - x_1) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} - x_{k-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_2 - x_1) \sigma_{(n-1)-l}.$$

Тоді  $A_{kl} = (-1)^{k+l+1} \Delta_{kl}$  та після відповідних скорочень обчислюємо  $a_l$  за форму-

$$\text{лою: } a_l = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n y_k A_{kl} = (-1)^{n+l+1} \sum_{k=1}^n \frac{y_k \sigma_{(n-1)-l}}{(x_k - x_1) \cdot \dots \cdot (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x_k - x_n)},$$

де  $\sigma_{(n-1)-l}$  — сума всіх можливих добутоків по  $(n-1)-l$  із  $n-1$  чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n; l = \overline{0, n-1}.$$

Розглянемо тепер і інші визначники типу Вандермонда, наприклад

$(0 \leq s < \tau \leq n+1)$ :

$$D_{s,\tau} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^{\tau-1} & x_1^{\tau+1} & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^{\tau-1} & x_2^{\tau+1} & \dots & x_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^{\tau-1} & x_n^{\tau+1} & \dots & x_n^{n+1} \end{vmatrix}_n,$$

це визначник, утворений із  $V_{n+2}(x_1, x_2, \dots, x_n, u, v)$ , шляхом викреслення двох стов-

пчиків  $x_k^s$  та  $x_k^\tau$  та двох останніх рядків  $u^\mu$  та  $v^\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq n+1$ . Як і раніше, з

одного боку, за теоремою Лапласа розкладу по двом останнім рядкам, маємо:

$$V_{n+2} = \dots + (-1)^{(n+2)+(n+1)+(s+1)+(\tau+1)} D_{s,\tau} \begin{vmatrix} u^s & u^\tau \\ v^s & v^\tau \end{vmatrix} + \dots =$$

$$= \dots (-1)^{s+\tau+1} D_{s,\tau} (u^s v^\tau - v^s u^\tau) + \dots$$

З іншого боку,  $V_{n+2} = \prod_{1 \leq k < j \leq n+2} (x_j - x_k)$ ,  $x_{n+1} = u$ ,  $x_{n+2} = v$ , тобто:

$$V_{n+2} = V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (u - x_1)(u - x_2) \cdot \dots \cdot (u - x_n) \cdot (v - x_1)(v - x_2) \cdot \dots \cdot (v - x_n)(v - u) =$$

$$= V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) P_n(u) \cdot P_n(v) \cdot (v - u) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \cdot P_n(u) P_n(v) \cdot (v - u).$$

Розглянемо добуток

$$P_n(u) P_n(v) \cdot (v - u) = (v^{n+1} - \sigma_1 v^n + \sigma_2 v^{n-1} + \dots + (-1)^{n-\tau+1} \sigma_{n-\tau+1} v^\tau + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-s+1} \sigma_{n-s+1} v^s + \dots + (-1)^n \sigma_n v)(u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \dots + (-1)^{n-\tau} \sigma_{n-\tau} u^\tau + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-s} \sigma_{n-s} u^s + \dots + (-1)^n \sigma_n) - (u^{n+1} - \sigma_1 u^n + \dots + (-1)^{n-\tau+1} \sigma_{n-\tau+1} u^\tau + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-s+1} \sigma_{n-s+1} u^s + \dots + (-1)^n \sigma_n)(v^n - \sigma_1 v^{n-1} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-\tau} \sigma_{n-\tau} v^\tau + \dots + (-1)^{n-s} \sigma_{n-s} v^s + \dots + (-1)^n \sigma_n) =$$

$$= \left| \text{коефіцієнт при } u^s v^\tau - v^s u^\tau \right| =$$

$$= \dots + (-1)^{s+\tau+1} (\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1}) (u^s v^\tau - v^s u^\tau) + \dots$$

Далі маємо:  $(-1)^{s+\tau+1} D_{s,\tau} = (-1)^{s+\tau+1} V_n(\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1})$ ,

або  $D_{s,\tau} = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) (\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1})$ .

Наприклад, при  $s = n-1$ ,  $\tau = n$ , маємо  $D_{s,\tau} = D_{n-1,n} = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) (\sigma_1^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_0)$ ,

де  $\sigma_0 = 1$ ,  $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ,  $\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ .

Тепер обчислення  $D_{s,\tau}$  іншим методом, виглядає таким чином:

$$(-1)^{n+s+2} (-1)^{n+\tau+3} D_{s,\tau} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^s & \dots & x_1^\tau & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^s & \dots & x_2^\tau & \dots & x_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^s & \dots & x_n^\tau & \dots & x_n^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-isx} \int_0^{2\pi} e^{-ity} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^s & \dots & x_1^\tau & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^s & \dots & x_2^\tau & \dots & x_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^s & \dots & x_n^\tau & \dots & x_n^{n+1} \\ e^0 & e^{ix} & (e^{ix})^2 & \dots & (e^{ix})^s & \dots & (e^{ix})^\tau & \dots & (e^{ix})^{n+1} \\ e^0 & e^{iy} & (e^{iy})^2 & \dots & (e^{iy})^s & \dots & (e^{iy})^\tau & \dots & (e^{iy})^{n+1} \end{vmatrix} dx dy = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 \leq y \leq 2\pi \end{cases}} e^{-i(sx+ty)} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \prod_{k=1}^n (e^{ix} - x_k) \prod_{k=1}^n (e^{iy} - x_k) (e^{iy} - e^{ix}) dx dy = \\
&= \left| \begin{matrix} e^{ix} = u \\ e^{iy} = v \end{matrix} \right| = \frac{1}{4\pi^2} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \iint_{\Omega} e^{-i(sx+ty)} (P_{n+1}(v)P_n(u) - P_{n+1}(u)P_n(v)) dx dy = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \iint_{\Omega} (0 + e^{-i(sx+ty)} u^s v^\tau ((-1)^{n-s} \sigma_{n-s} \cdot (-1)^{n-\tau+1} \sigma_{n-\tau+1} - \\
&- (-1)^{n-s+1} \sigma_{n-s+1} (-1)^{n-\tau} \sigma_{n-\tau}) dx dy = \frac{(-1)^{s+\tau+1}}{4\pi^2} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) \iint_{\Omega} (\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \\
&- \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1}) e^0 dx dy = \frac{(-1)^{s+\tau+1}}{4\pi^2} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) (\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1}) \cdot 4\pi^2 = \\
&= (-1)^{s+\tau+1} \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) (\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1}),
\end{aligned}$$

Звідки знову  $D_{s,\tau} = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (x_j - x_k) (\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1})$ .

На закінчення, пропонуємо розглянути також інші варіанти обчислення визначників типу Вандермонда, наприклад  $D_{s,\tau,r}$ , де  $0 \leq s < \tau < r \leq n+2$ , використовуючи відповідні кратні інтеграли.

### 3.2.4 Диференціювання інтеграла по параметру. Формула Лейбніца, приклади застосування

Нехай  $I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ , де  $f(x, \alpha)$ - означена та неперервна в області  $D = \{a \leq x \leq b, c \leq \alpha \leq d\}$  функція. Тоді  $I(\alpha)$  – також неперервна на  $c \leq$



$\alpha \leq d$  функція. Якщо, крім того,  $f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(f(x, \alpha))$  – неперервна в  $D$ , то справедлива формула Лейбніца:

$$I'(\alpha) = \left( \int_a^b f(x, \alpha) dx \right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx. \quad (31)$$

Якщо ж, в свою чергу, границі інтегрування теж функції параметра  $\alpha$ , тобто  $a = a(\alpha)$ ,  $b = b(\alpha)$ , то для  $a < a(\alpha)$ ,  $b(\alpha) < b$ ,  $c < \alpha < d$ , маємо більш загальну формулу:  $I(\alpha) = \phi(\alpha, a(\alpha), b(\alpha))$ ,

$$I'_\alpha(\alpha) = \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial a} \frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial b} \frac{db}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x, \alpha) dx + f(b(\alpha), \alpha) \frac{db}{d\alpha} - f(a(\alpha), \alpha) \frac{da}{d\alpha}. \quad (32)$$

**Приклад 1.** Обчислити  $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx, a > 0$ .

Маємо за формулою Лейбніца (31)

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \right)'_a dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{Заміна} \\ \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1 + t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + a^2 t^2)} = \frac{1}{1 - a^2} \int_0^\infty \frac{(1 + a^2 t^2) - a^2(1 + t^2)}{(1 + t^2)(1 + a^2 t^2)} dt = \\ &= \frac{1}{1 - a^2} \left( \arctg|_0^\infty - a^2 \frac{1}{a} \arctg(at)|_0^\infty \right) = \frac{1}{1 - a^2} \left( \frac{\pi}{2} - a \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + a}, \end{aligned}$$

тоді  $I(a) = \int \frac{\pi}{2} \frac{da}{1+a} = \frac{\pi}{2} \ln|1+a| + C$ , але  $I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0$ ,

тому  $0 = \ln 1 + C \rightarrow C = 0$ .

**Відповідь:**  $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ .

**Приклад 2.**  $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} dx$ . Знайти  $I'(\alpha)$ .

За формулою Лейбніца (32), маємо  $\begin{cases} a(\alpha) = 0 \\ b(\alpha) = \alpha \end{cases}$

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^\alpha \left( \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x} \right)'_\alpha dx + \frac{\ln(1 + \alpha \cdot \alpha)}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\alpha} + 0 \\ &= \int_0^\alpha \frac{1}{x} \cdot \frac{1 \cdot x}{1 + \alpha x} dx + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2) = \frac{1}{\alpha} \ln|1 + \alpha x| \Big|_0^\alpha + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2) = \frac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2) = I'(\alpha) \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\frac{2}{\alpha} \ln(1 + \alpha^2) = I'(\alpha)$ .

### 3.2.5 Диференціювання невластних інтегралів по параметру, приклади застосування

Якщо

- 1) Функції  $f(x, \alpha)$  та  $f'_\alpha(x, \alpha)$  –  
неперервні в області  $D \left\{ \begin{matrix} a \leq x < +\infty \\ c < \alpha < d \end{matrix} \right\}$
- 2)  $\int_a^{+\infty} f(x, \alpha) dx$  – збіжний;
- 3)  $\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx$  – збігається рівномірно в інтервалі  
 $c < \alpha < d$ , то (Лейбніц):

$$\left( \int_a^\infty f(x, \alpha) dx \right)'_\alpha = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha) dx. \quad (33)$$

**Приклад 1.** Обчислити  $I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x} dx$ ,  $\alpha > -1$ .

За формулою (33), маємо:  $\frac{d I(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\infty \left( \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x} \right)'_\alpha dx = \int_0^\infty \frac{1}{x e^x} (0 + x e^{-\alpha x}) dx =$   
 $\int_0^\infty e^{-(\alpha+1)x} dx = -\frac{1}{\alpha+1} e^{-(\alpha+1)x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+1}.$

Тоді  $I(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{1+\alpha} = \ln|1 + \alpha| + C$ , але  $I(0) = 0$ ,  $1 + \alpha > 0$ ,

Тому  $I(0) = 0 = \ln(1 + 0) + C \rightarrow C = 0$ .

**Відповідь:**  $I(\alpha) = \ln(1 + \alpha)$ .

**Приклад 2.** Обчислити  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$ ,  $(\alpha, \beta > 0)$ .

$I = I(\alpha, \beta, m)$ , нехай  $\alpha$ - змінний параметр, тоді:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \right)'_{\alpha} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} (-xe^{-\alpha x}) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \, dx \\ &= \left| \int e^{\alpha x} \sin bx \, dx = \frac{e^{\alpha x}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C \right| = \\ &= - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + m^2} (-\alpha \sin mx - m \cos mx) \Big|_0^{\infty} = - \frac{m}{\alpha^2 + m^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Далі: } I = \int \left( -\frac{m}{\alpha^2 + m^2} \right) d\alpha = -m \cdot \frac{1}{m} \arctg \frac{\alpha}{m} + C$$

Але при  $\alpha = \beta$ , маємо  $I = (\alpha = \beta) = 0$ , тобто

$$0 = -\arctg \frac{\alpha}{m} + C \Rightarrow C = \arctg \frac{\beta}{m}, \quad \text{тому}$$

$$\text{Відповідь: } I = I(\alpha, \beta, m) = \arctg \frac{\beta}{m} - \arctg \frac{\alpha}{m}.$$

### 3.2.6 Застосування перетворення Лапласа до знаходження сум деяких рядів

#### I. Знаходження сум числових рядів.

Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $S = \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ , тоді

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{\infty} f(t) e^{-nt} dt = \int_0^{\infty} f(t) \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}}_{\text{н.с. геом. прогресія}} dt = \\ &= (\pm 1)^m \int_0^{\infty} \frac{f(t) e^{-mt}}{1 \mp e^{-t}} dt = S - \text{сума нашого ряду} \end{aligned} \quad (34)$$

**Приклад.** Знайти  $S = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$ ,  $m = 1$ .

Знайдемо  $f(t) \doteq F(n)$ , маємо:  $F(n) = \frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1} + \frac{C}{2n+2} + \frac{D}{2n+3}$

Знайдемо  $A, B, C, D$  методом зручних значень.

$$\left. \begin{array}{l} 1. n = 0; A \cdot 6 = 1 \\ 2. n = -\frac{1}{2}; B \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot 2 = 1 \\ 3. n = -1; C(-1)(-1) \cdot 1 = 1 \\ 4. n = -\frac{3}{2}; D \left(-\frac{3}{2}\right)(-2)(-1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = -1, C = 1, D = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Тоді } F(n) = \frac{\frac{1}{6}}{n} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{\frac{1}{3}}{2n+3};$$

За таблицею зображень:

$$F(n) \doteq f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-\frac{3}{2}t}, \quad \text{далі:}$$

$$\begin{aligned} S &= (-1)^{1-1} \cdot \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{\left(-1 - 3e^{-\frac{t}{2}} + 3e^{-t} - e^{-\frac{3}{2}t}\right)e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt = \left. \begin{array}{l} \text{Заміна:} \\ e^{-\frac{t}{2}} = x \\ dt = -\frac{2dx}{x} \end{array} \right| \\ &= \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(1 - 3x + 3x^2 - 3x^3)x^2}{1 + x^2} \left(\frac{2dx}{x}\right) = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{-x^4 + 3x^3 - 3x^2x}{1 + x^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(-x^2 + 3x - 2 - \frac{2x-2}{x^2+1}\right) dx = \left. \begin{array}{l} \text{виділимо цілу} \\ \text{частину дробу} \\ \text{діленням кутом} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x - \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} x\right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 - \ln 2 + \frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{18} (3\pi - 6 \ln 2 - 5) = S \text{ і це відповідь.} \end{aligned}$$

## II. Знаходження сум тригонометричних функціональних рядів.

Нехай: 1)  $f(t) \doteq F(p)$ ; 2)  $\phi(t, x)$  – твірна нескінченної функціональної послідовності  $\{\varphi_n(x)\}$ , тобто  $\phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot t^n$ ;

3) Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(x) = S(x)$  – збігається на  $x \in (a; b)$ .

Тоді  $S(x) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot \phi(e^{-t}, x) dt$ , причому:

**а)** Якщо  $\varphi_n(x) = (\pm 1)^{n+1} \sin(nk + m)x$ , то  $\phi_{(k,m)}(x, t)|_{\sin} =$

$$\frac{t \sin(k+m)x \mp t^2 \sin mx}{1 \mp 2t \cos kx + t^2}; (m, k \in Z), n = 1, 2, \dots, \sin 0 = 0.$$

**б)** Якщо  $\varphi_n(x) = (\pm 1)^n \cos(nk + m)x$ , то  $\phi_{(k,m)}(x, t)|_{\cos} =$

$$\frac{t \cos(k+m)x \mp t^2 \cos mx}{1 \mp 2t \cos kx + t^2}; (m, k \in Z), n = 0, 3, \dots, \cos 0 = 1.$$

Дійсно:  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{\infty} e^{-nt} f(t) dt = \int_0^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \varphi_n(x)) f(t) dt =$$

$$\int_0^{\infty} f(t) \phi(e^{-t}, x) dt.$$

**Приклад.** Знайти  $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1}$ .

$$\text{У нас: } F(n) = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{(n+1)(n-1)}{(n-1)(n+1)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = sht = f(t). \text{ Тоді } \phi(t, x) = \phi_{(1,0)}(t, x) = t \sin x, \text{ бо}$$

$k = 1, m = 0, n = 2, 3, \dots$  (тому треба відняти  $t \sin x$  при  $n = 1$ ).

$$\text{Тобто } \phi(t, x) = \frac{t \sin x}{1 - 2t \cos x + t^2} - t \sin x = \frac{2t^2 \sin x \cos x - t^3 \sin x}{1 - 2t \cos x + t^2}.$$

Далі маємо:

$$S(x) = \int_0^{\infty} sht \frac{2e^{-2t} \sin x \cos x - e^{-3t} \sin x}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} dt = \left| \text{заміна } e^{-t} = y, dy = -\frac{dy}{y} \right|$$

=

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1 - y^2)(\sin 2x - y \sin x)}{y^2 - 2y \cos x + 1} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( y \sin x - \underbrace{\frac{2 \sin x (y - \cos x)}{y^2 - 2y \cos x + 1}}_Z \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sin x \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \sin x \int_0^1 \frac{2y - 2 \cos x}{y^2 - 2y \cos x + 1} dy = \frac{1}{2} \sin x \left( \frac{1}{2} - 0 \right) - \\
&- \frac{1}{2} \sin x \cdot \ln |y^2 - 2y \cos x + 1| \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} \sin x (\ln |2(1 - \cos x)| - \ln 1) = \\
&\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \ln \left( 4 \sin^2 \frac{x}{2} \right)
\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $S(x) = \frac{1}{4} \sin x - \sin x \ln |2 \sin \frac{x}{2}|$

### 3.2.7 Сингулярний $\delta$ -розподіл Дірака та його застосування

Відомий англійський фізик-теоретик Поль Дірак в 1929 році запропонував застосовувати в теоретичних дослідженнях незвичайну, але дуже підходящу функцію для не менш дивної на той час квантової фізики. Формально ця функція виглядала так:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} ; \quad \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t_0 \neq 0 \\ \infty, & t_0 = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \end{cases}$$

Як бачимо,  $\delta(t)$  визначена зовсім не класичним способом і не схожа на звичайні функції, але її обережне застосування давало переваги і зрозумілі пояснення природи тих явищ та процесів, зміни характеристик яких відбувалися практично миттєво. Застосування ж класичної математики в цьому випадку приводило до певних непорозумінь. Пізніше, зусиллями багатьох математиків, в першу чергу Л.Шварца та С.Соболева, було знайдено математично коректне визначення цієї функції – представника цілого класу узагальнених функцій-розподілів та їх похідних як лінійних неперервних сингулярних функціоналів над деяким простором основних функцій. Це дало можливість значно розширити область застосування класичного математичного аналізу. Межі застосування та властивості  $\delta$ -функцій були строго доведені і вона посіла чільне, хоча і особливе місце в арсеналі методів дослідження природи. Зручність  $\delta$ -функції полягає в тому, що вона сама, будучи «дуже розривною», допомагає навести лад в дослідженнях саме розривних функцій.

**Означення 1.**  $(\varphi \in C^\infty, \exists \text{ компакт } K \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1: \varphi(\mathbb{R}^m \setminus K) \equiv 0) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\varphi \in \mathcal{D})$ , де  $\mathcal{D}$  —називається **простором основних функцій**.

**Означення 2.** Розподілом або узагальненою функцією називається будь-який лінійний неперервний функціонал  $L$  на  $\mathcal{D}$ . Якщо  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  —інтегрована на  $K \subset \mathbb{R}^m, m \geq 1$ , то  $L = L_f: (L_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in \mathcal{D}$  визначає  $L_f$  —**регулярний розподіл** і його значення  $(L_f, \varphi) = (f, \varphi)$ .

**Означення 3.** Якщо  $(L, \varphi) = \varphi(0), \forall \varphi \in \mathcal{D}$ , то  $(L, \varphi) = (\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$  визначає **сингулярний  $\delta$  —розподіл Дірака**.

При  $m = 1$  маємо  $(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \int_{K(0 \in K)} \delta(x)\varphi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$  — **визначальна властивість** одновимірної  $\delta$  —функції Дірака. І дійсно, звідси випливають всі три умови формального визначення  $\delta$  —функції, а саме:

- 1)  $\delta(x) = 0$ , при  $x \neq 0$  (бо  $x = 0$  —носій); 2)  $\delta(0) = \infty$ ;
- 3) При  $\varphi(x) \equiv 1$  маємо  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 1dx = 1$ . Також  $\delta(x)\varphi(x) = \varphi(0)$  — **фільтруюча властивість**  $\delta$  —функції. Аналогічно для  $\delta(x - x_0)$ , маємо  $\delta(x - x_0) \cdot \varphi(x) = \varphi(x_0)$ .

Розглянемо приклади застосування  $\delta$  —функції.

**Приклад 1.** Нехай  $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  — одинична функція Хевісайда. Тоді  $(L, \varphi) = (\eta, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx, \eta'(\varphi) = (L', \varphi) = -(L, \varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$ , тобто  $\eta'(x) = \delta(x)$ . Ясно, що  $\eta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x)dx$ . Зрозуміло також, що  $\eta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ .

**Приклад 2.** Нехай  $\xi$  —неперервно-дискретна випадкова величина із щільністю розподілу  $p_\xi(x) = C_1 \gamma(x)(\eta(x - x_1) - \eta(x - x_2)) + C_2 \sum_{i=3}^n p_i \delta(x - x_i)$ , де  $x_1 < x_2 < \dots < x_n, C_1$  та  $C_2$  підібрані таким чином, щоб виконувалась умова нормування:  $\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$ . Тоді можна знайти всі характеристики  $\xi$ :  $F_\xi(x), m_\xi, D_\xi, \dots$  Наприклад, нехай

$$p_{\xi}(x) = C_1 \sqrt{x}(\eta(x) - \eta(x-1)) + C_2 \left( \frac{1}{3} \delta(x-2) + \frac{1}{4} \delta(x-3) \right).$$

Виберемо  $C_2 = 1$ , тоді  $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) dx = C_1 \int_0^1 \sqrt{x} dx + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} C_1 + \frac{7}{12} = 1$ ,

$$\text{звідси } C_1 = \frac{5}{8}. \text{ Знайдемо } m_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx = \frac{5}{8} \int_0^1 \sqrt{x^3} dx + \\ + \frac{1}{3} \int_{2-\varepsilon}^{2+\varepsilon} x \delta(x-2) dx + \frac{1}{4} \int_{3-\varepsilon}^{3+\varepsilon} x \delta(x-3) dx = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{5}{3}.$$

**Приклад 3.** Розглянемо похідну від  $\delta(x)$ , маємо:  $(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$ , ...,  $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (\delta, \varphi^{(n)}) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$ , інакше, із фільтруючої властивості  $\delta(x)$ :  $x\delta(x) = 0$ , маємо:  $\delta(x) + x\delta'(x) = 0, \Rightarrow \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}$ , диференціюючи ще раз, отримаємо:

$$2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0 \Rightarrow \delta''(x) = -\frac{2\delta'(x)}{x} = \frac{2\delta(x)}{x^2}, \dots \delta^{(n)}(x) \\ = (-1)^n \frac{n! \delta(x)}{x^n}.$$

**Приклад 4.** Розглянемо перетворення аргумента  $\delta$ -функції. Нехай  $g(x)$  – неперервно диференційована функція, така, що  $g(x_0) = 0$ , а  $g'(x_0) \neq 0$ , тоді можна показати, що  $\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0)$  або, якщо  $g(x)$  має прості корені в точках  $x_i, i = \overline{1, n}$ , то  $\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$ , де  $g(x_i) = 0, g'(x_i) \neq 0$ .

Наприклад [1], для  $g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x+2)(x-1)(x-2)$ , буде  $g'(x) = 3x^2 - 2x - 4, g'(-2) = 12, g'(1) = -3, g'(2) = 4$ , тоді

$$\delta(g(x)) = \delta(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{12} \delta(x+2) + \frac{1}{3} \delta(x-1) + \frac{1}{4} \delta(x-2).$$

**Приклад 5.** На  $x \in (-\pi, \pi)$  розклад  $\delta(x)$  в ряд Фур'є має вигляд:  $\frac{\pi}{2} \delta(x) = \frac{1}{2} +$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \left( a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(x) dx = \frac{2}{\pi}, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \delta(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \right).$$

$$\text{Знайдемо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = S(x), \text{ маємо } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \frac{\pi}{2} \delta(x) - \frac{1}{2}.$$

Маємо диференціальне рівняння:  $S'(x) = \frac{\pi}{2} \delta(x) - \frac{1}{2}$ , яке розв'яжемо операційним методом  $S(x) \doteq S(p); S'(x) \doteq pS(p), \delta(x) \doteq \int_0^{\infty} \delta(x) e^{-px} dx =$



$$= e^{-px}|_{t=0} = 1, \text{ тобто } pS(p) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p}, S(p) = \frac{\pi}{2p} - \frac{1}{2p^2} \doteq \frac{\pi-x}{2} = S(x).$$

**Приклад 6.** Відновлення неперервного сигналу за його дискретними значеннями. Розглянемо неперервний сигнал з обмеженим спектром, тобто, спектральна функція якого

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \text{ де } \omega_c - \text{максимальна частота спектра.}$$

$$\text{Тоді } f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\pi}{\omega_c} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} - \text{функція відліку.}$$

Можна показати, що  $f_k(t) = f_0\left(t - \frac{\pi k}{\omega_c}\right) = \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}$ , де  $k \in \mathbb{Z}$  — ортогональні

на  $[-\omega_c, \omega_c]$ . Тому маємо ряд  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi} =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}, \text{ тобто функція з обмеженим спектром повністю}$$

визначається своїми значеннями в дискретні моменти часу, а це означає, що для передачі аналогового неперіодичного сигналу (зображення) з обмеженим спектром достатньо передати лише його окремі значення через  $\frac{\pi}{\omega_c}$ , що можна виконати, передаючи короткі імпульси з амплітудами пропорційними

$$a_k = f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right). \text{ Цими імпульсами якраз і можуть бути відповідні } \delta - \text{функції, а}$$

$$\text{саме, замість } f(t) \text{ можна передати сигнал } \varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right),$$

потім пропустивши його через фільтр нижніх частот з полосою пропускання  $\omega_c$ , отримаємо пропорційний сигнал

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-i\omega \frac{k\pi}{\omega_c}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\pi)}{\omega_c t - k\pi}.$$

Технічно для цього використовуються діафрагми (як фільтри), одновимірні та двовимірні дифракційні решітки та системи лінз відповідних конфігурацій.

### 3.2.8 Елементи комбінаторики

Нехай  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — дискретна  $n$ -елементна множина. Будь-яка підмножина, складена із елементів  $x_i$  ( $\forall i = 1, \dots, n$ ) цієї множини за деяким

правилом називається **комбінаторною конфігурацією (вибіркою, сполукою, кортежем)**. Наприклад,  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  –  $m$ -елементний кортеж, впорядкований, без повторення елементів, а  $(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k_1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{k_n})$  при  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$  це  $m$ -кортеж з повторенням елементів, що має специфікацію  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Розглянемо основні типи конфігурацій.

#### А) Без повторень елементів.

##### 1) Розміщення із $n$ елементів по $m$ , $m \leq n$ .

Розміщення із  $n$  по  $m$  – це будь-який  $m$ -елементний кортеж, складений із елементів основної  $n$ -елементної множини  $A$ . Нехай  $A_n^m$  – число всіх розміщень із  $n$  по  $m$ . Розглянемо  $m$ -кортеж, як  $m$  послідовно розташованих комірок, які можуть бути заповнені елементами  $x_i \in A$ , скористаємось правилом множення: першу комірку можна заповнити  $n$  способами, другу  $n - 1$ , ..., останню  $n - m + 1$  способами:

|     |         |         |             |             |
|-----|---------|---------|-------------|-------------|
| $n$ | $n - 1$ | $\dots$ | $n - m + 2$ | $n - m + 1$ |
| 1   | 2       | $\dots$ | $m - 1$     | $m$         |

Тому  $A_n^m = n(n - 1) \dots (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!}$

**Приклад 1.**  $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$  або  $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ .

**Приклад 2.** Скількома способами 5 різних книг можна розподілити між 27 студентами за умови: а) щоб кожний одержав не більше однієї книги; б) без обмеження а).

*Розв'язання:* а) розміщення без повторень, всього способів  $A_{27}^5 = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ ; б) з повтореннями, тому  $27^5$ .

##### 2) Перестановки $n$ елементів.

Перестановки  $n$  елементів – це будь-який  $n$ -елементний кортеж. Нехай  $P_n$  – число всіх таких перестановок елементів основної множини  $A$ . Тоді, ясно, що  $P_n = A_n^n = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ , бо число комірчин також  $n$ .

**Приклад 3.**  $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ . ( $0! = 1$ )

**Приклад 4.** Скількома способами 27 студентів можуть утворити коло?

*Розв'язання.* Один студент задає початкову точку кола. Інші 26 можуть як завгодно мінятися місцями. Тому число всіх можливих способів дорівнює  $P_{26} = 26! = 26 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ .

**Приклад 5.** 27 осіб сідають випадковим чином в ряд. Знайти число способів, що 2 певні особи сидітимуть поруч.

*Розв'язання.* З'єднаємо два крісла, в яких сидять вказані особи. Таких можливостей буде  $27 - 1 = 26$ . Ці два крісла можна зайняти  $2! = 2$  способами. Інші  $27 - 2 = 25$  осіб можуть розміститися  $25!$  способами. Тому, за принципом множення, шукане число дорівнює  $26 \cdot 25! \cdot 2! = 26! \cdot 2$ .

### 3) Комбінації із $n$ елементів по $m$ , $m \leq n$ .

Комбінацією з  $n$  елементів по  $m$  називається будь-яка підмножина  $m$  елементів із основної множини  $A$ . Із визначення випливає, що на відміну від розміщень із  $n$  по  $m$ , які відрізняються як елементами, так і їх порядком, комбінації із  $n$  по  $m$  відрізняються лише елементами, тому, якщо  $C_n^m$  – число таких комбінацій, то справедлива формула:  $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

**Приклад 6.**  $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ .

**Приклад 7.** Скількома способами можна вибрати із ящика 6 куль: 1 білу, 2 чорних та 3 червоних, якщо в ньому 15 куль, а саме 3 білих, 5 чорних та 7 червоних.

*Розв'язання.* Це задача про «вибірку» (пов'язана з гіпергеометричним законом). Оскільки із трьох білих вибрати одну кулю можна  $C_3^1$  способами,

відповідно,  $C_5^2$  – чорні,  $C_7^3$  – червоні (рис. 50), то за принципом множення всього способів буде  $C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^3 = 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 10 \cdot 35 = 1050$ .



Рис. 50

**Приклад 8.** Скількома способами 5 однакових вхідних квитків можна розподілити між 27 студентами, якщо кожен може отримати не більше 1 квитка?

*Розв'язання.* При вказаних у задачі умовах, це число є  $C_{27}^5 = \frac{27!}{5! \cdot 22!} =$

$$\frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 27 \cdot 26 \cdot 23 \cdot 5$$

### В) З повторенням елементів (або з поверненням)

#### 1) *Розміщення з повтореннями з $n$ елементів по $m$ .*

Розміщення з повтореннями з  $n$  елементів по  $m$  - це будь-який  $m$ -кортеж, складений із елементів  $n$ -множини з повтореннями елементів ( $m, n$  – довільні). Позначимо їх число  $\overline{A}_n^m$ . Можна показати, що  $\overline{A}_n^m = n^m$ . Наприклад,  $A = \{x_1, x_2\}$ ,  $n = 2, m = 3$ . Тоді  $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$ , дійсно, запишемо всі такі кортежі:  $(x_1, x_1, x_1)$ ,  $(x_1, x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2, x_1)$ ,  $(x_1, x_2, x_2)$ ,  $(x_2, x_1, x_1)$ ,  $(x_2, x_1, x_2)$ ,  $(x_2, x_2, x_1)$ ,  $(x_2, x_2, x_2)$  – всього 8.

#### 2) *Перестановки з повтореннями із $n$ елементів по $m$ .*

Нехай  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  - основна  $n$ -елементна множина, а  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  – її специфікація. Тоді будь-який  $m$ -елементний кортеж із вказаною

специфікацією, тобто  $(\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{k_1}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_{k_n})$  де  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ , називається перестановкою з повторенням із  $n$  елементів по  $m$  ( $m, n$  – довільні). Позначимо число всіх таких перестановок через  $P_m(k_1, k_2, \dots, k_n)$ , тоді за правилом добутку  $P_m(k_1, k_2, \dots, k_n) \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n! = m!$ , звідки

$$P_m(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Зауважимо, що перестановки з повторенням, як і перестановки без повторення, відрізняються лише порядком розташування елементів, елементи ж залишаються ті самі.

**Приклад 9.** Між 27 студентами треба розподілити 15 підручників з менеджменту та 7 з теорії ймовірностей. Скількома способами це можна зробити?

*Розв'язання.* В умовах задачі маємо:  $m = 27, k_1 = 15, k_2 = 7, k_3 = 27 - (15 + 7) = 5$  (ці студенти книг не отримали). Тоді  $P_{27}(15, 7, 5) = \frac{27!}{5! \cdot 7! \cdot 15!}$ .

**Приклад 10.** Скільки різних слів можна отримати, переставляючи букви слова ТАРТАРАРИ.

*Розв'язання.* Порахуємо, скільки разів повторюється кожна буква. Маємо:  $T \rightarrow k_1 = 2, A \rightarrow k_2 = 3, P \rightarrow k_3 = 3, I \rightarrow k_4 = 1$ . Тобто, маємо специфікацію  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 3, 3, 1)$ , де  $n = 4$  (кількість букв),  $m = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 9$ . Тому шукане число  $\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1!} = 5040$ .

### 3) Комбінації з повтореннями з $n$ елементів по $m$ .

Комбінації з повтореннями з  $n$  елементів по  $m$  – це множина кортежів, складених із  $n$  елементів, що мають однаковий склад елементів (однакову специфікацію). Іншими словами, комбінації з повтореннями – це множина перестановок з повтореннями певного складу, а саме, їх число  $\bar{C}_n^m$  дорівнює:

$$\bar{C}_n^m = P_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$$

Розглянемо кортеж  $(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}_{n-1}, \underbrace{x_n, x_n, \dots, x_n}_m)$ . При  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$  маємо  $(m + n - 1)$ -кортеж певного складу, крім того  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

**Приклад 11.**  $C_3^4 = P_6(4, 3) = C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ .

**Приклад 12.** Скількома способами можна 5 однакових вхідних квитків розподілити між 27 студентами?

*Розв'язання.* Оскільки квитки однакові, то це число буде дорівнювати відповідному числу комбінацій з повтореннями:  $\overline{C}_{27}^5 = P_{31}(5, 26) = C_{31}^5 = \frac{31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 31 \cdot 29 \cdot 27 \cdot 7$ .

4) **Біном Ньютона, поліном. Біноміальні та поліноміальні коефіцієнти. Трикутник Паскаля.**

1) Біном:

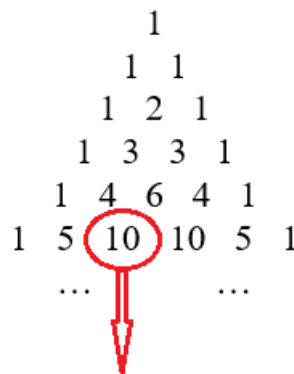
$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x_1^m x_2^{n-m}$$

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  - біноміальні коефіцієнти.

Властивості:

1.  $C_n^m = C_n^{n-m}$  - симетричність;
2.  $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$  - властивість Паскаля;
3.  $\sum_{m=0}^n C_n^m = \sum_{m=0}^n C_n^m 1^m 1^{n-m} = (1 + 1)^n = 2^n$ .

Трикутник Паскаля:



$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

2) Поліном  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=m} P_m(k_1, k_2, \dots, k_n) (x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n})$

**Приклад 13.** Знайти коефіцієнт бінома при  $x_1^6 \cdot x_2^3$

*Розв'язання.*  $(x_1 + x_2)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x_1^m x_2^{n-m}$ , звідки  $m = 6$ ,  $n - m = 3$ , тобто  $n = 9$ , тому шуканий коефіцієнт – це  $C_9^6$ , тобто  $C_9^6 = C_9^{9-6} = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ .

**Приклад 14.** Знайти коефіцієнт полінома  $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^6$  при  $x_1^2 \cdot x_2^3 \cdot x_4$

*Розв'язання.*  $m = 6$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 3$ ,  $k_3 = 0$ ,  $k_4 = 1$  ( $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 6$ ). Тоді коефіцієнт – це  $P_6(2, 3, 0, 1) = \frac{6!}{2!3!0!1!} = 60$ .

**Приклад 15.** Нехай  $A = (a_1, a_1, \dots, a_n)$ . Знайти  $\mathcal{A} = 2^A$  – множину всіх підмножин  $A$  та їх число.

*Розв'язання.* Маємо: порожня множина  $\emptyset \subset A$ , одноелементні підмножини:

$\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ , двоелементні:  $\{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{n-1}, a_n\}, \dots, A$ . Тобто

$\mathcal{A} = 2^A = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, a_3\}, \dots, A\}$ . Їх число  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{m=0}^n C_n^m = 2^n$

**Приклад 16.** Знайти  $n$  із рівняння  $(n + 3)! = 990 A_n^k \cdot P_{n-k}$ .

*Розв'язання.*  $(n + 3)! = 990 \frac{n!}{(n-k)!} (n - k)!$ , тобто  $(n + 3)(n + 2)(n + 1) n! = 990 n!$

або  $(n + 3)(n + 2)(n + 1) = 990$ . Заміна:  $n + 2 = m$ , тоді  $(m - 1) \cdot m \cdot (m + 1) = 990$ ,

або  $m(m^2 - 1) = 990$ ,  $m^3 - m - 990 = 0$ . Це кубічне рівняння. Розкладемо на

множники так:  $(m^3 - 1000) - (m - 10) = 0$ ,  $(m - 10)(m^2 + 10m + 100) - (m - 10) =$

$0$ ,  $(m - 10)(m^2 + 10m + 99) = 0$ . В останній дужці дискримінант  $D < 0 \Rightarrow m = 10$

– єдиний корінь, тобто  $n = 8$ .

## Література

1. V. O. Bilyi, O. G. Bilyi. *Finding finite sums, products and limits of some numerical sequences. Part 1. Application of methods of elementary mathematics and basic concepts of the theory of limits of numerical sequences*. Mathematics in Modern Technical University, 2017(7), 777–788.
2. Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. (2014). *Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння: Практикум*. Національний Технічний Університет України «Київський Політехнічний Інститут», Київ.
3. Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. (2014). *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Практикум*. Національний Технічний Університет України «Київський Політехнічний Інститут», Київ.
4. Білий В.О., Білий О.Г. (2021). *Знаходження скінченних сум, добутків та границь деяких числових послідовностей. Частина 2. Застосування методів вищої математики. Відшукування сум рядів*. Mathematics in Modern Technical University, 2021 (1), 17–35.
5. Білий В.О. , Білий О.Г. *Обчислення визначників типу Вандермонда*. Тези доповідей. XVIII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 7-10 жовтня 2017 р. (Луцьк-Київ), Київ, 2017. – с. 188-193.
6. Білий В.О., Білий О.Г. *Про послідовність Фібоначчі та інші зворотні послідовності*. Математика в сучасному технічному університеті. Матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції 28-29 грудня 2017 р., Київ, НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», стор. 201-208. ISSN:2664-4258.
7. Білий О.Г. *Про приклад застосування формули Стокса*. Математика в сучасному технічному університеті: електронний збірник науково-методичних праць. 2016. Вип.2. Київ: НТУУ «КПІ». с.42-46.



8. Білий О.Г., Білий В.О., Іваненко Т.В., Крошко Н.В. (2023) *Деякі аспекти підготовки та проведення математичних олімпіад в ІСЗЗІ*. Mathematics in Modern Technical University, vol.2023, №1.
9. Білий О.Г., Білий В.О., Марчук В.В. *Дельта-функція Дірака. Основні властивості та застосування* // Mathematics in Modern Technical University. – 2022 (1) – С. 5-17.
10. Булдигін В.В., Кушніревич В.А., Шкабара О.С., Ясінський В.В. *Студентські математичні олімпіади. Збірник задач*. -К.:НТУУ«КПІ».-2002. 175с.
11. Булдигін В.В., Буценко Ю.П., Диховичний О.О. *Теорія ймовірностей*. — К: ТВІМС, 1999. – 98 с.
12. Вентцель О. С., Овчаров Л. А. *Теорія ймовірностей: Задачі і вправи*. – Академія, 2003. – 448 с.
13. *Графіки функцій: Довідник* / Вірченко Н.О., Ляшко І.І., Швецов К.І. – Київ: Наук. Думка, 1979. – 320 с.
14. Демидович Б.П. *Збірник задач і вправ з математичного аналізу*. М. Наука, 1977. - 528 с.
15. Дундученко Л.О., Ясінський В.В. *Вища математика: Підручник. У 2 т. Т.2* / - 2021 (1), 17–35.
16. Дундученко Л.О., Ясінський В.В. *Вища математика: Підручник. У 2 т. Т.1* / - К.: НТУУ «КПІ», 2006.-884 с. К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 648 с.
17. Клесов О.І. *Вибрані питання теорії ймовірностей та математичної статистики*.—К: ТВІМС, 2010. – 244 с.
18. Крошко Н.В., Білий О.Г., Білий В.О., Іваненко Т.В. *Математичні олімпіади та робота математичних гуртків в ІСЗЗІ*. Матеріали дев'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 11 - 12 жовтня, 2023 р., Київ, КПІ імені Ігоря Сікорського, 2023, 239 - 240 с.  
<https://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf-2023>

19. Курош А.Г. *Курс вищої алгебри.*– Лань, 2008. – 432 с.
20. Литвиненко О. Н. *Основи радіооптики.* – К.: Техніка, 1974. – 208 с.
21. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник.* Укладачі: Булдигін В.В., Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О. Конова-лова Н.Р., Федорова Л.Б. (<http://matan.kpi.ua/uk/files.html>)
22. Ляшко І.І. Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. *Математичний аналіз. Частина 2.* – Київ: “Вища школа”, 1985. – 552 с.
23. Марчук В.В., Білий О.Г. *Сингулярний дельта-розподіл Дірака та його застосування.* XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Тези доповідей. Київ, 11-13 травня 2023. Секція 5. – с.120-122.
24. *Математичні олімпіади-2007: Методичні вказівки до розв’язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів* /Уклад.: В.В. Булдигін, В.О. Гайдей, В.А. Жук, І.В. Орловський.-К.:НТУУ«КПІ».-2007.-28с.
25. *Математичні олімпіади-2008: Методичні вказівки до розв’язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів* /Уклад.: В.В.Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський.-К.:НТУУ«КПІ».-2008.-40с.
26. *Математичні олімпіади-2009: Методичні вказівки до розв’язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів* /Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський.-К.:НТУУ«КПІ».-2010.-45с.
27. *Математичні олімпіади-2010: Методичні вказівки до розв’язання задач для студентів усіх форм навчання та школярів* /Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський.-К.:НТУУ«КПІ».-2011.-36с.
28. *Математичні олімпіади-2011: Методичні вказівки до розв’язання задач для студентів усіх форм навчання* /Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський.-К.:НТУУ«КПІ».-2012.-36с.
29. *Математичні олімпіади-2012: Методичні вказівки до розв’язання задач для студентів усіх форм навчання* /Уклад.: В.В. Булдигін, А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський.-К.:НТУУ«КПІ».-2013.-44с.

30. *Математичні олімпіади-2014: Методичні вказівки до розв'язання задач для студентів усіх форм навчання* /Уклад.: А.Б. Ільєнко, І.В. Орловський.- К.:НТУУ«КПІ».-2015.-60 с.
31. Проскураков І.В. *Збірник задач з лінійної алгебри.* – Лань, 2021. – 476 с.
32. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. (1971). *Збірник задач з вищої алгебри.* Київ: Вища школа.
33. Фіхтенгольц Г. М. *Курс диференціального та інтегрального числення.* Т 1, Т2. , 2022 - 2023, 1302 С. Переклад українською Сергій Зінов'єв, Олексій Галганов та інші. Fikhtengolts\_Ukr\_v1.0.3n.pdf, <https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net/>
34. Шелковніков Ф.А., Такайшвілі К.Г. *Збірник вправ з операційного числення.* М.: Вища школа, 1968. - 255 с.